

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого**  
**Институт прикладной математики и механики**  
**Кафедра “Теоретическая механика”**

Работа допущена к защите  
Зав.кафедрой, д.ф.-м.н., проф.  
\_\_\_\_\_ А. М. Кривцов  
"\_\_" \_\_\_\_\_ 2017г.

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
**на соискание академической степени**  
**МАГИСТРА**

**Тема:**

**Исследование численного решения связанной упруго-динамической задачи  
на примере коарктации аорты**

Направление: 01.04.03. – Механика и математическое моделирование

Выполнила студентка гр. 63604/1  
Руководитель: кандидат физ.-мат. наук

Е.Л. Светличная  
О.С. Лобода

Санкт-Петербург  
2017

## Оглавление

Введение .....	3
1. Одномерная модель .....	6
1.1. Математическая постановка задачи .....	6
1.2. Начальные и граничные условия для одномерной модели .....	9
1.3. Результаты одномерного расчета.....	10
2. Моделирование аорты в расчетном пакете Simula Abaqus. ....	12
2.1.Краткое описание метода решения, геометрия модели и построение сетки.....	12
2.2. Граничные условия для трехмерной модели .....	15
3. Результаты.....	18
4. Реализация решения связанно-упругой задачи в Abaqus CAE. ....	28
5. Анализ полученных результатов .....	33
Список литературы.....	35

## Введение

Вероятность рождения ребенка с коарктацией (сужением) аорты составляет 0.001%. Если это случается, кровоток к нижней части туловища осуществляется с помощью многочисленных мелких коллатеральных артерий. Коллатерали соединяют вышележащий участок аорты с нижележащим участком и обладают высоким сосудистым сопротивлением, поэтому артериальное давление в верхней части туловища может быть на 40-50% выше, чем в нижней части. Это приводит к тому, что нижняя часть туловища ребенка развивается значительно медленнее верхней. Что обуславливает необходимость проведения хирургического вмешательства. Однако после операции часто возникает явление рекоарктации (повторное сужение участка аорты) [1].

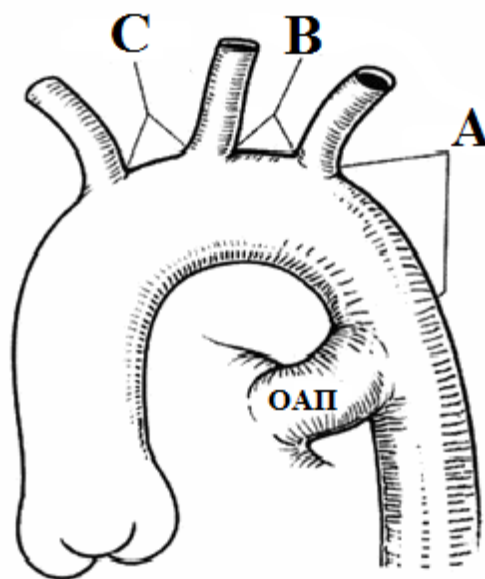


Рис.1 Строение аорты

Дугу аорты принято подразделять на сегменты (рис 1):

- участок аорты между открытым артериальным протоком (ОАП) и левой подключичной артерией (ЛПКА) – сегмент А - перешеек аорты или истмус;
- участок между ЛПКА и левой общей сонной артерией (ОСА) – сегмент В или дистальная часть дуги;
- участок между левой ОСА и брахиоцефальным стволом (БЦС) – сегмент С или проксимальная часть дуги аорты.

После рождения ребенка происходит закрытие ОАП в течение двух часов, однако, существуют случаи нарушения данного процесса, которые приводят к сужению части аорты в месте присоединения к ОАП. Такое нарушение носит название «коарктация аорты» (КоАо). Один из наиболее успешных хирургических методов лечения коарктации

аорты предложен в 1977 г. J. Amato. Суть метода заключается в резекции КоАо с наложением расширенного анастомоза «конец в конец», что позволило выполнить резекцию участка КоАо и расширить гипоплазированную дугу [9]. М. Elliott в 1987 г. модифицировал способ Amato, увеличив анастомоз до уровня БЦС (Рис2). [8].

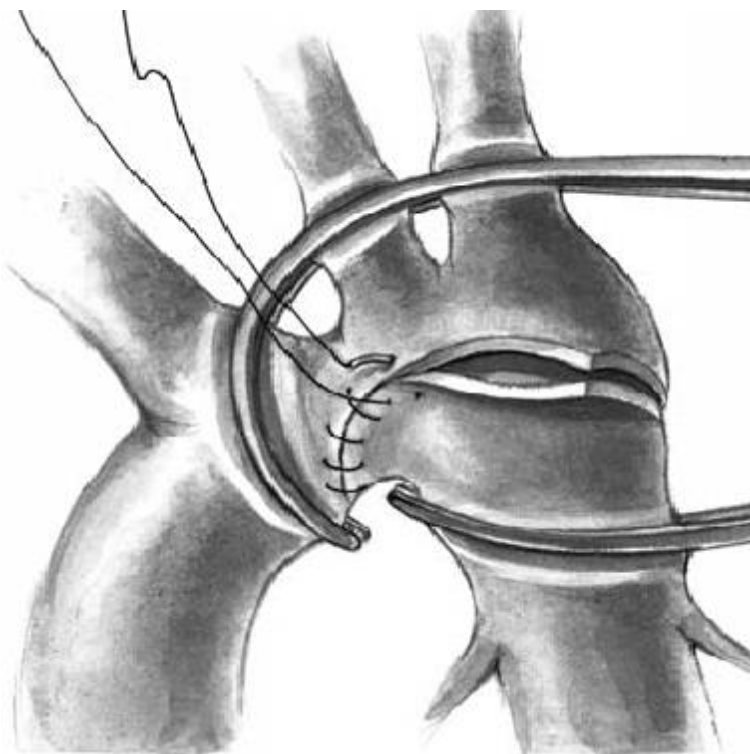


Рис 2. Хирургическое лечение коарктации аорты.

В серии операций L. Neugn с использованием техник резекции КоАо с наложением расширенного и радикально расширенного анастомоза «конец в конец» смертность составила 6%, рекоарктация - в 10% случаев, что доказывает успешность применимых методов[10].

На основании вышеизложенного, очевидно, что моделирование и исследование основных гемодинамических параметров, а именно давления и скорости кровотока, в аорте необходимо для выявления закономерностей, приводящих к рекоарктации, и являются актуальными задачами биомеханики.

### **Цель работы:**

*Исследование гемодинамики аорты с коарктацией.*

### **Задачи:**

- Моделирование потока крови в аорте в одномерном случае с использованием пакета Wolfram Mathematica

- Сравнение гемодинамических параметров модели аорты с коарктацией, аорты здорового ребенка и аорты после проведения хирургической операции.
- Рассмотрение трехмерной постановки задачи в пакете Simula Abaqus.
- Проведение анализа полученных результатов.

# 1. Одномерная модель

## 1.1. Математическая постановка задачи

Одномерная модель гемодинамики была рассмотрена в работе [4]. Она предполагает работу с осредненными по поперечному сечению потока гемодинамическими параметрами. Поскольку течение в кровеносном сосуде направлено, главным образом, вдоль его оси, допущение об одномерности течения часто используется при исследовании волновых процессов в кровеносной системе. В этом случае движение крови по сосуду описывается гиперболической системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1), выражающих законы сохранения массы и импульса. Вязкие эффекты описываются входящим в правую часть уравнения сохранения импульса выражением для силы трения.

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial us}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = f_e + f_R. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $t$  – время,  $x$  – продольная координата,  $s$  – площадь поперечного сечения аорты,  $u$  – осредненная по поперечному сечению скорость движения крови вдоль сосуда,  $p$  – осредненное давление,  $\rho$  – плотность крови,  $f_e$  – внешняя сила,  $f_R$  – сила сопротивления, обусловлена вязкими свойствами крови.

С целью учета взаимодействия течения и стенки сосуда система замыкается полуэмпирической зависимостью площади поперечного сосуда от давления в потоке. Наиболее простой, но в то же время неплохо отражающей основные закономерности взаимодействия течения и оболочки [11], является кусочно-линейная зависимость (2):

$$s(p) = \begin{cases} s_{min} + \frac{s_{max} - s_{min}}{p_{max} - p_{min}} (p - p_{min}), & p_{min} < p < p_{max} \\ s_{min}, & p < p_{min} \\ s_{max}, & p_{max} < p \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $s_{min}$ ,  $s_{max}$ ,  $p_{min}$ ,  $p_{max}$  являются характеристиками данного сосуда, а именно аорты.

Однако, моделируя задачу в вычислительных пакетах, таких как Wolfram Mathematica, неизбежно возникновение ошибок связанных с дифференцированием функций, имеющих разрыв.

В [5] предложена близкая по форме, но обладающая свойством непрерывной дифференцируемости, функциональная зависимость вида (3):

$$s(p) = \left( \sqrt{s_{min}} + \frac{\sqrt{s_{max}} - \sqrt{s_{min}}}{1 + \mu \exp(p/E)} \right). \quad (3)$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль упругости (Па).

При этом реальный расход воссоздан за счет функциональной зависимости (4) поперечного сечения от диаметров отделов аорты (Рис 4).

$$\begin{aligned} S_{avg} = & (\text{DiameterIN}^2 + \text{Diameter1}^2 * (\text{Erf}[x - X1] + 1)/2 + \text{Diameter2} ** \\ & (\text{Erf}[x - X2] + 1)/2 - \text{Diameter1}^2 * * (\text{Erf}[x - X2] + 1)/2 + \text{Diameter3}^2 * \\ & (\text{Erf}[x - X3] + 1)/2 - -\text{Diameter2}^2 * (\text{Erf}[x - X3] + 1)/2 + \text{Diameter4}^2 * \quad (4) \\ & * (\text{Erf}[x - X4] + 1)/2 - \text{Diameter3}^2 * (\text{Erf}[x - X4] + 1)/2) - -\text{DiameterIN}^2 * \\ & (\text{Erf}[x - X4] + 1)/2 + \text{Deffect}^2 * * (\text{Erf}[x - X5] + 1)/2 - \text{Diameter4}^2 * \\ & (\text{Erf}[x - X5] + 1)/2 + \text{Diameter4}^2 * (\text{Erf}[x - X6] + 1)/2 - \text{Deffect} * \\ & (\text{Erf}[x - X6] + 1)/2 ; \end{aligned}$$

Здесь DiameterIN – входной диаметр, Diameter1 – диаметр БЦС, Diameter2 – диаметр ОСА, Diameter3 – диаметр ЛПКА, Diameter4 = Diameter6 – выходной диаметр, Diameter5 – диаметр сужения (коарктации), X1-X6 – координаты начала соответствующих отделов аорты.

Причем значения  $S_{min}$ ,  $S_{max}$  определяются по формуле (5):

$$\begin{aligned} s_{min} &= G_{min} S_{avg}, \\ s_{max} &= G_{max} S_{avg} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $G_{min}$ ,  $G_{max}$  – определяющие коэффициенты модели.

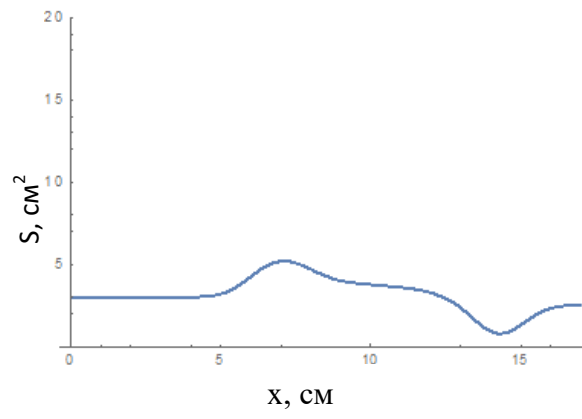


Рис 4 Изменение поперечного сечения аорты(модель с коарктацией).



## 1.2. Начальные и граничные условия для одномерной модели

На левой входной границе аорты известен расход крови, описываемый следующей зависимостью (рис. 3) и вычисляемый по формуле(4).

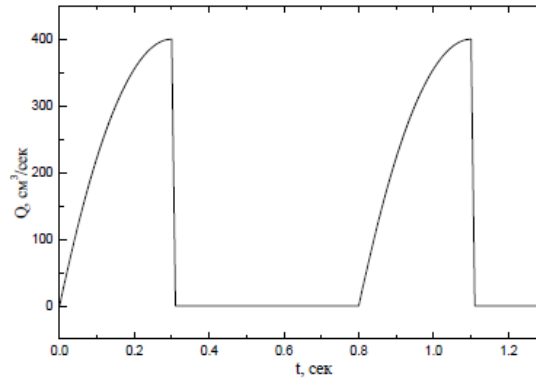


Рис. 3 Расход крови на левой границе сосуда

$$\int_{t-\psi}^{t-\psi+0.3} Q_l(t) dt = 80 \text{ см}^3 / \text{с} \quad (4)$$

здесь  $\psi = t/T$ ,  $T=0.8$  сек.

На правой границе поддерживается постоянное давление (100 мм.рт.ст.). Здесь участки парабол соответствуют периоду систолы (выброс крови сердцем в кровеносную систему), участки, на которых расход равен нулю, соответствуют диастоле – периоду накопления сердцем крови.

