Санкт-Петербургский политехнический университет

Институт Прикладной математики и механики

Кафедра теоретической механики

Курсовой проект на тему:

«Исследование колебаний математического маятника переменной длины»

Выполнили: студентки гр. 23604/1 Белоусова Екатерина Александровна, Андреева Полина Олеговна

Проверил: Панченко Артём Юрьевич

Оглавление

[Введение 3](#_Toc484002444)

[Вывод формулы 4](#_Toc484002445)

[Работа программы 4](#_Toc484002446)

[Исследование колебаний 5](#_Toc484002447)

[**Случай пренебрежения изменением длины** 5](#_Toc484002448)

[**Случай значительного изменения длины маятника** 7](#_Toc484002449)

[**Обобщение** 11](#_Toc484002450)

[Заключение 12](#_Toc484002451)

[Список литературы 13](#_Toc484002452)

## Введение

Для математического описания реальных процессов используют математические модели. В некоторых случаях классическая маятниковая модель для описания работает плохо, поэтому требуется ее уточнение.

Известно, что исследование волновых движений жидкости в топливных баках ракетоносителей основано на изучении колебаний совокупности эквивалентных математических маятников, при этом каждый маятник моделирует свой (n-ый) тон колебаний. Медленное изменение параметров системы и параметров внешнего воздействия ведет, при определенных условиях, к раскачке колебаний (параметрическому резонансу).

Целью нашей работы было исследование колебания маятника, длина которого меняется по гармоническому закону. В наши задачи входило построение графиков колебаний при помощи численных методов, построение фазовых портеров, исследование влияния параметров в уравнении колебаний на вид колебаний и фазовых портретов, а так же визуализация модели маятника при помощи языка программирования JavaScript.

## Вывод формулы

Выясним, каким будет уравнение колебаний нашего маятника. Для этого найдем кинетическую и потенциальную энергию маятника:

и запишем уравнение Лагранжа второго рода:

Аналитического решения этого уравнения в простых функциях нет, мы будет строить все решения, используя численные методы.

## Работа программы

Сначала зададим начальные условия:

При вычислении положения маятника мы использовали метод численного интегрирования leapfrog. Запоминаем сначала ускорение на данном шаге:

Затем высчитываем новое положение по предыдущему:

где это шаг интегрирования

Запоминаем новое значение ускорения:

*;*

Далее вычисляем новое значение скорости:

Положение маятника в программе мы задаем координатами и , их находим из формул:

Для построения фазовых портретов использовался метод правых производных. На каждом шаге мы запоминали значение угла , и затем по формуле находим значение производной.

Графики в нашей программе строились при помощи библиотеки jquery.

## Исследование колебаний

Для исследования поведения нашего маятника рассмотрим несколько случаев:

1. Малые колебания с малым изменением длины.
2. Изменение длины маятника значительно.

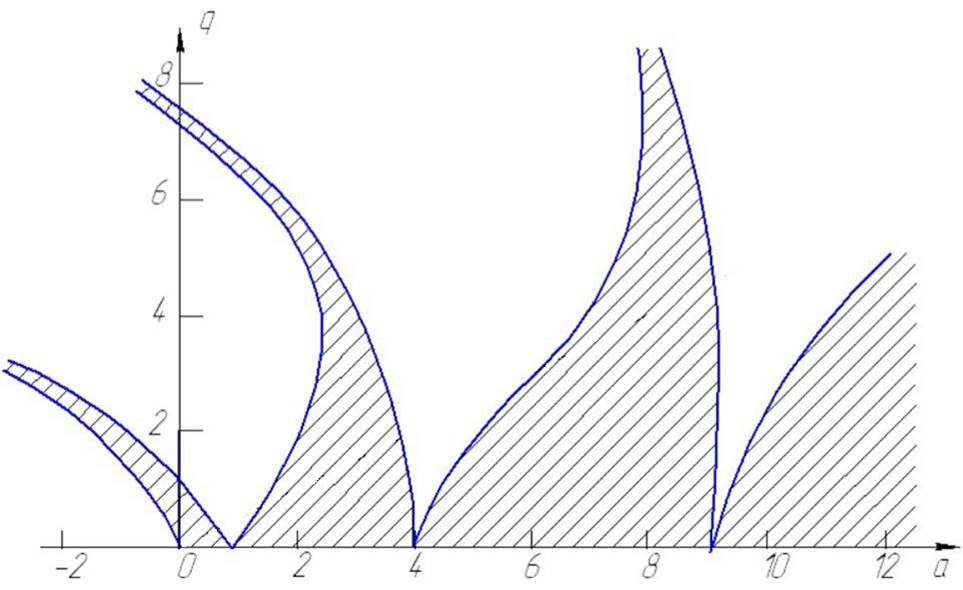
### **Случай пренебрежения изменением длины**

