

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМиМФ,

д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

_____ А. М. Кривцов

« ____ » _____ 2023г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**Решение задач о колебаниях в одномерных и двумерных кристаллических
решетках**

По направлению подготовки

01.03.03 Механика и математическое моделирование

профиль

01.03.03 01 Механика и математическое моделирование сред

с микроструктурой

Выполнил

студент гр. 5030103/90101

М. Д. Васильев

Научный руководитель

Профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

В. А. Кузькин

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ
Директор ВШТМиМФ
А. М. Кривцов
«__»_____20__г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Васильеву Максиму Дмитриевичу, гр. 5030103/90101

1. Тема работы: Решение задач динамики в одномерных и двумерных кристаллических решетках
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: справочная литература, актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): аналитическое и численное решение задач динамики для одномерного кристалла и двумерной квадратной кристаллической решетки. Решение задачи для цепочки с закрепленным элементом и для квадратной решетки с неоднородностью (интерфейсом).
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: отсутствуют.
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР: _____ В. А. Кузькин, профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению: 27.02.2023

Студент: _____ М. Д. Васильев

РЕФЕРАТ

На 73 с., 32 рисунков

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ГАРМОНИЧЕСКАЯ ЦЕПОЧКА, ГАРМОНИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА, ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, КОЭФФИЦИЕНТ ПРОХОЖДЕНИЯ, ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ, РЕЗОНАНСНАЯ ЧАСТОТА, АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА

В настоящей работе проводится исследование динамики одномерной и двумерной (с квадратной ячейкой периодичности) кристаллической решетки. Предлагается новый подход к решению задачи с закрепленным элементом для одномерной цепочки. Кроме этого в работе численно исследуется прохождение плоскопараллельной волны через специальный интерфейс в двумерной квадратной решетке. Все полученные аналитические результаты подтверждаются результатами численного моделирования.

В работе используются следующие математические методы: одномерное и двумерное дискретные преобразования Фурье (прямое и обратное), метод перевала, преобразование Лапласа (прямое и обратное). При численном решении озвученных задач использовался метод Верле.

В ходе выполнения работы получены формулы для перемещений в одномерной и двумерной кристаллических решетках. Для одномерной решетки были получены асимптотические формулы, описывающие поведение решения на больших временах. Определены параметры, от которых зависит коэффициент прохождения в задаче с интерфейсом. Кроме этого, предложен подход для решения задачи с закрепленным элементом в одномерной цепочке, позволяющий решать дифференциальные уравнения, в которые входит как Фурье-образ функции, так и сама функция.

ABSTRACT

73 pages., 32 pictures,

KEYWORDS: HARMONIC CHAIN, HARMONIC LATTICE, DISCRETE FOURIER TRANSFORM, TRANSMISSION COEFFICIENT, BESSEL FUNCTIONS, RESONANT FREQUENCY, ASYMPTOTIC ESTIMATION

In this paper, the dynamics of one-dimensional and two-dimensional (with a square periodicity cell) crystal lattice is studied. A new approach to solving the problem with a fixed element for a one-dimensional chain is proposed. In addition, the passage of a plane-parallel wave through a special interface in a two-dimensional square lattice is numerically investigated. All the analytical results obtained are confirmed by the results of numerical simulation.

The following mathematical methods are used in the work: one-dimensional and two-dimensional discrete Fourier transforms (forward and reverse), the pass method, the Laplace transform (forward and reverse). In the numerical solution of the voiced problems, the Werle method was used.

In the course of the work, formulas for displacements in one-dimensional and two-dimensional crystal lattices were obtained. For a one-dimensional lattice, asymptotic formulas describing the behavior of the solution over long times were obtained. The parameters on which the coefficient depends are determined

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1 ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ГАРМОНИ- ЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ.....	8
1.1 Одномерное и двумерное преобразования Фурье	8
1.2 Пример решения задачи о движении одномерной цепочки ...	9
ГЛАВА 2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ	13
2.1 Постановка задачи	13
2.2 Аналитическое решение	14
Конечная цепочка	14
Бесконечная цепочка	16
2.3 Перемещение в конечной и бесконечной одномерных цепочках	19
2.4 Скорость в конечной и бесконечной одномерных цепочках...	22
2.5 Гармоническая сила в конечной и бесконечной одномерных цепочках.....	24
Аналитическое решение	24
Асимптотические оценки	28
Численное решение и сравнение результатов.....	39
ГЛАВА 3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЕМЕНТОМ.....	42
3.1 Введение.....	42
3.2 Решение одномерной задачи с симметричным возбуждением	42

3.3	Решение одномерной задачи с модифицированным уравнением.....	43
3.4	Сравнение полученных решений	46
ГЛАВА 4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ДВУМЕРНОЙ		
КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКИ..... 48		
4.1	Постановка задачи	48
4.2	Аналитическое решение	49
	Решение для конечной решетки	49
	Решение для бесконечной решетки	51
4.3	Перемещение в центре кристалла	52
4.4	Скорость в центре кристалла	53
4.5	Гармоническая сила в центре кристалла.....	56
4.6	Полубесконечная решетка с гармонической силой на границе	59
ГЛАВА 5 ДВУМЕРНАЯ КВАДРАТНАЯ РЕШЕТКА С РАЗРЫВОМ. 62		
5.1	Численное решение	63
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ		
		72

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире большое значение играют материалы с кристаллической структурой. Они применяются в самых различных областях человеческой жизнедеятельности. Приведем несколько примеров:

- а) Алмазы используются в граверных инструментах, делительных машинах, аппаратах для испытания твердости, сверлах для камня и металла.
- б) Вся часовая промышленность работает на искусственных рубинах. На полупроводниковых заводах тончайшие схемы рисуют рубиновыми иглами. В текстильной и химической промышленности рубиновые нитеводители вытягивают нити из искусственных волокон, из капрона, из нейлона.
- в) Кремень, аметист, яшма, опал, халцедон — все это разновидности кварца. Поэтому из прозрачного кварца делают линзы, призмы и др. детали оптических приборов.

Это лишь скромный список областей, в которых кристаллы помогают людям. В связи с такой глубокой интеграцией кристаллов в жизнь людей большое значение играет изучение динамических эффектов, возникающих в кристаллических решетках и цепочках, так как чем полнее будет представление людей об этих процессах, тем безопаснее и продуктивнее удастся использовать кристаллы.

В настоящее время на базе ВШТМиМФ публикуется большое количество работ по динамике кристаллических решеток, а также по энергетическим процессам, происходящих в них. Например, в работе [10] исследуется динамика одномерной цепочки, половина элементов и связей в которой имеют одни массу и жесткость, а вторая половина — другие. В ней определяется формула для коэффициента прохождения волн через интерфейс в такой одномерной системе. Прием, использующийся в данной работе, по-видимому, может быть применен и

для получения коэффициента пропускания в двумерной квадратной кристаллической решетке с интерфейсом. В другой работе [8] проводится сопоставление между процессами переноса массы и энергии на примере одномерных кристаллов. В работе [6] доказываем, что в двумерной квадратной кристаллической решетке без неоднородностей глобальный поток энергии сохраняется. Также в ней даются формулы для дисперсионных соотношений и групповых скоростей в такой решетке. В работе [9] выводятся асимптотические формулы для изменения энергии в цепочке, а также даются дисперсионные соотношения для одномерного гармонического кристалла. Прием, аналогичный используемому в данной работе будет применяться в настоящей работе для написания асимптотических формул для перемещений элементов одномерной цепочки. В работе [4] даются асимптотические формулы для движения одномерной цепочки, к которой приложена гармоническая сила по закону косинуса. В настоящей работе данные формулы будут уточнены (в настоящей работе, в частности, будет рассматриваться движение одномерной цепочки, к которой приложена гармоническая сила по закону синуса).

В настоящей работе исследуется динамика одномерных и двумерных (с квадратной ячейкой периодичности) кристаллов. Кроме этого, на примере задачи с закрепленным элементом одномерной цепочки предлагается способ решения дифференциальных уравнений, в которые одновременно входит как сама функция, так и ее Фурье-образ. В последней главе работы исследуются энергетические процессы, происходящие в двумерной квадратной кристаллической решетке с неоднородностью (интерфейсом).

ГЛАВА 1

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

1.1 Одномерное и двумерное преобразования Фурье

В этом разделе речь пойдет о приложении дискретного преобразования Фурье (ДПФ) к решению задач динамики гармонических кристаллов. Зачастую аппарат ДПФ применяется для цифровой обработки сигналов, но в данной работе мы будем использовать его с другой целью, а именно для решения задач динамики одномерных и двумерных гармонических кристаллов. Пусть N — количество элементов в одномерной цепочке. Во всех дальнейших выкладках мы будем так нумеровать элементы цепочки, чтобы центральный элемент имел индекс нуль, элементы, находящиеся слева от него имели отрицательные индексы, а элементы справа — положительные. Таким образом во всех дальнейших выкладках N будет полагаться нечетным числом. Символом $u_n(t)$ будем обозначать смещение n -ой частицы из положения равновесия. Комплексную единицу, для удобства изложения, будем обозначать символом I . В озвученных обозначениях определим прямое и обратное одномерное ДПФ следующим образом:

$$\hat{u}_j = \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_n e^{-\frac{2\pi I j n}{N}} \quad u_n = \frac{1}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \hat{u}_j e^{\frac{2\pi I j n}{N}} \quad (1.1)$$

Тут стоит обратить внимание на то, что множитель $\frac{1}{N}$ можно приписывать как к прямому, так и к обратному преобразованию. Кроме этого, можно в прямом преобразовании домножать на экспоненты с положительным показателем, а в обратном — с отрицательным [11].

Для решения задач о движении плоских кристаллов будет требоваться аппарат двумерного ДПФ. Пусть N — число элементов вдоль горизонтальной оси цепочки, а M — вдоль вертикальной (M — нечетное число). Тогда можно определить прямое и обратное двумерное ДПФ следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{u}_{i,j} &= \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m=-\frac{M+1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} u_{n,m} e^{-2\pi I \left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M} \right)} \\ u_{n,m} &= \frac{1}{NM} \sum_{i=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{j=-\frac{M+1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \hat{u}_{i,j} e^{2\pi I \left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M} \right)}\end{aligned}\quad (1.2)$$

Тут также, как и в одномерном случае можно приписывать множитель $\frac{1}{NM}$ как к прямому, так и к обратному преобразованию, а также изменять знак экспоненты одновременно в обоих преобразованиях.

1.2 Пример решения задачи о движении одномерной цепочки

В этом разделе решается задача о движении конечной одномерной цепочки, в центре которой задано ненулевое перемещение (рисунок 1.1).

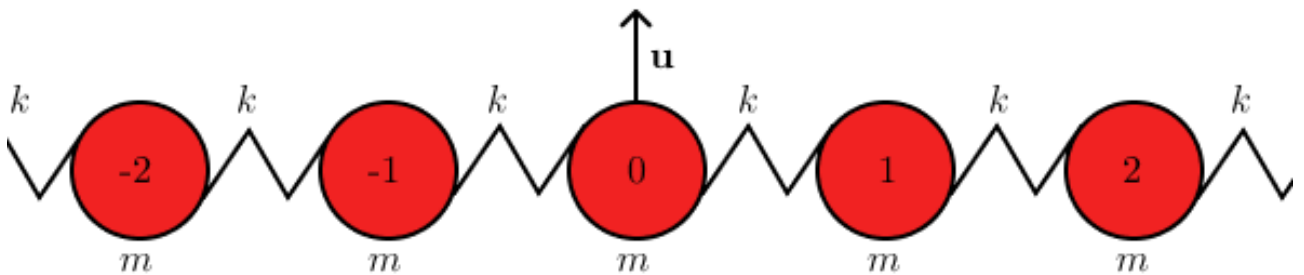


Рис. 1.1. Нумерация элементов и начальные условия для задачи, решаемой в разделе 1.2

Запишем уравнение движения, начальные и граничные условия:

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \quad (1.3)$$

$$u_{n+N} = u_n \quad u_n(0) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ u_0^0, & n = 0 \end{cases} \quad \dot{u}_n(0) = 0 \quad \forall n \quad (1.4)$$

Введем обозначение:

$$\omega_* = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.5)$$

Применим дискретное преобразование Фурье к уравнению 1.3, а также к граничным и начальным условиям 1.4. Для этого домножим уравнение 1.3 на $e^{-\frac{2\pi Ijn}{N}}$ и просуммируем согласно 1.1:

$$\sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \ddot{u}_n e^{-\frac{2\pi Ijn}{N}} = \omega_*^2 \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) e^{-\frac{2\pi Ijn}{N}} \quad (1.6)$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\hat{u}_j = \omega_*^2 \left(\sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_{n-1} e^{-\frac{2\pi Ijn}{N}} + \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_{n+1} e^{-\frac{2\pi Ijn}{N}} - 2\hat{u}_n \right) \quad (1.7)$$

Распишем первое слагаемое в скобке в правой части 1.7:

$$\sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_{n-1} e^{-\frac{2\pi Ijn}{N}} = \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_{n-1} e^{-\frac{2\pi Ij(n-1)}{N}} e^{\frac{2\pi Ij}{N}} = \hat{u}_j e^{-\frac{2\pi Ij}{N}} \quad (1.8)$$

Аналогично для второго слагаемого в скобке в правой части 1.7 получим:

$$\sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_{n+1} e^{\frac{2\pi I j n}{N}} = \hat{u}_j e^{\frac{2\pi I j}{N}} \quad (1.9)$$

Тогда можем подставить 1.8 и 1.9 в 1.7 и получим:

$$\hat{u}_j = \omega_*^2 \underbrace{\left(-2 + e^{\frac{2I\pi j}{N}} + e^{-\frac{2I\pi j}{N}}\right)}_{2-2\cos\frac{2\pi j}{N}=2\sin^2\frac{\pi j}{N}} \hat{u}_j \quad (1.10)$$

Таким образом получим следующее уравнение в переменных Фурье:

$$\hat{u}_j = -\Omega^2 \hat{u}_j \quad \Omega = 2\omega_* \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right) \quad (1.11)$$

На этом этапе стоит заметить, что в отсутствии внешнего нагружения уравнение в переменных Фурье могут быть приведены к похожей форме для кристаллов любых размерностей и структур (с различными ячейками периодичности).

Далее нужно применить ДПФ к начальным условиям и закончить постановку задачи в переменных пространства Фурье:

$$\begin{aligned} \hat{u}_j(0) &= \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_n(0) e^{-\frac{2\pi I j n}{N}} = u_0^0 \\ \hat{u}_j(0) &= \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \dot{u}_n(0) e^{-\frac{2\pi I j n}{N}} = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Теперь можно решить уравнение 1.11 с НУ 1.12 и получить следующий результат:

$$\hat{u}_j = u_0^0 \cos(\Omega t) \quad (1.13)$$

Теперь можно применить обратное преобразование Фурье и получим:

$$u_n = \frac{u_0^0}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cos(\Omega t) e^{\frac{2\pi I j n}{N}} \quad (1.14)$$

В полученном решении присутствует экспонента с комплексным показателем. Так как решается вполне конкретная и физическая задача, справедливо предположить, что ее решение будет являться вещественной функцией номера элемента и цепочки и времени. В силу симметрии полученного решения, очевидно, что при замене переменной суммирования на ее же с противоположным знаком значение суммы в ПЧ 1.15 не изменится. Таким образом, получаем, что $u_n = u_{-n} = \bar{u}_n$, что и хотели получить. Тогда мы можем переписать решение 1.15 в вещественном виде:

$$u_n = \frac{u_0^0}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cos(\Omega t) \cos\left(\frac{2\pi j n}{N}\right) \quad (1.15)$$

Данный прием будет использоваться в дальнейших выкладках, в том числе и при решении задач для двумерных кристаллических решеток — обоснование к его корректности будет полностью аналогично приведенному выше.

ГЛАВА 2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ

2.1 Постановка задачи

В данном разделе будет рассматриваться динамика одномерного гармонического кристалла, к каждой точке которого приложена внешняя сила $F_n(t)$, при ненулевых начальных условиях на всех элементах конечной цепочки (рисунок 2.1). Требуется вывести уравнение движения каждой точки цепочки, а также получить выражение динамики цепочки при стремлении числа элементов в ней к бесконечности ($N \rightarrow \infty$). В сущности требуется решить задачу:

$$\ddot{u}_n = \omega_*^2(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) + \frac{F_n(t)}{m} \quad (2.1)$$

Со следующими начальными и граничными условиями:

$$u_n(0) = u_n^0 \quad \dot{u}_n(0) = v_n^0 \quad u_{n+N} = u_n \quad \forall n \in \left[\frac{-N+1}{2}, \frac{N-1}{2} \right] \quad (2.2)$$

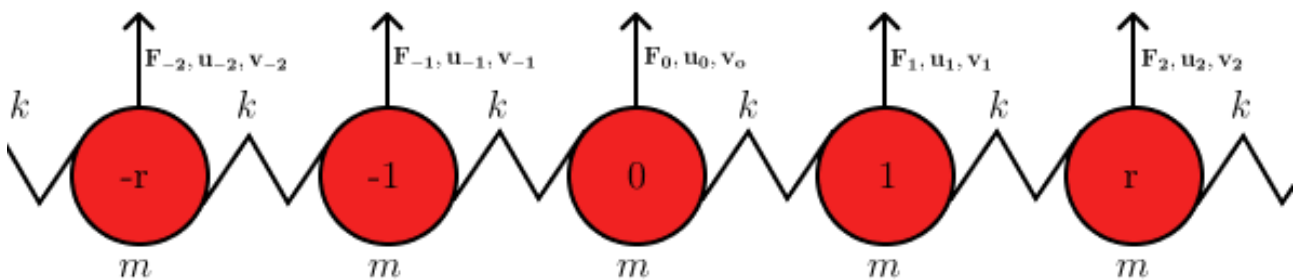


Рис. 2.1. Конфигурация цепочки с начальными условиями для задачи, решаемой в разделе 2.1

Далее приведем аналитическое решение для поставленной выше задачи.