Такое граничное условие моделирует сердечный выброс в системе кровообращения человека [7].

Соответствующую указанным условиям зависимость расхода крови от времени на левой границе можно записать в функциональном виде (6), где расход приведен в  $\text{см}^3/\text{с}$ .

$$Q_L(t) = \begin{cases} 8000 \left( -\frac{5}{9}\psi^2 - \frac{1}{3}\psi \right), & \psi \leq 0.3, \\ 0, & \psi > 0.3 \end{cases} \quad (6)$$

На правой границе поддерживается постоянное давление  $P_R=100$  мм.рт.ст.

В начальный момент времени гемодинамические параметры постоянны

$$u(x,0)=10 [\text{см}/\text{с}], s(x,0)=5[\text{см}^2].$$

Здесь величина площади поперечного сечения сосуда, как и в расчетах, соответствует аорте человека.

### 1.3. Результаты одномерного расчета

Решая систему уравнений гемодинамики (1) совместно с полуэмпирической зависимостью площади поперечного сечения сосуда от давления в потоке (3) с начальными и граничными условиями, приведенными в п.1.2, получаем распределение скорости (Рис 5-7).

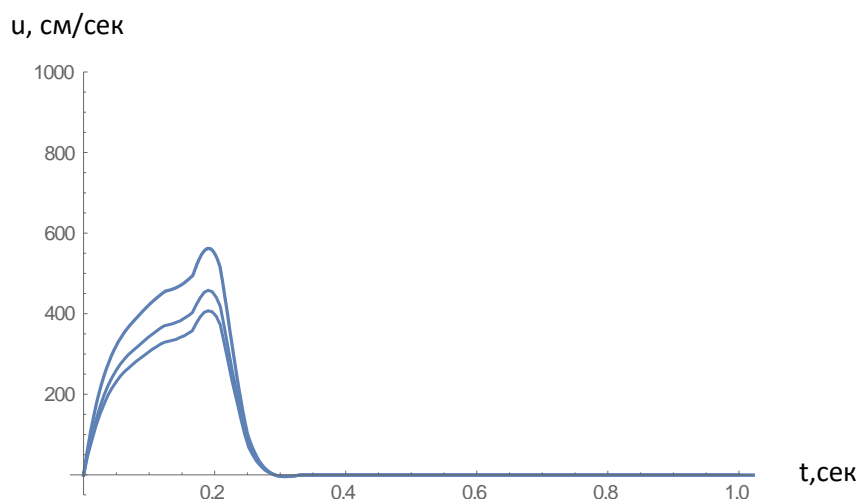


Рис 5 График изменения скорости во времени модель с коарктацией. (Нижний график – место присоединения к БЦС, средний – на входной границе, верхний – место коарктации).

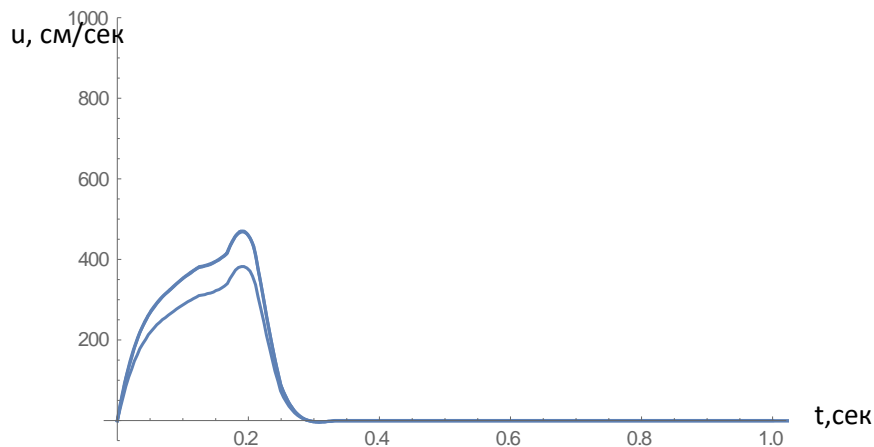


Рис 6 График изменения скорости во времени модель без коарктации. (Верхний график (совпадение двух графиков) – место присоединения к БЦС, место коарктации (диаметр равен выходному, так как коарктации нет в данной модели), нижний – на входной границе).

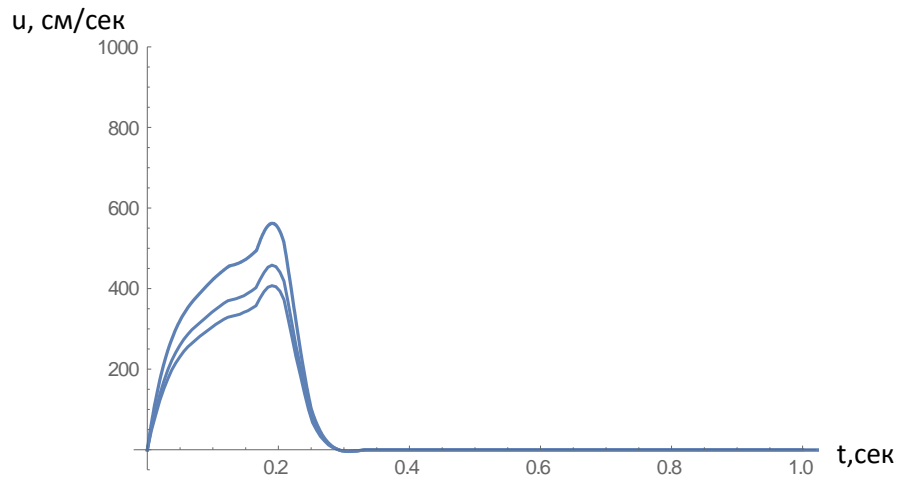


Рис 7 График изменения скорости во времени модель выключенной аорты (нижний график – место присоединения к БЦС, средний – на входной границе, верхний – место коарктации).

Анализируя полученные графики, можно сделать вывод, что сужение части аорты значительно влияет на скорость в месте БЦС, даже незначительное сужение в нисходящей аорте приводят к изменению показателей скорости.

## 2. Моделирование аорты в расчетном пакете Simula Abaqus.

### 2.1. Краткое описание метода решения, геометрия модели и построение сетки.

Расчетный метод, такой как Вычислительная динамика жидкости (CFD), все чаще используется в качестве инструмента для описания сложной гемодинамики и вычисления гидравлических сил, таких как давление и напряжение сдвига [2]. Однако, недостатком этого метода является отсутствие стандартизированных методов оценки и проверки результатов.

Методы вычислительной гидродинамики (CFD) традиционно используются при разработке и анализе моделей в тяжелой промышленности, таких как аэрокосмическая и автомобильная промышленность. Но с недавнего времени эта технология начала использоваться и в биомеханике. Этот метод может не только помочь в процессе проектирования медицинских устройств (протезов, клапанов и др.), но также для прогнозирования изменений в гемодинамической среде (т. е. изменение параметров кровотока).

В данном исследовании мы представляем возможности Abaqus / CFD как универсального инструмента, способного точно описывать как ламинарный, так и турбулентный поток. Кроме того Abaqus/CFD можно использовать на всех трех этапах анализа - моделирования геометрии, построения сетки, решения и последующей обработки. При решении используется метод SIMPLE (Semi-implicit pressure-based scheme for Navier-Stokes equations)- полу-явная схема для уравнений Навье-Стокса со связью по давлению. Приведем алгоритм данной схемы[3]:

1. Задается начальное приближение для поля давления  $P^*$ ;
2. Рассчитывается  $V^*$  по формуле (1)

$$a_0 V_i^0 = -\sum_k a_k V_k^i + b_{i0} - \Delta S m_i (P_1 - P_2) \quad (7);$$

3. Вычисляется поправка давления  $P'$  по формуле (8)

$$A_0 P'_0 = \sum_k A_k P'_k - \sum_k (nV^*)_k \Delta S_k \quad (8);$$

где

$$A_k = -\frac{\Delta S m_i}{a_{0k}} \Delta S_k,$$
$$A_0 = -\sum_k A_k,$$

где  $a_{0k}$  – коэффициент  $a_0$  в (7), определенный на  $k$ -ой грани контрольного объема для давления;

4. Корректируется поле скорости по формуле (9) и поле давления по формуле (10)

$$V_0^i = V_0^{i*} - \frac{\Delta sm_i}{a_0} (P_2' - P_1') \quad (9);$$

$$P' = P - P^* \quad (10).$$

5. Используя скорректированное давление в качестве  $P^*$ , возвращаемся ко второму этапу. Цикл продолжается до достижения сходимости.

При моделировании размеры области подобраны исходя из табл. 1. Моделируемая аорта состоит из восходящей части, далее следует дуга аорты, 3 ответвления: плечевой ствол, сонная артерия и подключичная артерия, и нисходящая часть аорты. Геометрическая модель показана на Рис.6, Рис.7 и Рис.8

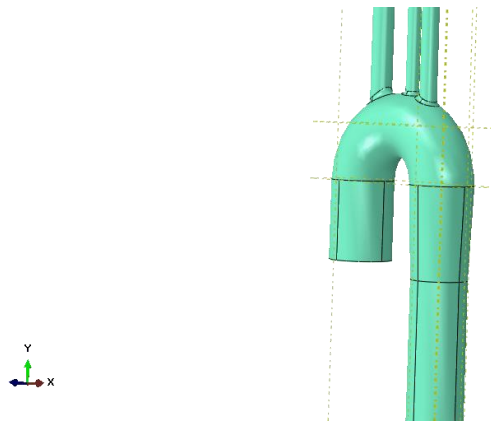


Рис. 6 Модель аорты здорового ребенка.

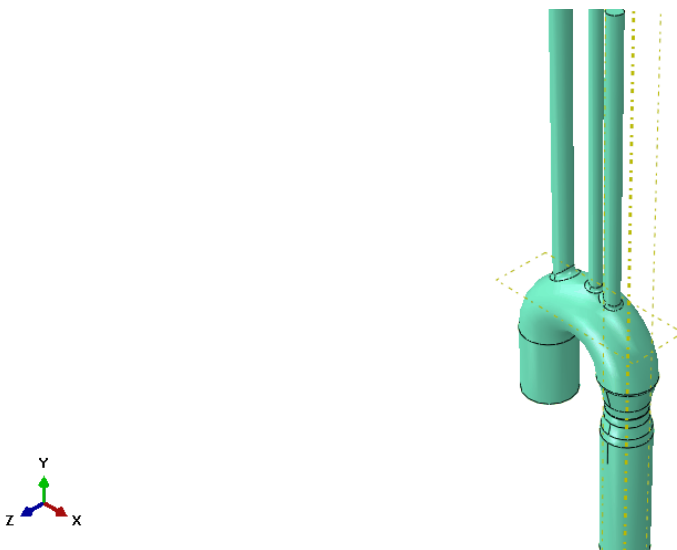


Рис 7. Модель аорты больного ребенка.

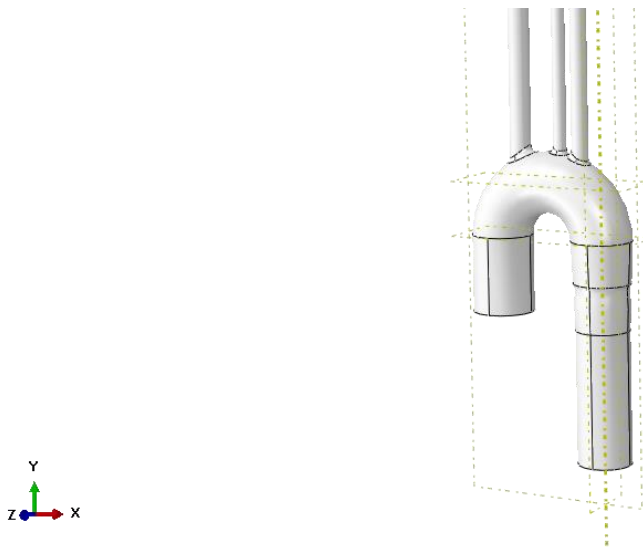


Рис. 8 Модель аорты ребенка после операции.

Сетка построена из элементов типа FC3D4, форма - «tetrahedral», и показана на Рис 9.

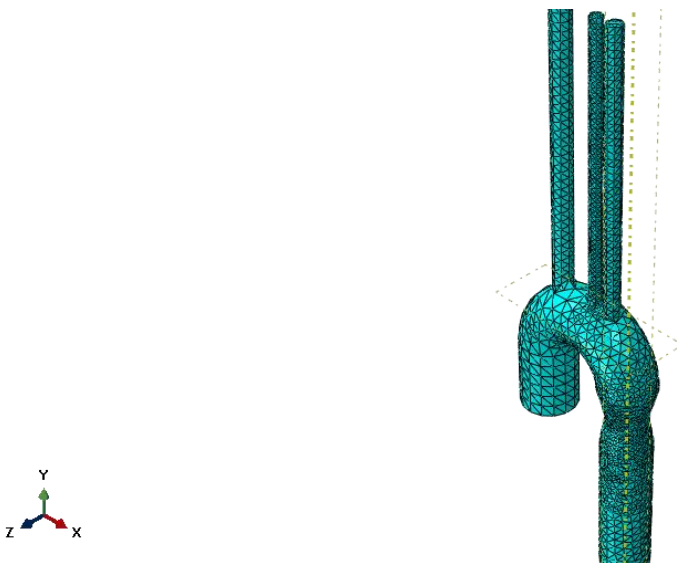


Рис.9 Сетка модели аорты больного ребенка. Размеры: 23543 элементов, 5430 узлов.

