УДК 531.01

**ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА**

**© А.В. Костарев**

*Санкт - Петербургский государственный политехнический университет.*

*Санкт-Петербург, Россия*

***Аннотация****. Предложено два простых вывода формулы Эйлера*  *основанных на свойстве ортогональности вектора в теле и его производной.*

***Ключевые слова****: кинематика твердого тела, вектор в теле, угловая скорость, формула Эйлера.*

В курсах теоретической механики центральная формула кинематики твердого тела (формула Эйлера) выводится несколькими трудоемкими способами: из теоремы Эйлера о конечном повороте [1 – 7], координатным способом [8], через кватернион [9], через матрицу тензора поворота твердого тела [10], или просто обобщается на свободное движение из частного случая вращения тела вокруг неподвижной оси [11 - 14]. Поиск лаконичного, но строгого вывода формулы Эйлера для свободного твердого тела остается актуальным.

1. **Матричный способ**

***Вектором в теле*** назовем любой вектор **а**, соединяющий две точки твердого тела. Все векторы в теле постоянны по модулю и изменяют только свое направление, поворачиваясь вместе с телом.

Очевидно, что столбец проекций вектора **а** на оси неподвижной системы

можно связать со столбцом проекций его производной

бесчисленным множеством матриц 3х3 .

Покажем, что среди этого множества матриц (1.3) существует единственная, общая для всех векторов в теле, матрица.

Поскольку производная по времени от вектора постоянного модуля перпендикулярна самому вектору, то

(1.4)

Итак

Чтобы матрица не зависела от вектора в теле, все коэффициенты при проекциях вектора с необходимостью должны быть равны нулю.

(1.6)

Здесь введены обозначения трех ненулевых элемента матрицы по образцу присоединенной матрицы вектора.

Таким образом, для твердого тела действительно существует единственная матрица , удовлетворяющая соотношение (1.3) для всех векторов в теле. Найденная матрица характеризует вращение тела, и ее следует назвать ***матрицей***  ***угловой скорости***

(1.7)

Элементы матрицы (1.7) имеют простой геометрический смысл. Элементы являются проекциями скорости конца орта с первым индексом при его вращении вокруг орта со вторым индексом по правилу правого винта. Так

(1.8)

есть скорость конца орта **i** вдоль оси z при его вращении вокруг оси у. Понятно, почему элементы с повторяющимися индексами равны нулю.

Таким образом, для любого вектора в теле справедлива ***матричная формула Эйлера***

Из трех элементов кососимметричной матрицы можно составить столбец сопутствующего ***вектора угловой скорости тела***

Теперь формуле (1.9) можно сопоставить **векторную формулу Эйлера**

1. **Координатный способ**

Продифференцируем по времени разложение произвольного вектора в теле **а** по осям, связанным с телом

При движении тела проекции вектора неизменны, а орты изменяют только свое направление.

(2.2)

Поскольку орты являются векторами в теле, то их производные лежат в плоскостях, перпендикулярных самим ортам.

(2.3)

Здесь первый индекс проекций есть номер оси проектирования, второй - номер проектируемого орта.

Подставив производные (2.3) в формулу (2.2), получим

Из условия ортогональности и находим

=0 (2.5)

Поскольку вектор произволен, то все скобки в этом выражении с необходимостью равны нулю. В обозначениях (1.6) имеем:

Видим, что столбцы вектора в теле

и его производной

связаны ***матричной формулой Эйлера***

которой соответствует ***векторная формула Эйлера***

**Литература**

1. Лурье А.И. Аналитическая механика. ̶ М.: Физматлит, 1961. ̶ 824с.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. М.: Наука, 1982. 352с.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика. ̶ М.: Наука, 1990. ̶ 414с.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2003, 719с.
5. Thornton M. Classical dynamics. ̶ Saunders college publishing. 1995. ̶ 638 p.
6. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С. М.: МГТУ, 2000. 735с.
7. Ginsberg J.H., Genin J. Dynamics. ̶ John Willey & sons, Inc. 1997 ̶ 553 p.
8. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. СПб: Лань, 1998. 729с
9. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. ̶ М.: Наука. Физматлит, 1977. ̶ 320с.
10. Костарев А.В. Угловая скорость тела. Формула Эйлера. URL: <http://www.spbstu.ru/phmech/ThM/pdf/6MM.doc> ̶ (дата обращения: 30.06.2010).
11. Гернет М.М. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа.1987. 344 с.
12. Meriiam J.L., Kraige L.G. Engineering mechanics. V.2 ̶ John Willey & sons, Inc. 1993. ̶ 717 p.
13. Sandor B.I., Richter K.J. Engineering mechanics. Statics and Dynamics. ̶ Prentice-hall. 1987. ̶ 928 p.
14. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1967. 478с.