2.2 Аналитическое решение

Конечная цепочка

Применим к уравнению 2.1 Дискретное преобразование Фурье и получим

$$\hat{u}_j = -\Omega^2 \hat{u}_j + \frac{1}{m} \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} F_n(t) e^{-\frac{2\pi I j n}{N}} \quad (2.3)$$

$$\Omega = 2\omega_* \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad \omega_* = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.4)$$

Далее применим преобразование Лапласа к получившемуся уравнению 2.3 и начальным условиям 2.4 и получим:

$$p^2 \bar{u}_j - pu_j^0 - v_j^0 = -\Omega^2 \bar{u}_j + \frac{1}{m} \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \bar{F}_n(t) e^{-\frac{2\pi I j n}{N}} \quad (2.5)$$

$$\hat{u}_j(0) = \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_n^0 e^{-\frac{2\pi I j n}{N}} = u_j^0, \quad \hat{v}_j(0) = \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} v_n^0 e^{-\frac{2\pi I j n}{N}} = v_j^0, \quad (2.6)$$

После преобразований получим

$$\bar{u}_j = \frac{pu_j^0 + v_j^0}{p^2 + \Omega^2} + \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\bar{F}_n(t) e^{-\frac{2\pi I j n}{N}}}{m(p^2 + \Omega^2)} \quad (2.7)$$

Применим обратное преобразование Лапласа [16] к выражению 2.7. Нам потребуется воспользоваться свойством свертки для преобразования выражения,

стоящего под знаком суммы. Таким образом мы приходим к:

$$\hat{u}_j = u_j^0 \cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} v_j^0 + \sum_{n=\frac{-N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \int_0^t \frac{F_n(\tau) \sin(\Omega(t-\tau))}{\Omega} e^{-\frac{2\pi I j n}{N}} d\tau \quad (2.8)$$

Далее применим обратное преобразование Фурье к полученному выражению 4.7 и воспользуемся формулами 2.6. Тогда мы получим итоговое выражение для движения конечной цепочки:

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{j,k=\frac{-N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left[u_k^0 \cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} v_k^0 + \frac{1}{m} \int_0^t \frac{F_k(\tau) \sin(\Omega(t-\tau))}{\Omega} d\tau \right] e^{\frac{2\pi I j}{N}(n-k)} \quad (2.9)$$

Можно заметить, что в полученное выражение входит экспонента с комплексным показателем. Но в силу того, что мы занимаемся решением конкретной физической задачи, справедливо предположить, что ее решение должно быть вещественной функцией. Несложно показать (по аналогии с 1.15), что, на самом деле, решение действительно будет вещественной функцией времени и номера элемента цепочки (комплексно сопряженная функция u_n равна самой себе). В этом случае мы можем переписать выражение 2.9 в виде:

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{j,k=\frac{-N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left[u_k^0 \cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} v_k^0 + \frac{1}{m} \int_0^t \frac{F_k(\tau) \sin(\Omega(t-\tau))}{\Omega} d\tau \right] \times \cos\left(\frac{2\pi j}{N}(n-k)\right) \quad (2.10)$$

Бесконечная цепочка

В прошлом разделе было получено выражение для движения любого элемента конечной цепочки. Теперь получим решение для бесконечной цепочки ($N \rightarrow \infty$). Для этого заметим, что в формуле 2.9 на самом деле записана интегральная сумма. Нам будет удобнее работать с решением, представленном в виде:

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left[u_k^0 \cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} v_k^0 + \frac{1}{m} \int_0^t \frac{F_k(\tau) \sin(\Omega(t-\tau))}{\Omega} d\tau \right] e^{\frac{2\pi I j}{N}(n-k)} \quad (2.11)$$

Будем работать с каждым слагаемым из внутренней суммы 2.11 по очереди:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} u_k^0 \cos(\Omega t) e^{\frac{2\pi I j}{N}(n-k)} &= \left[N \rightarrow \infty \quad \frac{j}{N} = x \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \quad \Omega = 2\omega_* \sin \pi x \right] \\ &= \frac{u_k^0}{2} \int_{x=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\exp(I\Omega t + (2\pi x I)(n-k)) + \exp(-I\Omega t + (2\pi x I)(n-k))) dx \\ &= [\pi x = s] = \frac{u_k^0}{2\pi} \int_{s=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\exp(I\Omega t + (2s I)(n-k)) + \exp(-I\Omega t + (2s I)(n-k))) ds \\ &= \frac{u_k^0}{2\pi} \int_{s=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\exp(I(2\omega_* \sin(s)t + 2s(n-k))) \right. \\ &\quad \left. + \exp(I(-2\omega_* \sin(s)t + 2s(n-k))) \right] ds \\ &= [q = 2s] = \frac{u_k^0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\exp\left(I\left(2\omega_* \sin\left(\frac{q}{2}\right)t + \frac{q}{2}2(n-k)\right)\right) + \right. \\ &\quad \left. \exp\left(I\left(-2\omega_* \sin\left(\frac{q}{2}\right)t + \frac{q}{2}2(n-k)\right)\right) \right] dq \\ &= \frac{u_k^0}{2} (J_{2(n-k)}(2\omega_* t) + J_{2(n-k)}(-2\omega_* t)) = u_k^0 J_{2(n-k)}(2\omega_* t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя порядка α [7].

Таким образом мы показали, что в случае отсутствия начальных скоростей и внешних нагрузок в линейной гармонической цепочке, колебания любой частицы будут представлять собой сумму функций Бесселя разных порядков и с разными коэффициентами, зависящими от положения частиц цепочки.

Вычислим второе слагаемое из внутренней суммы 2.11:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} v_k^0 \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} e^{\frac{2\pi i j}{N}(n-k)} &= \left[\frac{j}{N} = x \right] = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin(2\omega_* \sin(\pi x)t)}{2\omega_* \sin(\pi x)} e^{2\pi i x(n-k)} dx \\ &= [\pi x = s] = \frac{v_k^0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(2\omega_* \sin(s)t)}{2\omega_* \sin(s)} e^{2Is(n-k)} ds = \frac{v_k^0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \Omega_s t}{\Omega_s} e^{2Is(n-k)} ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь введено обозначение $\Omega_s = 2\omega_* \sin s$

Стоит отметить, что полученный интеграл в 2.13 может быть выражен через гипергеометрические функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{v_k^0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(\Omega_s t)}{\Omega_s} e^{2Is(n-k)} ds \\ = \frac{v_0^0 \gamma(|n| + \frac{1}{2})t}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{|n|} \left(\frac{{}_2F_1([r + \frac{1}{2}], [\frac{3}{2}, |n| + 1], -\omega^2 t^2) (-1)^r}{\gamma(1 + |n| - r) \gamma(r + 1)} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь введены следующие обозначения: ${}_pF_q$ - обобщенная гипергеометрическая функция [5], $\gamma(z)$ - Гамма-функция [12].

Используем метод перевала и выпишем асимптотическое выражение для

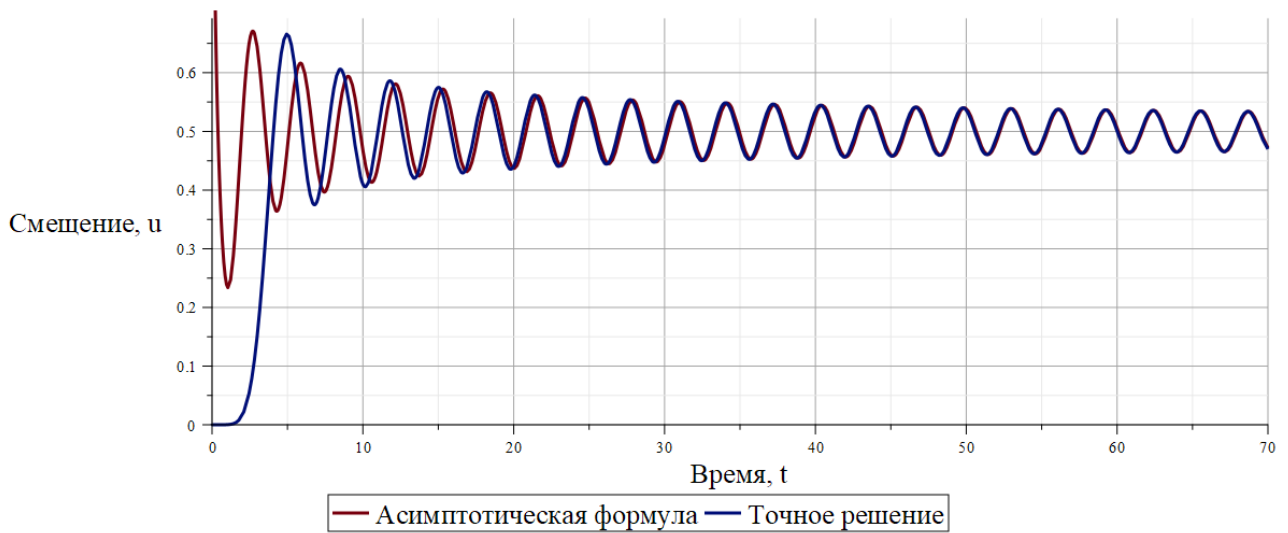


Рис. 2.2. Сравнение точного и асимптотического решения для колебаний третьего элемента бесконечной цепочки, к центральному элементу которой приложена единичная скорость в начальный момент времени и нулевыми прочими НУ.

$$n = 3, \omega_* = 1, t = [0; 70], dt = 0.01, v_0 = 1.$$

интеграла 2.13 при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{v_k^0}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(\Omega_s t)}{\Omega_s} e^{2Is(n-k)} ds \underset{(t \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{v_k^0}{2\omega_*} - \frac{v_k^0 \cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4}) (-1)^{|n-k|}}{2\omega_*^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{t}} + o\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.15)$$

Также приведем сравнительный график для точного и асимптотического решения (рисунок 2.2), из которого видно, что асимптотическая кривая стремится слиться с точным решением при стремлении времени к бесконечности. Точное решение построено при помощи метода Симпсона [1]. В дальнейших выкладках этого раздела не будем использовать представление (2.14) для интеграла 2.13 в силу его громоздкости.

Далее преобразуем третье слагаемое из 2.11

$$\begin{aligned} \frac{1}{mN} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \int_0^t \frac{F_k(\tau) \sin(\Omega(t-\tau))}{\Omega} e^{\frac{2\pi I j}{N}(n-k)} d\tau \\ \rightarrow \frac{1}{\pi m} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^t \left[\frac{F_k(\tau) \sin(\Omega_s(t-\tau))}{\Omega_s} d\tau \right] e^{2Is(n-k)} ds \quad (2.16) \end{aligned}$$

Таким образом мы можем записать решение для бесконечной цепочки:

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^0 J_{2(n-k)}(2\omega_* t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[v_k^0 \frac{\sin(\Omega_s t)}{\Omega_s} \right. \\ \left. + \int_0^t \frac{F_k(\tau) \sin(\Omega_s(t-\tau))}{m\Omega_s} d\tau \right] \cos(2s(n-k)) ds \quad (2.17) \end{aligned}$$

Это и есть общее решение уравнений динамики одномерной цепочки. Стоит отметить, что полученное выражение можно записать с использованием результата 2.14 и избавиться от первого слагаемого в интеграле в 2.17.

2.3 Перемещение в конечной и бесконечной одномерных цепочках

В данном разделе исследуются частные случаи полученных решений 2.10 и 2.17 при сообщении центральному элементу конечной и бесконечной цепочек единичного перемещения в начальный момент времени.

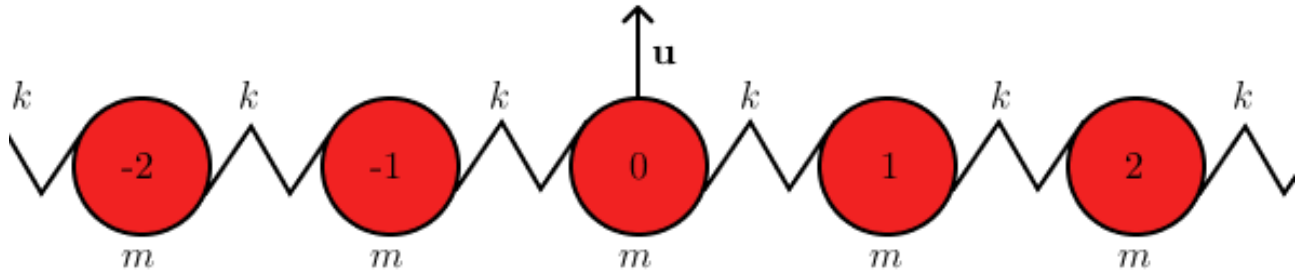


Рис. 2.3. Перемещение в центре цепочки

Аналитические выражения для данной задачи будут иметь следующий вид:

а) Для конечной решетки:

$$u_n = \frac{u_0^0}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \cos(\Omega t) \cos\left(\frac{2\pi j n}{N}\right) \quad (2.18)$$

б) Для бесконечной решетки:

$$u_n = J_{2n}(2\omega_* t) u_0^0 \quad (2.19)$$

Если устремить $t \rightarrow \infty$, то можно получить асимптотическую формулу для бесконечной цепочки (для больших времен):

$$u_n \sim u_0^0 \sqrt{\frac{1}{\pi\omega_* t}} \cos\left(2\omega_* t - \pi n - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.20)$$

Стоит отметить, что формулы 1.15 и 2.10 совпадают при подстановке в 2.10 указанных выше начальных условий, что говорит о корректности полученного аналитического выражения 2.10 для цепочек с заданными начальными перемещениями. Сравним графики численного (здесь и далее все численные решения для динамики цепочки, за исключением графиков, построенных при помощи

численного интегрирования полученных интегралов, будут проводиться при помощи метода Верле [14]) и аналитического решения для конечной и бесконечной цепочек со следующими параметрами: $\Delta t = 0.1$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $n = 0$, $u_0 = 1$:

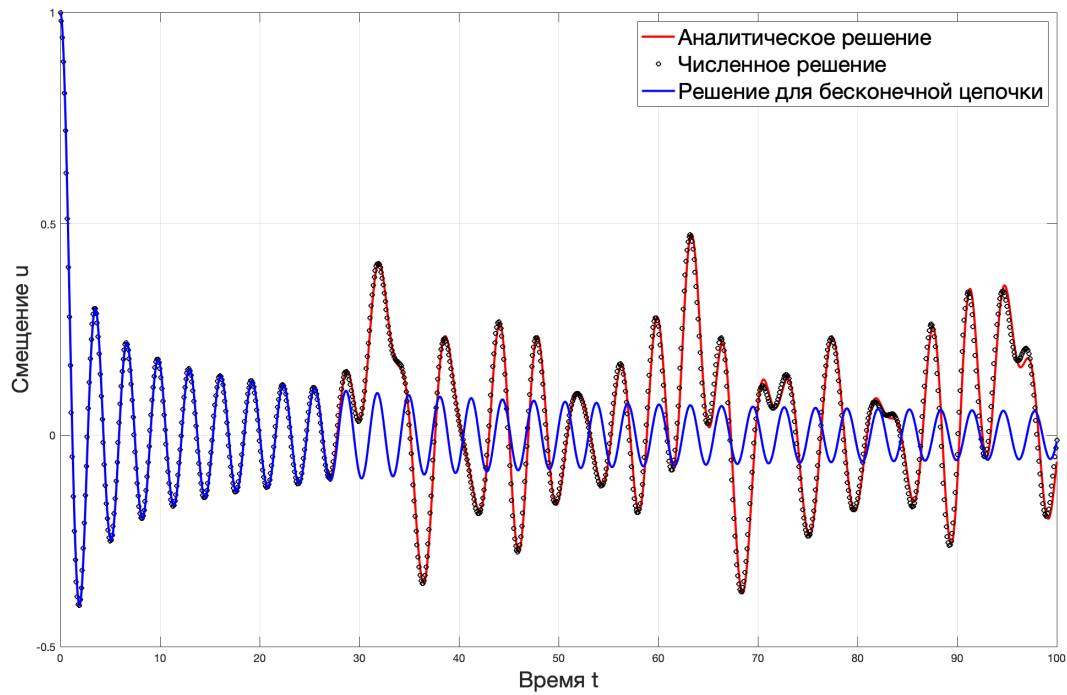


Рис. 2.4. Перемещение центрального элемента одномерной конечной и бесконечной цепочки в центре которой приложено единичное перемещение. $\Delta t = 0.1$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $n = 0$, $u_0 = 1$

Из рисунка 2.4 видно, что численное и аналитическое решения совпадают с большой точностью, что говорит о корректности полученных результатов. Кроме того, решение, полученное для бесконечной цепочки (функция Бесселя) совпадает с обоими решениями до определенного момента, соответствующего возврату отраженной волны к элементу цепочки, для которого строится график. Чем больше элементов в цепочке, тем дольше функция Бесселя совпадала бы с решениями для конечной цепочки. Таким образом в предельном случае стенки не оказывают никакого влияния на колебания элементов цепочки, что подтверждается асимптотическим убыванием функции Бесселя при $t \rightarrow \infty$.