Кровь моделируется как несжимаемая жидкость с плотностью  $1056 \text{ кг/м}^3$ . Предполагая, что кровь является Ньютонской жидкостью с динамической вязкостью  $0.04 \text{ Н*с/м}^2$ .

## 2.2. Граничные условия для трехмерной модели

В работе проводятся два расчета для 3d моделей аорты, в одном из которых используется k-ε модель турбулентности, в другом – модель Спаларта-Аллармаса (SA). На входе задается параболический профиль скорости, рассчитываемый по формуле (11)

$$V_z = V_{max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (11)$$

Где  $V_{max}$  – квадрат скорости на входе в центре сечения,  $R$  – радиус на входе,  $r$  – радиальная координата.

На выходе ЛПКА, ОСА, БЦС все компоненты скорости задаются равными нулю.

Давление на выходе из аорты и на выходе ЛПКА, ОСА, БЦС равно 100000 Па. Все значения в расчете заданы по системе СГС.

Цель расчётов сводится к получению графиков профилей поперечных скоростей  $V_z$  и  $V_x$  (в расчете обозначены как  $v3$  и  $v1$ ), профиля давления и амплитуды в области сужения аорты по двум перпендикулярным путям  $p1$ (рис.10) и  $p2$ (рис.11). Эти графики дадут важную информацию о динамике течения. От полученных скоростей зависит деформация стенки аорты. Сравнивая полученные скорости, можно оценить степень влияния формы сужения на степень деформации

Как отмечалось ранее, есть три геометрии: аорта с коарктацией, аорта здорового ребенка и восстановленная, в которой предполагается малое изменение формы здоровой (аналогично хирургическому методу, описанному выше).

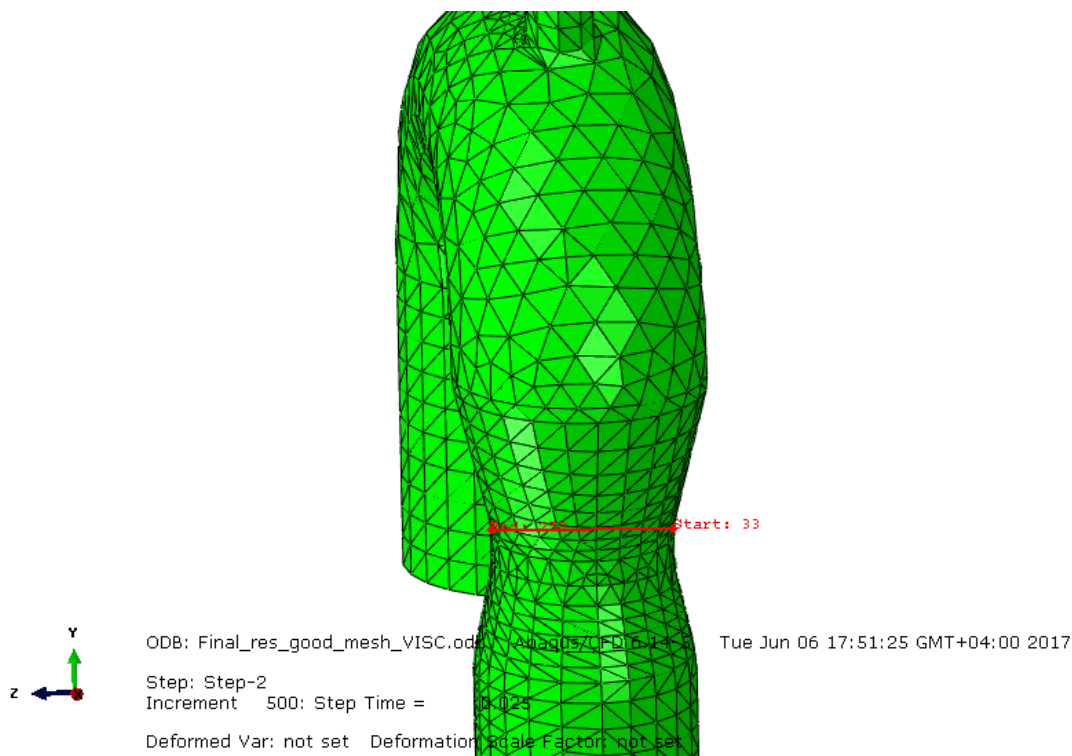


Рис.10 Путь, определенный по координате x.

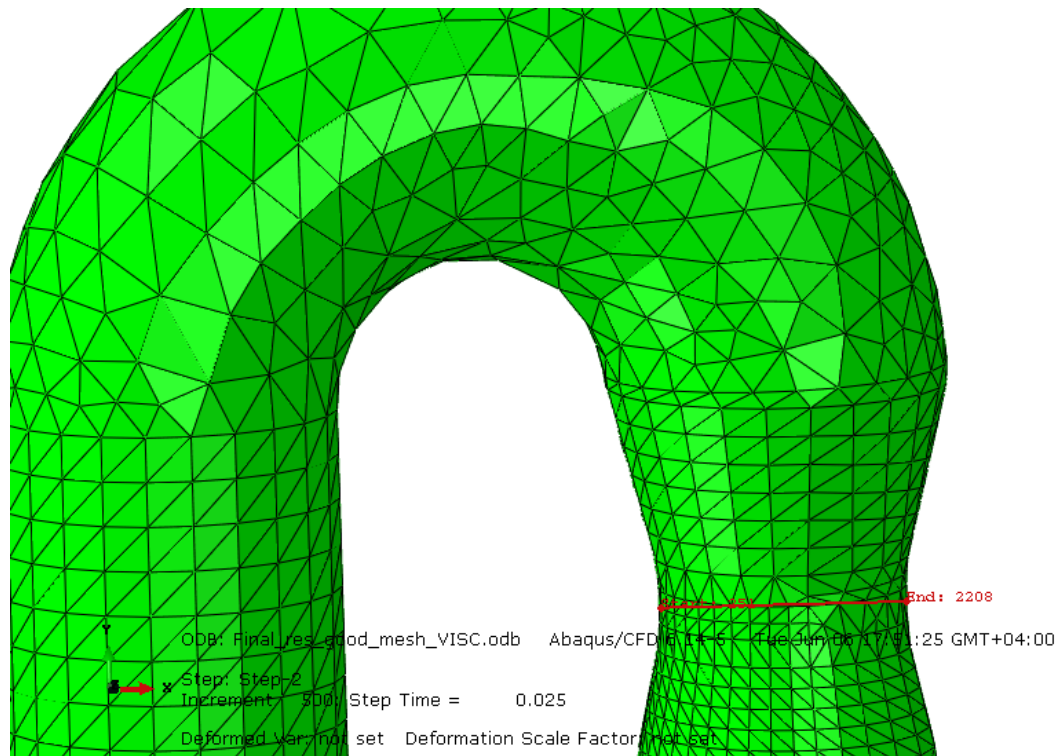


Рис.11 Путь, определенный по координате z.

Вычислим параметры турбулентности для  $k-\epsilon$  модели по формулам, приведенным ниже[2].

$$Re = \frac{\rho v l}{\eta} = \frac{2}{3} \frac{1.06 \cdot 50 \cdot 2.78}{0.04} = 2500; \quad (12)$$

Здесь  $Re$  – число Рейнольдса,  $\rho$  – плотность,  $v$  – скорость потока,  $l$  – характерная длина,  $\eta$  – коэффициент вязкости.

$$I = 0.16 Re^{-\frac{1}{8}} = 0.06; \quad (13)$$

Здесь  $I$  – интенсивность турбулентности.

$$l = 0.07L = 0.1946 \quad (14)$$

Здесь  $l$  – масштаб турбулентности,  $L$  – характерная длина.

$$k = \frac{3}{2} (u_0 l)^2 = 5.98 \quad (15)$$

Здесь  $k$  – массовая плотность турбулентной энергии,  $u_0$  – скорость на входе;

$$E = c_{\mu}^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l} = \left( 0.085^2 \cdot \frac{5.98^{\frac{3}{2}}}{0.07 \cdot 2.78} \right) = 1.33 \quad (16)$$



Где  $E$ - скорость диссипации турбулентной энергии,  $c_\mu$ - эмпирическая постоянная, равная 0.085[2].

Для SA модели задается кинематическая вязкость равная 0.04 [2].

### 3. Результаты

На Рис. 12-16 показано распределение давления при расчетном времени  $t=0.098$  (98-я итерация). При этом очевидно, что при моделировании аорты с коарктацией появляется область низкого давления непосредственно в месте отхождения от коарктации и область высокого давления в зонах восходящих сосудов. Более точная картина течения наблюдается при использовании k-е модели турбулентности.

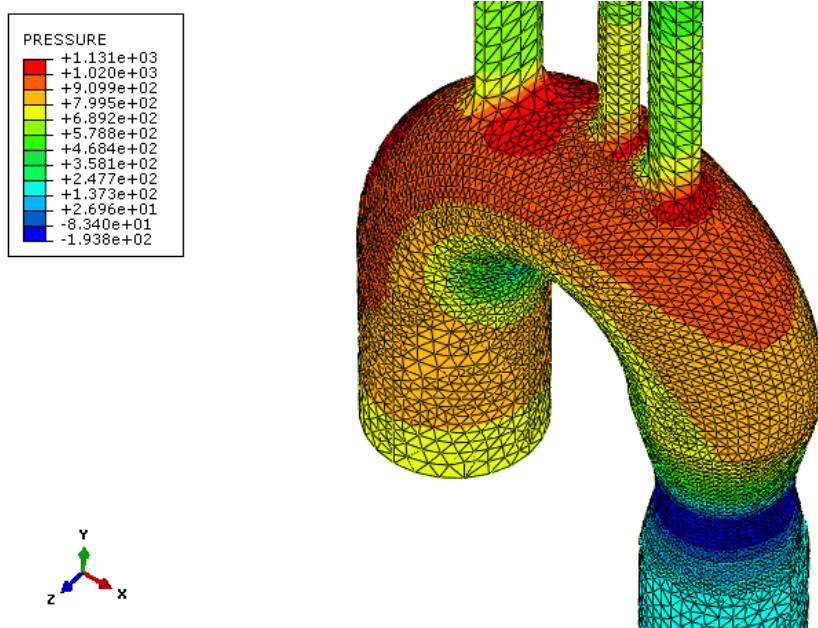


Рис 12 Распределение давления в аорте с коарктацией. Используется k-е модель турбулентности.

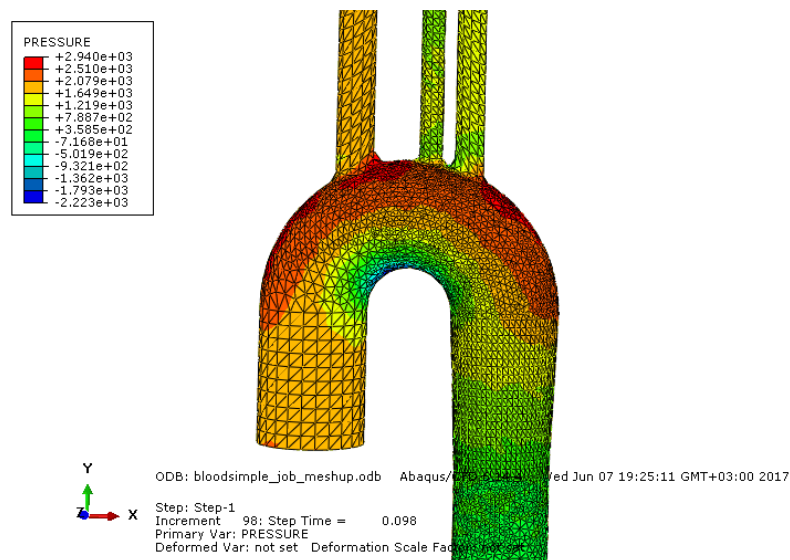


Рис 13 Распределение давления в аорте без коарктации. Используется k-е модель турбулентности.

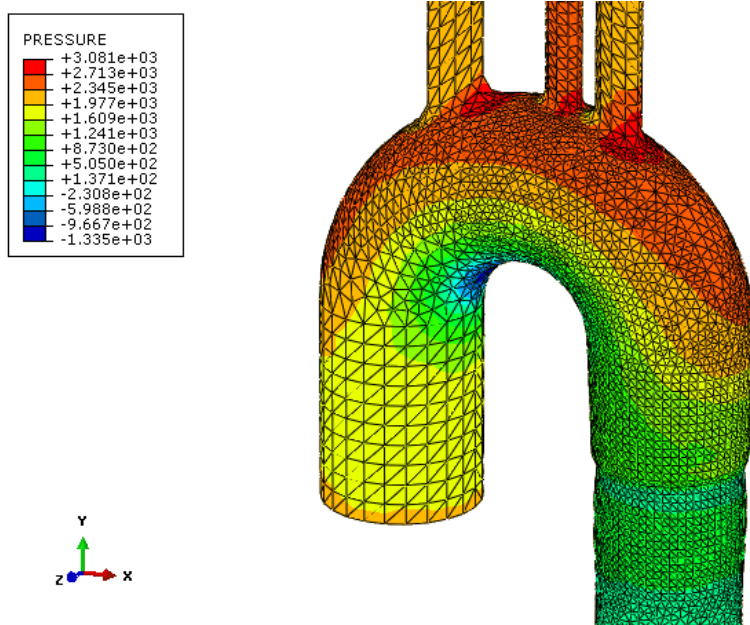


Рис 14 Распределение давления в аорте (послеоперационный случай). Используется k-ε модель турбулентности.

