**Кузнецова 2042\2**

**Объект задания**

Треугольная пластина погонной плотности $γ$, с углом при основании $α$, вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. Материальная точка массы m скользит без трения вдоль оси $x$ (Рис.1).

**Данные для задачи А**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | a(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | $\dot{φ}$ (c-1) | *x*0 (м) | $\dot{x}\_{0}$ (м/с) | $M\_{z}$ (нм) | $x(t)$ (м/с) |
| 17 | 4 | 30 | 6 | -3 | 1 | 2 | -4t3 – 4  | *3+2t3* |

**Задача А**

![C:\Users\Валерия\Desktop\сопромат\P061011_20.12_[01].jpg]()

Тело вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{φ}$.

Найти

1. Дифференциальное уравнение относительного движения точки.
2. Положение относительного равновесия, если оно

 существует.

1. Закон относительного движения и скорости точки.
2. Скорость точки в момент, когда точка покидает тело
3. Закон изменения реакции тела на точку и ее значение в момент, когда точка покидает тело.
4. Выражения для составляющих главного вектора реакций шарниров тела.

**Задание И1. Основное уравнения динамики относительного движения точки. Теорема о движении центра масс системы.**



1. Составляем уравнение динамики относительного движения точки

$mw\_{r}=mg+N+Φ\_{е}+Φ\_{с}$(1.1)

Центробежная сила инерции $Φ\_{е}$ всегда направлена от оси вращения тела. Ее модуль равен

$$Ф\_{е}=mw\_{e}=mω^{2}h;$$

Сила Кориолиса $Φ\_{с}=-2mω×V\_{r}$направлена вдоль оси z (Рис.2).

Проекция $ Ф\_{сz} $
$$ Ф\_{сz}=-2m\dot{φ}\dot{x}>0$$

$Φ\_{с}$направлена по z

поскольку $\dot{x}>0$ (точка вылетает), а $\dot{φ}<0$.

 Проектируя уравнение (1.1) на ось *х*, получаем дифференциальное уравнение относительного движения точки

$$m\ddot{x}=Ф\_{е}Cosα+mgsinα=mω^{2}hCosα+mg Sinα=mω^{2}x\left(cosα\right)^{2}+mgsinα$$

$$\ddot{x}-ω^{2}x(cosα)\^2=gsinα или \ddot{x}-6,75x=5 (1.2)$$

1. Положения относительного равновесия не существует, так как в любой точке трубы у нашей материальной точки будет ускорение, не равное нулю.
2. Найдем закон относительного движения и скорости точки. Это обратная задача динамики. Решение неоднородного уравнения (1.1) ищем в виде

$$x=x\_{oo}+x\_{ч}$$

Решение однородного уравнения $x\_{oo}$ ищем в виде

$$x\_{oo}=e^{λt}; $$

Подставляя решение в однородное уравнение, приходим к характеристическому уравнению с вещественными корнями

$$ λ^{2}-\left(ωcosα\right)^{2}=0; λ\_{1,2}=\pm ωcosα; $$

Решение принимает вид

$$ x\_{oo}=C\_{1}e^{ωcosαt}+C\_{2}e^{-ωcosαt}$$

Полное решение уравнения (1.1)

$x=C\_{1}e^{ωcosαt}+C\_{2}e^{-ωcosαt}; \dot{x}=ωcosαC\_{1}e^{ωcosαt}-ωcosαC\_{2}e^{-ωcosαt}$(1.3)

Постоянные $C\_{1} C\_{2}$ в (1.3) находим из начальных условий

$t=0: x\_{0}=1 м; \dot{x}\_{0}=2 м/с $(1.4)

Подставив (1.4) в (1.3), получим:

$$x\_{0}=C\_{1}+C\_{2}; \dot{x}\_{0}=ωcosαC\_{1}-ωcosαC\_{2}$$

Иначе

$$\frac{\dot{x}\_{0}}{ωcosα}=-2C\_{2} $$

$$ $$

Решение приобретает вид

$$x=\frac{1}{2}x\_{0}\left(e^{ωcosαt}+e^{-ωcosαt}\right)+\frac{1}{2}\frac{x\_{0}}{ωcosα\_{ }}\left(e^{ωcosαt}-e^{-ωcosαt}\right)=x\_{0}chωcosαt+\frac{x\_{0}}{ωcosα\_{ }}shωcosαt$$

