

А. В. БОРИСОВ, И. С. МАМАЕВ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР

---



Москва ♦ Ижевск

2005

---

Интернет-магазин

**MATHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- нефтегазовые технологии



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту №04-01-14028.

---

**Борисов А. В., Мамаев И. С.**

Математические методы динамики вихревых структур. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 368 с.

В книге описаны основные математические методы исследования вихревых структур в идеальной несжимаемой жидкости. Все методы основаны на систематическом использовании гамильтонова формализма и качественного анализа при изучении интегрируемых и неинтегрируемых систем вихревой динамики. Рассмотрены задачи о движении точечных вихрей на плоскости и сфере, взаимодействие вихревых пятен, а также новые вопросы, связанные с анализом взаимного движения твердых тел и вихревых структур в идеальной жидкости. В приложениях собраны новые результаты, полученные авторами совместно с коллегами и учениками.

Для студентов и аспирантов механико-математических и физических специальностей университетов, специалистов по динамическим системам и гидродинамике.

**ISBN 5-93972-501-5**

© Институт компьютерных исследований, 2005

© А. В. Борисов, И. С. Мамаев, 2005

<http://rcd.ru>

<http://ics.org.ru>

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	8
<b>Введение</b> . . . . .	10
<b>§ 1. Динамика точечных вихрей на плоскости</b> . . . . .	20
1. Абсолютное движение . . . . .	20
Уравнения движения и первые интегралы (20). Комплексная форма уравнений вихревой динамики (21). Общие свойства движения $N$ вихрей (22).	
2. Алгебраическая редукция в динамике вихрей . . . . .	23
Относительные переменные и скобка Ли–Пуассона (25). Квадратуры для абсолютного движения (28).	
3. Проблема адвекции . . . . .	29
<b>§ 2. Динамика точечных вихрей на сфере</b> . . . . .	30
1. Абсолютное движение . . . . .	30
Вывод уравнений движения (30). Уравнения движения и первые интегралы (32). Уравнения движения в декартовых координатах (33).	
2. Алгебраическая редукция в динамике вихрей на сфере . . . . .	34
Относительные переменные и нелинейные скобки Пуассона (34). Проблема интегрируемости (37).	
<b>§ 3. Задача трех вихрей на плоскости и сфере</b> . . . . .	38
Исторические комментарии (38).	
1. Аналогия с системой Лотки–Вольтерра . . . . .	39
2. Ли-алгебраическая классификация задачи трех вихрей на плоскости. Канонические координаты . . . . .	41
Канонические координаты приведенной системы в задаче трех вихрей (44).	
3. Геометрическая интерпретация и качественный анализ динамики трех вихрей на плоскости . . . . .	47
Геометрическая интерпретация относительного движения (47). Особенности системы (49). Томсоновские (равносторонние) конфигурации (49). Коллинеарные конфигурации (51). Статические коллинеарные конфигурации (54). Бифуркационный анализ (54). Абсолютное движение и адвекция (55).	

4.	Геометрическая интерпретация и качественный анализ динамики трех вихрей на сфере . . . . .	59
	Приведение к одной степени свободы (59). Геометрическая интерпретация относительного движения (62). Томсоновские (неколлинеарные) конфигурации (63). Статические коллинеарные конфигурации (66). Бифуркационный анализ (68). Геометрическая интерпретация для абсолютного движения (72).	
5.	Проблемы коллапса и рассеяния . . . . .	72
	Коллапс (73). Рассеяние (75).	
<b>§ 4.</b>	<b>Другие разрешимые задачи динамики точечных вихрей на <math>\mathbb{R}^2</math> и <math>\mathbb{S}^2</math>. Методы качественного исследования . . . . .</b>	<b>80</b>
1.	$N$ вихрей с нулевым моментом завихренности . . . . .	80
	Сведение к приведенной системе задачи $(N - 1)$ вихрей (80). Четыре вихря на плоскости (83). Аналогия со случаем Делоне (89).	
2.	Центрально- и зеркально-симметричные решения в задаче четырех вихрей . . . . .	90
	Центрально-симметричное решение при $D_0 = 0$ (90). Зеркально-симметричное решение (чехарда Гельмгольца) (96).	
<b>§ 5.</b>	<b>Классификация и симплектизация вихревой алгебры для плоскости . . . . .</b>	<b>100</b>
1.	Вихревая алгебра и лиевы пучки . . . . .	100
2.	Теорема о компактности (финитности) . . . . .	104
3.	Сингулярные орбиты и редукция по симметриям . . . . .	105
4.	Канонические координаты приведенной системы . . . . .	108
<b>§ 6.</b>	<b>Задача четырех вихрей на плоскости . . . . .</b>	<b>110</b>
1.	Канонические приведенные координаты . . . . .	110
2.	Сечение Пуанкаре. Неинтегрируемость и хаос . . . . .	111
<b>§ 7.</b>	<b>Относительные хореографии в задаче трех и четырех вихрей равной интенсивности . . . . .</b>	<b>113</b>
1.	Относительные хореографии в задаче трех вихрей . . . . .	113
2.	Хореографии в задаче трех вихрей на сфере . . . . .	117
3.	Относительные хореографии в задаче четырех вихрей на плоскости . . . . .	117
4.	Исторические комментарии . . . . .	126
<b>§ 8.</b>	<b>Стационарные и статические конфигурации вихрей на плоскости и сфере. Аналогия с задачей <math>n</math> тел . . . . .</b>	<b>127</b>
1.	Стационарные конфигурации на плоскости . . . . .	127
	Теоремы Палмора и О'Нейла (127). Коллинеарные конфигурации одинаковых вихрей (131). Лос-Аламосский каталог и симметричные конфигурации (132). Несимметричные стационарные конфигурации на $\mathbb{R}^2$ (134). Представление Лакса и стационарные конфигурации (136).	