2.4 Скорость в конечной и бесконечной одномерных цепочках

В данном разделе будут исследоваться частные случаи полученных решений 2.10 и 2.17 при сообщении центральному элементу конечной и бесконечной цепочек единичной скорости в начальный момент времени. Аналитические выражения для данной задачи будут иметь следующий вид:

а) Для конечной цепочки:

$$u_n = \frac{v_0^0}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \cos\left(\frac{2\pi j n}{N}\right) \quad (2.21)$$

б) Для бесконечной цепочки:

$$u_n = \frac{v_0^0 \gamma(|n| + \frac{1}{2}) t}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{|n|} \left(\frac{{}_2F_1\left([r + \frac{1}{2}], [\frac{3}{2}, |n| + 1], -\omega^2 t^2\right) (-1)^r}{\gamma(1 + |n| - r) \gamma(r + 1)} \right) \quad (2.22)$$

Если устремить $t \rightarrow \infty$, то можно получить асимптотическую формулу для бесконечной цепочки (для больших времен):

$$u_n \underset{(t \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{v_0^0}{2\omega_*} - \frac{\cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4}) (-1)^{|n-k|}}{2\omega_*^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{t}} + o\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.23)$$

Стоит отметить, что выше был проведен анализ асимптотического поведения слагаемого, появляющегося в решении при задании ненулевой начальной скорости на каком-либо элементе бесконечной цепочки при стремлении

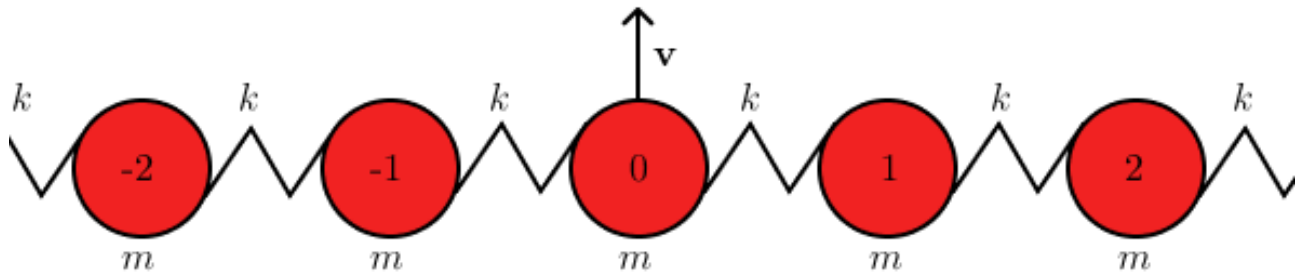


Рис. 2.5. Конфигурация цепочки в задаче, рассматриваемой в 2.4

времени к бесконечности (рисунок 2.2) из которого следует, что на бесконечной цепочке центр ее тяжести не будет подниматься выше некоторого конечного значения. Этот вывод нам потребуется для анализа нижеследующих графиков.

Приведем график для численного решения задачи с единичной скоростью в центре конечной и бесконечной цепочек (со следующими параметрами: $\Delta t = 0.1$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $n = 0$, $v_0 = 1$)

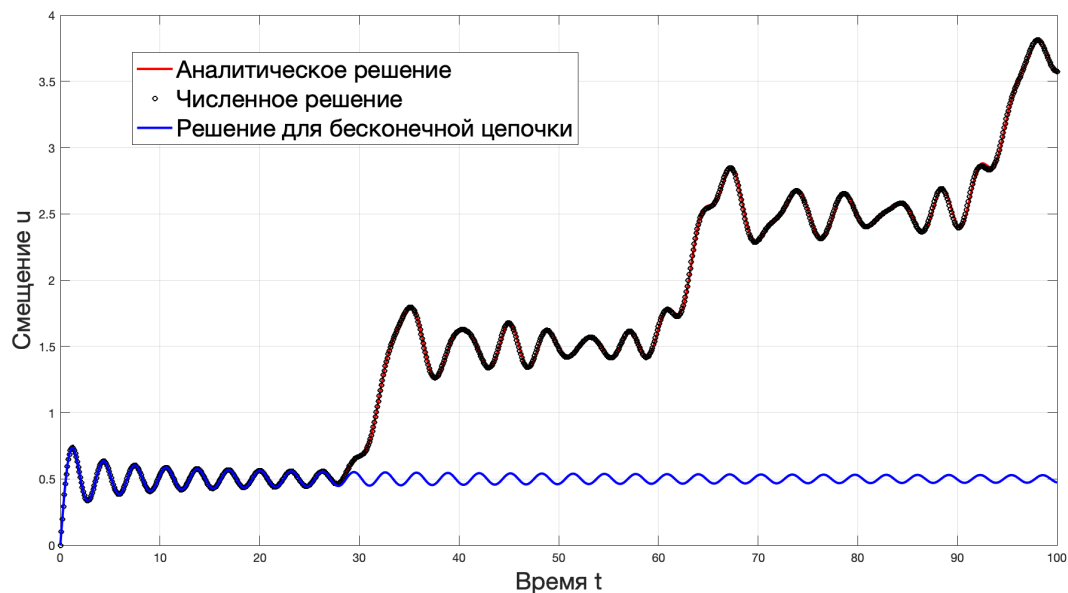


Рис. 2.6. Перемещение центрального элемента одномерной конечной и бесконечной цепочки в центре которой приложено единичное перемещение. $\Delta t = 0.1$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $n = 0$, $v_0 = 1$

Из полученного графика можно сделать выводы, аналогичные 2.3 - решения

для бесконечной и конечной цепочек совпадают до определенного момента времени, после которого расходятся. Это связано с влиянием границ на то звено цепочки, график которого строится. Кроме того, из графика следует, что для конечной цепочки перемещения будут возрастать до бесконечности с течением времени, что полностью согласуется со вторым законом Ньютона (так как на цепочку не действуют никакие внешние силы, то количество ее движения должно сохраняться, что и происходит). Это же следует из аналитических выкладок, приведенных выше (при $n = 0$) в формуле 2.10 второе слагаемое (которое и отвечает за перемещения в цепочке, вызванные начальными скоростями) становится вековым (растет линейно с течением времени). Кроме того, полученный результат согласуется с асимптотическим представлением решения для ненулевой начальной скорости, приведенным выше (рисунок 2.2).

2.5 Гармоническая сила в конечной и бесконечной одномерных цепочках

Аналитическое решение

Важным частным случаем полученного решения является динамика цепочки, к центральному элементу которой приложена вынуждающая сила ($F_0 = A \sin \omega t$) при нулевых начальных условиях (рисунок 2.7).

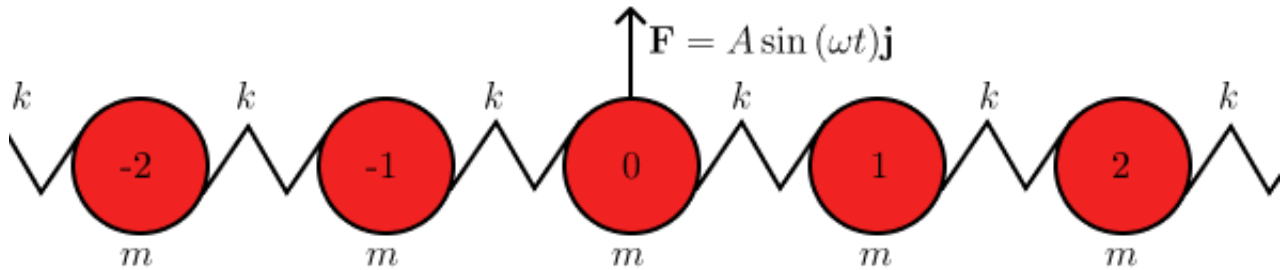


Рис. 2.7. Конфигурация цепочки с начальными условиями и приложенными внешними силами для задачи, рассматриваемой в 2.5

В этом случае будем иметь следующее решение:

$$u_n = \frac{A}{mN} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \cos\left(\frac{2\pi j n}{N}\right) \quad (2.24)$$

Для начала рассмотрим случай, при котором $\Omega = \omega$. По интуитивным соображением у нас в решении не может быть бесконечных слагаемых, поэтому стоит ожидать, что в таком случае мы будем получать конечные выражения. Проверим это:

$$\lim_{\omega \rightarrow \Omega} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} = \frac{\sin(\Omega t) - \Omega t \cos(\omega t)}{2\Omega^2} \quad (2.25)$$

Видим, что при $\Omega = \omega$ мы получаем слагаемое, содержащее нелинейный рост со временем (по закону $t \cos \omega t$). Эти частоты ($\omega = 2\omega_* \sin\left(\frac{\pi j}{N}\right)$, $j = 0..N - 1$) и есть собственные частоты нашей системы (на них наблюдается резонанс).

Теперь обратим внимание на то, что при $j = 0$ выражение, стоящее под знаком суммы становится неопределенным (неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$). Раскроем

эту неопределенность и оценим данное слагаемое:

$$\frac{A}{mN} \lim_{j \rightarrow 0} \left[\frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} = \frac{\Omega(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\Omega} \sin(\Omega t))}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \right] = \frac{A}{mN} \frac{\omega t - \sin(\omega t)}{\omega^2} \quad (2.26)$$

Из полученного выражения видно, что слагаемое при $j = 0$ дает почти линейный рост координаты со временем для всех частиц цепочки (независимо от n данное вековое слагаемое будет присутствовать). Это очень интересный результат, ведь на нашу систему действует гармоническая сила, среднее значение которой за период равно нулю. На первый взгляд полученный результат может противоречить балансу количества движения данной динамической системы. Распишем данное балансовое соотношение [2] и убедимся, что полученный результат не противоречит фундаментальным законам динамики ($M = mN$ - масса системы).

$$M\ddot{R}_c = A \sin(\omega t) \quad (2.27)$$

$$M\dot{R}_c = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t) + v_{0c} \quad (2.28)$$

$$MR_c = -\frac{A}{\omega^2} \sin(\omega t) + v_{0c}t + R_{0c} \quad (2.29)$$

Мы имеем следующие начальные условия:

$$R_c(0) = 0 \quad \dot{R}_c(0) = 0 \quad (2.30)$$

Подставим эти начальные условия в 2.28 и 2.29 и получим уравнение для движения центра масс системы:

$$0 = -\frac{A}{\omega} + v_{0c} \rightarrow v_{0c} = \frac{A}{\omega} \quad (2.31)$$

$$0 = 0 + 0 + R_{0c} \rightarrow R_{0c} = 0 \quad (2.32)$$

Таким образом мы получили уравнение для движения центра масс системы:

$$R_c = \frac{A}{mN} \left(\frac{\omega t - \sin(\omega t)}{\omega^2} \right) \quad (2.33)$$

Если вычислить движение центра масс для исследуемой системы, используя выражение 2.24, то окажется, что оно в точности совпадает с движением, описываемым полученной формулой (все слагаемые, за исключением единственного, полученного в 2.26 сокращаются):

$$u_c = \frac{A}{mN^2} \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{\Omega(\Omega^2 - \omega^2)} \cos\left(\frac{2\pi j n}{N}\right) = \frac{A(\omega t - \sin(\omega t))}{Nm\omega^2} \quad (2.34)$$

Таким образом все полученные результаты сходятся и можно сделать вывод, что гармоническая сила, действующая на единственный элемент цепочки приводит к тому, что центр тяжести цепочки начинает удаляться от исходного положения по почти линейному закону.

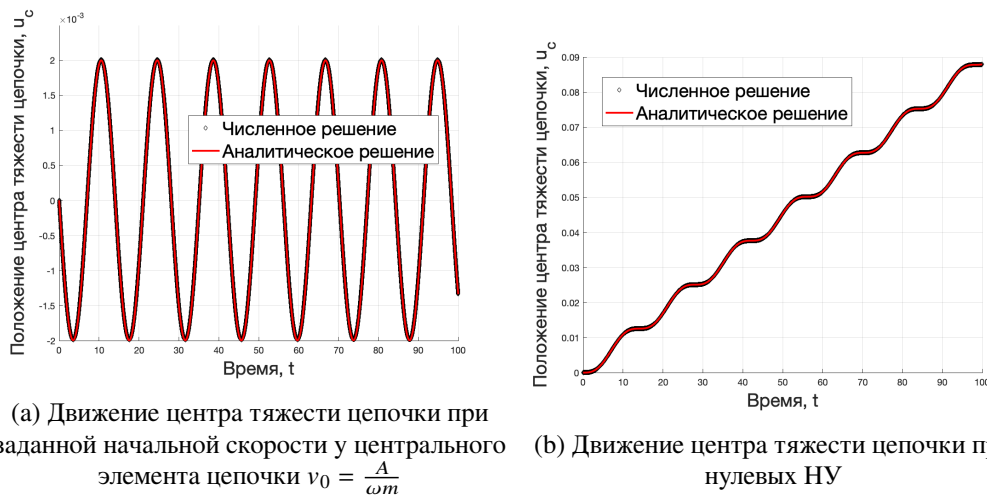


Рис. 2.8. Движение центра тяжести цепочки при нулевых и определенных ненулевых НУ

Приведем графики движения центра масс для цепочки с нулевыми начальными условиями и с заданной начальной скоростью центрального элемента

$(v_0 = -\frac{A}{\omega m})$ - при подстановке данной начальной скорости в уравнение 2.28 центр тяжести не будет бесконечно удаляться от начального положения. Покажем это. Хотим, чтобы $v_{0c} = 0$. Из этого условия можем получить:

$$\dot{R}_c(0) = -\frac{A}{\omega M} \quad (2.35)$$

Определим начальную скорость, которую следует приложить к элементу цепочки с индексом 0 (при нулевых начальных скоростях на других элементах цепочки), чтобы добиться выполнения полученного начального условия 2.35. Для этого воспользуемся формулой для скорости центра масс системы:

$$\dot{R}_c(0) = \sum_{i=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{m_i v_i}{M} \quad (2.36)$$

Тогда можем записать

$$\sum_{i=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{m_i v_i}{M} = -\frac{A}{\omega m} \rightarrow \frac{m_0 v_0}{M} = -\frac{A}{\omega m} \rightarrow v_0 = -\frac{A}{\omega m} \quad (2.37)$$

Таким образом получили скорость, которую нужно сообщить центральному элементу бесконечной цепочки для того, чтобы ее центр тяжести колебался около начального положения равновесия при приложении гармонической вынуждающей силы к центральному элементу цепочки.

Асимптотические оценки

Кроме изложенного выше в данном частном случае определенный интерес представляет решение при стремлении числа элементов и времени к бесконеч-

ности. В данном случае можно предположить, что центр тяжести цепочки не будет бесконечно удаляться от своего начального положения. Формализуем изложенное выше: требуется оценить асимптотическое поведение решения 2.24 при $N \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow \infty$. Для этого используем формулу 2.17 и выпишем решение для бесконечной цепочки, на которую действует сила по указанному выше периодическому закону. Получим

$$u_n = \frac{A}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\Omega_s \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega_s t)}{\Omega_s(\Omega_s^2 - \omega^2)} \cos(2sn) ds \quad (2.38)$$

Нам требуется рассмотреть 3 случая:

- а) $\omega < 2\omega_*$. В этом случае основной вклад в интеграл 2.38 будут давать точки $\Omega_s = 0$ и $\Omega_s = \omega$, а также границы интегрирования ($s = \pm \frac{\pi}{2}$).
- б) $\omega = 2\omega_*$. В этом случае основной вклад в интеграл будут давать точки $\Omega_s = 0$ и $\Omega_s = 2\omega_*$.
- в) $\omega > 2\omega_*$. В этом случае основной вклад в интеграл будут давать границы интегрирования и точка $\Omega_s = 0$.

Можно заметить, что точка $\Omega_s = 0$ дает вклад в асимптотику для всех частот вынуждающей силы. Вычислим этот вклад. Для этого рассмотрим δ — окрестность точки $s = 0$:

$$\frac{A}{m\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\Omega_s \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega_s t)}{\Omega_s(\Omega_s^2 - \omega^2)} \cos(2sn) ds \quad (2.39)$$

В силу малости s мы можем переписать этот интеграл в виде:

$$-\frac{A}{m\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} ds - \frac{A}{m\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(\Omega_s t)}{\Omega_s \omega} ds \quad (2.40)$$

Вычислим вклад от первого интеграла в этом выражении:

$$-\frac{A}{m\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2} ds = \left[x = st \quad s = \frac{x}{t} \quad ds = \frac{dx}{t} \right] = -\frac{A}{m\pi} \int_{-\delta t}^{\delta t} \frac{\sin(\omega t)}{t\omega^2} dx \quad (2.41)$$

При стремлении t к бесконечности, полученный интеграл будет стремиться к нулю. Это значит, что вклад от первого слагаемого 2.40 в асимптотику будет равен нулю. Этот факт также подтверждается формулой 2.58, из которой следует, что при $\omega < 2\omega_*$ вклад в асимптотику от первого слагаемого в 2.38 равен нулю.

Далее вычислим вклад в асимптотику от второго слагаемого:

$$-\frac{A}{m\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(\Omega_s t)}{\Omega_s \omega} ds = \frac{A}{m\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(2\omega_* \sin(s)t)}{2\omega_* \sin(s)\omega} ds \quad (2.42)$$

Воспользуемся малостью s и тогда перепишем этот интеграл в виде:

$$\begin{aligned} \frac{A}{m\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(2\omega_* st)}{2\omega_* s\omega} ds &= \left[x = st \quad s = \frac{x}{t} \quad ds = \frac{dx}{t} \right] \\ &= \frac{A}{m\pi} \int_{-\delta t}^{\delta t} \frac{\sin(2\omega_* x)}{2\omega_* x\omega} dx = \frac{A}{2\omega_* \omega t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Последний переход в этих равенствах сделан в предположении, что $t \rightarrow \infty$.