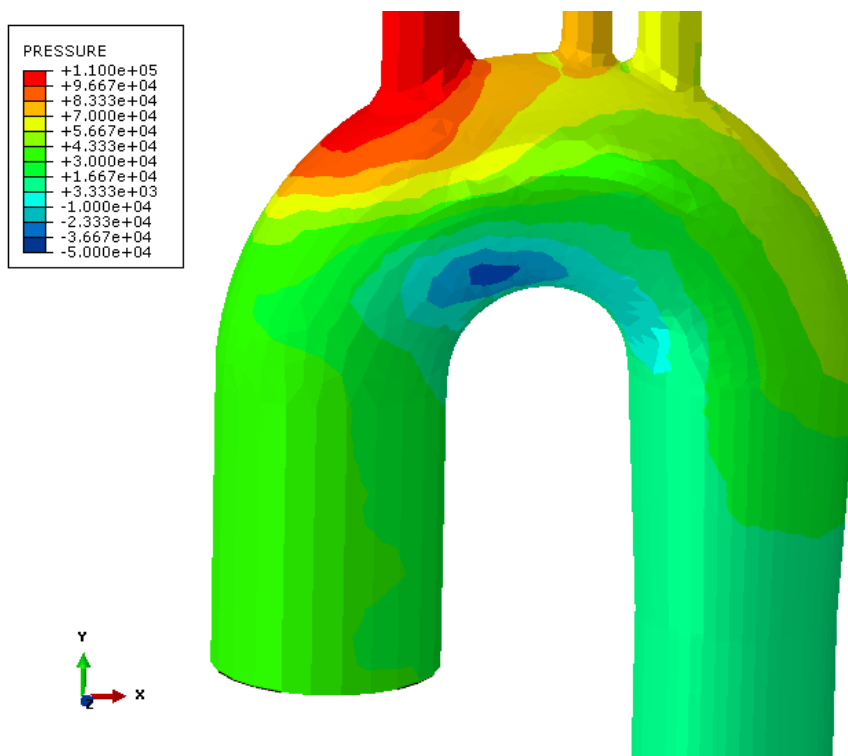


Рис 15 Распределение давления в аорте без коарктации. Используется модель турбулентности SA.

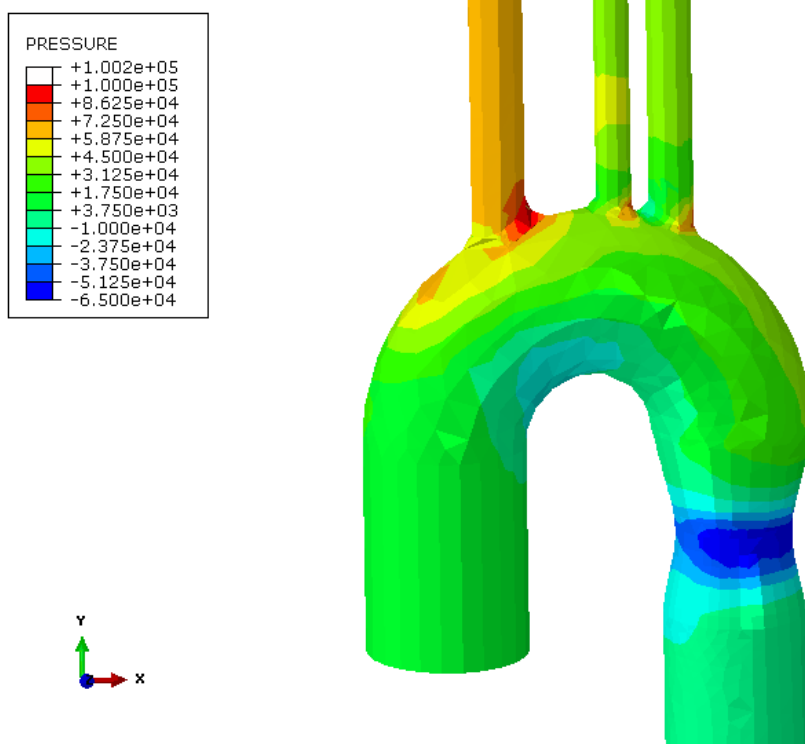


Рис 16 Распределение давления в аорте с коарктацией. Используется модель турбулентности SA

Распределение компоненты скорости по координате  $x$  отражены на графиках (Рис 17-23). При этом профили скорости более близки у модели аорты с коарктацией и в послеоперационной модели, что обуславливается недостаточно расширенным каналом для послеоперационной модели. Отсюда можно сделать вывод, что диаметр сечения должен быть не меньше диаметра аорты здорового ребенка. Так как геометрия вносит серьезный вклад в картину течения. Значение скорости максимальное в центре профиля и минимальное на границе. В модели аорты с коарктацией среднее значение скорости по компоненте  $x$  значительно превышает показатели моделей без и коарктации и модели аорты после операции (Рис 20-22).

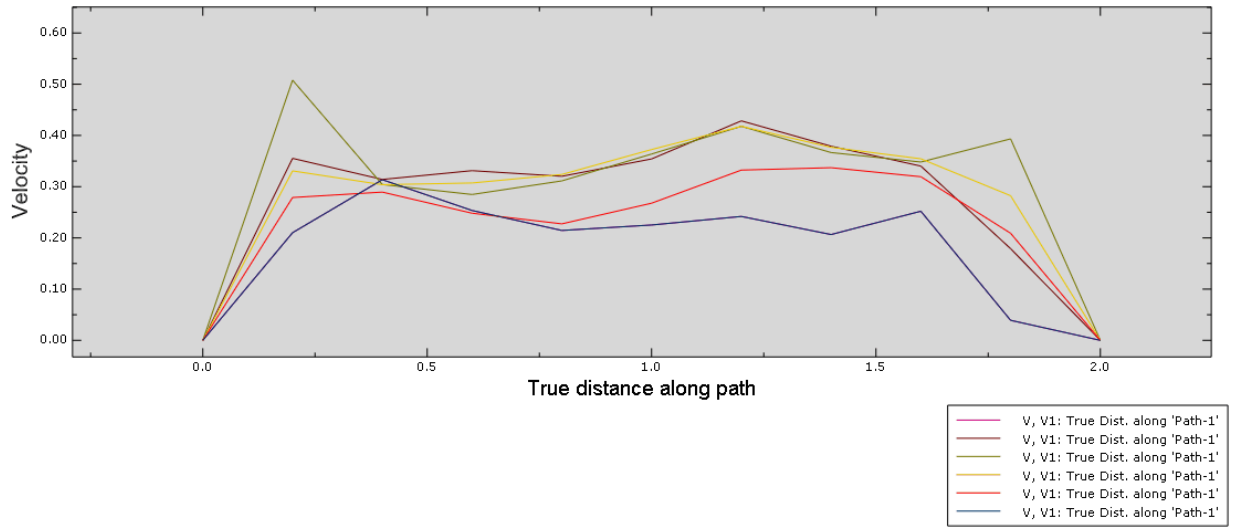


Рис 17. Распределение компоненты скорости  $V_I$  у модели аорты без коарктации, к-е модель, путь p1.

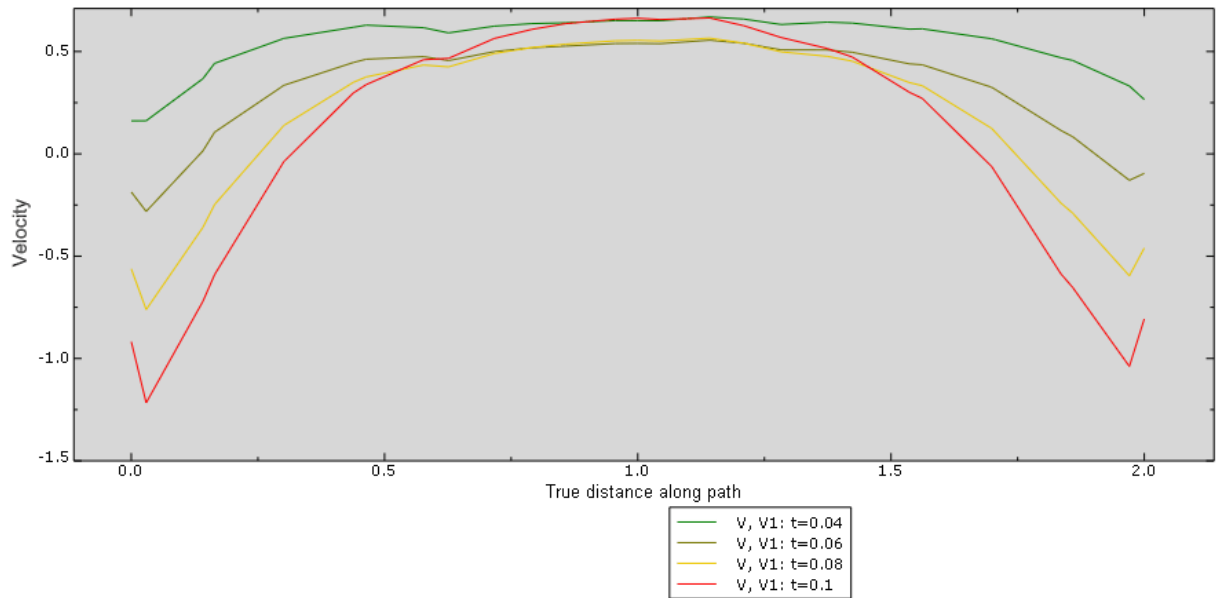


Рис 18. Распределение компоненты скорости  $V_I$  в модели аорты с коарктацией, к-е модель, путь p1.

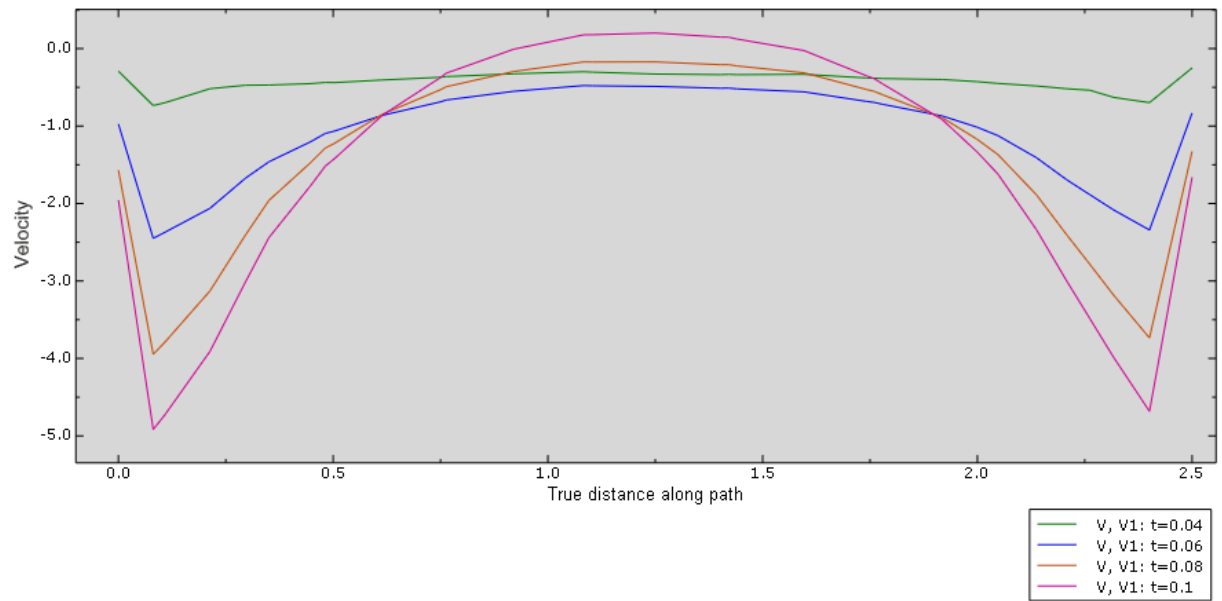


Рис 19. Распределение компоненты скорости  $V_I$  в прооперированной аорте, к-е модель, путь p1.