2.	Стационарные конфигурации на сфере . . . . .	139
	Условие стационарности (139). Аналог томсоновской конфигурации (139). Аналог коллинеарных конфигураций вихрей на сфере (141).	
3.	Статические конфигурации (положения равновесия) . . . . .	142
4.	Коллапс и гомографические конфигурации вихрей на плоскости и сфере . . . . .	144
<b>§ 9.</b>	<b>Движение вихрей на плоскости внутри и вне круга . . . . .</b>	<b>148</b>
1.	Движение точечных вихрей, ограниченное произвольной областью	148
2.	Исторические комментарии . . . . .	149
3.	Уравнения движения и первый интеграл . . . . .	151
	Уравнения движения вихрей внутри кругового цилиндра (151). Уравнения движения вихрей вне круга (153). Момент завихренности (154).	
4.	Томсоновские конфигурации вихрей внутри и вне цилиндра . . .	154
5.	Движение $N$ вихрей вне кругового цилиндра в набегающем потоке	158
6.	Движение двух вихрей вне круга в набегающем потоке . . . . .	159
	Сечение Пуанкаре и хореографии (159). Движение вихревой пары за круговым цилиндром в набегающем потоке. Решение Фёппля (162).	
7.	Движение двух вихрей внутри цилиндра . . . . .	163
	Редукция (163). Фазовые портреты и бифуркационный анализ (164).	
8.	Движение двух вихрей вне кругового цилиндра . . . . .	171
<b>§ 10.</b>	<b>Движение периодических цепочек и решеток из точечных вихрей . . . . .</b>	<b>174</b>
1.	Вихри на цилиндре . . . . .	174
2.	Вихри на торе . . . . .	176
	Литература . . . . .	179
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1.</b>	<b>Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере . . . . .</b>	<b>192</b>
1.	Уравнения движения и первые интегралы системы вихрей на плоскости	192
2.	Редукция на плоскости . . . . .	194
3.	Уравнения движения и первые интегралы системы вихрей на сфере $S^2$	198
4.	Редукция на сфере . . . . .	199
5.	Явная редукция системы четырех вихрей на плоскости и сфере . . . .	203
6.	Сечение Пуанкаре для системы четырех вихрей на плоскости и сфере	205
7.	Переход к хаосу в задаче о четырех одинаковых вихрях на плоскости .	209
	Литература . . . . .	214

<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Абсолютные и относительные хореографии в задаче о движении точечных вихрей на плоскости</b> . . . . .	216
1. Уравнения движения и первые интегралы . . . . .	216
2. Понижение порядка для трех и четырех вихрей равной интенсивности	218
3. Абсолютное движение: квадратуры и геометрическая интерпретация .	219
4. Аналитические хореографии . . . . .	221
5. Новое периодическое решение в задаче четырех вихрей . . . . .	223
6. Относительные и абсолютные хореографии . . . . .	226
7. Устойчивость . . . . .	230
Литература . . . . .	231
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Абсолютные хореографии точечных вихрей на сфере</b> . . . . .	233
1. Уравнения движения и первые интегралы для вихрей на сфере . . . .	233
2. Хореографии в случае трех и четырех вихрей на сфере . . . . .	234
Хореографии в случае трех вихрей (235). Обобщение решений и хореографий в задаче четырех вихрей (237).	
3. Хореографии $n$ одинаковых вихрей . . . . .	239
Литература . . . . .	243
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Взаимодействие двух вихревых колец на сфере (аналог задачи Горячева – Арефа)</b> . . . . .	245
1. Движение $2n$ вихрей на плоскости . . . . .	245
2. Движение $2n$ вихрей на сфере . . . . .	247
Литература . . . . .	260
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 5. Проблема Кельвина и ее решение</b> . . . . .	261
1. Гипотезы Кельвина и опыты Майера . . . . .	261
2. Результаты Томсона, Моргана и Хавелока. Линейный анализ . . . . .	262
3. Экспериментальные результаты . . . . .	263
4. Нелинейный анализ . . . . .	263
Литература . . . . .	264
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 6. Взаимодействие вихрей Кирхгофа и точечных вихрей в идеальной жидкости</b> . . . . .	266
1. Введение . . . . .	266
2. Моментная модель взаимодействия вихрей Кирхгофа (динамики вихревых пятен) . . . . .	267
3. Взаимодействие вихря Кирхгофа с $N$ точечными вихрями. Интегрируемый случай при $N = 1$ . . . . .	270
4. Взаимодействие двух вихрей Кирхгофа . . . . .	278
Литература . . . . .	283

