МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

Вязкоупругая модель склеральной оболочки глаза

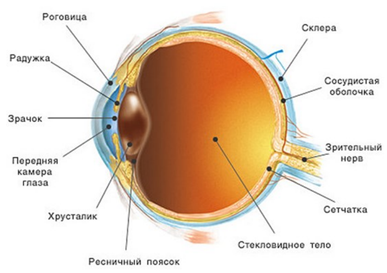
К.П. Фролова, выпуск 2016 года
научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент каф. ТМ Е.Н. Вильчевская

Цели исследования:

* Смоделировать вязкоупругое поведение склеры после интравитреальной инъекции — инъекции внутрь стекловидного тела;
* Определить значение коэффициента сдвиговой вязкости склеры путем сравнения результатов математического моделирования и указанных в литературе экспериментальных данных, основанных на дискретном измерении внутриглазного давления (ВГД) в течение нескольких минут после интравитреальной инъекции.

Структура глаза

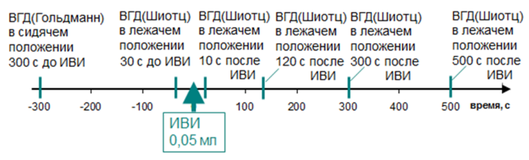
Сечение глазного яблока



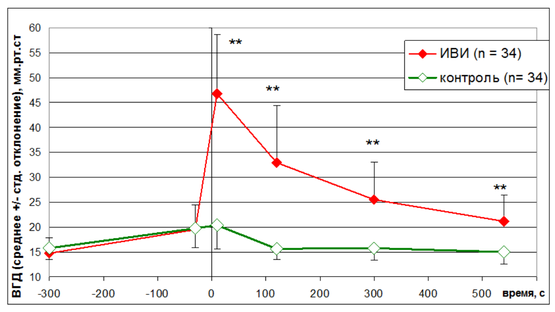
Склера занимает 93% внешней оболочки глаза, поэтому в задачах, связанных с определением формы и изменением объема глазного яблока под действием ВГД, биомеханические свойства склеры играют решающую роль, и поведение глаза допустимо моделировать поведением склеральной оболочки.

Моделируемый эксперимент

Схема моделируемого эксперимента



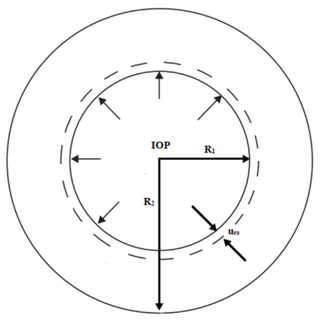
Экспериментальная кривая



В большинстве существующих моделей релаксация напряжений объясняется наличием оттока внутриглазной жидкости из нагруженного глаза. В данной работе подобное поведение объясняется наличием обоими факторов: оттока и вязких свойств склеральной оболочки глаза.

Математическая модель

Граничные условия



Рассматривается вязкоупругий сферический слой при центрально-симметричной нагрузке.
1.Предполагается, что дополнительный объем жидкости, введенный при инъекции, сохраняется в стекловидном теле на протяжении эксперимента;
2.Учитывается отток внутриглазной жидкости.
Материал склеры:
Линейный трансверсально-изотропный

Система уравнений

Квазистатическая задача *Условия симметрии*

Уравнение движения → $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=0$ → $\dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+2\dfrac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=0$

Модель Кельвина—Фойгта, 1 к-т вязкости

Определяющие соотношения → $\boldsymbol{\sigma}={}^4\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}+2\eta\dot{\mathbf{e}}$

Условия совместности деформаций → $\varepsilon_{rr}=\dfrac{du_r}{dr},\ \varepsilon_{\varphi\varphi}=\varepsilon_{\theta\theta}=\dfrac{u_r}{r}$

$\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений
$\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций
$\mathbf{e}$ – девиатор тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$
η – коэффициент сдвиговой вязкости
${}^4\mathbf{C}$ – тензор жесткости
$\mathbf{u}$ – вектор перемещений

Прямое и обратное преобразования Лапласа

$$f(x,\tau)\to\int_0^\infty e^{-s\tau}f(x,\tau)d\tau=\bar f(x,s),\ \dot f(x,\tau)\to\int_0^\infty e^{-s\tau}\dot f(x,\tau)d\tau=s\bar f(x,s)-f(x,0)\qquad s=c+i\omega,c>s_0$$

Уравнение движения

$$\left[\frac{\xi^2(1-\nu_{\theta\varphi})}{\xi(1-\nu_{\theta\varphi})-2\nu_{r\theta}^2}+\frac{4}{3}s\right]\left(\frac{\partial^2\bar u}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial\bar u}{\partial x}-2\frac{\bar u}{x^2}\right)-\frac{2\xi[1-\nu_{r\theta}-\xi(1-\nu_{\theta\varphi})]}{\xi(1-\nu_{\theta\varphi})-2\nu_{r\theta}^2}\frac{\bar u}{x^2}=0$$