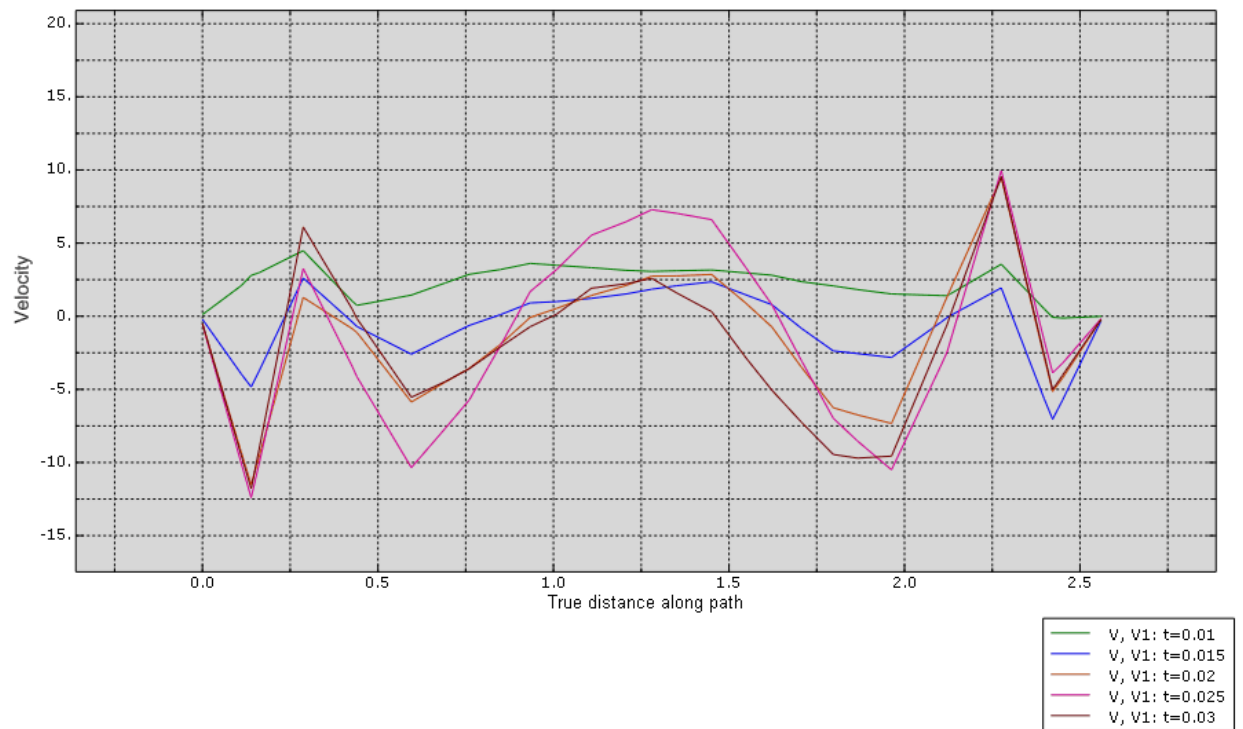


Рис 20. Распределение компоненты скорости  $V_I$  в модели аорты без коарктации, модель SA, путь p1

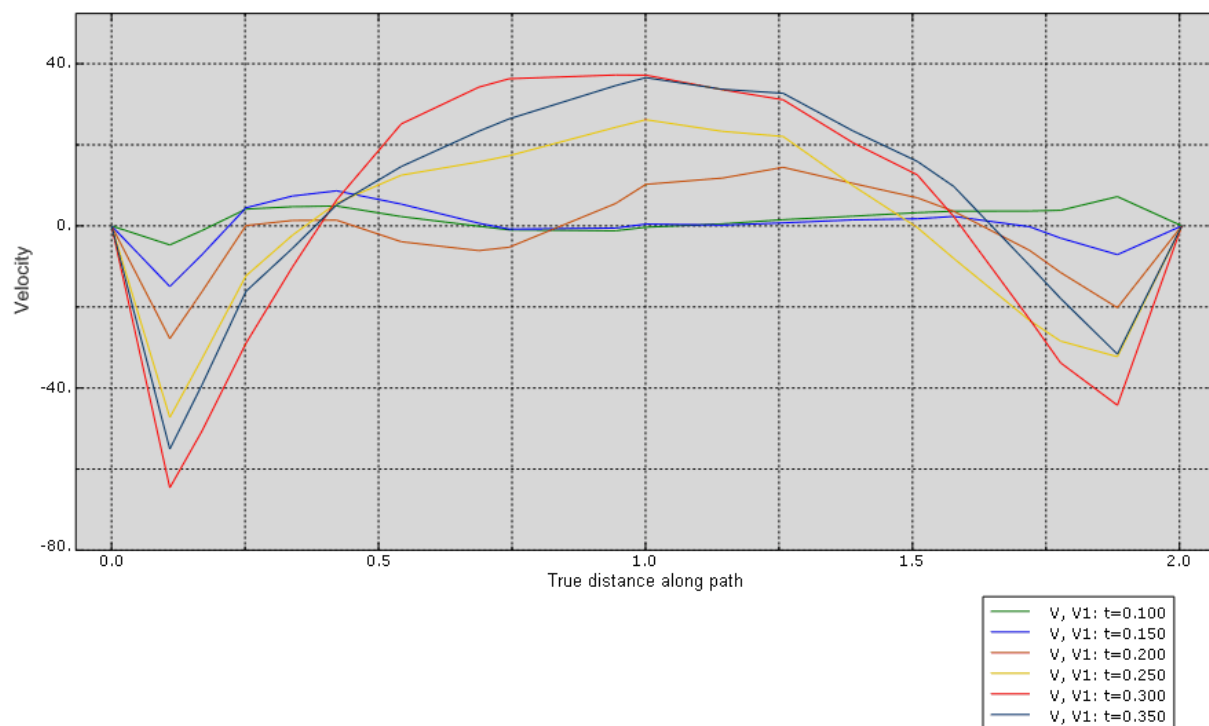


Рис 21 Распределение компоненты скорости  $V_I$  в модели аорты с коарктацией, модель SA, путь p1.

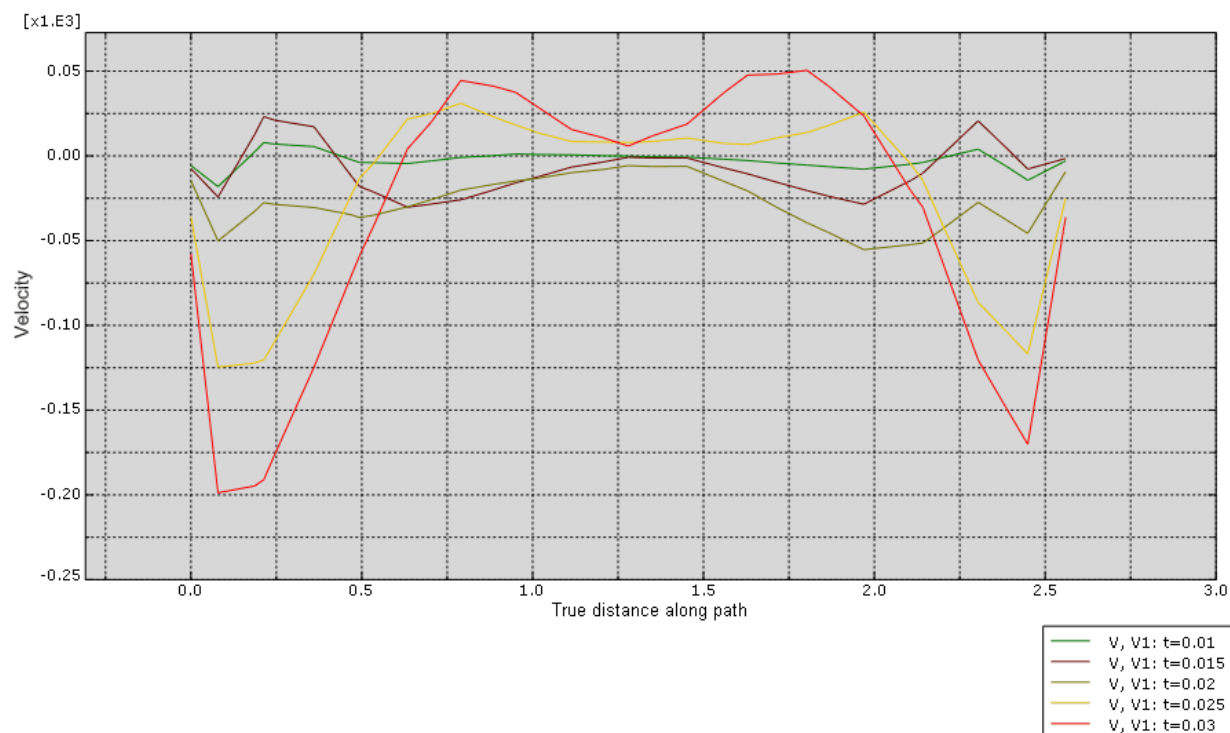


Рис. 22 Распределение компоненты скорости  $V_I$  в модели аорты после операции, модель SA, путь p1.

Далее приведены графики распределения скорости по компоненте  $z$  (Рис 23-27). Модель аорты без коарктации и после операции имеют схожий профиль и близкое численное значение.

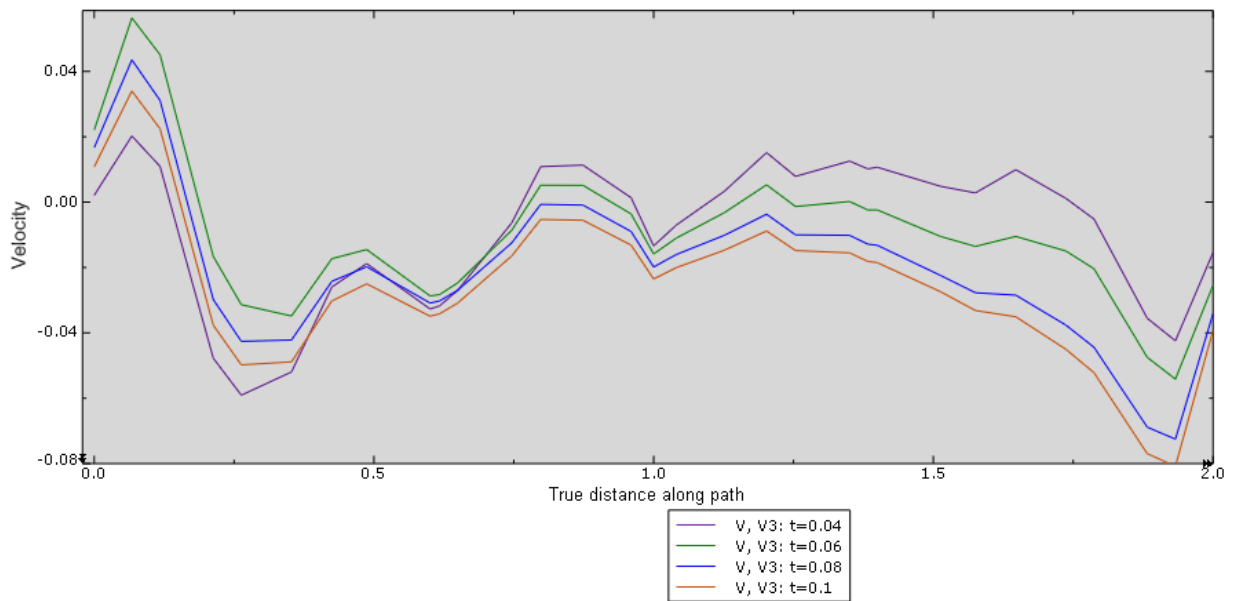


Рис 23. Распределение компоненты скорости  $V_3$  в модели аорты с коарктацией, к-е модель, путь p1.