<b>Приложение 7. Динамика кругового цилиндра, взаимодействующего с точечными вихрями</b>	286
1. Введение	286
2. Уравнения движения и их гамильтонова форма	287
3. Задача адвекции	290
4. Симметрия и интегралы движения	291
5. Комплексная форма уравнений движения и скобка Дирака	292
6. Движение цилиндра и одного вихря	294
7. Случай двух вихрей	304
8. Заключение	305
Литература	306
<b>Приложение 8. Взаимодействие вихрей с цилиндрическим телом</b>	308
1. Обтекание подвижного контура	308
2. Уравнения движения контура	311
3. Пуассонова структура и интегралы движения	314
4. Взаимодействие эллиптического цилиндра с точечным вихрем	316
Литература	318
<b>Приложение 9. К вопросу о движении вихресточников по плоскости</b>	319
1. Введение	319
2. Уравнения движения вихресточников	320
3. Инвариантность уравнений движения, интегралы и гамильтоновость	323
4. Движение двух вихресточников	325
5. Система трех источников	327
Понижение порядка (327). Гомотетические конфигурации (330). Геометрическая интерпретация и качественный анализ (331).	
6. Гомотетические конфигурации для $n$ источников	334
7. Вихресточники на сфере	335
Литература	337
<b>Приложение 10. Неинтегрируемость системы взаимодействующих частиц с потенциалом Дайсона</b>	339
Литература	343
<b>Приложение 11. Динамика двух круговых цилиндров, взаимодействующих в идеальной жидкости</b>	344
1. Уравнения движения	344
2. Первые интегралы и интегрируемость. Отображение Пуанкаре	347
3. Ограниченные задачи	347
4. Уравнения движения в предельном случае $R_1 = R_2 = 0$	354
5. Анализ предельной задачи	355
6. Общие уравнения движения массовых вихрей	359
Дополнение. Вычисление коэффициентов функции Рауса (1.5)	361
Литература	367

# Предисловие

В этой книге мы сосредоточимся на основных задачах теории точечных вихрей и разберем вопросы, связанные с их взаимодействием друг с другом на плоскости, сфере и в круговой области, а также опишем основные проблемы в теории вихревых цепочек и решеток в идеальной несжимаемой жидкости. Эти вопросы обсуждаются в основном тексте книги. В ней также имеются приложения, в которых разобраны вопросы взаимодействия вихревых пятен, двух твердых тел, твердого тела и вихрей в идеальной жидкости. Более подробно изложены вопросы, связанные с редукцией, хаотическими движениями, частными решениями. Рассмотрены также новые задачи о движении вихреисточников и так называемых массовых вихрей.

Отличительной особенностью изложения является систематическое применение и развитие математических методов, связанных с проникновением в вихревую динамику основных идей теории пуассоновых структур и алгебр Ли, топологии, бифуркационного и качественного анализа. Особое внимание в книге уделено проблемам интегрируемости, неинтегрируемости и качественного анализа динамических систем вихревой динамики. Как известно, в интегрируемых случаях динамика системы регулярна и поддается полному описанию с помощью топологического и качественного анализа. В вихревой динамике эти методы имеют собственную специфику, и мы систематически используем их при анализе различных интегрируемых систем. Кстати, в этой книге мы по возможности старались собрать наиболее известные на настоящий момент интегрируемые проблемы вихревой динамики (точнее, динамики точечных вихрей и родственных им систем, связанных с взаимодействием с твердыми телами, вихревыми пятнами и пр.).

В неинтегрируемом случае динамика системы является хаотической, а движение вихрей — лишь частично предсказуемым. Анализ общей ситуации такого динамического поведения составляет основу современной теории динамических систем и теории детерминированного хаоса. В неинтегрируемом случае одну из главных ролей играет компьютерный анализ, который позволил с помощью дополнительных аналитических соображений получить новые результаты относительно существования и бифуркаций периодических орбит, имеющих замечательную форму хореографий (при этом

вихри последовательно движутся по одной и той же кривой с постоянным сдвигом по времени). Эти хореографии, как оказывается, определяют во многом структуру портрета и сценарии перехода системы от регулярно-го движения к хаотическому. Многие результаты были получены авторами и приводятся в книге впервые. Они имеют интересные аналогии в небесной механике — классической задаче  $N$  тел. В книге мы стараемся использовать эту аналогию для формулировки различных результатов и постановки новых задач.

Укажем также, что многие развитые в книге общие методы могут быть с успехом применены для изучения более сложных задач, описывающих взаимодействие точечных вихрей в стратифицированной жидкости (в частности, хетонов), а также с неподвижными и подвижными твердыми телами. Часть результатов в этом направлении изложена в нескольких статьях [87, 17, 50, 185].