Таким образом вклад от точки $s = 0$ во всех трех случаях дается формулой

$$H_0 = \frac{A}{2\omega_* \omega t} \quad (2.44)$$

Далее приступим к выводу вклада от точки $\Omega = \omega$ для первого случая частоты вынуждающей силы ($\omega < 2\omega_*$). Для этого рассмотрим интеграл 2.38 и

перейдем к интегрированию по Ω_s :

$$\frac{A}{m\pi} \int_0^{2\omega_*} \frac{\Omega_s \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega_s t)}{c_g(\Omega_s) \Omega_s (\Omega_s^2 - \omega^2)} \cos(2n\phi(\omega)) d\Omega_s \quad (2.45)$$

Здесь введено обозначение $c_g(\Omega_s)$ — групповая скорость частиц в цепочке и функция $\phi(\omega)$. Они выражаются формулами

$$c_g(\Omega_s) = \frac{1}{2} \sqrt{(4\omega_*^2 - \Omega_s^2)} \quad \phi(\omega) = \arcsin\left(\frac{\omega}{2\omega_*}\right) \quad (2.46)$$

Сделаем замену $\epsilon = \Omega - \omega$. Тогда будут справедливы следующие формулы:

$$\Omega_s \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega_s t) = (\epsilon + \omega) \sin(\omega t) - \omega \sin(\epsilon t) \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t) \cos(\epsilon t) \quad (2.47)$$

Можно показать, что основной вклад в асимптотику интеграла в точке $\Omega = \omega$ будет даваться вторым слагаемым из формулы выше. Тогда остальные слагаемые из этой суммы можно отбросить при дальнейших вычислениях. В окрестности точки $\epsilon = 0$ справедлива формула:

$$\Omega_s^2 - \omega^2 \approx 2\omega\epsilon \quad (2.48)$$

Продолжим интегрирование по δ -окрестности точки $\epsilon = 0$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & -\frac{A}{m\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin(\epsilon t) \cos(\omega t)}{\omega \sqrt{4\omega_*^2 - \omega^2 \epsilon}} \cos(2n\phi(\omega)) d\epsilon = \left[x = st \quad s = \frac{x}{t} \quad ds = \frac{dx}{t} \right] \\ & = -\frac{A \cos(2n\phi(\omega))}{m\pi} \int_{-\delta t}^{\delta t} \frac{\sin(x) \cos(\omega t)}{x \omega \sqrt{4\omega_*^2 - \omega^2}} dx \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{A \cos(\omega t)}{m\omega \sqrt{4\omega_*^2 - \omega^2}} \cos(2n\phi(\omega)) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Таким образом вклад от точки $\omega = \Omega_s$ дается формулой:

$$H_{\omega=\Omega} = -\frac{A \cos(\omega t) \cos(2n\phi(\omega))}{m\omega\sqrt{4\omega_*^2 - \omega^2}} \quad (2.50)$$

Используя аналогичный метод можно показать, что вклад от точек $\Omega_s = 2\omega_*$ при частоте вынуждающей силы, соответствующей второму случаю ($\omega = 2\omega_*$) в асимптотику интеграла 2.38 дается формулой:

$$H_{\Omega_s=2\omega_*} = -\frac{A \cos(2\omega_*t - \frac{\pi}{4})(-1)^n}{2\sqrt{\pi}\omega_*^{\frac{3}{2}}m} \sqrt{t} \quad (2.51)$$

Докажем ее. Сделаем замену $\epsilon = \omega - \Omega$ и примем $\Omega = 2\omega_*$. Тогда будет справедлива формула $s = \frac{\pi}{2}$. В этих предположениях можем записать интеграл 2.38 в виде:

$$\frac{A}{m\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\omega_* \sin(\epsilon + 2\omega_*)t - (2\omega_* - \epsilon) \sin(2\omega_*t)}{2\omega_*(4\omega_*^2 - \omega^2)} (-1)^n ds \quad (2.52)$$

Переходя к интегрированию по частоте ω в окрестности точки $\epsilon = 0$, ($\epsilon > 0$) и делая замену $x = \epsilon t$, получим следующее представление для этого интеграла:

$$-\frac{A}{m\pi} \int_0^{\delta t} \frac{\sqrt{t}(\sin(x) \cos(2\omega_*t) - \sin(2\omega_*t)(\cos(x) - 1) + \frac{x}{t} \sin(2\omega_*t))}{4\omega_*^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}} (-1)^n dx \quad (2.53)$$

Можно показать, что:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\delta t} \frac{\sin(2\omega_*t)}{\sqrt{x}\sqrt{t}} dx = 0 \quad (2.54)$$

Тогда из выражения 2.53, переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$, после несложных математических преобразований придем к формуле 2.51.

Из этого выражения видно, что частота $\omega = 2\omega_*$ является резонансной (здесь наблюдается бесконечный рост перемещения центральной частицы со временем).

Далее выведем формулы для вклада в асимптотику от точек $s = \pm \frac{\pi}{2}$ в третьем случае частоты вынуждающей силы ($\omega > 2\omega_*$).

Можно заметить, что мы имеем интеграл типа Фурье [3], общая формула которого:

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda S(x)} dx \quad (2.55)$$

Если к синусу, стоящему в числителе 2.38 с отрицательным знаком применить формулу Эйлера, то получим:

$$\frac{A}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(\omega t)}{\Omega_s^2 - \omega^2} \cos(2sn) ds - \frac{A}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\omega(e^{i\Omega_s t} - e^{-i\Omega_s t})}{2i\Omega_s(\Omega_s^2 - \omega^2)} \cos(2sn) ds \quad (2.56)$$

Рассмотрим поведение первого интеграла из 2.56. Нетрудно показать, что этот интеграл сходится всегда за исключением случая $\omega \rightarrow 2\omega_*$, при котором он расходится. Так как мы рассматриваем область $\omega > 2\omega_*$, то данный интеграл будет сходиться в ней везде. Таким образом при оценке асимптотического поведения интеграла его можно представить следующим образом:

$$\frac{A}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin(\omega t)}{\Omega_s^2 - \omega^2} \cos(2sn) ds = C_n \sin(\omega t) \quad (2.57)$$

Здесь введено обозначение:

$$C_n = \frac{A}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2sn)}{\Omega_s^2 - \omega^2} ds \quad (2.58)$$

В книге [4] дано представление для этого интеграла в смысле главного зна-

чения (для случая $\omega > 2\omega_*$) в следующем виде:

$$C_{n1} = \frac{A}{m} U (-1)^{n+1} e^{-s|n|} \quad (2.59)$$

$$U = \frac{1}{2\omega\omega_* \sqrt{\left(\frac{\omega}{2\omega_*}\right)^2 - 1}} \quad (2.60)$$

$$e^{-s} = \left(\frac{\omega}{2\omega_*} - \sqrt{\left(\frac{\omega}{2\omega_*}\right)^2 - 1} \right)^2 \quad (2.61)$$

и для случая $\omega < 2\omega_*$:

$$C_{n2} = \frac{A \sin(2|n|\phi(\omega))}{m\omega \sqrt{4\omega_*^2 - \omega^2}} \quad (2.62)$$

и для случая $\omega = 2\omega_*$:

$$C_{n3} = \frac{A(-1)^n 2|n|}{4m\omega_*^2} \quad (2.63)$$

Второе слагаемое в 2.56 распадается на 2 интеграла типа Фурье со следующими параметрами (в соответствии с 2.55):

$$f_1(s) = \frac{A}{m\pi} \frac{\omega \cos(2sn)}{2I\Omega_s(\Omega_s^2 - \omega^2)} \quad S_1(s) = \Omega_s \quad \lambda = t \quad a = -\frac{\pi}{2} \quad b = \frac{\pi}{2} \quad (2.64)$$

$$f_2(s) = \frac{A}{m\pi} \frac{\omega \cos(2sn)}{2I\Omega_s(\Omega_s^2 - \omega^2)} \quad S_2(s) = -\Omega_s \quad \lambda = t \quad a = -\frac{\pi}{2} \quad b = \frac{\pi}{2} \quad (2.65)$$

Рассмотрим вклад в асимптотику от обоих интегралов типа Фурье. Легко заметить, что этот вклад будет образован двумя стационарными точками: a и b . Вычисляя этот вклад по формуле:

$$H_{c_k}(\lambda) = \frac{1}{2} e^{I\lambda S(c_k) + I\frac{\pi}{4} \text{sign}(S''(c_k))} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(c_k)|}} \left(f(c_k) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right) \quad (2.66)$$

Здесь использованы обозначения: c_k - стационарные точки, F_{c_k} - вклад от этих стационарных точек. Вычислив вклад от обеих стационарных точек можно

вычислить поведение интеграла 2.55 по следующей формуле:

$$\int_a^b f(x) e^{I\lambda S(x)} = H_a(\lambda) + H_b(\lambda) + \sum_{c_k \leq a, b} H_{c_k}(\lambda) \quad (2.67)$$

Применим формулы 2.66 и 2.67 ко второму интегралу в 2.56 и получим:

$$\frac{A}{m\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\omega \sin(\Omega_s t)}{\Omega_s(\Omega_s^2 - \omega^2)} \cos(2sn) ds = \frac{A\omega \cos(n\pi) \cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4})}{2m\omega_*^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} (\omega^2 - 4\omega_*^2)} \sqrt{\frac{1}{t}} + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad (2.68)$$

Таким образом вклад от точек $s = \pm \frac{\pi}{2}$ в третьем случае частоты вынуждающей силы ($\omega > 2\omega_*$) будет даваться формулой:

$$H_{\pm \frac{\pi}{2}} = C_{n3} \sin(\omega t) - \frac{A\omega \cos(n\pi) \cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4})}{2m\omega_*^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} (\omega^2 - 4\omega_*^2)} \sqrt{\frac{1}{t}} \quad (2.69)$$

Теперь можем записать асимптотические формулы для всех трёх случаев частот вынуждающей силы, складывая вклады от отдельных точек в соответствии с перечисленными выше случаями:

а) При $\omega < 2\omega_*$

$$u_n \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{2m\omega\omega_*} - \frac{A \cos(\omega t - 2|n|\phi(\omega))}{m\omega\sqrt{4\omega_*^2 - \omega^2}} - \frac{A\omega \cos(\pi n) \cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4})}{2m\omega_*^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} (\omega^2 - 4\omega_*^2)} \sqrt{\frac{1}{t}} \quad (2.70)$$

б) При $\omega = 2\omega_*$

$$u_n \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{2m\omega\omega_*} - \frac{A \cos(2\omega_* t - \frac{\pi}{4}) (-1)^n}{2\sqrt{\pi}\omega_*^{\frac{3}{2}} m} \sqrt{t} + C_{n3} \sin(\omega t) \quad (2.71)$$

в) При $\omega > 2\omega_*$

$$u_n \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{2m\omega\omega_*} + C_{n1} \sin(\omega t) - \frac{A\omega \cos(n\pi) \cos(2t\omega_* + \frac{\pi}{4})}{2m\omega_*^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} (\omega^2 - 4\omega_*^2)} \sqrt{\frac{1}{t}} \quad (2.72)$$

Анализируя полученные результаты можно сделать следующий вывод: перемещения элементов цепочки не будут стремиться к бесконечности с течением времени за исключением уже упомянутого случая $\omega = 2\omega_*$.

Кроме того можно заметить, что во всех перечисленных случаях в цепочке будут устанавливаться колебания с частотой вынуждающей силы, в то время, как колебания на частоте $2\omega_*$ (в третьем случае $\omega > 2\omega_*$ и первом случае $\omega < 2\omega_*$) затухают со скоростью, пропорциональной $\sqrt{\frac{1}{t}}$.

Также стоит заметить, что волны с частотами $\omega > 2\omega_*$ локализуются около источника и не распространяются по цепочке, — это следует из полученного выражения для C_{n1}

Также стоит обратить внимание, что полученная во всех асимптотических формулах константа $\frac{A}{2m\omega\omega_*}$ (вклад в асимптотику от точки $\Omega_s = 0$) совпадает с вертикальной координатой горизонтальной асимптоты для задачи с заданной начальной скоростью (см. выше) в случае задания начальной скорости, равной $v_0 = \frac{A}{\omega m}$. Выше было установлено, что это та скорость (с обратным знаком), которую надо сообщить центру тяжести цепочки для того, чтобы ее центр тяжести колебался около положения равновесия.

Все полученные результаты полностью совпадают с книгой [4] в которой даются приведенные выше асимптотики до порядка $o(1)$ при помощи метода интегрирования с помощью вычетов. Это подтверждает корректность проведенных рассуждений и говорит о корректности применения метода стационарной фазы к оценке данных интегралов.

Построим графики для асимптотических оценок решения для разных значе-

ний частот вынуждающей силы. Графики будем строить для длинной цепочки — для того, чтобы границы расчетной области не оказывали влияния на колебания исследуемого элемента цепочки (выше было установлено, что решения для конечной и бесконечной цепочек совпадают до момента возврата отраженной от границы ячейки периодичности волны). Параметры для построения графиков примем следующими: $\Delta t = 0.01$; $\omega_* = 0.775$; $m = 5$; $N = 501$; $n = 0$; $A = 1$; $\omega = 1\omega_*, 2\omega_*, 3\omega_*$; $t = [0; 100]$.

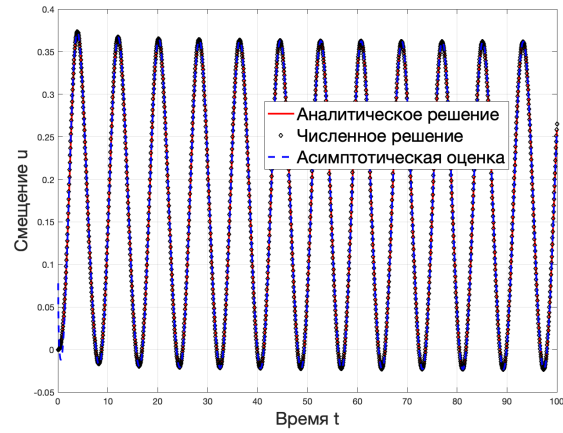
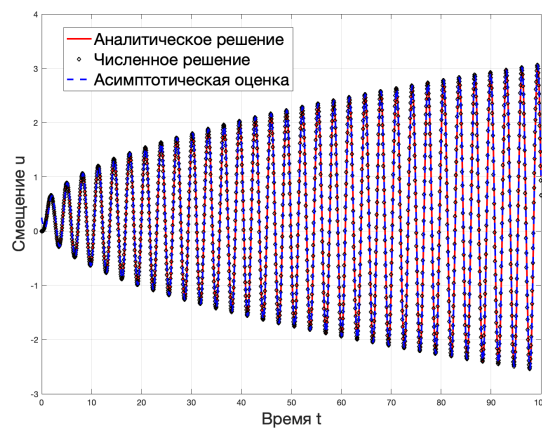
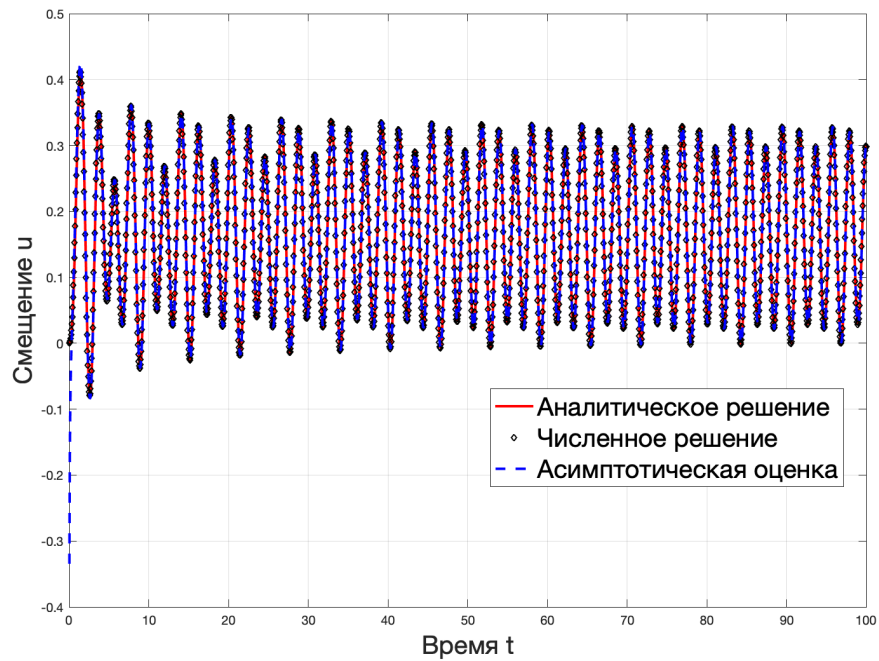
(a) $\omega = 1\omega_*$ (b) $\omega = 2\omega_*$ (c) $\omega = 3\omega_*$

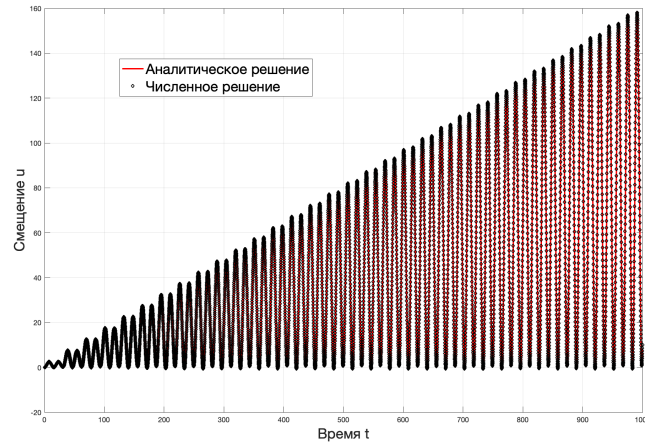
Рис. 2.9. Сравнение аналитического и численного решений с асимптотическим приближением для одномерной цепочки, нагружаемой гармонической силой с разными частотами.
 $\Delta t = 0.01$; $\omega_* = 0.6$; $m = 5$; $N = 501$; $n = 0$; $A = 1$; $\omega = 1\omega_*, 2\omega_*, 3\omega_*$; $t = [0; 100]$

Из полученных графиков можно сделать следующие выводы:

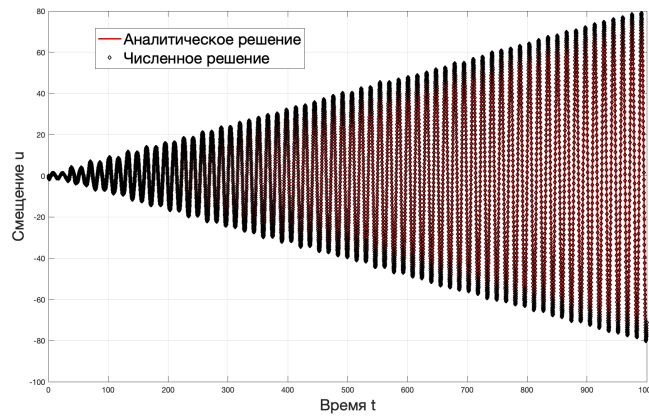
- а) Из графика, представленного на рисунке 2.9а видно, что при частоте вынуждающей силы $\omega = \omega_*$ асимптотическая оценка на промежутке по времени $t = 0..100$ сливается с точным и численным решениями, которые совпадают между собой.
- б) Из графика, представленного на рисунке 2.9б видно, что при частоте вынуждающей силы $\omega = 2\omega_*$ наблюдается увеличение амплитуды колебаний с течением времени, что согласуется с утверждением, что на бесконечной цепочке частота $\omega = 2\omega_*$ является резонансной. Также видно, что асимптотическая оценка сливается с точным и численным решениями, которые совпадают между собой.
- в) Из графика, представленного на рисунке 2.9с видно, что при частоте вынуждающей силы $\omega = 3\omega_*$ асимптотическая оценка с течением времени стремится слиться с численным и аналитическим решениями, которые совпадают между собой.