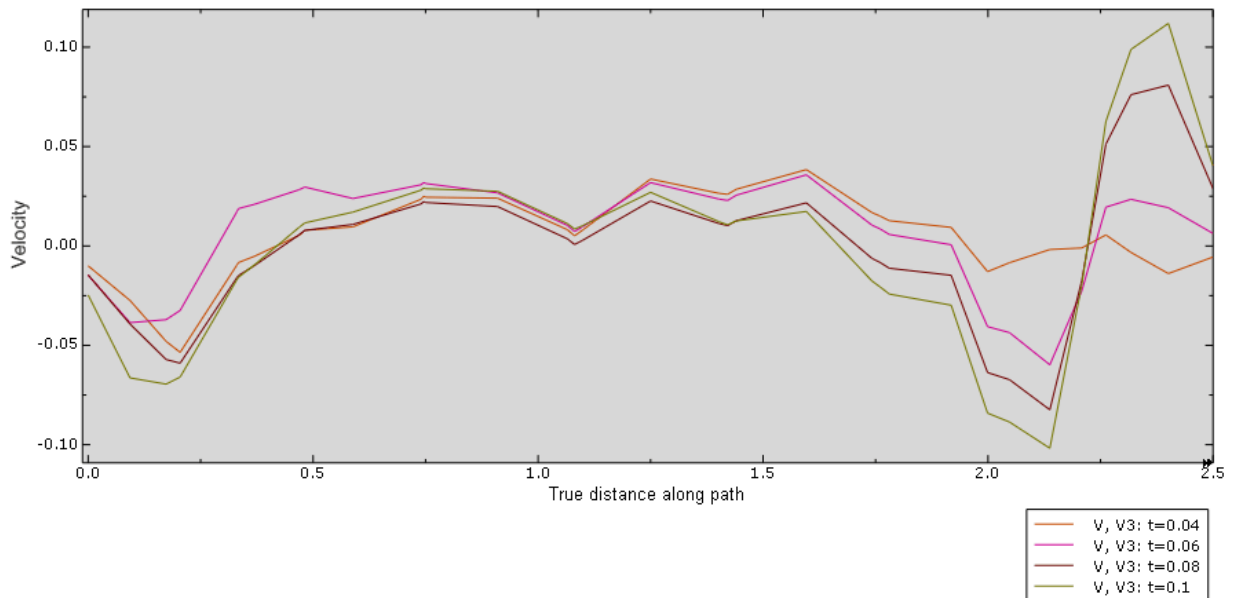


Рис 24. Распределение компоненты скорости  $V_3$  у прооперированной аорты, модель к-е, путь p2



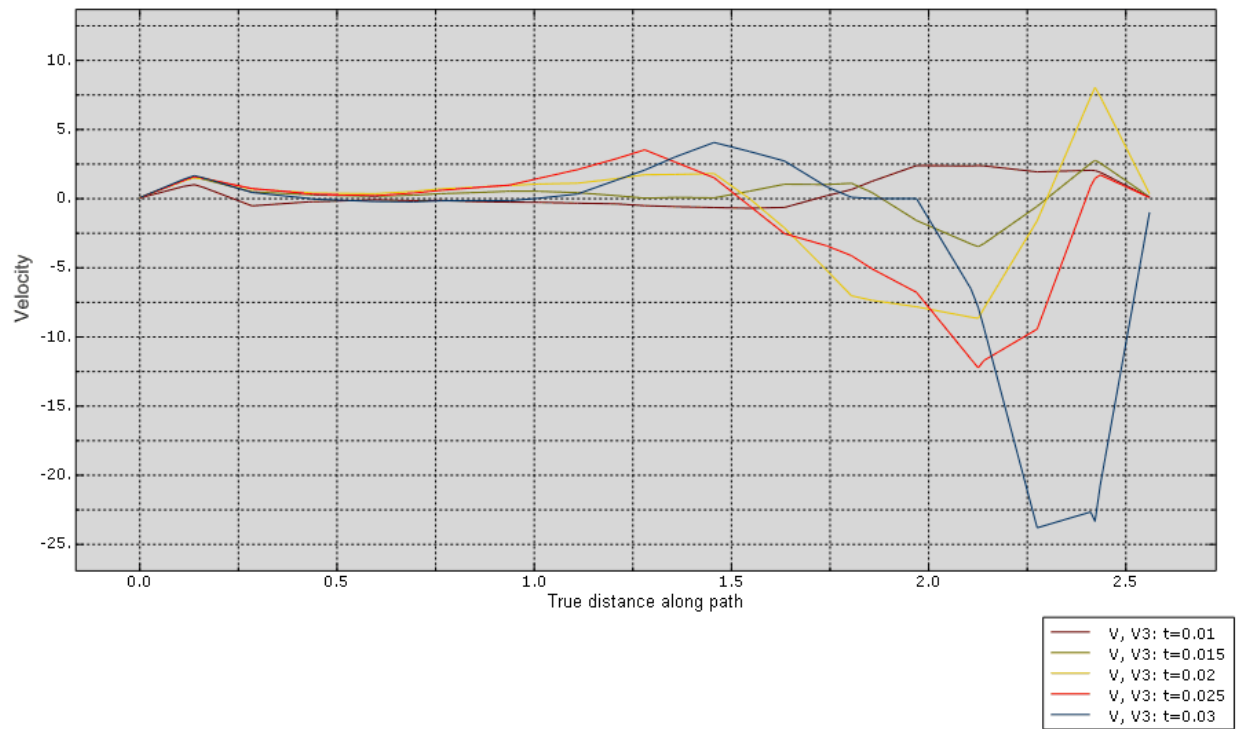


Рис 25. Распределение компоненты скорости  $V_3$  в разные моменты времени у здоровой аорты, модель SA, путь p2.

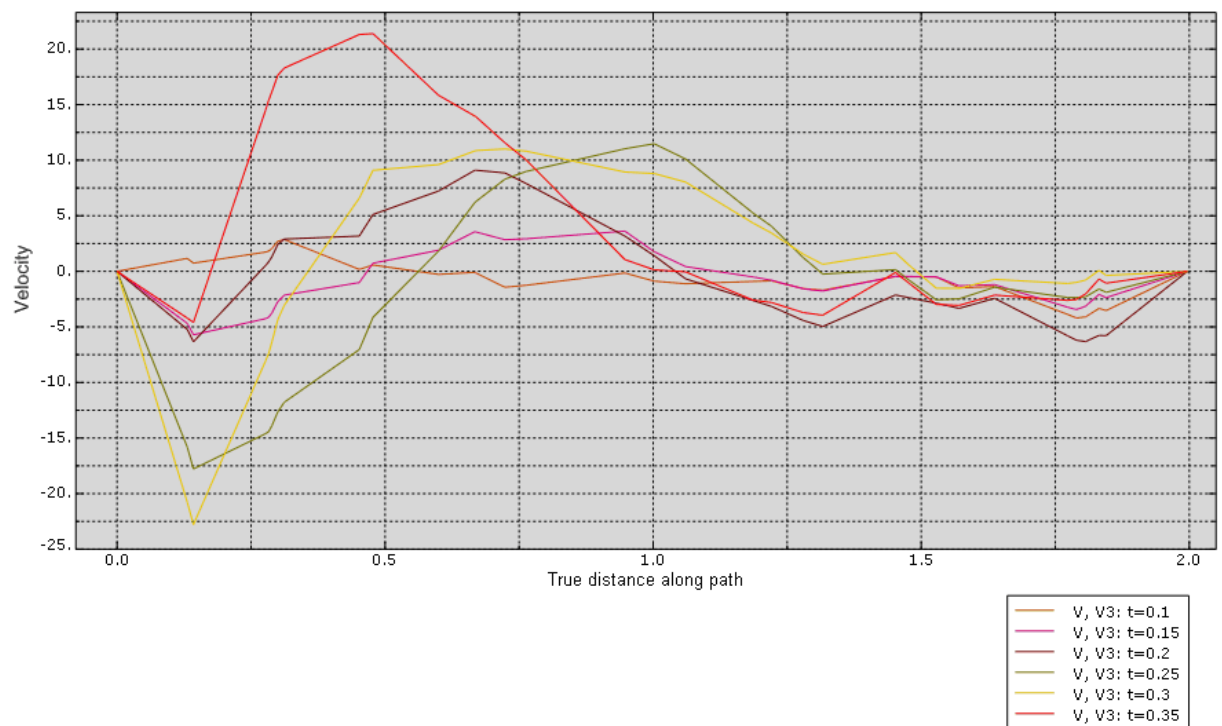


Рис 26. Распределение компоненты скорости  $V_3$  в разные моменты времени у аорты с коарктацией, модель SA, путь p2.

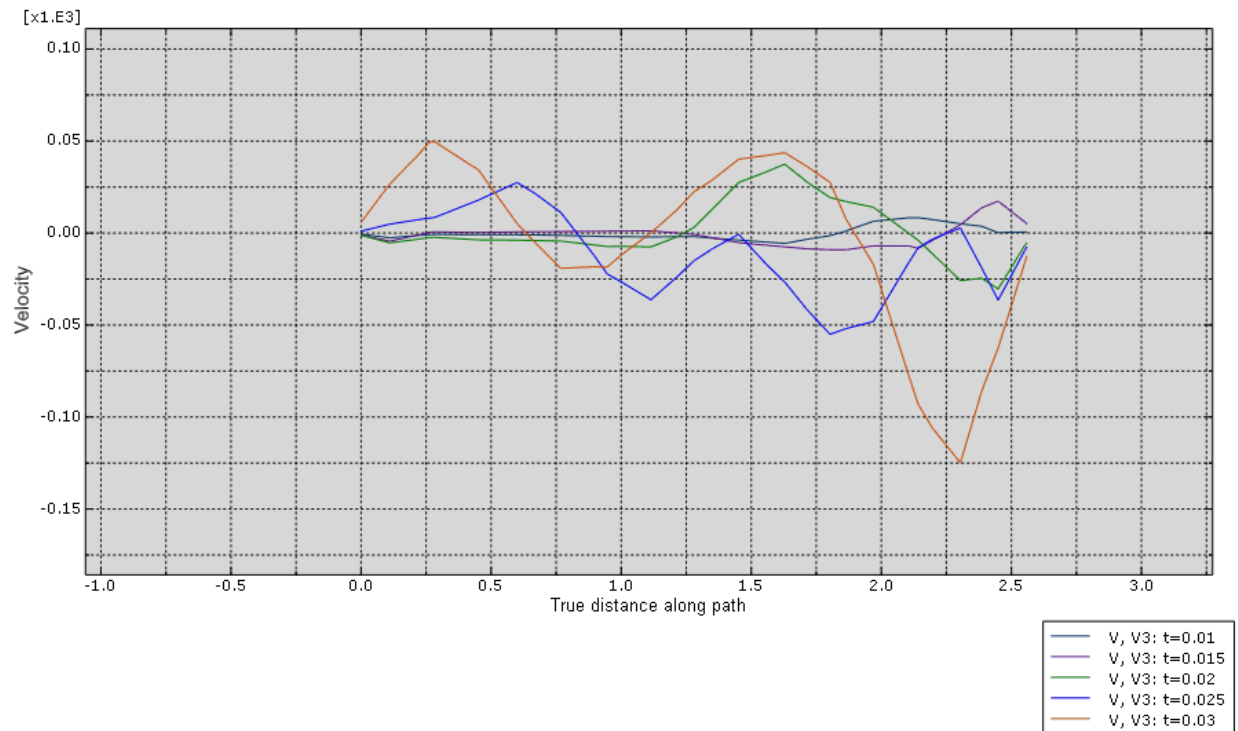


Рис 27 Распределение компоненты скорости  $V_3$  в разные моменты времени у модели аорты после операции, модель SA, путь p2.

Амплитуда изменения скоростей отображена на Рис. 28-30. Численные значения скоростей более близки у послеоперационной модели и модели без коарктации. Профили графиков идентичны для каждой модели.

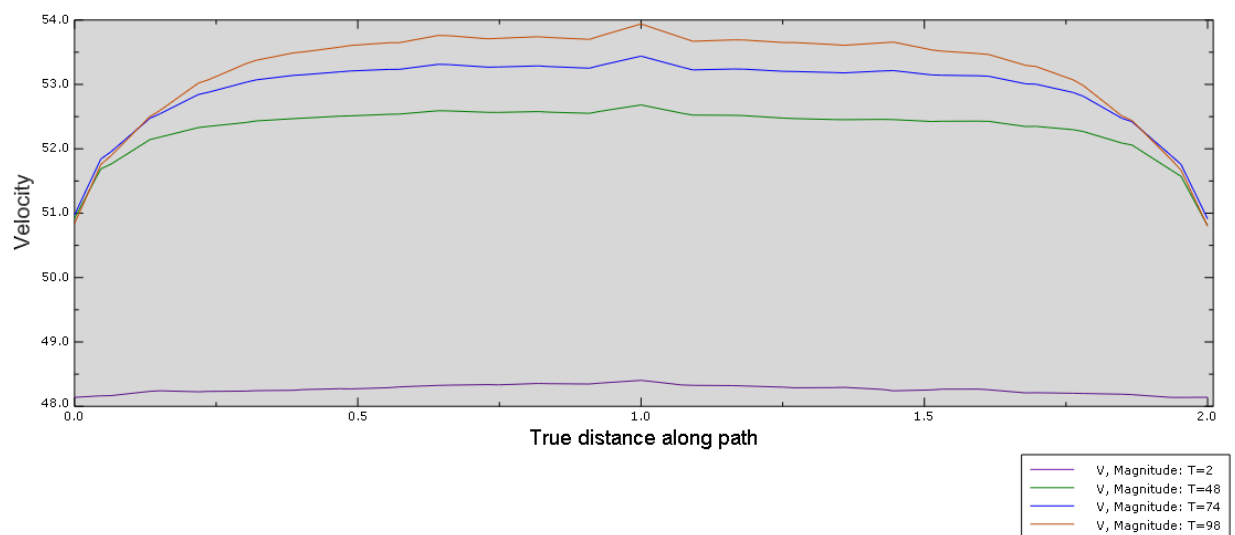


Рис 28 Амплитуда изменения скоростей в разные моменты времени у аорты без коарктации, модель k-е.