Если в основном тексте книги мы приводим ряд уже хорошо известных и ставших классическими методов вихревой динамики, то в приложениях мы старались собрать новые результаты, полученные нами совместно с нашими коллегами и учениками (В. В. Козлов, А. А. Килин, С. М. Рамоданов, К. Г. Тронин). Приложения в книге, как правило, представляют собой переработанные варианты статей, опубликованных в различных журналах. Однако мы не видим в этом большого недостатка, предполагая в будущем (после проведения ряда необходимых исследований) написать более систематическое руководство по теории вихрей. С недостающими разделами вихревой теории (связанными с адвекцией, вихревыми кольцами, общим формализмом гидродинамики и пр.) читатель может ознакомиться по монографиям [42, 54, 161]. Основной текст книги написан на базе обзора в сборнике «Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей», вышедшем в 2003 году под редакцией А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского (Институт компьютерных исследований).

# Введение

Приведем основные этапы возникновения вихревой теории и краткий анализ ее современного состояния. В основном тексте книги при обсуждении конкретных задач мы будем приводить более полные комментарии, которые, возможно, иногда будут пересекаться с изложенными во введении.

**1.** Ранние исследования по теории вихревого движения восходят к Декарту, Гюйгенсу, Иоганну и Даниилу Бернулли. В этот период были установлены некоторые закономерности вихревого взаимодействия, но вихревая теория Декарта в этот период претендовала на описание движения небесных тел и конкурировала с ньютоновской теорией гравитации. Несмотря на ожесточенную полемику картезианцев (приверженцев Декарта) и ньютонианцев, теория Декарта вскоре была вытеснена ньютоновской картиной мира и почти совсем забыта. Захватывающее описание этого периода развития вихревой теории можно найти в книге В. В. Козлова «Общая теория вихрей» [32]. Отметим, что исторически первые труды Эйлера и Лагранжа, создававших ньютоновскую гидродинамику (а также теорию сплошных сред), ограничивались описанием потенциальных (безвихревых) течений идеальной жидкости.

Возрождение интереса к вихревой динамике относится к середине XIX столетия. Это труды Гельмгольца, Кельвина и Кирхгофа, приведшие не только к открытию существенно новых гидродинамических результатов, но и к созданию наиболее общей вихревой теории материи (которая в основном пропагандировалась Кельвином). Мы остановимся здесь более подробно на достижениях этих ученых и их современников, а затем перейдем к более поздним исследованиям.

**2. Гельмгольц, Герман Фердинанд фон (1821–1894).** Возникновение современной вихревой теории следует связывать с замечательной работой Г. Гельмгольца «Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям» (1858 г.) [114], в которой он доказал основные теоремы о движениях идеальной жидкости, в которых отсутствует однозначный потенциал скоростей. Эти движения жидкости он и назвал вихревыми. Там же он указал аналогию между движением жидкости и магнитным действием электрических токов, а также привел ряд примеров, относящихся

к движению прямолинейных и кольцеобразных вихрей (имеющих форму тора, в предельном случае «бесконечно-малого сечения»).

Особое значение в вихревой теории имеет теорема Гельмгольца, которую А. Пуанкаре считал наиболее значительным вкладом в гидродинамику [49]. Ее сутью является закон вложенности вихревых линий, позволяющий рассматривать вихревые образования как некоторые материальные объекты, подобные телам в классической механике.

В движении кольцеобразных вихрей Гельмгольд описал два частных случая, в одном из которых вихри (с противоположно направленными вращениями) движутся навстречу друг к другу, а радиус их колец возрастает. Движение колец во втором случае, в котором вращения уже сонаправлены, еще более интересно: оба кольца будут передвигаться в одну и ту же сторону, причем первое из них расширяется и замедляет свое движение, пока через него проходит второе, сужающееся, кольцо. Этот процесс повторяется периодически во времени и называется *чехардой*.

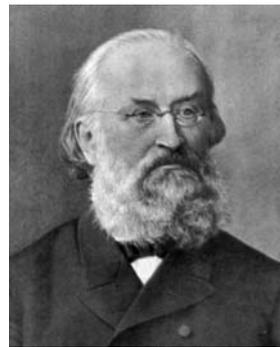
Отметим, что Гельмгольд также описал движения двух точечных вихрей (параллельных вихревых нитей). Более подробные обсуждения результатов Гельмгольца, электродинамической аналогии и метеорологических приложений теории вихрей, содержатся в лекциях Пуанкаре 1893 г. [49].

### 3. Кирхгоф, Густав Роберт (1824–1887).

В своих лекциях по математической физике (первое издание относится к 1876 году) Кирхгоф [29] вывел общие уравнения движения  $N$  точечных вихрей (называемые иногда уравнениями Кирхгофа), указал их гамильтонову форму, а также получил для них все возможные первые интегралы. По сравнению с небесномеханической задачей  $N$  тел эти уравнения имеют первый порядок относительно координат вихрей, роль масс в них играют некоторые параметры, называемые *циркуляциями*. Он также более подробно (по сравнению с Гельмгольцем) рассмотрел случай двух вихрей, включая случай вихревой пары. В последующих



Г. Гельмгольд



Г. Кирхгоф

изданиях он рассмотрел также указанный Грёбли интегрируемый случай трех вихрей.