Численное решение и сравнение результатов

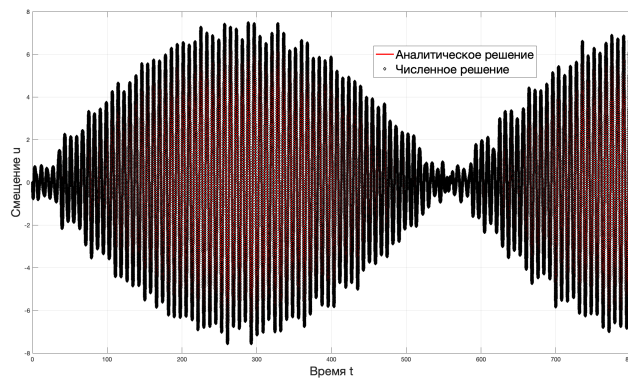
В данном разделе будет проведено численное решение для задачи, сформулированной ранее в этом разделе. Приведем несколько графиков для численного и аналитического решения задачи на конечных и бесконечных цепочках (рисунок 2.10). Анализируя приведенные графики можно сделать вывод, что они полностью соответствуют теоретическим выкладкам, приведенным выше. При возбуждении цепочки силой на частоте, равной резонансной частоте цепочки (рисунок 2.10б) можно наблюдать линейное увеличение амплитуды колебаний, что соответствует формуле 2.25.



(а) Движение центрального элемента цепочки на резонансной частоте. $\Delta t = 0.2$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $n = 0$, $A = 1$, $\omega = 0.4357$, $v_0 = 0$



(б) Движение центрального элемента цепочки на резонансной частоте и с заданной начальной скоростью.
 $\Delta t = 0.02$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $n = 0$, $m = 1$, $A = 1$, $\omega = 0.4357$, $v_0 = -\frac{A}{\omega t}$



(с) Движение центрального элемента цепочки на частоте, близкой к резонансной.
 $\Delta t = 0.02$, $\omega_* = 1$, $m = 1$, $N = 31$, $n = 0$, $A = 1$, $\omega = 0.8$, $v_0 = -\frac{A}{\omega t}$

Рис. 2.10. Иллюстрации к разделу 2.5

При задании начальной скорости центра масс цепочки (рисунки 2.10с, 2.10b) по формуле $v_0 = -\frac{A}{\omega t}$ можно наблюдать, что среднее положение центра масс цепочек остается постоянным за период колебаний, что соответствует формуле 2.28. При частоте вынуждающей силы, находящейся около собственной частоты цепочки (рисунок 2.10с) можно наблюдать сначала увеличение амплитуды колебаний, а затем ее уменьшение до нуля (режим биений). Это также полностью согласуется с приведенными выше формулами. Можно получить формулу для частоты огибающей биений следующим образом: основной вклад в колебания будут вноситься слагаемым, близким к резонансной частоте, где можно приближенно считать $\Omega = \omega$. Тогда можем записать:

$$\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t) = \Omega \sin(\omega t) - \Omega \sin(\Omega t) = 2\Omega \sin\left(\frac{(\omega - \Omega)t}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega + \Omega)t}{2}\right) \quad (2.73)$$

Отсюда видно, что огибающая биений имеет частоту $\omega_{og} = \frac{(\omega - \Omega)}{2}$, а тогда частота биений есть $\omega_b = \omega - \Omega$.

ГЛАВА 3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПочки С ЗАКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

3.1 Введение

В данной главе речь пойдет о решении задачи колебания одномерного и двумерного гармонического кристалла, в котором закреплен (не движется) один (в случае одномерного кристалла) или несколько (в случае двумерного) элементов. Будет предложен новый способ решения подобных задач.

3.2 Решение одномерной задачи с симметричным возбуждением

В данном разделе речь пойдет о решении задачи колебания одномерной цепочки, в которой центральный элемент не испытывает отклонения от своего начального положения. Данного эффекта можно добиться, например, при помощи задания антисимметричного возбуждения относительно центрального элемента цепочки (рисунок 3.1).

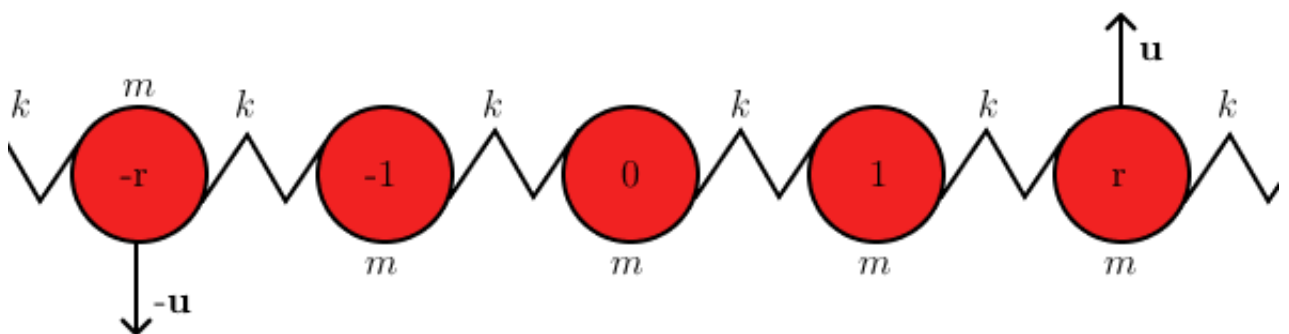


Рис. 3.1. Симметричное относительно центра цепочки отклонение двух элементов

Для простоты математического изложения ограничимся заданием симметричного начального отклонения одного элемента цепочки слева и одного эле-

мента справа. Тогда, в соответствии с результатом, полученным в 2.9 можем записать решение этой задачи в виде:

$$u_n(t) = u_r^0 J_{2(n-r)}(2\omega_* t) - u_{-r}^0 J_{2(n+r)}(2\omega_* t) \quad (3.1)$$

3.3 Решение одномерной задачи с модифицированным уравнением

Получим решение задачи, в которой один элемент цепочки закреплен, а к другому приложено единичное перемещение в начальный момент времени. Для этого запишем уравнение движения, описывающее данную динамическую систему:

$$\ddot{u}_n = \omega_*^2 (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) - \omega_*^2 (u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) \delta(n) \quad (3.2)$$

Здесь и далее использована дискретная дельта функция:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Таким образом, при рассмотрении частного случая уравнения 3.2 при $n = 0$ мы получаем:

$$\ddot{u}_0 = 0 \quad (3.4)$$

Что в совокупности с нулевыми начальными условиями на центральном элементе цепочки приводит к тому, что его перемещение в любой момент времени равно нулю.

Теперь приступим к решению уравнения 3.2 при помощи ДПФ и преобразо-

вания Лапласа. Применим ДПФ к 3.2:

$$\hat{u}_j = -\Omega^2 \hat{u}_j - \omega_*^2 (u_1 - 2u_0 + u_{-1}) \quad \hat{u}_j(0) = e^{\frac{2\pi I r j}{N}} \quad \dot{\hat{u}}_j(0) = 0 \quad (3.5)$$

По постановке задачи мы можем положить, что $u_0 = 0$ $u_{-1} = 0$. С учетом этого применим преобразование Лапласа к уравнению 3.5 и немного его преобразуем. Тогда получим:

$$\bar{u}_j = \frac{p}{p^2 + \Omega^2} e^{\frac{2\pi I r j}{N}} - \frac{\bar{u}_1}{p^2 + \Omega^2} \omega_*^2 \quad (3.6)$$

Тогда используем обратное преобразование Лапласа и применим свертку ко второму слагаемому. Тем самым получим выражение для трансформанты Фурье перемещений:

$$\hat{u}_j = \cos(\Omega t) e^{\frac{2\pi I r j}{N}} - \omega_*^2 \int_0^t \frac{u_1(\tau) \sin \Omega(t - \tau)}{\Omega} d\tau \quad (3.7)$$

Из уравнения 3.1 можем получить выражение для $u_1(t)$ (далее будем подставлять предельное значение перемещений элемента цепочки с индексом 1 с пониманием того, что в конце текущих выкладок перейдем к пределу при $N \rightarrow \infty$ и получим верное выражение для перемещений. При этом можно подставить выражение для перемещения элемента конечной цепочки с индексом 1 и также продолжить выкладки, но конечный, предельный результат от этого не изменится):

$$u_1(t) = J_{2(1-r)}(2\omega_* t) - J_{2(1+r)}(2\omega_* t) \quad (3.8)$$

Подставляя 3.8 в 3.7 получим искомые перемещения:

$$u_n = \frac{1}{N} \sum_{j=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left[\cos(\Omega t) e^{\frac{2\pi I r j}{N}} - \omega_*^2 \int_0^t \frac{(J_{2(1-r)}(2\omega_*\tau) - J_{2(1+r)}(2\omega_*\tau)) \sin \Omega(t - \tau)}{\Omega} d\tau \right] \times e^{\frac{2\pi I n j}{N}} \quad (3.9)$$

Далее нам потребуется перейти к решению для бесконечной цепочки, так как используемое решение 3.1 - это решение для бесконечной цепочки. Кроме того, аналогично проведенным в первой главе настоящей работы рассуждениям, мы можем показать, что полученное решение является вещественным. Это позволит записать решение без использования экспонент с мнимым показателем. Тогда мы придем к следующему соотношению:

$$u_n = \int_{-1/2}^{1/2} \left[\cos(\Omega_X t) \cos(2\pi x(r - n)) - \omega_*^2 \cos(2\pi x n) \int_0^t \frac{(J_{2(1-r)}(2\omega_*\tau) - J_{2(1+r)}(2\omega_*\tau)) \sin(\Omega_X(t - \tau))}{\Omega_X} d\tau \right] dx \quad (3.10)$$

Здесь использовано обозначение $\Omega_X = 2\omega_* \sin \pi x$.

Таким образом мы получили еще одно представление решения для бесконечной цепочки с неподвижным центральным элементом. Тут стоит отметить, что можно получить бесчисленное количество формул для разных способов симметричного возбуждения цепочки (например, задавая его разными силовыми воздействиями). В данной работе мы ограничимся лишь изложенным выше частным случаем, чтобы не усложнять математические выкладки. Также стоит отметить, что если $r \geq 1$, то при $n \geq 0$ решения 3.10 и 3.1 совпадают. В случае, если $n < 1$, то ПЧ 3.10 тождественно равна нулю.

3.4 Сравнение полученных решений

Построим графики для решений 3.1 и 3.10 и сравним полученные результаты. Интегралы в ПЧ 3.10 и 3.1 будем вычислять при помощи метода Симпсона. Для всех графиков общими будут оставаться следующие параметры: $\omega_* = 1, \Delta t = 0.1, N = 11, r = 2$, а изменяться будет n — индекс частицы, график перемещений которой строится.

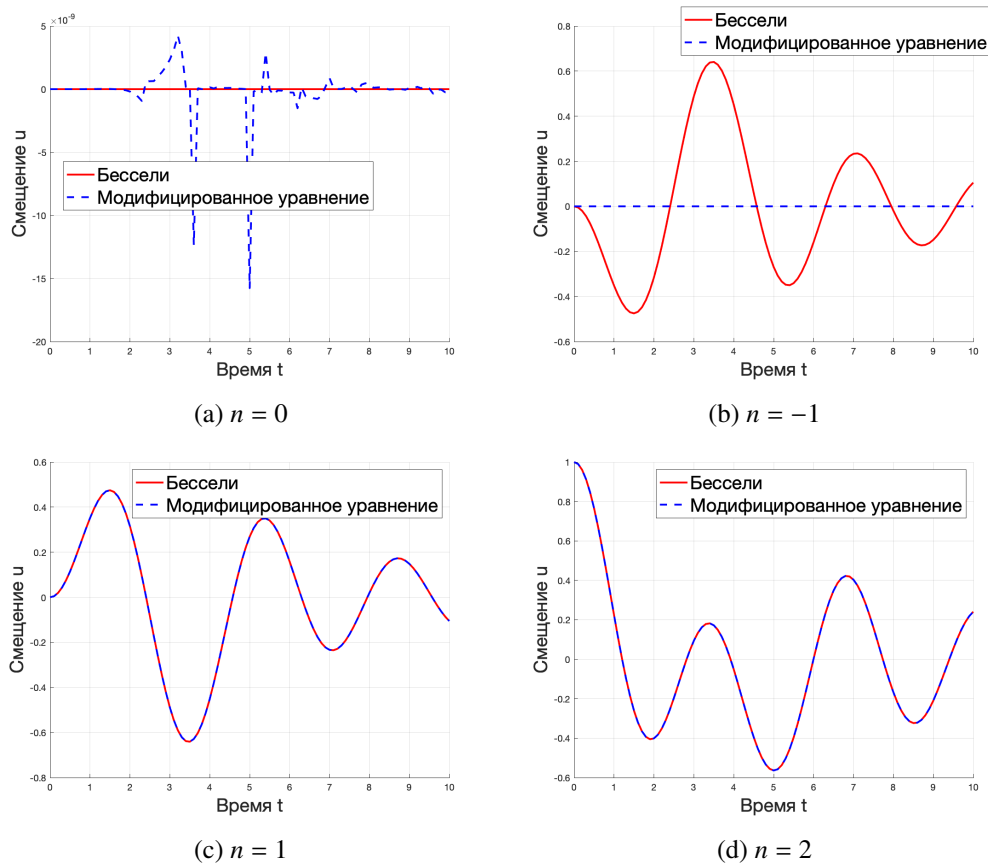


Рис. 3.2. Сравнение решений для задачи с симметричным возбуждением, полученных при помощи модифицирования исходного уравнения и без модифицирования исходного уравнения. $\omega_* = 1, \Delta t = 0.1, N = 11, r = 2$

Анализируя полученные графики, представленные на 3.2 можно сделать вывод, что изложенный выше метод решения задачи состоятелен и приводит к корректному результату. Можно видеть, что, действительно, если $r \geq 1$, то при $n \geq 0$ решения 3.10 и 3.1 совпадают. В случае, если $n < 1$, то ПЧ 3.10

тождественно равна нулю. На графике 3.2а можно видеть, что кривая решения, полученного при помощи модифицирования исходного уравнения динамики цепочки отклоняется от нулевой линии на величины порядка 10^{-8} что можно интерпретировать как погрешность численных вычислений интегралов 3.10.

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ДВУМЕРНОЙ КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКИ

4.1 Постановка задачи

В данном разделе строится решение задачи о движении двумерного линейного гармонического кристалла в общей постановке - с заданными на каждом элементе начальными перемещениями и скоростями, а также силовыми воздействиями. В сущности будет рассмотрена и решена следующая задача:

$$\ddot{u}_{n,m} = \omega_*^2(u_{n+1,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1} - 4u_{n,m}) + \frac{F_{n,m}(t)}{m_*} \quad (4.1)$$

Со следующими начальными и граничными условиями (во всех выкладках текущей главы символом m_* будет обозначаться масса элемента решетки (так как символ m занят под номер элемента цепочки):

$$u_{n,m}(0) = u_{n,m}^0, \quad \dot{u}_{n,m}(0) = v_{n,m}^0, \quad u_{n,m} = u_{n+A_1N, m+A_2M} \quad (4.2)$$

где под величинами A_1 и A_2 имеются ввиду целые числа.