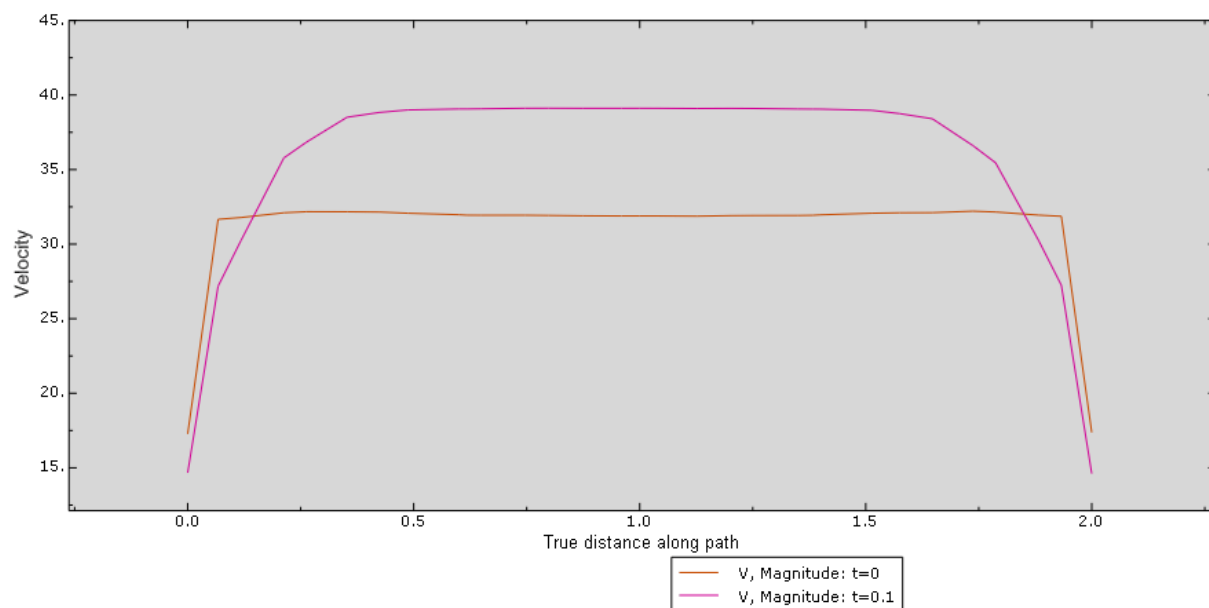


Рис 29 Амплитуда изменения скоростей в разные моменты времени у аорты с коарктацией, модель k-e.

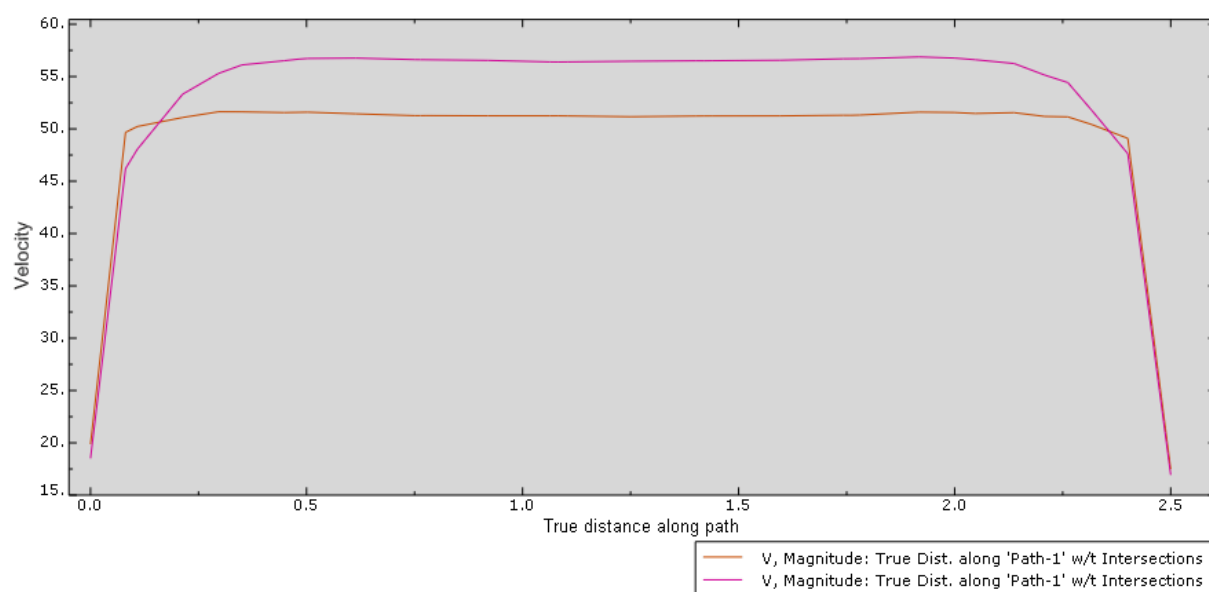


Рис 30 Амплитуда изменения скоростей в разные моменты времени у модели аорты после операции, модель k-e.

#### 4. Реализация решения связанно-упругой задачи в Abaqus CAE.

Данный подход основан на взаимосвязи двух моделей. Первая представляет собой пространство, через которое течет кровь, а вторая представляет собой эластичные стенки артерии. В первой модели решены нестационарные уравнения Навье-Стокса вместе с уравнением плоского напряженного состояния в артериальной стенке. Движущийся алгоритм сетки отслеживает движения артериальной стенки как усилие, прикладываемое к нему из-за пульсирующей крови. Реология крови, определена по формуле (17).

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty})[1 + \lambda(\dot{\gamma})^{\alpha}]^n \quad (17)$$

Эта модель является весьма грубым приближением, но достаточно точно описывает качественную картину течения.

Алгоритм решения связанно-упругой задачи:

1. Рассчитан первый шаг для жидкости в текущем объёме, вычисляются все компоненты скорости и смещений в месте контакта
2. С учётом рассчитанных величин ставится механическая задача с граничными условиями, сгенерированными по первому шагу для жидкости
3. Вычисляются напряжения и смещения, вычисляется новый объём трубки, а по рассчитанным значениям генерируются новые граничные условия для второго шага жидкости. Далее процесс повторяется

Ключевым параметром модели является профиль скорости, который аналогично п.1.2, имитирует пульсацию крови в аотре. Расчет проведен при времени  $t=400$  секунд, а решения были рассчитаны при  $t= 25$  секунд

На входной границе задается скорость по формуле (18)

$$v_{z_0}(t) = v_{z_0} * (1 + 0.5 * \sin(\frac{2\pi t}{T})) \quad (18)$$

На входной границе для жидкости задается давление = 13332,2 Па, вязкость задана в соответствии с формулой (19).

$$\nu = \mu_{inf} + d\mu * (1 + \lambda * \text{abs}(u_y^2 + v_x^2)^{\alpha})^{n_{exp}} \quad (19)$$

В расчете используются следующие константы:

Название	Значение	Описание
<b>L</b>	0.1	Длина артерии
<b>r<sub>o</sub></b>	0.02	Радиус артерии
<b>ρ</b>	1000	Плотность крови
<b>μ<sub>0</sub></b>	0.16	Минимальная сдвиговая вязкость крови
<b>μ<sub>inf</sub></b>	0.0035	Максимальная сдвиговая вязкость крови
<b>dμ</b>	μ <sub>0</sub> –μ <sub>inf</sub>	
<b>λ</b>	8.2	Экспоненциальная функция
<b>a</b>	0.64	Экспоненциальная функция
<b>n<sub>exp</sub></b>	(0.313-1)/a	Экспонента
<b>E</b>	2e <sup>5</sup>	Модуль упругости аорты
<b>ρ<sub>a</sub></b>	1160	Плотность стенки аорты
<b>vz<sub>0</sub></b>	0.005	Осевая скорость потока
<b>Re<sub>d</sub></b>	2*ρ*vz <sub>0</sub> * r <sub>o</sub> / μ <sub>inf</sub>	Число Рейнольдса
<b>per</b>	3*L/vz <sub>0</sub>	Скорость пульсовой волны
<b>thick</b>	0.002	Толщина стенки аорты

Табл.1 Значения констант, применяемых в трехмерном упруго-динамическом расчете.

На входной границе для стенки аорты давление задается по формуле (20)

$$P = \sqrt{\frac{(s_y^2 + s_x^2) \operatorname{tn}\left(\frac{s_y}{s_x}\right)}{\operatorname{tn}\left(\operatorname{abs}\left(\frac{s_y}{s_x}\right)\right)}} \quad (20)$$

На границе объема усилия не задаются, так в качестве граничного условия выступает стенка аорты.

Результаты расчета отражены на Рис 31-37.