С учетом начальных условий (1.4)

$x=1·chωcosαt+\frac{2}{ω√cosα\_{ }}shωcosαt$ (1.5)

1. Найдем скорость точки в момент, когда она покидает тело. Можно было бы и закона движения определить соответствующий момент времени и подставить его в закон изменения скорости. Но проще найти зависимость скорости точки от ее перемещения известной заменой

$$\ddot{x}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

 Которая фактически приводит к теореме об изменении кинетической энергии точки.

Получаем

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}=ω^{2}x\left(cosα\right)^{2}+gsinα; или \dot{x}d\dot{x}=\left(ω^{2}x\left(cosα\right)^{2}+gsinα\right)dx$$

Интегрируя, находим зависимость относительной скорости точки от ее перемещения

$\dot{x}^{2}=ω^{2}\left(cosα\right)^{2}x²+2xgsinα+C\_{3}$ (1.6)

Из начальных условий (1.4) находим

$$C\_{3}=\dot{x}\_{0}^{2}-ω^{2}\left(cosα\right)^{2}x²-2xgsinα=4-6,75-10=-12,75 м^{2}/с^{2}$$

Находим скорость при $x\_{1}=a/sinα=8м$

$$\dot{x}\_{1}=\sqrt{9·\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)·8^{2}+80-12,75}=22,34 м/с$$

1. Найдем закон изменения реакции тела на точку. Это прямая задача динамики. Проекция уравнения (1.1) на ось z:

$$0=N\_{z}+Ф\_{с} $$

дает проекцию реакции стержня на ось z

$$ N\_{z}=- Ф\_{с} (1.7)$$

Проектируя уравнение (1.1) на ось у, находим:

$$0=N\_{y}+Ф\_{е}Sinα$$

Теперь проекция нормальной реакции стержня на ось у равна

$$ N\_{y}=-mω^{2}cosαsinα н (1.8)$$

В момент, когда точка покидает тело

$$N\_{z}=-2m\dot{φ}\dot{x}=-2∙17∙\left(-3\right)∙2=204 н; $$

$ N\_{y}=-17∙\left(-3\right)^{2}∙\frac{\sqrt{3}}{4}=-66,2н$ (1.9)

6.



Составляющие реакции шарнира **R** найдем по известным ускорениям тела и точки из теоремы о движении центра масс

$$R=Mw\_{c}$$

Это прямая задача динамики.

$$ Mw\_{c}=M\_{1}w\_{c1}+mw=R\_{1}+R\_{2}$$

где $R\_{1}$составляющая от ускорения центра тяжести треугольной пластины, а $R\_{2} $от ускорения точки. Последнее состоит из относительного, переносного и Кориолисова ускорений:

$$R\_{2}=R\_{2}^{r}+R\_{2}^{e}+R\_{2}^{c}=mw\_{r}+mw\_{e}+mw\_{c}$$

Направления составляющих изобразим на рисунке и вычислим их величину

$R\_{1}=γ\left(\left(\frac{1}{2}\right)a·a·ctgα\right)·ω^{2}·\frac{2}{3}a$; $R\_{2}^{e}=mω^{2}a·ctgα $

$$R\_{2}^{r}=mω^{2}x1cosα=amω^{2}ctgα; R\_{2}^{c}=mw\_{c}=2mωv\_{1} (1.10)$$

**Объект задания**

Треугольная пластина погонной плотности $γ$, с углом при основании $α$, вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. Материальная точка массы m скользит без трения вдоль оси $x$ (Рис.1).