Для начала рассмотрим случай пренебрежения скорости изменения длины маятника, учитывая, что начальный угол отклонения много меньше 1 радиана.  
Разложим синус в ряд Тейлора:

Ограничиваясь первым членом в разложении, получим уравнение:

 Учитывая малость параметра, заменим выражение эквивалентным: cведем наше уравнение к уравнению Матье:

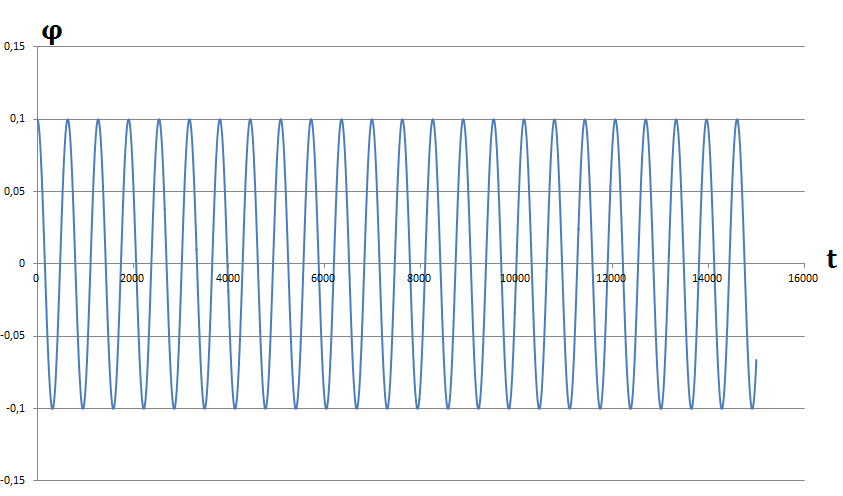
*, где*

уравнения Матье представлены на диаграмме Айнса-Стретта:  
[](http://tm.spbstu.ru/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Strett.jpg)

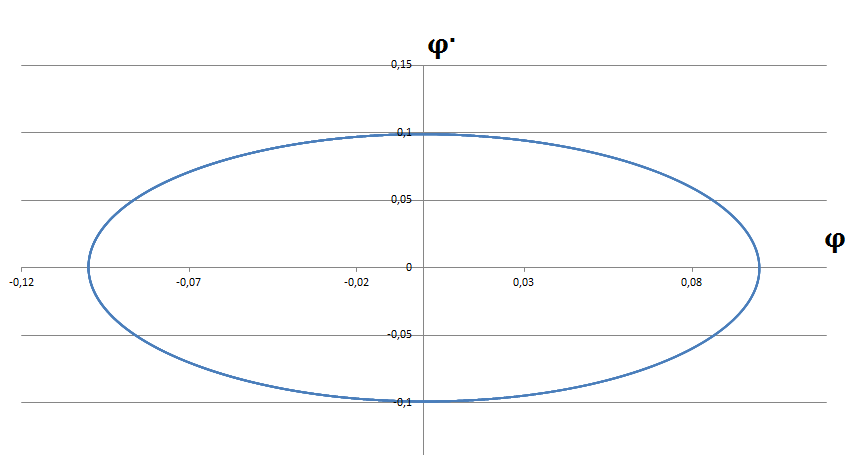
На диаграмме заштрихованные области соответствуют области устойчивости, остальные – области неустойчивости.