Кирхгоф рассмотрел особый случай вихревого движения, когда параллельные вихревые нити заполняют внутренность эллиптического цилиндра. Оказывается, что эллиптическая форма цилиндра сохраняется во время движения, хотя сам цилиндр при движении деформируется. Модель *вихря Кирхгофа*, или *эллиптического вихря*, и используется для изучения движений пятен завихренности. В лекциях Кирхгофа также дан более подробный анализ движения вихревого кольца.



В. Грёбли



Д. Н. Горячев

**4. Грёбли, Вальтер (1852–1903), Горячев Д. Н. (1867–1949).** Вальтер Грёбли в своей диссертации 1877 года «Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden» [111] подробно проанализировал интегрируемую задачу о движении трех вихрей на плоскости. Отметим, что ссылка на эту работу Грёбли уже имеется в лекциях Кирхгофа (1883 года) [29]. С другой стороны, А. Пуанкаре в своих лекциях 1893 года и вышедшей по ним книге «Théorie des Tourbillons» не только не ссылается на Грёбли, а дает достаточно запутанное доказательство интегрируемости (возможно, просто допуская типичную для него неточность в выражениях).

Для анализа движения Грёбли получает (приведенную) систему трех нелинейных уравнений, обладающую двумя интегралами движения и позволяющую получить явную квадратуру. Далее он рассматривает вопрос восстановления по полученной квадратуре абсолютного движения. Более подробно он анализирует частные случаи равных интенсивностей и взаимодействия вихревой пары с единичным вихрем (случай, интересный с точки

зрения теории рассеяния). Грёбли также вводит геометрическую интерпретацию, полезную при исследовании движения трех вихрей на сфере (последние исследования этой системы относятся уже к 1998 году).

Отметим, что в своей диссертации Грёбли также рассматривает частный случай задачи четырех вихрей (при наличии оси симметрии) и более общий случай движения  $2N$  вихрей, обладающих  $N$  осями симметрии.

Анализ частных движений системы  $N$  вихрей, характеризующихся наличием различных дискретных симметрий, которые обеспечивают сведение к квадратурам, содержится в небольшой книге Д. Н. Горячева [22], вышедшей в 1898 году к 40-летию написания Г. Гельмгольцем его основной работы по теории вихрей (в [22] особенно подробно разбираются случаи  $n = 4, 5$ ). Здесь мы укажем только, что частные решения, найденные и изученные Д. Н. Горячевым, оказались очень важными для понимания общей динамики в неинтегрируемой ситуации. При дополнительных ограничениях они приводят к семейству замечательных периодических и квазипериодических решений, называемых аналитическими хореографиями.

Исследования Грёбли задачи трех вихрей были продолжены Дж. Сингом<sup>1</sup> [193], который сформулировал и доказал ряд теорем об абсолютном движении и получил простое условие ограниченности траекторий.

Исследования Грёбли и Синга были частично забыты, и в известной книге Бэтчелора [18] проблема о движении трех вихрей представляется как нерешенная. Это утверждение инициировало исследования Е. А. Новикова [45], Х. Арефа [67], которые, во многом, повторили работы Грёбли и Синга. Анализ устойчивости стационарных коллинеарных конфигураций задачи трех вихрей содержится в работе [194].

**5. Лорд Кельвин (В. Томсон), Дж. Дж. Томсон, Т. Х. Хавелок.** Следуя общей идее XIX века, согласно которой объяснения различных физических феноменов следует искать в подходящих механических интерпретациях, лорд Кельвин предложил теорию вихревых атомов (*On vortex atoms*. *Phil. Mag.* 1867). В этой теории мир понимается как некоторый эфир (аналог идеальной жидкости), в котором взаимодействуют вихри Гельмгольца, подобные атомам, образующим молекулы. При этом сами атомы имели форму вихревых колец. Микроскопические вихри (по терминологии Кельвина) в этой теории объясняли гравитацию, которая понималась как результат их усредненного воздействия (толчков) с достаточно большой скоростью. Эти идеи Кельвина вскоре были полностью вытеснены атомной и квантовой механикой.

---

<sup>1</sup>На русский язык были переведены четыре работы Дж. Синга (по другой транскрипции — Дж. Синджа): *Тензорные методы в динамике*, ИЛ, 1947; *Классическая динамика*, ГИФМЛ, 1963; *Общая теория относительности*, ИЛ, 1963; *Релятивистский газ*, Атомиздат, 1960.