**Данные для задачи А**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | a(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | $\dot{φ}$ (c-1) | *x*0 (м) | $\dot{x}\_{0}$ (м/с) | $M\_{z}$ (нм) | $x(t)$ (м/с) |
| 17 | 4 | 30 | 6 | -3 | 1 | 2 | -4t4 – 4  | *3+2t3* |

**Задание И4. Уравнения Лагранжа.**

1. Найдем закон изменения угловой скорости из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=Q\_{φ} (4.1)$$

Кинетическая энергия системы складывается из энергии тела и точки

$$T=T\_{пл}+T\_{M}=\frac{J\_{пл}}{2}\dot{φ}^{2}+\frac{m}{2}v^{2}=\frac{J\_{пл}}{2}\dot{φ}^{2}+ \frac{m}{2}\left[\dot{x}^{2}+ω^{2}\*\left(xCosα\right)^{2}\right] \left(4.2\right)$$

$$J\_{пл}=136 кгм^{2}$$

Подставив данные задачи, находим

$$T=68\dot{φ}^{2}+8,5 \left\{36t^{2}+\dot{φ}^{2}\left(6,75+9t^{3}+3t^{6}\right)\right\} $$

Обобщенная$ сила$

$ Q\_{φ}=M\_{z}=-4t^{4}-4 (4.4)$
$$\frac{∂T}{∂φ}=0, \frac{∂T}{∂\dot{φ}}=136\dot{φ}+8,5 \left\{+2\dot{φ}^{}\left(6,75+9t^{3}+3t^{6}\right)-9\sqrt{3} t-6\sqrt{3}t^{4}\right\}=-4/5t^{5}-4t,$$

$$\dot{φ}\left(250,75+155t ^{3}+51t ^{6}\right)=-4/5t ^{5}-4t$$

***Приходим к тому же результату, что и в И2:***

$$\dot{φ}=\frac{-4/5t ^{5}-4t}{250,75+155t ^{3}+51t ^{6}}; \dot{φ}\_{1}==\frac{-10,8}{847,45}=-0,012 с^{-1} (4.5)$$

Видим, что в данном примере кинетический момент системы связан с кинетической энергией формулой

$$\frac{∂T}{∂\dot{φ}}=K\_{z} (4.6)$$

**Задание И5. Уравнений Лагранжа. Теорема об изменении кинетической энергии в переносном движении**

1. Дифференциальные уравнения движения системы найдем из уравнений Лагранжа. За обобщенные координаты выберем x и φ.

Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}-\frac{∂T}{∂x}=Q\_{x}; \frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=Q\_{φ} (5.1)$$

Выражение кинетической энергии системы (4.2) позаимствуем из задания И4

$$T=T\_{пл}+T\_{M}=\frac{J\_{пл}}{2}\dot{φ}^{2}+\frac{m}{2}v^{2}=\frac{J\_{пл}}{2}\dot{φ}^{2}+ \frac{m}{2}\left[\dot{x}^{2}+ω^{2}\*\left(xCosα\right)^{2}-2\dot{x}ωxCosαSinα\right] (5.2)$$

Производные по $x$:

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{x}}=m\ddot{x}; \frac{∂T}{∂x}=m\dot{x}ωCosαSinα; (5.3) $$

Обобщенная сила

$$Q\_{x}=mgsinα (5.4)$$

Подставив (5.3) и (5.4) в (5.1) получаем дифференциальное уравнение по $x$:

$$m\ddot{x}-m\dot{x}ωCosαSinα=mgsinα (5.5)$$

Поскольку.

$$\frac{∂T}{∂φ}=0; Q\_{φ}=-4t^{4}-4 (5.6) $$

то $φ$ является циклической координатой, и ей соответствует циклический интеграл дифференциального уравнения по $φ:$

$$\frac{∂T}{∂\dot{φ}}=136\dot{φ}=Const (5.7)$$

Покажем, что циклический интеграл $(5.7)$ выражает факт сохранение кинетического момента системы относительно оси z. Согласно формуле (2.1) задания И2

$$K\_{z}= (J\_{пл}+J\_{m} )\dot{φ }=\dot{φ}(136+mxCosα) $$

Подстановка данных задачи дает

$$K\_{z}=136 \dot{φ} (5.8)$$

что в точности совпадает с выражением (5.7).