Так как мы пренебрегаем скоростью изменения длины, то параметр для случая, не может быть больше 0.5

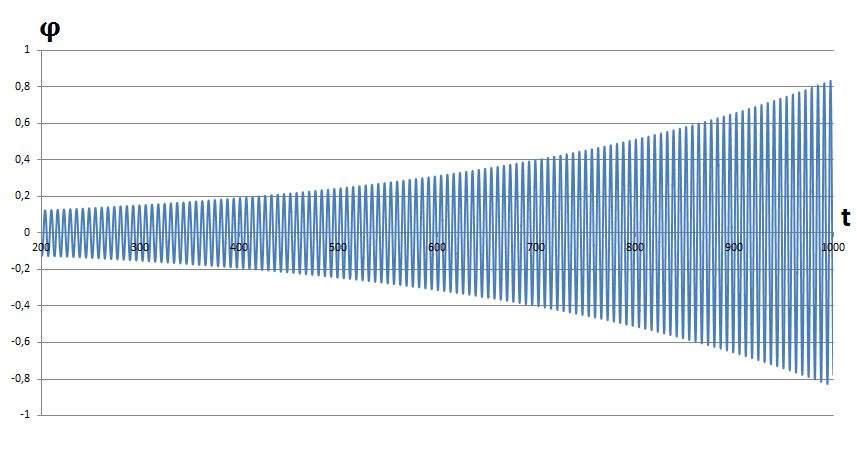
Построим график колебаний для случая таких параметров, которые соответствуют устойчивым колебаниям (Например ).



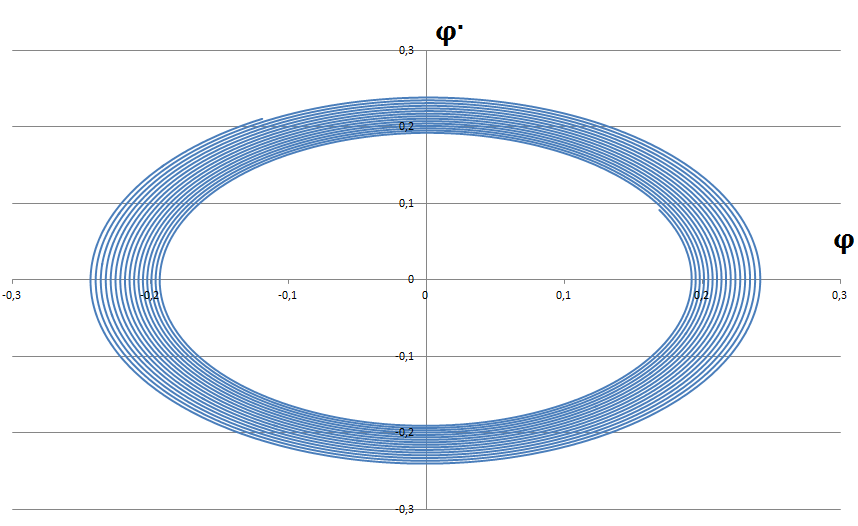
Получили фазовый портрет типа центр:



Рассмотрим случай параметров , соответствующих неустойчивой картине. Например ()



Амплитуда неограниченно растет. Фазовый портрет типа неустойчивый фокус:



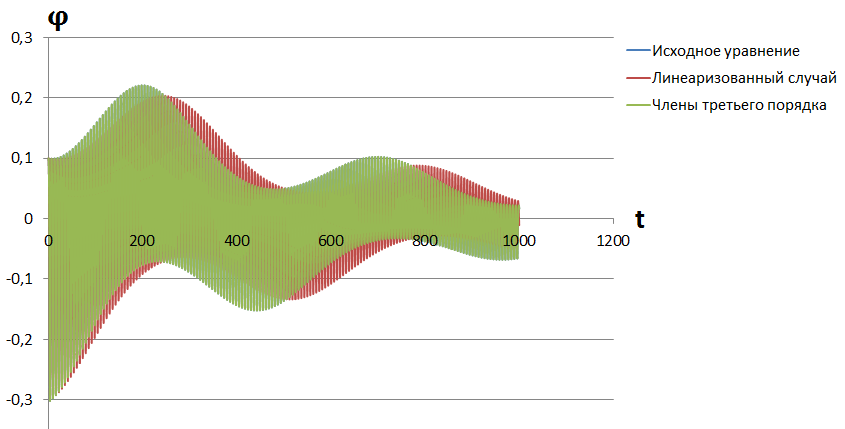
### **Случай значительного изменения длины маятника**

Усложним задачу и учтём изменение длины маятника. Рассмотрим три варианта:

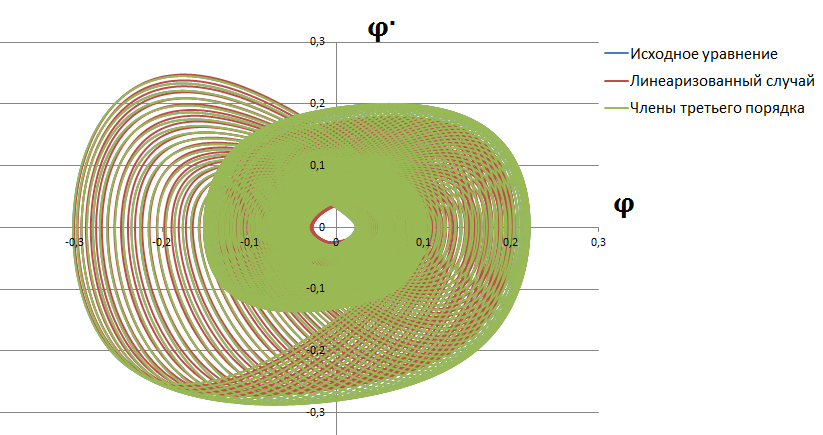
В первом приближении:

И исходное уравнение:

Построим на одной плоскости графики для трех вышеприведенных случаев для таких параметров

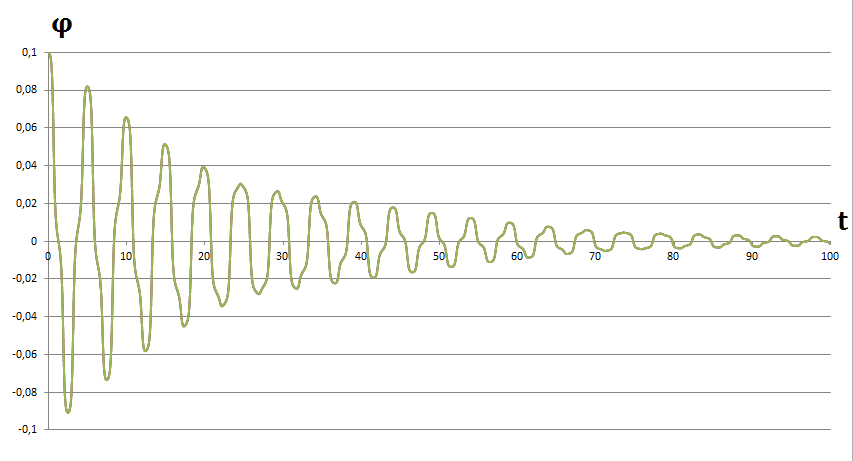


Фазовый портрет:

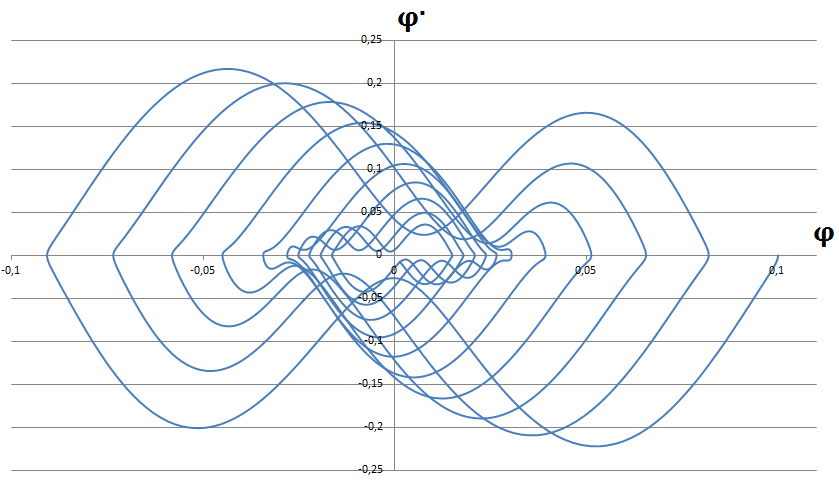


Видим, что расхождения для линеаризованного случая и исходного уравнения есть. Но график уравнения с членами третьего порядка в разложении совпадает с графиком исходного уравнения, значит членов третьего порядка достаточно.

Зафиксируем параметр и увеличим параметр .