Лорд Кельвин



Дж. Дж. Томсон

Кельвин также поставил вопрос об устойчивости стационарного вращения системы  $N$  точечных вихрей, помещенных в вершинах правильного  $N$ -угольника. Он обратил внимание на аналогию этой проблемы с проблемой устойчивости равновесия системы одинаковых плавающих магнитов во внешнем магнитном поле. Эксперименты с плавающими магнитами, проведенные первоначально А. М. Майером [152], привели Кельвина к мысли, что при числе вихрей (магнитов), большем 5, вращающийся многоугольник является неустойчивым (на самом деле случай  $n = 6$  является устойчивым). Эксперименты Майера далее совершенствовались во многих работах, в том числе современных, подробные ссылки имеются в [40].

Линейную устойчивость правильного  $N$ -угольника исследовал Дж. Дж. Томсон (открывший электрон). Он установил, что при  $n \leq 6$  имеет место линейная устойчивость. Допустив арифметическую ошибку, для  $n = 7$  он нашел экспоненциально растущие решения. Томсон также предположил, что при  $n \geq 8$  линейная неустойчивость сохраняется. За свои исследования устойчивости Дж. Дж. Томсон был удостоен в 1883 году премии Адамса.

Полный линейный анализ устойчивости полигональной конфигурации провел Т. Х. Хавелок [113], который установил линейную неустойчивость при  $n \geq 8$  и указал на выделенность случая  $n = 7$ , для которого линейный анализ не позволяет сделать выводы об устойчивости, и на необходимость рассматривать нелинейные слагаемые. Устойчивость случая  $n = 7$  была недавно доказана в работе [40] после различных, не совсем удачных, попыток нескольких авторов [84, 154].

Отметим, что в работе [113] (1931 г.) Хавелок исследовал также устойчивость системы вложенных друг в друга вихревых многоугольников

и устойчивость томсоновских многоугольников, помещенных в круговую область.

**6. Родственные результаты по стационарным конфигурациям. Небесно-механическая аналогия.** Численные и аналитические исследования стационарных конфигураций, при которых вихри вращаются как твердое тело, привели к возникновению Лос-Аламосского каталога [99], в котором собраны найденные устойчивые симметрические конфигурации. Ареф и Вайнштейн в «Nature» (1998) [78] анонсировали компьютерное обнаружение несимметричных конфигураций. В журнале «Nature» они привели только ряд чисто качественных картинок без соответствующих численных параметров. Несколько ранее для тел равной массы, в плоской задаче  $N$  тел из небесной механики, а также для одиночных точечных вихрей и различных потенциалов, зависящих от взаимных расстояний, в работе К. Гласс [109] была также указана несимметрическая стационарная конфигурация с  $n = 8$  и с соответствующими численными значениями координат. Более ранние, но неопубликованные результаты по несимметричным конфигурациям принадлежат Р. Мёкелло.

По аналогии с небесной механикой Палмором [171] и О'Нейлом [166] был рассмотрен вопрос о числе коллинеарных конфигураций произвольного числа вихрей. В небесной механике хорошо известна теорема Мультона о числе различных коллинеарных конфигураций для  $N$  произвольных масс, согласно которой оно равно  $\frac{n!}{2}$ . Оказывается, что аналогичная теорема справедлива для случая  $N$  положительных вихрей [171]; в [166] производится обобщение этой теоремы на случай, когда один из вихрей является отрицательным.

Гипотеза об ограниченности числа произвольных стационарных конфигураций (относительных равновесий) гравитирующих масс, восходящая к А. Уинтнеру [57], до сих пор не доказана даже для  $n = 4$  и причислена С. Смейлом [184] к числу математических проблем XXI столетия. Интересно, справедливы ли аналогичные результаты для движения точечных вихрей на плоскости (или для этого необходимо наложить дополнительные ограничения на циркуляции вихрей).

Любопытно отметить, что проблема о полиномиальном алгоритме, реализующем, фактически, статические конфигурации одинаковых вихрей на сфере, была также поставлена С. Смейлом перед XXI столетием [184]. В его постановке она, однако, никак не связывается с вихрями, а возникает из теории сложности. Не доказана даже гипотеза, что для любого числа вихрей существует хотя бы одна устойчивая стационарная конфигурация.

**7. Современные исследования.** Отметим здесь наиболее важные современные исследования, которые так или иначе затронуты в предлагаемом обзоре.

1) В работах Е. А. Новикова (1975) и Х. Арефа (1979) были еще раз независимо воспроизведены исследования Грёбля и Синга по анализу интегрируемой задачи трех вихрей, причем были указаны некоторые новые интересные факты.

2) В работах В. А. Богомолова были получены уравнения движения точечных вихрей на сфере (первоначальный и не совсем полный анализ этой задачи был выполнен еще И. С. Громекой). В. А. Богомолов также указал все необходимые дополнительные интегралы и подробно исследовал интегрируемый случай трех вихрей с одинаковым значением интенсивностей. В случае различных интенсивностей анализ движения был выполнен одновременно и независимо в работах А. В. Борисова, В. Г. Лебедева [90], П. Ньютона и Р. Кидамби [122, 121] (1998 г).