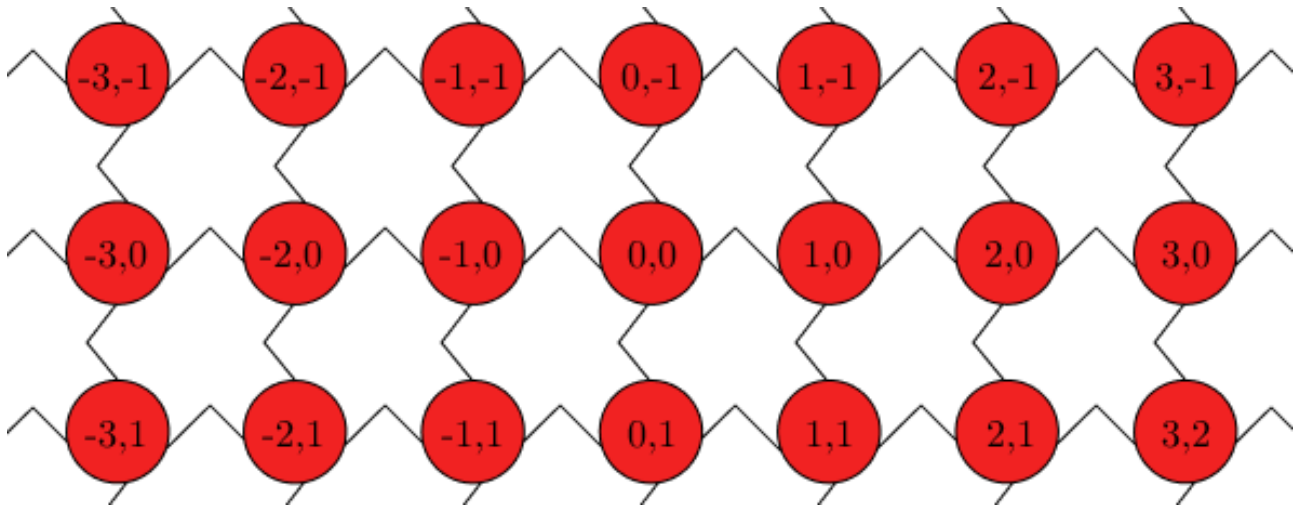


Рис. 4.1. Нумерация элементов двумерной квадратной решетки. Жесткости всех связей одинаковы и равны k . Массы всех элементов также одинаковы и равны m_* .

В дальнейших выкладках под центром кристалла будет пониматься элемент с индексами $0, 0$.

Решение поставленной задачи полностью аналогично решению аналогичной задачи для одномерной цепочки за тем лишь исключением, что здесь нам потребуется использовать двумерное дискретное преобразование Фурье. Далее приведем аналитическое решение поставленной задачи.

4.2 Аналитическое решение

Решение для конечной решетки

Применим двумерное дискретное преобразование Фурье к 4.1 и применим свойство сдвига. Тогда получим

$$\hat{u}_{i,j} = -\Omega^2 \hat{u}_{i,j} + \frac{1}{m_*} \sum_{n=-\frac{N+1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \sum_{m=-\frac{M+1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} F_{n,m}(t) e^{-2\pi I(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M})} \quad (4.3)$$

Здесь использовано обозначение:

$$\Omega^2 = 2\omega_*^2 \left(2 - \cos\left(\frac{2\pi i}{N}\right) - \cos\left(\frac{2\pi j}{M}\right) \right) = 4\omega_*^2 \left(\sin^2\left(\frac{\pi i}{N}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi j}{M}\right) \right) \quad (4.4)$$

Далее применим дискретное преобразование Фурье к начальным условиям:

$$\hat{u}_{i,j}(0) = \sum_{n,m} u_{n,m}^0 e^{-2\pi I(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M})} = \hat{u}_{i,j}^0, \quad \hat{v}_{i,j}(0) = \sum_{n,m} v_{n,m}^0 e^{-2\pi I(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M})} = \hat{v}_{i,j}^0, \quad (4.5)$$

Далее используем преобразование Лапласа и преобразуем получившееся выражение. Тогда получим:

$$\bar{\hat{u}}_{i,j} = \frac{p\hat{u}_{i,j}^0 + \hat{v}_{i,j}^0}{p^2 + \Omega^2} + \sum_{n,m} \frac{\bar{F}_{n,m}(t) e^{-2\pi I(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M})}}{m_*(p^2 + \Omega^2)} \quad (4.6)$$

Далее используем обратное преобразование Лапласа:

$$\hat{u}_j = \hat{u}_{i,j}^0 \cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \hat{v}_{i,j}^0 + \sum_{n,m} \int_0^t \frac{F_{n,m}(\tau) \sin(\Omega(t - \tau))}{m_* \Omega} e^{-2\pi I(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M})} d\tau \quad (4.7)$$

Теперь применим к полученному выражение обратное преобразование Фурье, подведем все выражение под единые знаки суммирования (сделав замену индексов) и получим:

$$u_{n,m} = \frac{1}{NM} \sum_{k,l} \sum_{i,j} \left[u_{k,l}^0 \cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} v_{k,l}^0 + \int_0^t \frac{F_{k,l}(\tau) \sin(\Omega(t - \tau))}{m_* \Omega} d\tau \right] e^{2\pi I(\frac{i(n-k)}{N} + \frac{j(m-l)}{M})} \quad (4.8)$$

Видно, что выражения 4.8 и 2.9 очень близки по форме друг к другу. Этого и стоило ожидать ведь математически, эти задачи отличаются лишь необходимостью суммирования по большему числу элементов, чем в одномерной цепочке.

Соответственно, все выкладки, сделанные для 2.9 будут также верны и для 4.8.

Решение для бесконечной решетки

В этом разделе будет рассмотрено решение предыдущей задачи при $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$. Математические выкладки, необходимые для получения результата для бесконечной двумерной решетки почти полностью совпадают с выкладками, проделанными в 2.2. Отличие заключается в том, что нам не удастся выразить решение задачи с нулевыми начальными скоростями и отсутствием внешних воздействий с использованием обычных функций Бесселя — придется записывать решение в более общем виде. При этом преобразования второго и третьего члена в выражении для 4.8 полностью совпадают, поэтому их приводить не будем. Преобразуем первое слагаемое из выражения 4.8:

$$\begin{aligned} \frac{1}{NM} \sum_{i,j} u_{k,l}^0 \cos(\Omega t) e^{2\pi I \left(\frac{i(n-k)}{N} + \frac{j(m-l)}{M} \right)} &= \left[N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty, \frac{\pi i}{N} = s, \frac{\pi j}{M} = q \right] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} u_{k,l}^0 \cos(\Omega_{s,q} t) e^{2I(s(n-k)+q(m-l))} ds dq \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь использовано обозначение $\Omega_{s,q}^2 = 4\omega_*^2(\sin^2(s) + \sin^2(q))$.

Таким образом мы можем записать общее решение для бесконечной двумерной решетки:

$$\begin{aligned} u_{n,m} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k,l} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[u_{k,l}^0 \cos(\Omega_{s,q} t) + \frac{\sin(\Omega_{s,q} t)}{\Omega_{s,q}} v_{k,l}^0 + \right. \\ \left. \int_0^t \frac{F_{k,l}(\tau) \sin(\Omega_{s,q}(t-\tau))}{m_* \Omega_{s,q}} d\tau \right] e^{2I(s(n-k)+q(m-l))} ds dq \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь суммирование по индексам k, l предполагается в бесконечных преде-

лах $[-\infty; \infty]$.

4.3 Перемещение в центре кристалла

В данном разделе будет проведено численное решение для двумерного кристалла, к центральному элементу которого приложено единичное перемещение. Приведем аналитическое решение для конечной и бесконечной решеток, согласно общим формулам 4.8 и 4.10:

а) Для конечной решетки:

$$u_{n,m} = \frac{u_{0,0}^0}{NM} \sum_{i,j} \cos(\Omega t) \cos\left(2\pi\left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M}\right)\right) \quad (4.11)$$

б) Для бесконечной решетки:

$$u_{n,m} = \frac{u_{0,0}^0}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\Omega_{s,q} t) \cos(2(sn + qm)) ds dq \quad (4.12)$$

Построим графики для численного и аналитического решений данной задачи при следующих значениях параметров: $\Delta t = 0.02$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $M = 31$, $n = 0$, $m = 0$, $u_{0,0} = 1$.

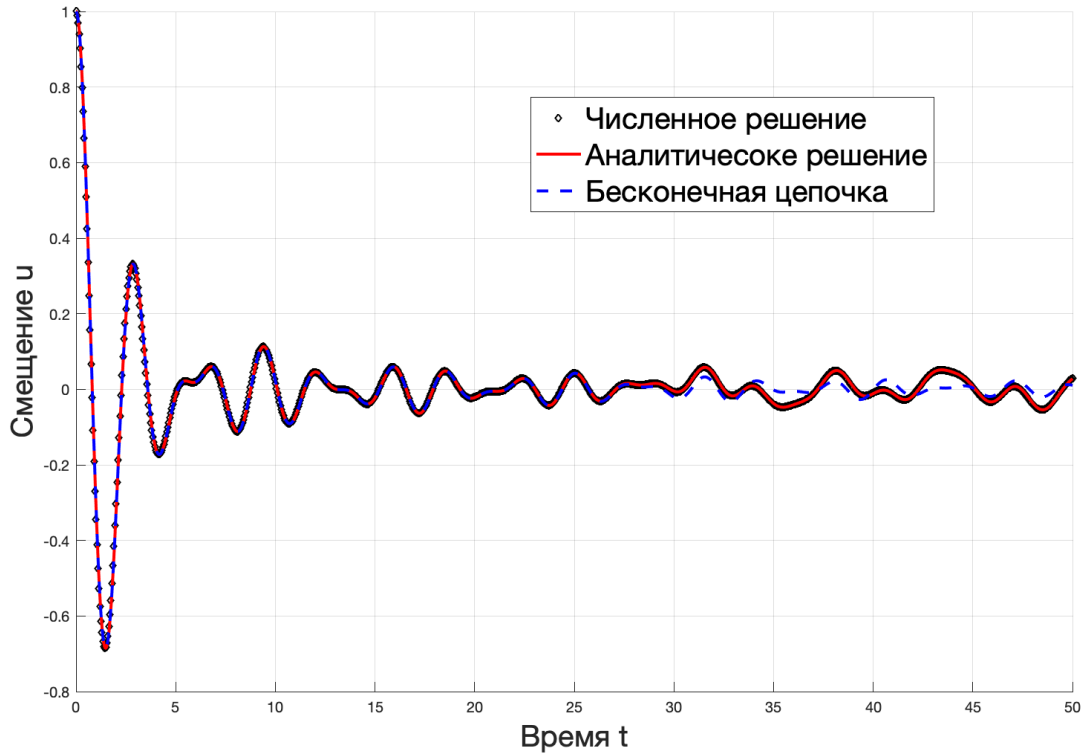


Рис. 4.2. Перемещение центрального элемента двумерной решетки, к центральному элементу которого приложено единичное перемещение.

$$\Delta t = 0.02, \omega_* = 1, N = 31, M = 31, n = 0, m = 0, u_{0,0} = 1$$

Анализируя полученный график (рисунок 4.2) можно сделать вывод, что численное и аналитическое решения совпадают как количественно, так и качественно, что говорит о корректности полученных результатов. Также можно заметить, что решения для конечной и бесконечной цепочек совпадают до определенного момента, когда вернувшаяся от границ области волна начала оказывать влияние на движение центрального элемента цепочки.

4.4 Скорость в центре кристалла

В данном разделе будет проведено численное решение для цепочки, к центральному элементу которой приложена единичная скорость. Приведем аналитическое решение для конечной и бесконечной решеток, согласно общим

формулам 4.8 и 4.10:

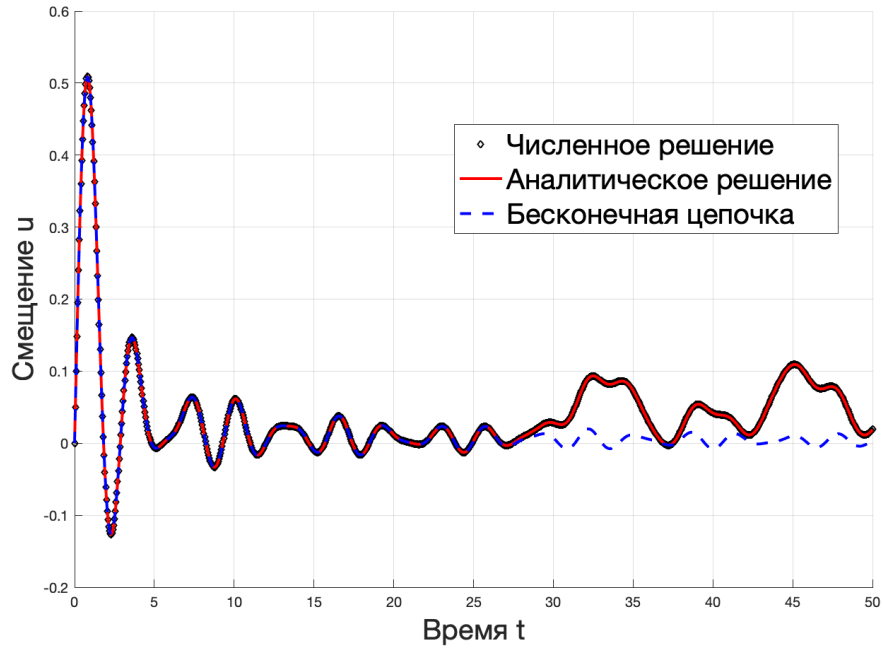
а) Для конечной решетки:

$$u_{n,m} = \frac{v_{0,0}^0}{NM} \sum_{i,j} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \cos\left(2\pi\left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M}\right)\right) \quad (4.13)$$

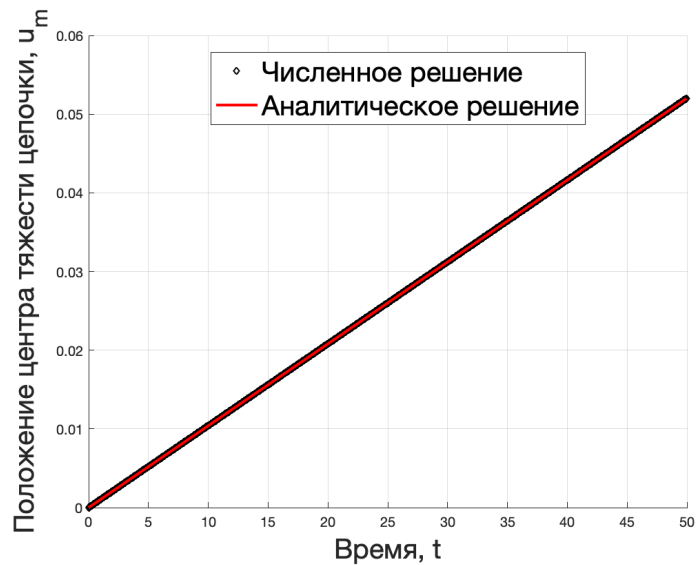
б) Для бесконечной решетки:

$$u_{n,m} = \frac{v_{0,0}^0}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\Omega_{s,q} t)}{\Omega_{s,q}} \cos(2(sn + qm)) ds dq \quad (4.14)$$

Построим графики для численного и аналитического решений данной задачи при следующих параметрах: $\Delta t = 0.02$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $M = 31$, $n = 0$, $m = 0$, $\omega = 1$, $v_{0,0} = 1$.



(а) Перемещение центрального элемента.



(б) Перемещение центра тяжести.

Рис. 4.3. Движение центра тяжести и центрального элемента двумерной решетки, на центральный элемент которого в начальный момент времени наложена единичная скорость $\Delta t = 0.02$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $M = 31$, $n = 0$, $m = 0$, $\omega = 1$, $v_{0,0} = 1$.

Из полученных графиков 4.3 можно видеть, что центр тяжести цепочки линейно удаляется от своего начального нулевого положения с течением времени — то же самое было в одномерном случае. Кроме того можно видеть, что числен-

ное решение совпадает с аналитическим как количественно, так и качественно, что говорит о корректности полученных результатов.

4.5 Гармоническая сила в центре кристалла

В данном разделе будет рассмотрено численное решение динамики двумерного гармонического кристалла к центральному элементу которого приложена гармоническая сила по закону $F_{0,0}(t) = A \sin(\omega t)$. Приведем аналитическое решение для конечной и бесконечной решеток, согласно общим формулам 4.8 и 4.10:

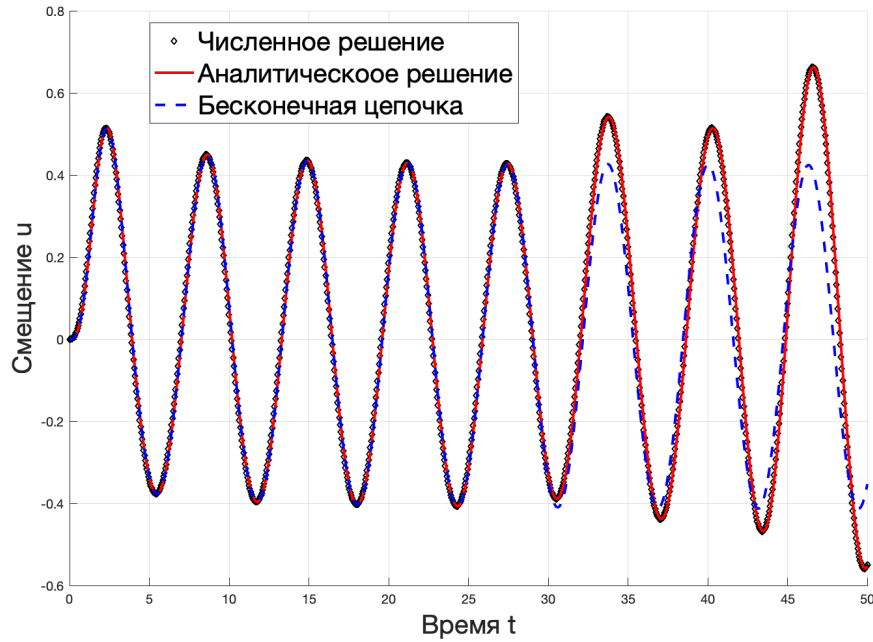
а) Для конечной решетки:

$$u_{n,m} = \frac{A}{NM} \sum_{i,j} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{m_* \Omega (\Omega^2 - \omega^2)} \cos\left(2\pi \left(\frac{in}{N} + \frac{jm}{M}\right)\right) \quad (4.15)$$

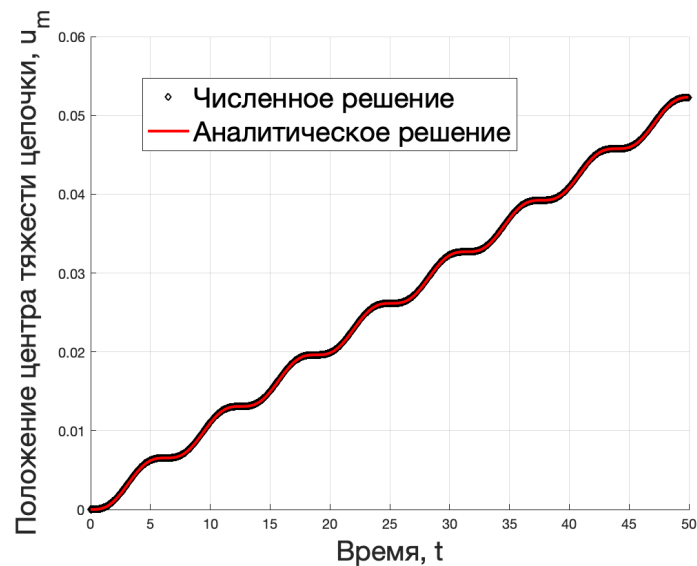
б) Для бесконечной решетки:

$$u_{n,m} = \frac{A}{\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Omega_{s,q} \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega_{s,q} t)}{m_* \Omega_{s,q} (\Omega_{s,q}^2 - \omega^2)} \cos(2(sn + qm)) dsdq \quad (4.16)$$

Построим графики для численного и аналитического решений данной задачи при следующих параметрах: $\Delta t = 0.05$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $M = 31$, $n = 0$, $m = 0$, $A = 1$, $\omega = 1$, $v_{0,0} = 0$.