$\nu_{r\theta}$, $\nu_{\theta\varphi}$ - коэффициенты Пуассона

Радиальная компонента тензора σ

$$\overline{\sigma_{xx}}=\overline{\sigma_{rr\dim}}=\left[\frac{2\nu_{r\theta}\xi}{\xi(1-\nu_{\theta\varphi})-2\nu_{r\theta}^2}-\frac{4}{3}s\right]\frac{\bar u}{x}+\left[\frac{(1-\nu_{\theta\varphi})\xi^2}{\xi(1-\nu_{\theta\varphi})-2\nu_{r\theta}^2}+\frac{4}{3}s\right]\frac{\partial\bar u}{\partial x}$$

Интеграл Бромовича $f(x,\tau)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{s\tau}\bar f(x,s)ds,\tau>0$

Ряд Маклорена
Аппроксимация Паде

Квадратурная формула типа Гаусса $f(x,\tau)\approx f_n(x,\tau)\equiv f_{n,a,K}(x,\tau)=\dfrac{1}{\tau}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}K_j\bar f\left(x,\frac{a_j}{\tau}\right)$

Безразмерная постановка задачи

E_{rr}, $E_{\theta\theta}$ - модули Юнга

$\beta=\frac{R_1}{R_2}\le x=\frac{r}{R_2}\le 1$	$u=\frac{u_r}{R_2}$	$\tau=\frac{E_{\theta\theta}}{\eta}t$	$\sigma_{ij\dim}=\frac{\sigma_{ij}}{E_{\theta\theta}}$	$\xi=\frac{E_{rr}}{E_{\theta\theta}}$
Координата	Перемещения	Время	Напряжения	Модуль Юнга

Решение при наличии оттока внутриглазной жидкости

Граничные условия

$$u(t)\big|_{x=\beta}=u_0+\frac{\int_{\tilde t=0}^{\tilde t=t}\dot V(\tilde t)d\tilde t}{4\pi R_2R_{inj}^2}$$

$$\sigma_{xx}(t)\big|_{x=1}=0$$

$$R_{inj}=\sqrt[3]{R_1^3+\frac{3\Delta V}{4\pi}}$$

Метод тонографии

Аппроксимация тонограммы → $P(t)$ → $\tilde\tau=\dfrac{\alpha}{C}$ → C

$dV=\alpha dP\quad \alpha=1/(P_0E_i\ln 10)$

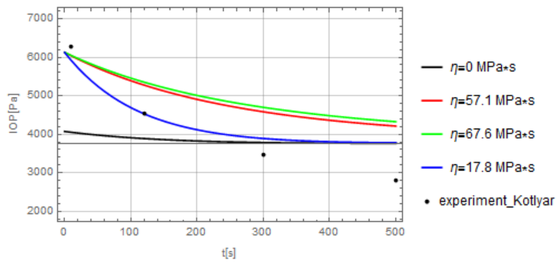
$$\int_{\tilde t=0}^{\tilde t=t}\dot V(\tilde t)d\tilde t=\int_{\tilde t=0}^{\tilde t=t}(F(\tilde t)-R(\tilde t))d\tilde t$$

$$R=C(P-P_e)$$

V – объем глаза; P – аппроксимирующая функция ВГД; 1/α, E_i – объемная жесткость и коэффициент ригидности корнеосклеральной оболочки; C – коэффициент легкости оттока; F, R– скорости притока и оттока жидкости; P_e – давление в эписклеральных венах; «0» соответствует параметрам в ненагруженном состоянии.

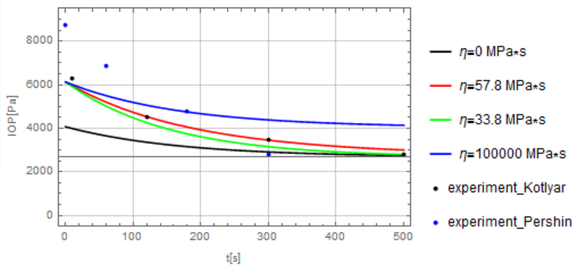
Значения коэффициента η, полученные методом бисекции

Экспериментальная точка	Коэффициент сдвиговой вязкости
ВГД=4533 Па, t=120 с	η=57.1 МПа · с
ВГД=3466 Па, t=300 с	η=58.6 МПа · с
ВГД=2800 Па, t=500 с	η=33.8 МПа · с



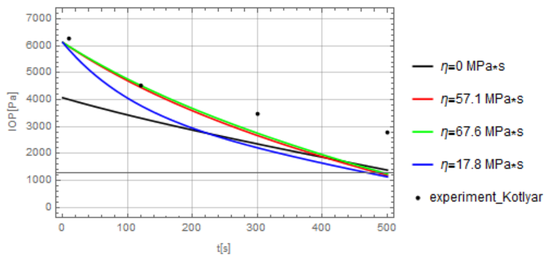
При стандартной схеме обработки тонограммы:

$C=C_0=const\qquad F=F_0=const\qquad P_e-P_{e0}=1.25$



При модифицированной схеме обработки тонограммы №1:

$P_e-P_{e0}=1.25\qquad F=R_{st}\ne F_0$



При модифицированной схеме обработки тонограммы №2:

$P_e-P_{e0}\ne 1.25\qquad F=R_{st}=F_0$

Зависимость ВГД от времени

Решение при сохранении объема глаза

$E_{\theta\theta}$=14.3 МПа,
$E_{rr}/E_{\theta\theta}$=0.01,
$\nu_{r\theta}$=0.01, $\nu_{\theta\varphi}$=0.45
R_1=11.75 мм,
R_2=12.25 мм,
ΔV=0.05 мл

Граничные условия

$$u(\tau)\big|_{x=\beta}=u_0H(\tau)$$

$$\sigma_{xx}(\tau)\big|_{x=1}=\sigma_{rr\dim}(\tau)\big|_{x=1}=0$$

Учет объема инъекции ΔV

$$u_0\approx\frac{\Delta V}{4\pi R_2R_1^2}$$

Определение ВГД

$$IOP_{\dim}(\tau)=-\sigma_{xx}(\tau)\big|_{x=\beta}$$

Коэффициент сдвиговой вязкости склеры

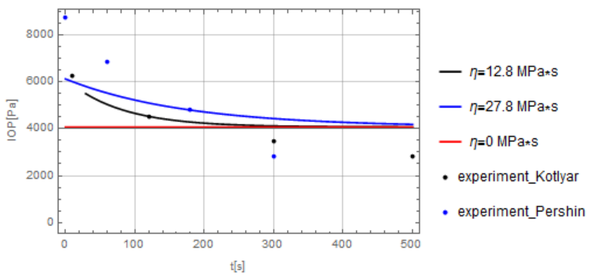
$$\eta=E_{\theta\theta}t/\tau$$

Эксперимент К.Е. Котляра: 195.8e-6 – 438.2e-6
Эксперимент Б.С. Першина: 195.8e-6 – 610.7e-6
Теоретические данные: ≈ 285e-6 – 430e-6

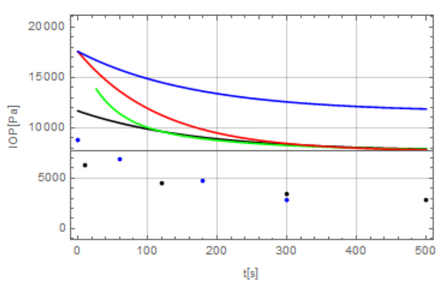
Диапазоны $IOP_{\dim}$

Значения коэффициента η

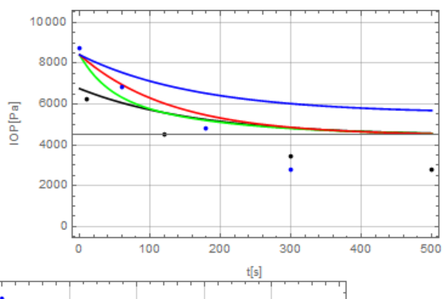
Экспериментальная точка	Коэффициент сдвиговой вязкости
ВГД=4533 Па, t=120 с	η=12.8 МПа · с
ВГД=4800 Па, t=180 с	η=27.8 МПа · с



Зависимость ВГД от времени



$E_{\theta\theta}$=41.0 МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta}$=0.01

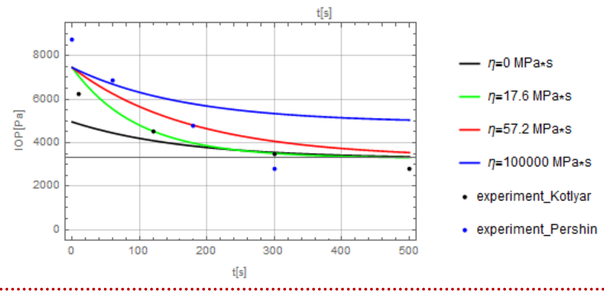


$E_{\theta\theta}$=20.0 МПа, E_{rr}=0.5 МПа

$E_{\theta\theta}$=17.4 МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta}$=0.01

ВГД=4533 Па, t=120 с
η= 17.6 МПа · с

ВГД=4800 Па, t=180 с
η= 57.2МПа · с



Зависимость ВГД от времени при разных модулях Юнга

ВЫВОДЫ

* При учете обоих факторов: наличия вязкости и оттока внутриглазной жидкости, - теория лучше согласуется с экспериментом, чем при учете одного из них.
* Традиционные предположения тонографии приводят к результатам, лучше согласующимся с экспериментом, чем предположения модифицированных методов.
* Коэффициент сдвиговой вязкости зависит от значений модулей Юнга. При допустимом варьировании значений модулей оказывается, что коэффициент сдвиговой вязкости тем больше, чем меньше модули Юнга.