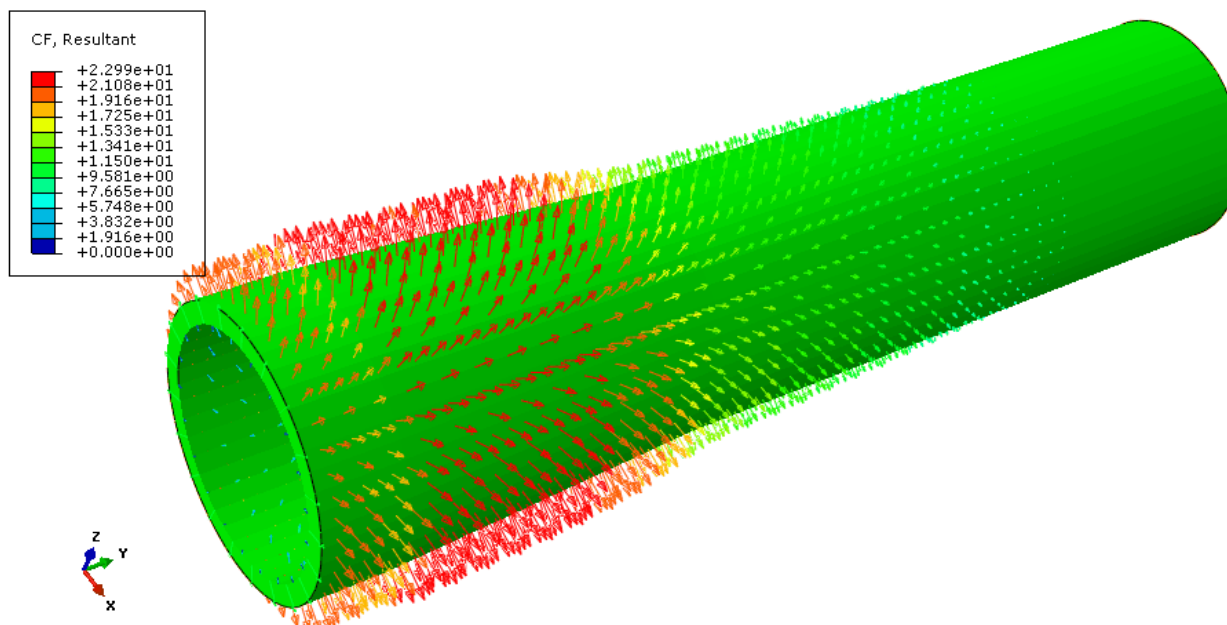


Рис.31 Контактное усилие, модель без коарктации

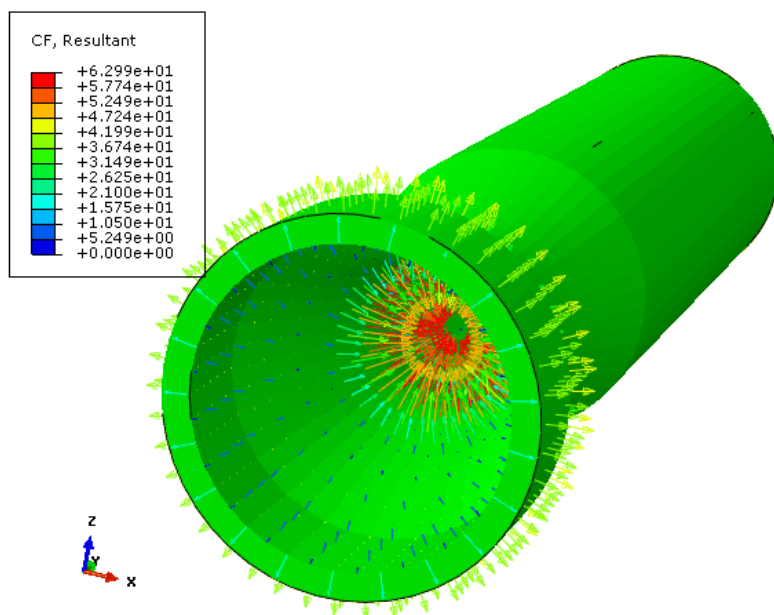


Рис 32. Контактное усилие модель с коарктацией

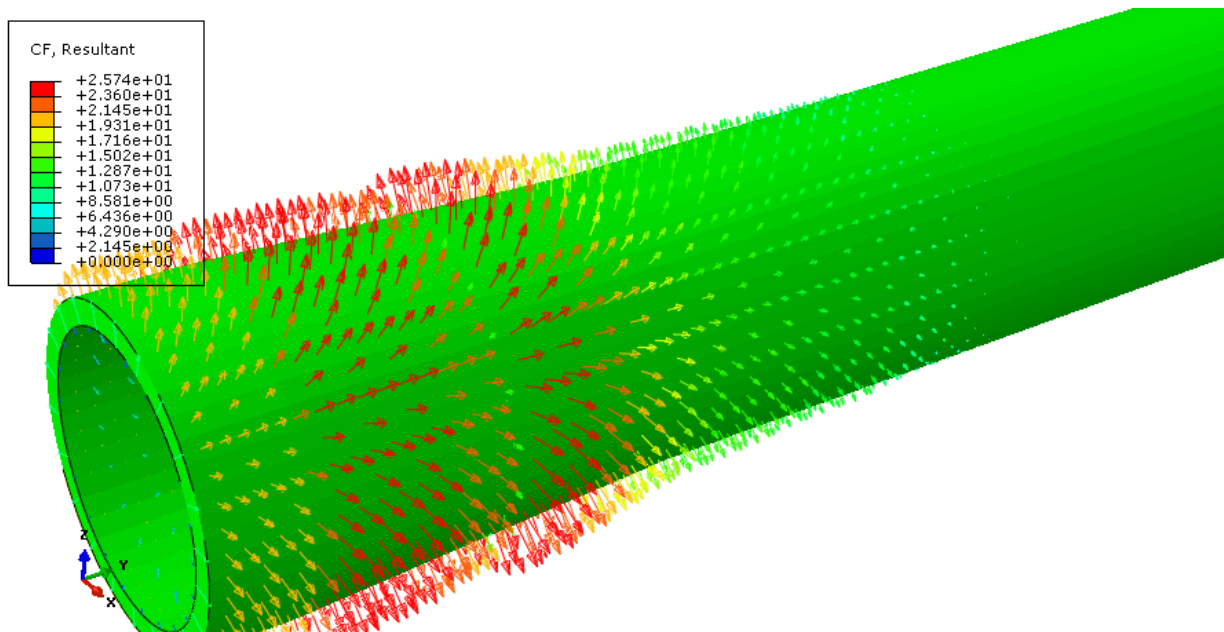


Рис 33. Контактное усилие, послеоперационная модель

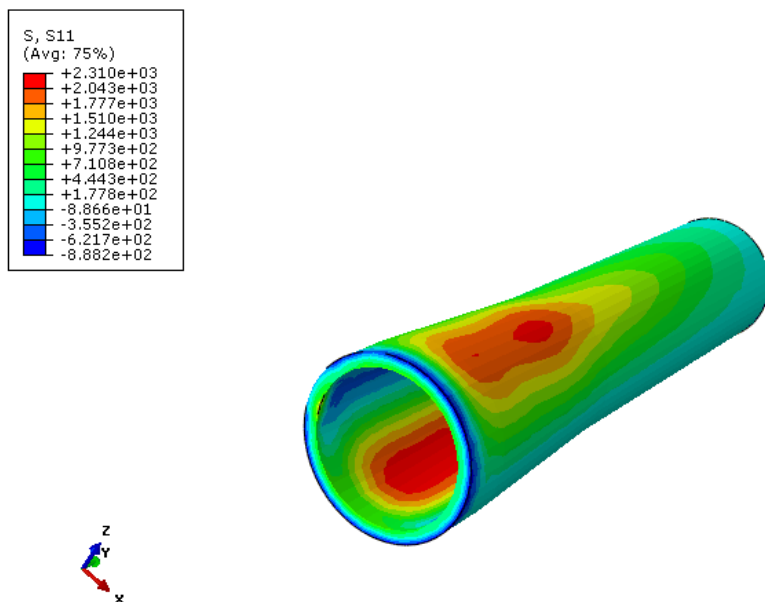


Рис 34. Напряжение. Модель здоровой аорты

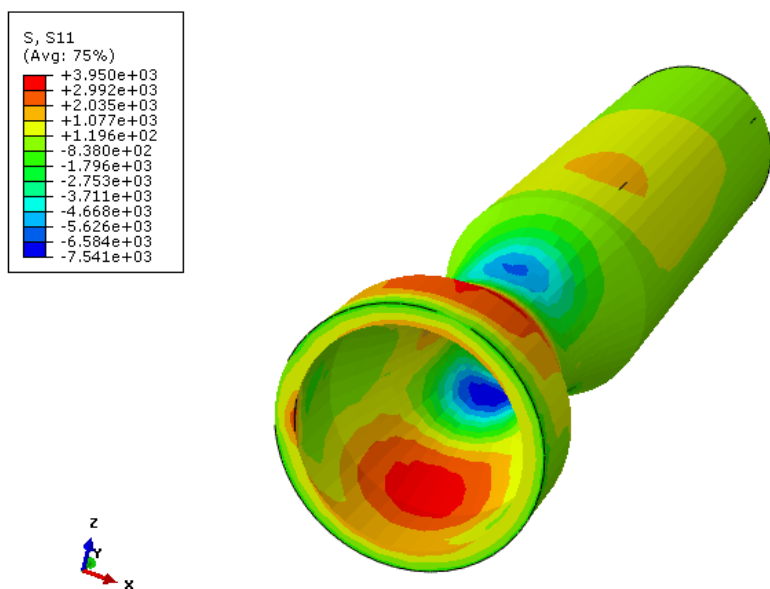


Рис 36. Напряжение, возникающее в аорте с коарктацией

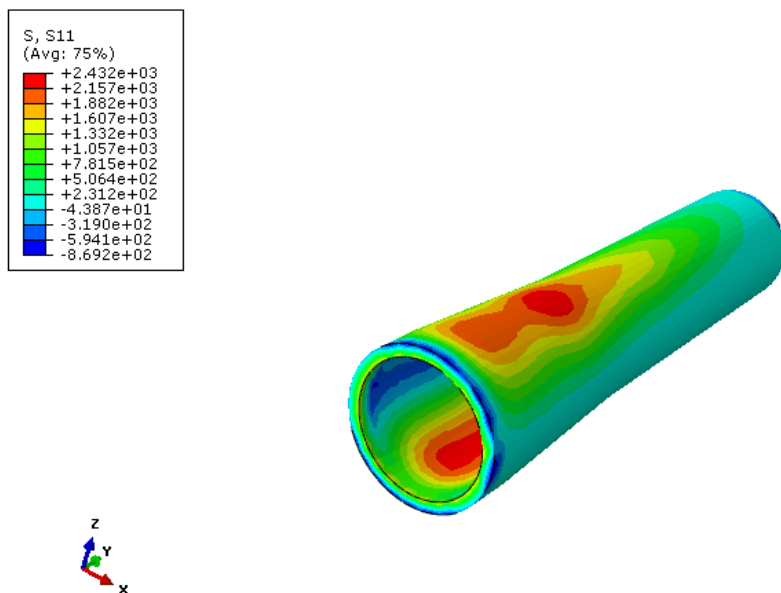


Рис 37. Напряжение. Модель аорты после операции



## 5. Анализ полученных результатов

Приведем некоторые формулы, необходимые для оценки результатов.

Формула Хейкока – это регрессионная формула, связывающая показатель площади поверхности тела с показателями роста и массы тела [13]:

$$BSA(m^2) = 0.024265 \cdot weight(kg)^{0.5378} \cdot height(cm)^{0.3964}$$

Здесь BSA - площадь поверхности тела (ППТ); weight - вес; height – рост.

Также для оценки результатов исследования используется таблица 1

Фамилия	BSA	АК	СТС	ВосхА	С	В	А	Возраст, лет
Белокуров	0,34	8	11	10	8,6	5	4	3 мес
Бушманов	0,2	6,7	9,5	8	4,3	3	1,5	2 мес
Волосников	0,14	4,5	9	7,5	2	3,5	3,5	25 дней
Дьяконов	0,21	6	8,5	7	4,5	4	1,5	12 дней
Забавичев	0,2	6	9,5	7	4	4	1,5	9 дней
Набиев	0,63	12	15	13	12	8,7	5	4 года
Никифоров	0,25	6,5	9	8	1	5	5	35 дней
Тургенев	0,22	5,5	6	6,5	2,5	2,7	4,5	1 сутки
Ярмоленко	0,24	7	9	7,5	6	4,5	3	1,5 мес

Здесь: BSA – площадь поверхности тела (см<sup>2</sup>); АК-аортальный клапан (мм); СТС – синотубулярное соединение (мм); ВосхА – восходящая аорта (мм); С, В, А- сегменты дуги аорты (мм).

В норме диаметр аорты продолжает расти до 18-20 лет и составляет в среднем 3см[13].

Ниже приведен код, используемый для аппроксимации табличных значений.

```
Normal[NonlinearModelFit[{{0.033, 6.5}, {0.3, 7}, {0.4, 7}, {0.833, 7.5}, {1.167, 8}, {1.5, 7.5}, {2, 8}, {3, 10}, {48, 13}}, a Log[b x], {{a, 0.926782}, {b, 7152.55}}, x]]
Plot[0.926782 Log[7152.55 x], {x, -4.7637, 22.7967},
Epilog -> Point /@ {{0.033, 6.5}, {0.3, 7}, {0.4, 7}, {0.833, 7.5}, {1.167, 8}, {1.5, 7.5}, {2, 8}, {3, 10}, {48, 13}}]
```

```
ListPlot[{1.43608, -0.109581, -0.376199, -0.556058, -0.36853, \-1.10118, -0.867798, 0.756424, 1.18684}, Filling -> Axis, Frame -> True]
```

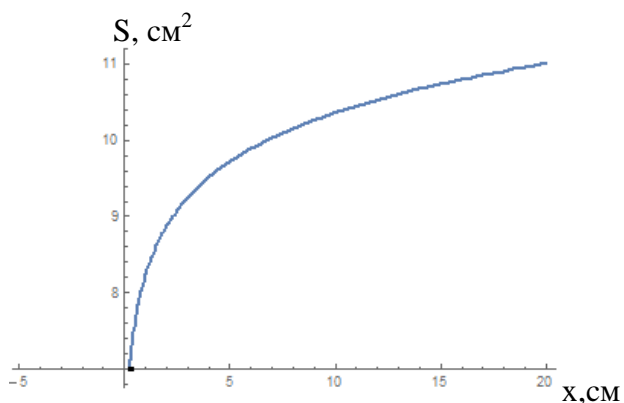


Рис 31 График изменения диаметра в зависимости от возраста.

Поэтому участок с коарктацией должен быть увеличен до диаметра большего, чем диаметр здорового ребенка, так как необходимо учитывать рост размера аорты.

Результаты расчета в пакете Simula Abaqus показали, что в модели аорты с коарктацией и в модели после операции скорость и давление имеют одинаковый профиль и близкое численное значение. Отклонение от значений с течением времени позволяет предположить о появлении рекоарктации. Чтобы избежать данного эффекта, необходимо увеличить диаметр нисходящей аорты во время операции.

## Список литературы

1. Гайтон К. Медицинская физиология/ Гайтон К., Артур, Х. Э. -Москва: "Логосфера",2008;
2. Santanu Chandra. Modeling Hemodynamics with Abaqus/CFD Steady State Solver: FDA Benchmark Nozzle Model/ Santanu Chandra, PhD1, Richard Swift, PhD, PE1, and Ramji Kamakoti, PhD2,2014-13p.;
3. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. - М.:Энергоатомиздат, 1984.-288с.;
4. Е.В.Астраханцева. Математическое моделирование гемодинамики крупных кровеносных сосудов/ Е.В.Астраханцева, В.Ю. Гидаспов, Д. Л. Ревизников - Матем. моделирование,2005, том 17, номер 8, 61–80;
5. Logistic-type curve fits pressure-diameter relationship for relaxed and contracted dog renal arteries // Fukushima T. and Homma T. A- Biorheology, 1988, №25, p.37-48.
6. Абакумов М.В. Разностная схема решения задач гемодинамики на графе // Абакумов М.В., Есикова Н.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. - Препринт. – М.: Диалог-МГУ, 1998.
7. Kahraman H The diameters of the aorta and its major branches in patients with isolated coronary artery ectasia// Kahraman H, Ozaydin M, Varol E, Aslan SM, Dogan A, Altinbas A, Demir M, Gedikli O, Acar G, Ergene O.
8. Azakie A., Muse J., Gardner M. et al. Cerebral oxygen balance is impaired during repair of aortic coarctation in infants and children // J Thorac Cradiovasc Surg. – 2005. - №130. – P. 830-836.
9. Backer C., Mavroudis C., Zias E. et al. Repair of coarctation with resection and extended end-to-end anastomosis // Ann Thorac Surg. – 1998. – №66. – P.1365-1371.
- 10.Heurn L., Wong C., Spiegelhalter D. et al. Surgical treatment of aortic coarctation in infants younger than three months: 1985 to 1990 // J Thorac Cardiovasc Surg. – 1994. – Vol. 107, №1. – P. 74 - 86.
- 11.Свиридова Н.В. Моделирование гемодинамических процессов сердечно-сосудистой системы на основе данных периферической артериальной пульсации// Свиридова Н.В., Власенко В.Д. - Математическая биология и биоинформатика. 2014. Т. 9. № 1. С. 195-205.

12. Artery flat (Joel Plawsky)\_Chemical Engineering at RPI:Brochure[Электронный ресурс]/ Rensselaer Polytechnic Institute (RPI)\_-<http://www.rpi.edu/dept/chem-eng/WWW/faculty/plawsky/Comsol%20Modules/ArteryFlat/ArteryFlat.html>  
(свободный доступ)(11.05.2017)
13. Кирьянов Б.Ф. Математические модели в здравоохранении// Кирьянов Б.Ф., М.С.Токмачев, НовГУ им. Ярослава Мудрого - Великий Новгород, 2009-279с.
14. Биомеханическое моделирование объектов протезирования// Бегун П.И.: учебное пособие.-СПб.: Политехника, 2011.-464с.:ил.