(a) Перемещение центрального элемента.



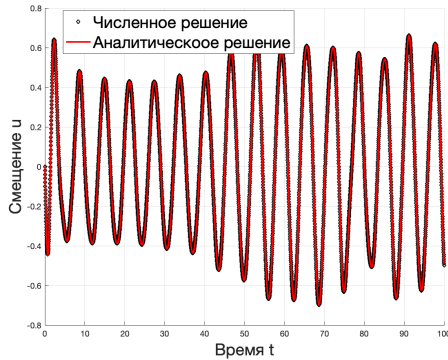
(b) Перемещение центра тяжести.

Рис. 4.4. Движение центра тяжести и центрального элемента двумерной решетки, на которую действует периодическая сила. $\Delta t = 0.05$, $\omega_* = 1$, $N = 31$, $M = 31$, $n = 0$, $m = 0$, $A = 1$, $\omega = 1$.

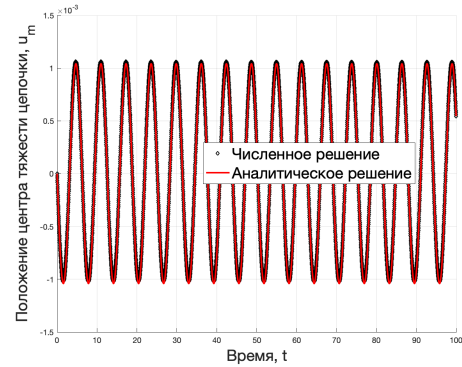
Из полученных графиков 4.4 можно сделать следующие выводы: координата центра тяжести цепочки растет почти линейно с течением времени, как и в случае одномерной цепочки. Кроме того можно видеть, что численное и аналитическое решения совпадают с большой точностью, что говорит о корректности

полученных результатов.

Зададим начальную скорость для центрального элемента по аналогичному одномерной цепочке закону $v_{0,0} = -\frac{A}{\omega t}$ (чтобы исключить околотинейный рост положения центра тяжести цепочки).



(а) Перемещение центрального элемента.



(б) Перемещение центра тяжести.

Рис. 4.5. Движение центра тяжести и центрального элемента двумерной решетки, на которую действует периодическая сила с ненулевой начальной скоростью центрального элемента.

$$\Delta t = 0.02, \omega_* = 1, N = 31, M = 31, n = 0, m = 0, A = 1, \omega = 1, v_{0,0} = -1.$$

Тогда получим графики 4.5 (построенные при параметрах $\Delta t = 0.02, \omega_* = 1, N = 31, M = 31, n = 0, m = 0, A = 1, \omega = 1, v_{0,0} = -1$) из которых видно, что средняя координата центра тяжести цепочки остается постоянной за период колебаний, что полностью согласуется с теоретическими выкладками 2.28.

Кроме того, определенный интерес представляет движение двумерной решетки, на которую действует сила, равная собственной частоте цепочки (рисунк 4.6). Для удобства изучения графиков, зададим начальную скорость по указанному выше закону и исключим линейный рост координаты центра тяжести цепочки во времени (параметры для построения графика: $\Delta t = 0.02, \omega_* = 1, N = 31, M = 31, n = 0, m = 0, A = 1, \omega = 2.82, v_{0,0} = -0.3546$).

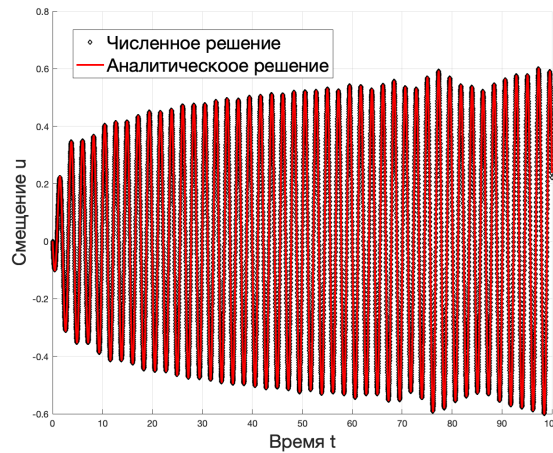


Рис. 4.6. Колебания центрального элемента двумерной решетки под действием гармонической силы с резонансной частотой.

$$\Delta t = 0.02, \omega_* = 1, N = 31, M = 31, n = 0, m = 0, A = 1, \omega = 2.82, v_{0,0} = -0.3546$$

Из полученного графика видно, что численное решение совпадает с аналитическим, что говорит о корректности полученных результатов. Кроме того можно заметить, что с течением времени амплитуда колебаний цепочки возрастает, что подтверждает факт того, что вынуждающая силы имеет частоту, равную собственной частоте цепочки.

4.6 Полубесконечная решетка с гармонической силой на границе

В данном разделе будет рассмотрено решение задачи о колебаниях решетки, вдоль двух вертикальных направлений которой приложена гармоническая сила. На рисунке 4.7 приведена конфигурация квадратной решетки к данной задаче. Граничные и начальные условия для данной задачи следующие:

$$u_{n,m}(0) = 0 \quad v_{n,m}(0) = 0 \quad F_{n,m}(t) = \begin{cases} A \sin(\omega t), & n = -1, 0 \\ 0, & n \neq -1, 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

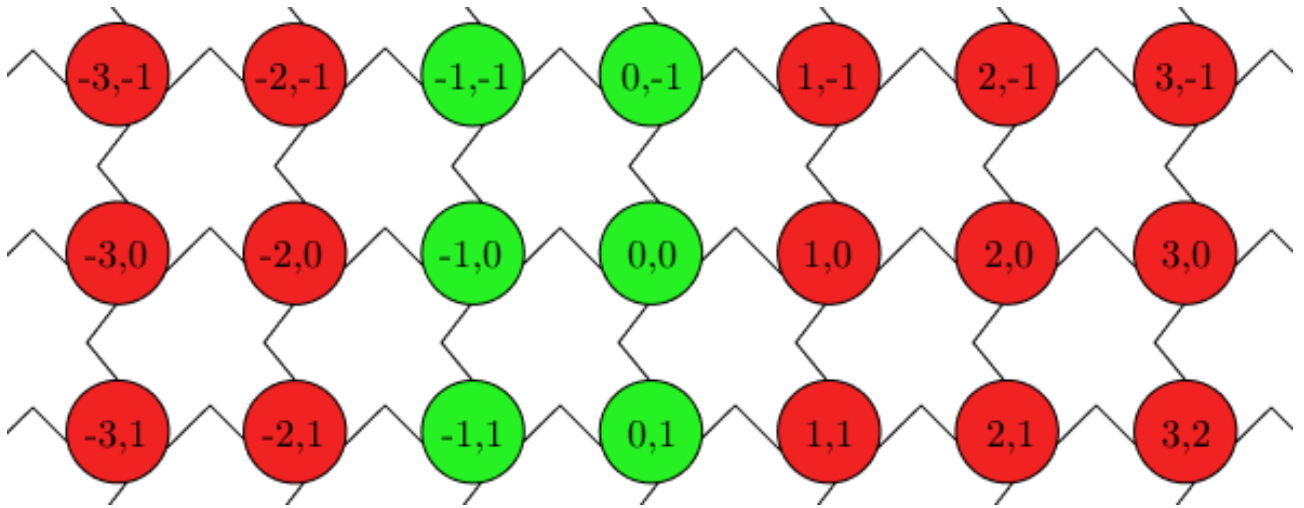


Рис. 4.7. Конфигурация двумерной решетки для задачи, решаемой в разделе 4.6. Зеленым выделены элементы, к которым приложена гармоническая вынуждающая сила. Жесткости всех связей одинаковы и равны k . Массы всех элементов также одинаковы и равны m_*

В соответствии с полученным решением 4.8 и принципом суперпозиции (так как мы рассматриваем линейные кристаллы), мы можем записать решение данной задачи в следующем общем виде:

$$u_{n,m} = \frac{1}{NM} \sum_{i,j} \sum_{k=-1}^0 \sum_{l=-\frac{M+1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \int_0^t \frac{F_{k,l}(\tau) \sin(\Omega(t-\tau))}{m_* \Omega} d\tau e^{2\pi I(\frac{i(n-k)}{N} + \frac{j(m-l)}{M})} \quad (4.18)$$

Зададим гармоническую силу в следующем виде: $F_{k,l}(\tau) = A \sin \omega \tau$. Тогда выражение 4.18 преобразуется в:

$$u_{n,m} = \frac{A}{NM} \sum_{i,j} \sum_{k=-1}^0 \sum_{l=-\frac{M+1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} \frac{\Omega \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega t)}{m_* \Omega (\Omega^2 - \omega^2)} e^{2\pi I(\frac{i(n-k)}{N} + \frac{j(m-l)}{M})} \quad (4.19)$$

Устремим высоту и ширину решетки к бесконечности ($M \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$).

Тогда получим:

$$u_{n,m} = \frac{A}{\pi^2 m_*} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{k=-1}^0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\Omega_{s,q} \sin(\omega t) - \omega \sin(\Omega_{s,q} t)}{\Omega_{s,q} (\Omega_{s,q}^2 - \omega^2)} e^{2Is(n-k) + 2Iq(m-l)} ds dq \quad (4.20)$$

Этим выражением дается смещение любого элемента полубесконечной цепочки. Стоит отметить, что в силу симметрии исходной задачи имеет смысл рассматривать только движение частиц, находящихся справа от вертикальных направлений (и на правом вертикальном направлении), вдоль которых приложена сила, то есть для частиц $n \geq 0$. Кроме того, можно воспользоваться приемом из первого раздела настоящей работы и заменить экспоненту с мнимым показателем на косинус вещественного выражения — это позволит упростить вычисления по полученной формуле.

ГЛАВА 5

ДВУМЕРНАЯ КВАДРАТНАЯ РЕШЕТКА С РАЗРЫВОМ

В данном разделе речь пойдет про решение задачи о прохождении плоскопараллельной волны через интерфейс, представляющий собой вертикальное направление, вдоль которого отсутствует часть горизонтальных связей частиц между собой (см. рисунок 5.1).

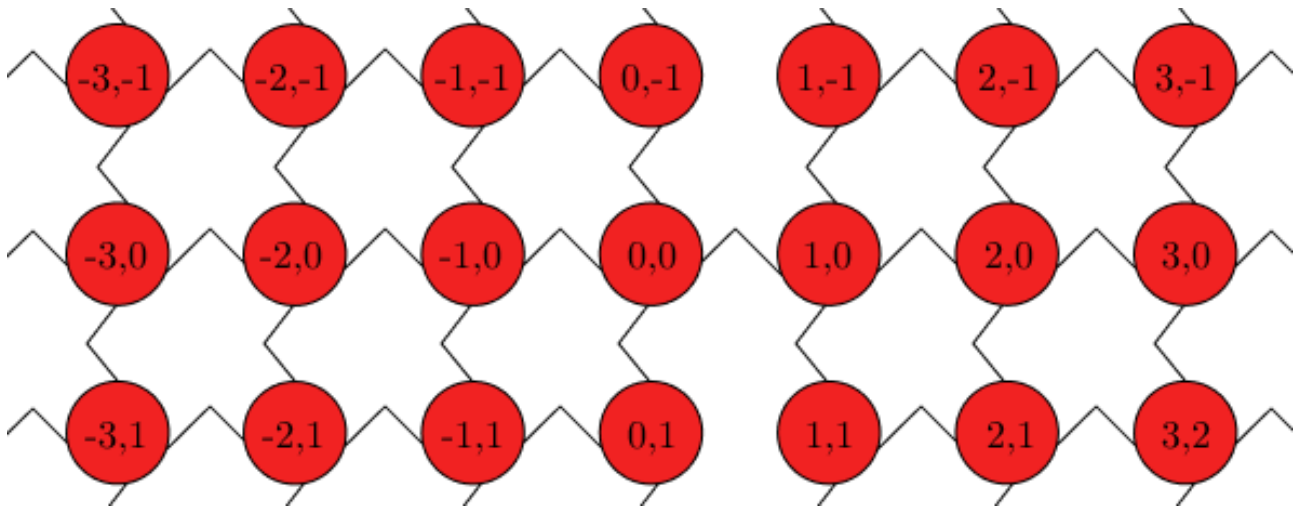


Рис. 5.1. Конфигурация двумерной решетки для задачи, рассматриваемой в главе 5.1. Массы всех элементов одинаковы и равны m_* . Жесткости всех связей одинаковы и равны k

В силу сложности данной задачи для аналитического решения, в этой главе не будет рассмотрено аналитическое решение динамики данной системы. Вместо этого будет проведен численный анализ закона сохранения полной энергии в решетке, а также исследована зависимость коэффициента прохождения энергии через интерфейс от относительного количества горизонтальных связей на интерфейсе к толщине интерфейса. Толщину интерфейса будем обозначать символом w .

5.1 Численное решение

Численное решение поставленной задачи будем проводить при помощи метода Верле. При вычислении значений потенциальной энергии стоит учесть, что, так как на границах расчетной области стоят условия периодичности, то при ее вычислении в граничных узлах области на пружинах, направленных в сторону границы расчетной области ее (потенциальную энергию) следует делить на 2, так как половина энергии деформации на этих пружинах принадлежит одной ячейке периодичности, а половина — соседней с ней. Начальные условия будем задавать в левой части решетки при помощи следующих формул, вывод которых представлен, например, в [13, 15]:

$$\begin{aligned}
 u_{n,m} &= B_{n,m} \sin(k_1 n), & B_{n,m} &= U_0 \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}(n - n_0)^2\right) \\
 v_{n,m} &= -B_{n,m} [\Omega \cos(k_1 n) - \beta^2 g_1 (n - n_0) \sin(k_1 n)] \\
 g_1 &= \frac{a}{2\Omega} \sqrt{\Omega^2 \left(\frac{4k}{m_*} - \Omega^2\right)}, & \Omega &= 2\sqrt{\frac{k}{m_*}} \sin\left(\frac{k_1}{2}\right), \\
 n &\in (n_1, n_2), & m &\in \left(\frac{-M+1}{2}, \frac{M-1}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где U_0 — амплитуда волнового пакета, n_0 - координата центра волнового пакета, k_1 - частота волн внутри волнового пакета, β - частота огибающей волнового пакета, a - равновесное расстояние между элементами решетки (оно полагается равным единице).

Для всех элементов решетки, где не заданы данные начальные условия, начальные условия принимаются нулевыми.