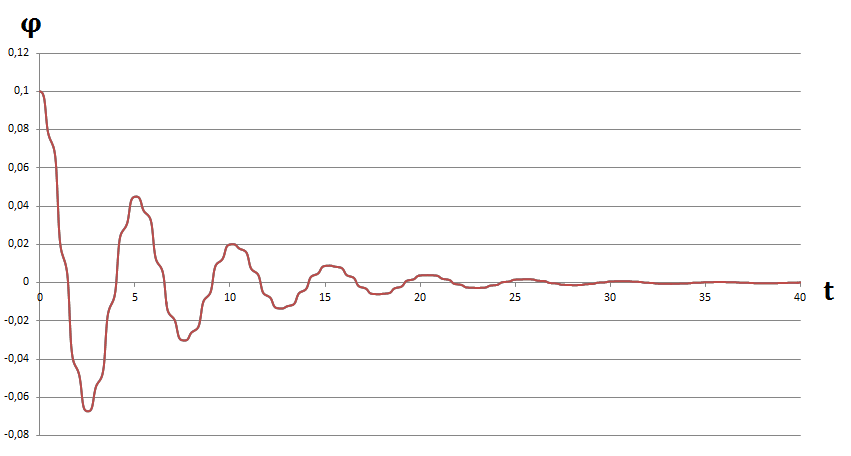
**

Фазовый портрет:

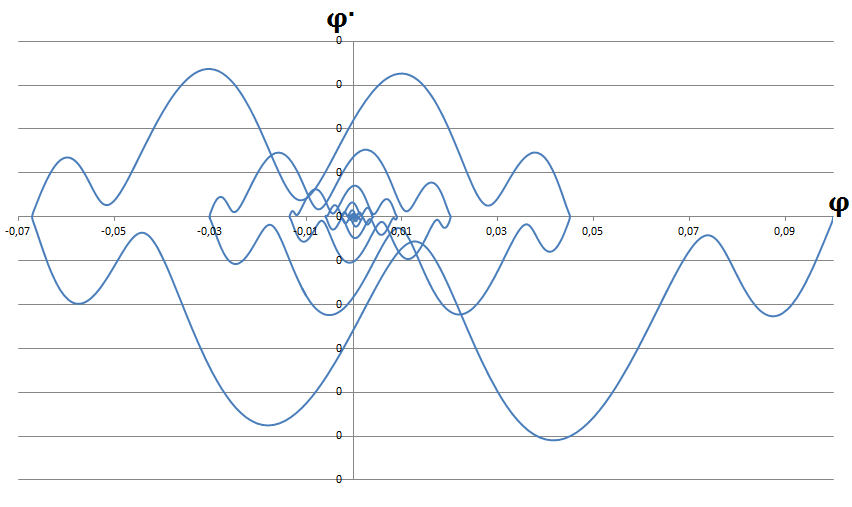


Видим, что колебания затухают быстрей, чем в предыдущем случае.

Увеличим частоту колебаний еще раз.

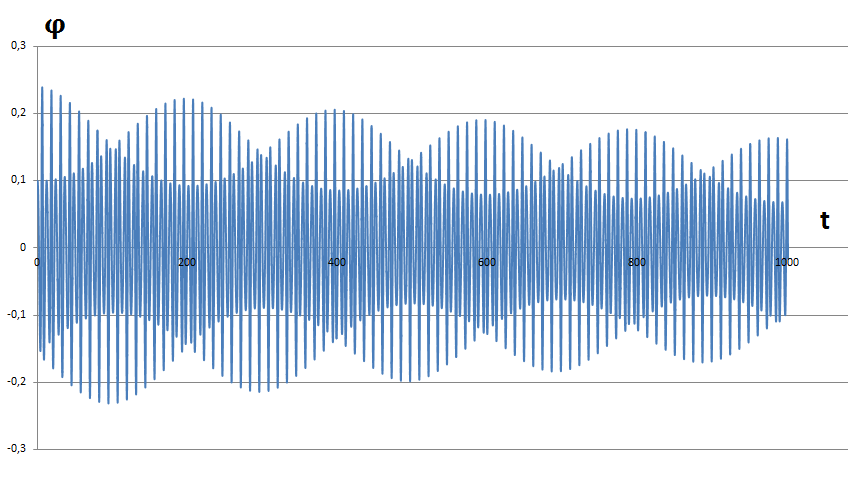


Фазовый портер схож с предыдущим случаем:

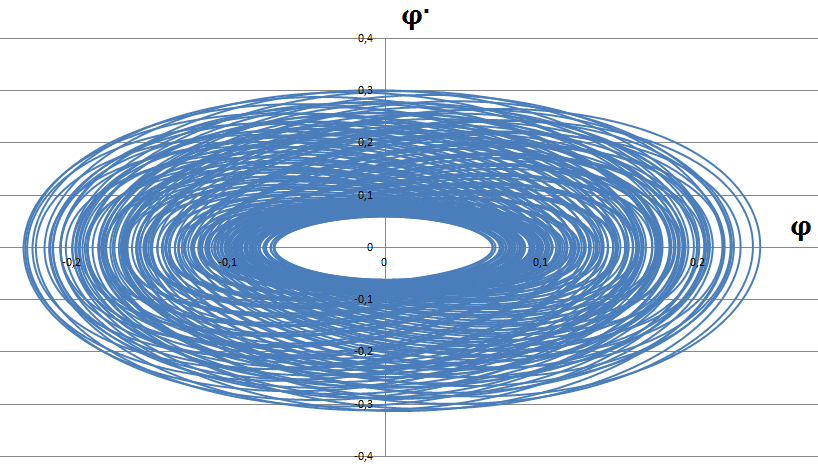


Видим, что колебания затухают еще быстрей. Значит при увеличении частоты изменения длины маятника , колебания затухают быстрей.

Проверим, будут ли колебания затухать медленнее при



Фазовый портрет:

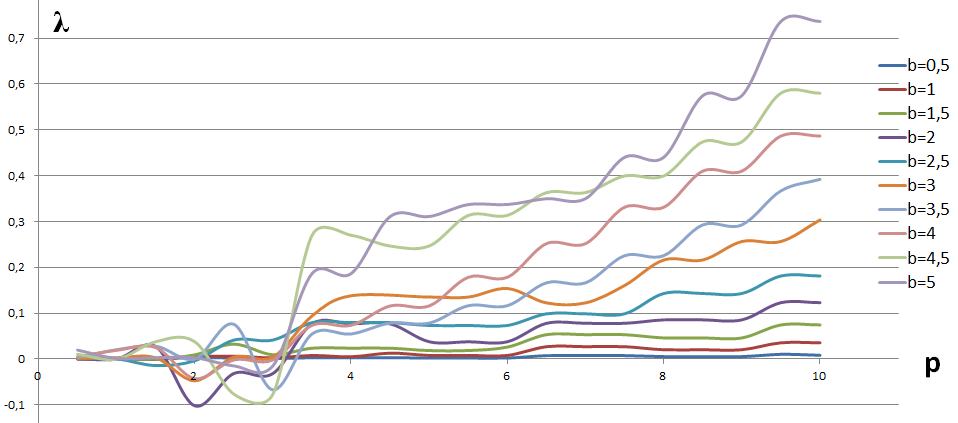


Колебания действительно затухают медленно.

### **Обобщение**

Убедимся в выводе, сделанном в предыдущем параграфе.

При исследовании поведения системы мы построили график зависимости скорости затухания (раскачивания) от параметров b и p. При фиксированном значении параметра b и переменном значении параметра р мы считали декремент затухания: *.*

[](http://tm.spbstu.ru/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Dekrement.PNG)  
Из этого графика видно, что при малых значениях параметра b для p на промежутке от 1,5 до 3 декремент отрицателен. Это означает, что колебания неустойчивы и происходит раскачивание системы. При больших b видно, что с увеличением p скорость затухания увеличивается, и при фиксированном p с увеличением b скорость затухания тоже увеличивается.

## Заключение

В ходе исследований колебаний математического маятника переменной длины мы рассмотрели графики колебаний и фазовые портреты. Выяснили, что при фиксировании параметра b с увеличением частоты колебания затухают быстрее, аналогичная зависимость наблюдается при фиксировании частоты и увеличении параметра b. Однако есть области раскачки колебаний.

Пренебрегая изменением длины, колебания схожи с классическим маятником для устойчивого случая. Но учитывая изменение длины и беря больше членов в разложении синуса, график заметно изменяется.

Из полученных графиков видно, что линеаризация задачи для случая малого начального отклонения практически не влияет на ее решение (есть исключения).

## Список литературы

1. <http://trudymai.ru/upload/iblock/459/issledovanie-rezonansnykh-kolebaniy-matematicheskogo-mayatnika-peremennoy-dliny.pdf>
2. <http://cyberleninka.ru/article/n/upravlenie-dvizheniyami-parametricheskogo-mayatnika>