Значит (5.7) действительно выражает факт сохранение кинетического момента системы относительно оси z. Ввиду начального покоя системы

$$K\_{z}=Const=0 (5.9)$$

Производная от (5.7) приводит к дифференциальному уравнению по $φ$

$$136\ddot{φ}=0 (5.10)$$

1. Проверим уравнение относительного движения точки (1.2) в условиях задачи А.

При подстановке условий задачи А: $\dot{φ}=-3=Const$ в (5.5) *получаем точно такое же уравнение, как в задаче А*

$$ \ddot{x}-6,75x=5 (5.11)$$

1. Проверим закон угловой скорости тела, найденный в условиях задачи Б

При подстановке условий задачи Б при отсутствии момента $M\_{z}$: $x=3+2t\^3$ в (5.7) получаем тот же закон угловой скорости

$$\left(250,75+155t ^{3}+51t ^{6}\right)\dot{φ}=K\_{z}=0 или \dot{φ}=\frac{-4/5t^{5}-4t}{250,75+153t^{3}+51t^{6}} (5.12) $$

что и в задании И2 при отсутствии момента.

1. Общее выражение зависимости реакции $N\_{y} $тела на точку найдем из теоремы об изменении кинетической энергии точки в переносном движении

$$\dot{T}\_{1}+2\dot{T}\_{0}-\frac{∂T}{∂t}=N\_{y}∙v\_{e} (5.13)$$

Здесь использовано разложение выражения кинетической энергии точки Т на слагаемые по степеням относительной скорости. Справа стоит мощность внешних сил (они здесь состоят из одной реакции $N\_{y})$на переносном движении точки.

$$T\_{M}=\frac{m}{2}\left[\dot{x}^{2}+ω^{2}\*\left(xCosα\right)^{2}-2\dot{x}ωxCosαSinα\right]=17\frac{1}{2}\left[\dot{x}^{2}+ω^{2}\*\left(xCosα\right)^{2}-2\dot{x}ωxCosαSinα\right]=8,5\left[\dot{x}^{2}+\dot{φ} ^{2}\*\left(xCosα\right)^{2}-2\dot{x}\dot{φ} xCosαSinα\right] (5.14)$$

Кинетическая энергия Т не содержит времени t, поэтому

$$\frac{∂T}{∂t}=0 (5.15)$$

Энергия $T\_{1}$ , содержащая $\dot{x}$ в первой степени и ее производная

$$T\_{1}=-17\dot{x}\dot{φ} xCosαSinα \dot{T}\_{1}==-17 xCosαSinα \* \left(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ}\right) (5.16)$$

Энергия $T\_{0},$ содержащая $\dot{x}$ в нулевой степени и ее производная

$$T\_{0}=8,5\dot{φ} ^{2}\*\left(xCosα\right)^{2} 2\dot{T}\_{0}=8,5\dot{φ} ^{2}\*\dot{x}\left(x(Cosα\right)^{2}) (5.17)$$

Мощность реакции в переносном движении точки

$$N\_{y}∙v\_{e}=N\_{y}\dot{φ}\left(x(Cosα\right)^{2} ) (5.18)$$

После подстановки в теорему (5.13) получаем

$$N\_{y}\dot{φ}\left(x(Cosα\right)^{2} )=-17 xCosαSinα \* \left(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ}\right)+8,5\dot{φ} ^{2}\*\dot{x}\left(x(Cosα\right)^{2}) $$

$$N\_{y}=\frac{-17 xCosαSinα \* \left(\ddot{x}\dot{φ}+\dot{x}\ddot{φ}\right)+8,5\dot{φ} ^{2}\*\dot{x}\left(x(Cosα\right)^{2})}{\dot{φ}\left(x(Cosα\right)^{2} )} (5.19)$$

Проверим выражение (для реакции$ N\_{y} $в условиях задачи А, где**:**  $\dot{φ}=-3=Const, \ddot{φ}=0 $

В силу дифференциального уравнения движения точки

$$\ddot{x}-6,75x=5 $$

получаем то же выражение (1.8)

$$ N\_{y}=-mω^{2}cosαsinα $$

что и в задании И1.