3) В. А. Богомоловым были получены условия линейной устойчивости аналогов томсоновских конфигураций на сфере, которые далее неоднократно перекрывались [8]. Условия устойчивости по Ляпунову были получены в [84]. Нелинейный анализ устойчивости этих конфигураций в критических случаях был недавно выполнен Л. Г. Куракиным [38]. В нескольких работах были указаны статические конфигурации, составляющие платоновы тела (см., например, [15]). В связи с проблемами современной химии полимеров в последнее время изучаются также близкие периодические движения или составные конфигурации, образующие так называемые вихревые кристаллы [73].

4) Неинтегрируемость задачи четырех вихрей на плоскости (в ограниченной постановке) была первоначально доказана С. Л. Зиглиным [27]. Этот результат подтверждает хаотизацию движения четырех вихрей, отмеченную Е. А. Новиковым и Ю. Б. Седовым [47]. Более общее доказательство неинтегрируемости (для неограниченной задачи) содержится в работах [100, 101, 129, 202]. Неинтегрируемость движения четырех вихрей на сфере и движения трех соосных вихревых колец была исследована А. А. и Д. А. Багрецами [4, 79]. Применение КАМ-теории и явное понижение порядка для четырех вихрей (интенсивностей одного знака) на плоскости было выполнено К. М. Ханиным [120] и позднее Лимом [144] (см. также работу [102]).

5) В работе М. Меландера, Н. Забуски, А. Стычека [153] выведена гамильтонова форма уравнений взаимодействия эллиптических вихрей Кирхгофа в рамках так называемой двухмоментной модели (в которой при разложении взаимодействия функций тока двух вихревых пятен удерживают-

ся только два момента, связанные с их несимметричностью) (МЗС-, или MZS-модель). В работе [153] также достаточно подробно исследована задача о взаимодействии двух вихрей Кирхгофа.

6) Статистические аспекты вихревой теории, непосредственно связанные с моделями регулярной турбулентности, подробно описываются в книге П. Ньютона [161]; аэрогидродинамические вопросы, связанные, например, с проблемой вихревого обтекания, представлены в книге Ф. Дж. Сэффмэна [54] (см. также [19]).

7) В ряде работ, принадлежащих Ткаченко [56], О'Нейлу [164], Арефу и Стремлеру [77, 192], рассматриваются задачи, связанные с взаимодействием вихревых цепочек и вихревых решеток. Здесь речь идет о бесконечных в обе стороны наборах одинаковых вихрей, образующих цепочку (когда вихри лежат на прямой через одинаковый интервал) или решетку (т.е. совокупность цепочек, также лежащих на одинаковом расстоянии друг от друга). В первом случае система является однопериодической и определена на цилиндре, во втором случае — она двоякопериодична и определена на торе. В такой постановке вопрос о взаимодействии вихревых цепочек, по существу, рассматривался Г. Ламбом, Т. фон Карманом, Н. Е. Кочиным [36, 41, 119, 19] в связи с анализом устойчивости вихревых дорожек (дорожек Бенара–Кармана), образующихся при вихревом обтекании цилиндра. В этом случае мы имеем две вихревые цепочки с равными, но противоположными по знаку циркуляциями.

Здесь следует также отметить замечательную работу А. А. Фридмана и П. Я. Полубариновой (Кочинной) (1928 г.) [58], в которой впервые были получены общие уравнения взаимодействия произвольного числа вихревых цепочек, а также уравнения движения вихреисточников.

Интегрируемость трех вихрей на цилиндре и торе с нулевой суммарной циркуляцией была впервые отмечена Х. Арефом в 1984 году [65]. В работе [164] О'Нейл произвел суммирование бесконечных рядов, приведших к  $\varphi$ -функциям Вейерштрасса, и указал явное сведение этих задач к одной степени свободы. В работе [199] используются не эллиптические формулы, а явные выражения в виде быстросходящихся рядов, которые упрощают вычисления. Более подробно эти задачи изучались в [77, 192], где приведены несколько фазовых портретов приведенной системы на двумерной плоскости. Однако качественный анализ интегрируемых и неинтегрируемых задач в этой области еще далек от завершения.

8) Взаимодействие точечных вихрей с неподвижными гладкими стенками рассматривалось на раннем этапе развития теории вихревых структур. Еще Гельмгольц рассмотрел движение одного точечного вихря в идеальной жидкости, ограниченной плоскостью. Теория движения вихрей в произволь-

ной области была заложена Э. Дж. Раусом [179] (решение для случая круговой области уравнения движения получил еще раньше А. Гринхилл [110]). Наиболее детально исследовались простейшие области — круг, прямоугольник, прямолинейный канал, многоугольники. Следует, однако, отметить, что эти задачи, хотя в большинстве случаев и имеют важное аэрогидродинамическое значение (и рассматривались еще Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным в связи с вихревым обтеканием тел идеальной жидкостью и общей теорией подъемной силы), до сих пор далеки от полного решения.