Приведем графики зависимости кинетической, потенциальной и полной энергий от времени в правой части решетки, в левой, а также во всей решетке

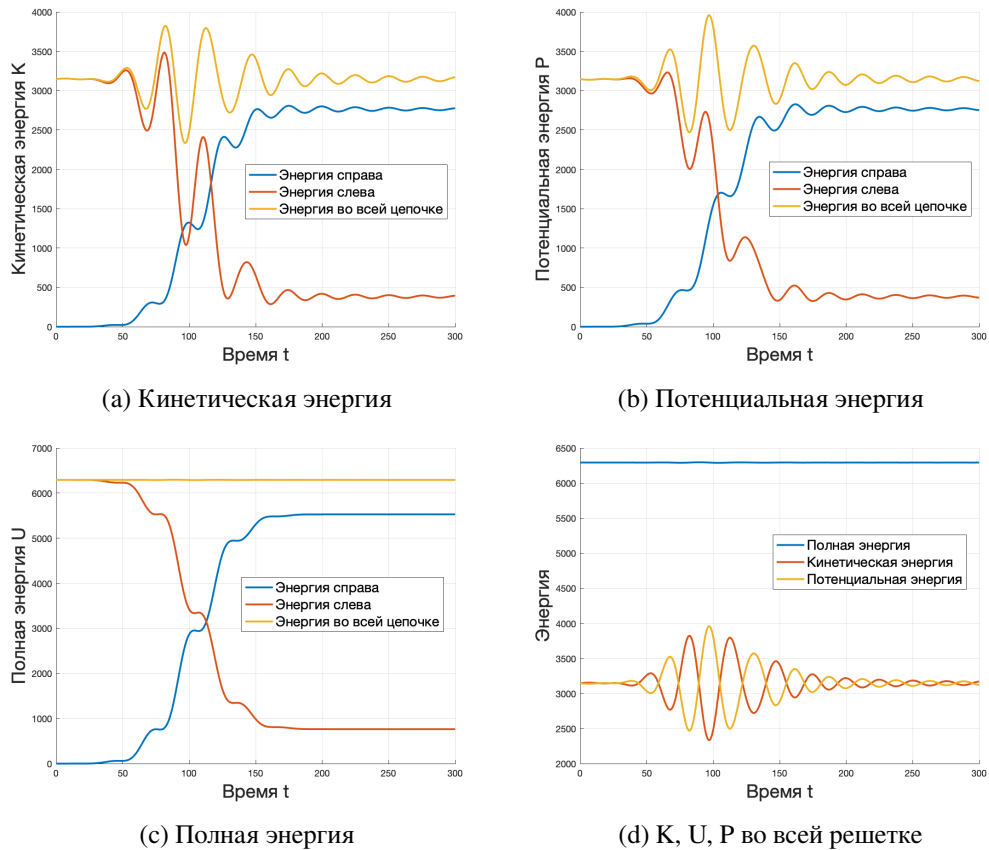


Рис. 5.2. Зависимость энергии в правой и левой частях решетки, а также всей решетки от времени при задании начальных условий по формулам 5.1 со следующими параметрами: $N = 1001$, $M = 51$, $m = 1$, $k = 1$, $\Delta t = 0.05$, $U_0 = 20$, $\beta = 0.03$, $k_1 = 0.1$, $n_0 = 400$, $n_1 = 301$, $n_2 = 500$, $w = 41$

(рисунок 5.2). Графики построены при следующих параметрах: $N = 1001$, $M = 51$, $m = 1$, $k = 1$, $\Delta t = 0.05$, $U_0 = 20$, $\beta = 0.03$, $k_1 = 0.1$, $n_0 = 400$, $n_1 = 301$, $n_2 = 500$, $w = 41$. Анализируя полученные численные зависимости можно сделать следующие выводы:

- Из графиков, представленных на рисунках 5.2а, 5.2б, 5.2с видно, что в момент времени $t = 0$ вся энергия решетки сосредоточена слева от интерфейса. Кроме того, можно заметить, что в начальный момент времени кинетическая энергия решетки равна потенциальной — это связано с заданием начальных условий по формулам 5.1.
- С течением времени происходит отражение падающей на интерфейс волны, а также ее прохождение через интерфейс. При этом кинетическая, потен-

циальная и полная энергия в решетке выходят на некоторые конкретные значения (на горизонтальные асимптоты), причем этот процесс не монотонен.

в) Из графика, представленного на рисунке 5.2d видно, что полная энергия системы сохраняется, а кинетическая и потенциальная энергии переходят друг в друга.

В соответствии с π - теоремой, коэффициент прохождения энергии через интерфейс T может зависеть только от следующих безразмерных величин:

- а) k_1 - частота волн внутри волнового пакета;
- б) β - частота огибающей волнового пакета;
- в) $\frac{g_1}{a\omega_*}$ - отношение групповой скорости в решетке к параметру самой решетки ($\omega_* = \sqrt{\frac{k}{m_*}}$, $a = 1$);
- г) $\frac{U_0}{a}$ - отношение амплитуды огибающей волнового пакета к расстоянию между частицами ($a = 1$);
- д) $\frac{w}{M}$ - относительный размер отверстия.

Далее рассмотрим зависимость коэффициента прохождения от указанных безразмерных величин:

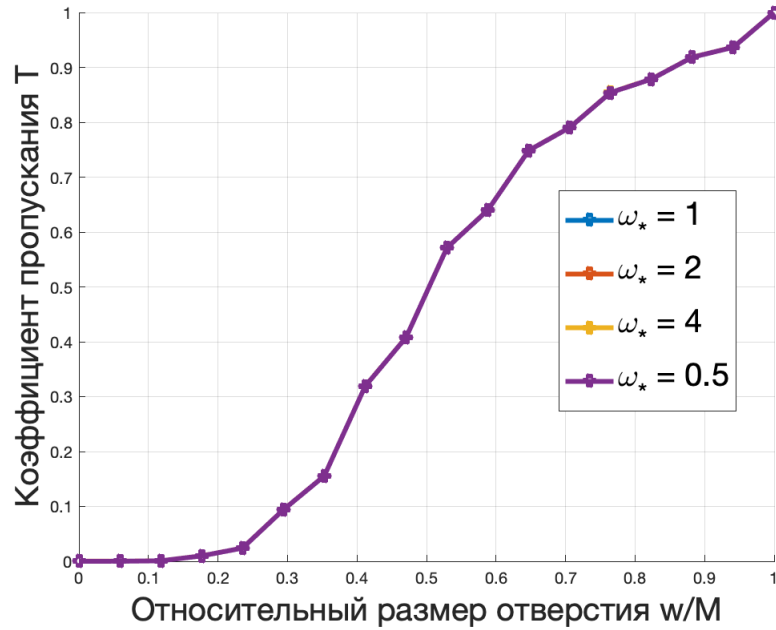


Рис. 5.3. Зависимость коэффициента прохождения энергии через интерфейс решетки от относительного размера отверстия для разных значений величины $\omega_*^2 = \frac{k}{m_*}$.
 $N = 1001, M = 51, m = 1, k = 1, \Delta t = 0.05, U_0 = 20, \beta = 0.03, k_1 = 0.1, n_0 = 400, n_1 = 301, n_2 = 500, w = 0.51, \omega_* = \frac{1}{2}, 1, 2, 4$

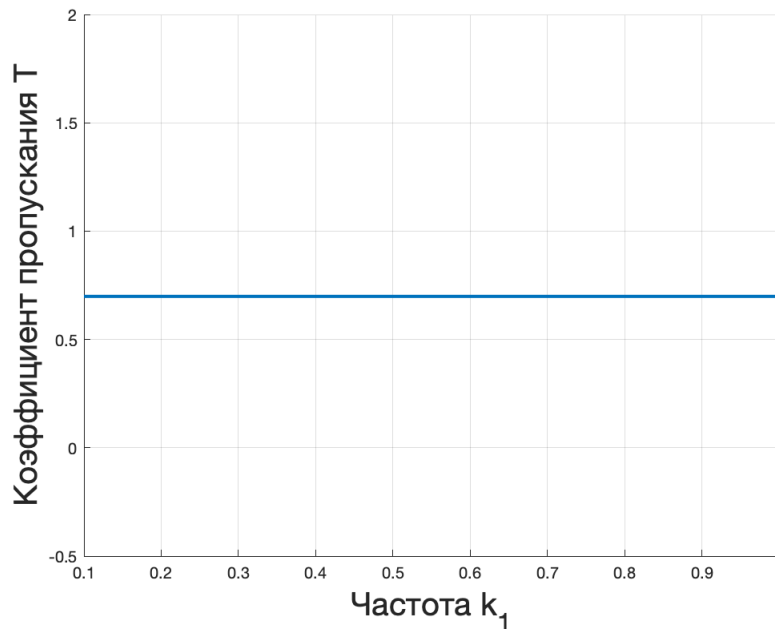


Рис. 5.4. Зависимость коэффициента прохождения энергии через интерфейс решетки от величины k_1 . $N = 1001, M = 51, m = 1, k = 1, \Delta t = 0.05, U_0 = 20, \beta = 0.03, n_0 = 400, n_1 = 301, n_2 = 500, k_1 = 0.1..1, \omega = 1, w = 31$

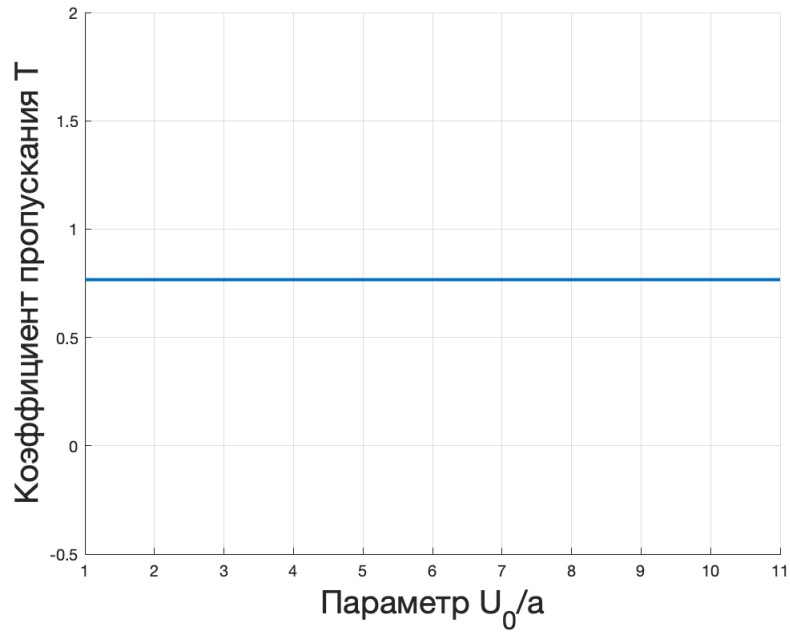


Рис. 5.5. Зависимость коэффициента прохождения энергии через интерфейс решетки от величины $\frac{U_0}{a}$. $N = 1001$, $M = 41$, $m = 1$, $k = 1$, $\Delta t = 0.05$, $U_0 = 20$, $\beta = 0.03$, $n_0 = 400$, $n_1 = 301$, $n_2 = 500$, $k_1 = 0.1..1$, $\omega_* = 1$, $w = 31$

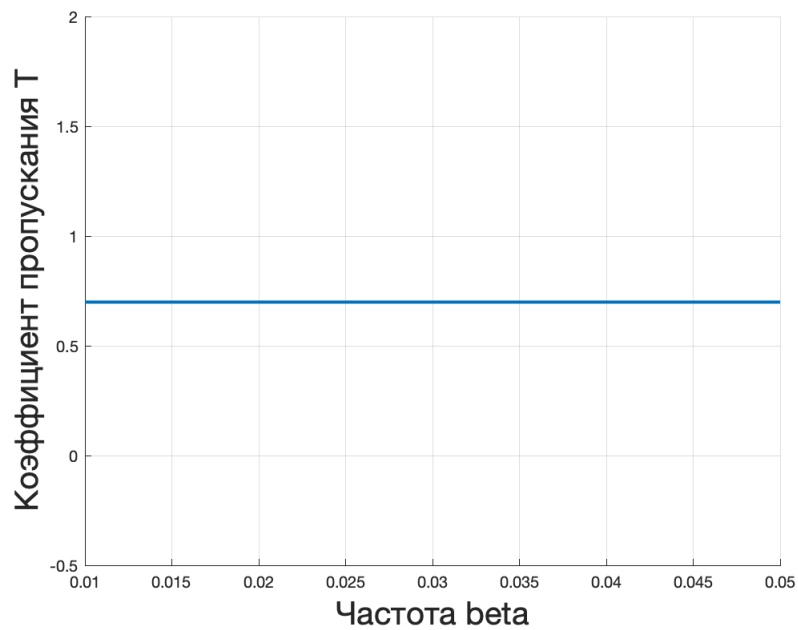


Рис. 5.6. Зависимость коэффициента прохождения энергии через интерфейс решетки от величины β . $N = 1001$, $M = 51$, $m = 1$, $k = 1$, $\Delta t = 0.05$, $U_0 = 20$, $\beta = 0.03$, $n_0 = 400$, $n_1 = 301$, $n_2 = 500$, $k_1 = 0.1..1$, $\omega_* = 1$, $w = 31$

Из полученных численных зависимостей можно сделать следующий вывод:

коэффициент прохождения энергии через интерфейс T зависит только от относительной толщины интерфейса $\frac{w}{M}$ и не зависит ни от каких других параметров задачи. Кроме этого можно заметить, что зависимость коэффициента прохождения энергии через интерфейс от относительной толщины отверстия $\frac{w}{M}$ носит сложный нелинейный характер.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения настоящей работы были получены общие решения для уравнений динамики одномерного и двумерного гармонического кристалла при конечном и бесконечном количестве элементов. Проведено сравнение с численными решениями для динамики этих структур, полученными методом Верле (все полученные численные решения совпали с аналитическими). Кроме этого были получены асимптотические формулы при стремлении времени к бесконечности для одномерного гармонического кристалла. Основные выводы по этой части работы следующие:

- а) В одномерной конечной цепочке с периодическими граничными условиями выполняется закон баланса количества движения (в частности, при задании ненулевой скорости в начальный момент времени у центрального элемента конечной цепочки, цепочка стремится удалиться от своего начального положения на бесконечное расстояние; при задании периодической вынуждающей силы, действующей на центральный элемент цепочки, цепочка стремится удалиться на бесконечное расстояние от своего начального положения).
- б) При задании ненулевой начальной скорости у центрального элемента бесконечной одномерной цепочки (а также при приложении внешней гармонической силы к центральному элементу бесконечной одномерной цепочки с частотой, не равной $2\sqrt{\frac{k}{m}}$), центральный ее элемент (а также все остальные) не стремится удалиться на бесконечное расстояние от исходного положения — это следует из полученных асимптотических формул.
- в) Решения для конечной и бесконечной одномерной цепочки, а также для конечной и бесконечной двумерной решетки совпадают до определенного

момента времени, который обусловлен возвращением волны, отраженной от границ ячейки периодичности, к исследуемому элементу цепочки, после чего расходятся.

- г) При приложении периодической вынуждающей силы к элементу конечной одномерной или двумерной цепочки, количество резонансных частот равно количеству элементов в цепочке.
- д) При приложении периодической вынуждающей силы к центральному элементу конечной одномерной цепочки, резонансная частота одна и она равна $2\sqrt{\frac{k}{m}}$.
- е) При приложении к центральному элементу бесконечной одномерной цепочки периодической силы с частотой $\omega > 2$ или $\omega < 2$, колебания при $t \rightarrow \infty$ не затухают, а принимают гармонический характер с частотой, равной частоте вынуждающей силы — это является общим свойством линейных колебательных систем, которое тут также выполнилось.
- ж) При частоте вынуждающей силы $2\omega > \omega_*$, волны локализуются вблизи источника и быстро затухают при удалении от него.
- з) Полученные асимптотические формулы для одномерной цепочки, к которой приложена гармоническая сила полностью совпадают с формулами, приведенными в [4]. Полученные в данной работе формулы дают асимптотики для перемещений элементов цепочки до порядка малости $\sqrt{\frac{1}{t}}$ — до большего, чем приведено в книге [4].

Кроме этого решена задача для одномерной цепочки с покоящимся элементом двумя способами, которые привели к одному и тому же результату. Метод, использующийся при решении данной задачи, включающий в себя модифицирование исходного уравнения, может рассматриваться как математический метод решения дифференциальных уравнений, в которые входит как трансформанта Фурье функции, так и сама функция. Кроме этого данный подход можно

использовать для вычисления интегралов специального вида.

Также были исследованы энергетические процессы, происходящие в двумерном гармоническом кристалле с разрывом части горизонтальных связей вдоль одного вертикального направления. Было установлено, что закон сохранения энергии в такой системе действительно выполняется, при этом часть энергии проходит через интерфейс, а часть отражается, причем чем меньше связей было разорвано, тем больше энергии проходит из одной части цепочки в другую. Также было установлено, что коэффициент прохождения энергии через интерфейс зависит только от относительного размера отверстия и не зависит ни от каких других параметров задачи. Для вывода аналитической формулы для данной нелинейной зависимости (коэффициента прохождения энергии через интерфейс от относительной толщины отверстия), возможно, может быть использован метод, применяющийся в работе [10] для вывода формулы для коэффициента прохождения энергии в одномерной цепочке с неоднородностью. Для этого надо вывести формулу для производной от потока энергии по времени и применить некоторые допущения, после чего, вероятно, может быть получена формула для зависимости коэффициента пропускания от относительной толщины отверстия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добрецов Роман Юрьевич и Сахарова, Е. Г. Информатика. Основы применения численных методов (2017).
2. Жилин, П. Теоретическая механика. *Фундаментальные законы механики* (1986).
3. Федорюк, М. В. *Метод перевала* (Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977).
4. Hemmer, P. C. *Dynamic and stochastic types of motion in the linear chain* англ. (Tapir forlag, 1959).
5. Slater, L. J. *Generalized hypergeometric functions* англ. (Cambridge university press, 1966).
6. Баимова Юлия А. Бессонов Николай М., К. А. М. Motion of localized disturbances in scalar harmonic lattices [в печати].
7. Керимов, М. К. Исследования о нулях специальных функций Бесселя и методах их вычисления. *Журнал вычислительной математики и математической физики* **54**, 1387—1441 (2014).
8. Кривцов, А. М. Dynamics of matter and energy. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **103**, e202100496 (2023).
9. Кузькин ВА и Кривцов, А. Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics* **3**, 1850004 (2018).
10. Кузькин, В. Acoustic transparency of the chain-chain interface [в печати].
11. Тимошенко, Л. Дискретное преобразование Фурье и его быстрые алгоритмы. *Современные наукоемкие технологии*, 188—193 (2014).

12. Davis, P. J. Leonhard euler's integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton abramowitz. АНГЛ. *The American Mathematical Monthly* **66**, 849—869 (1959).
13. Schelling, P., Phillpot, S. & Keblinski, P. Phonon wave-packet dynamics at semiconductor interfaces by molecular-dynamics simulation. АНГЛ. *Applied Physics Letters* **80**, 2484—2486 (2002).
14. Van Gunsteren, W. F. & Berendsen, H. J. A leap-frog algorithm for stochastic dynamics. АНГЛ. *Molecular Simulation* **1**, 173—185 (1988).
15. Mielke, A. Macroscopic behavior of microscopic oscillations in harmonic lattices via Wigner-Husimi transforms. АНГЛ. *Archive for rational mechanics and analysis* **181**, 401—448 (2006).
16. Дёч, Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования* АНГЛ. (Рипол Классик, 1971).