9) Ограниченные задачи вихревой динамики связаны с динамикой «бесконечно-малого» вихря (частицы жидкости или примеси) в потоке жидкости, создаваемом вихревыми структурами (например, взаимодействующими точечными вихрями). При этом предполагается, что рассматриваемый малый вихрь никак не влияет на движение этих структур. Такого рода исследования лежат в основе теории *адвекции*. Очевидно, что общее движение примеси является хаотическим уже для двумерного случая. Интерес к этой тематике в основном был стимулирован работами Х. Арефа (который ввел широко используемое понятие хаотической адвекции). Изучение хаотизации в таких задачах, как иногда считают, имеет важное значение для объяснения турбулентности.

10) Ряд новых результатов, полученных нами совместно с В. В. Козловым, А. А. Килиным, С. М. Рамодановым, вынесен в приложения. В основном тексте книги мы не затронули ряд новых результатов, полученных недавно нами совместно с С. М. Рамодановым, по взаимодействию в идеальной жидкости двух твердых тел (в плоской постановке), имеющих циркуляционное обтекание [176] (см. приложение 11). Впервые такого рода задачи были поставлены Бьёркнесом [81] и в простейших случаях исследованы Н. Е. Жуковским в его «Лекциях по гидродинамике» [26]. Не менее интересной и представляющей практический интерес для современной гидроаэромеханики является задача взаимодействия в идеальной жидкости твердого тела (имеющего циркуляционное обтекание) и вихрей [50]. Здесь мы также подразумеваем «плоскую» постановку задачи. Как было показано авторами в [86], такая система для случая круглого цилиндра является гамильтоновой с некоторой нелинейной скобкой Пуассона. При этом всегда существуют два первых интеграла движения, и задача об инерциальном взаимодействии кругового цилиндрического тела и точечного вихря является интегрируемой. Взаимодействие кругового цилиндра с двумя точечными вихрями уже не является интегрируемым и сводится к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. Указанные интегрируемые и неинтегрируемые системы пока почти совсем не изучены. Отметим, что одновременно с С. М. Рамодановым, получившим свои уравнения в работах [50, 176]

(и исследованных нами в [86]), аналогичная задача исследовалась в [183]. Полученные в [183] уравнения являются частным случаем [176]. Укажем также работы [118, 149, 162], в которых изучается взаимодействие поступательно и равномерно движущегося или колеблющегося кругового цилиндра с одним и двумя точечными вихрями. В основном в этих работах анализируется возможность интегрируемости (и вычисляется интеграл Пуанкаре–Мельникова), а также определяются условия коллапса. В [183] анализируется устойчивость в задаче Фёпеля, состоящей в изучении пары вихрей (два вихря с равными по величине, но отличающимися по знаку циркуляциями), взаимодействующей с цилиндром в набегающем потоке. Как известно, эта задача является хорошей моделью вихревого обтекания цилиндра при небольших числах Рейнольдса  $Re = 13 \sim 41$ .

Очевидно, наш список литературы не претендует на полноту, как правило, мы цитируем лишь основные и интересные на наш взгляд работы.

**8. Благодарности.** Мы искренне благодарим за постоянные обсуждения и ценные советы А. В. Болсинова, М. А. Соколовского, Л. Занетти, А. А. Килина, В. В. Козлова, Л. Г. Куракина, Дж. Марседена, В. В. Мелешко, С. М. Рамоданова, Х. Арефа, В. Л. Окулова, П. Ньютона, Ч. Лима.

## § 1. Динамика точечных вихрей на плоскости

### 1. Абсолютное движение

**Уравнения движения и первые интегралы.** Рассмотрим движение в безграничной идеальной жидкости  $N$  параллельных прямолинейных вихревых нитей с интенсивностями  $\Gamma_i$ , точки пересечения которых с перпендикулярной им плоскостью имеют декартовы координаты  $(x_i, y_i)$ . Кирхгофом [29] было показано, что уравнения движения такой системы (которую называют также системой точечных вихрей) можно записать в гамильтоновой форме

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1.1)$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln \left( (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right), \quad (1.2)$$

совпадающим с энергией взаимодействия вихрей.

Скобка Пуассона, отвечающая системе (1.1), имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Gamma_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.1) обладает, помимо энергии (1.2), первыми интегралами, связанными с инвариантностью гамильтониана относительно параллельных переносов и вращений системы координат (образующих группу движений плоскости  $E(2)$ ):

$$Q = \sum_{i=1}^N \Gamma_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (1.4)$$

Точка на плоскости с координатами  $\left( \frac{Q}{\sum \Gamma_i}, \frac{P}{\sum \Gamma_i} \right)$  называется *центром завихренности*. Если  $\sum \Gamma_i \neq 0$ , то выбором системы координат можно добиться, чтобы центр завихренности находился в начале координат. При  $\sum \Gamma_i = 0$  этого сделать нельзя. Говорят, что в этом случае центр завихренности находится на бесконечности; при этом, если  $Q \neq 0$  или  $P \neq 0$ , то сдвигом начала координат можно добиться выполнения условия  $I = 0$ .

Набор интегралов (1.4) неинволютивен:

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad \{Q, I\} = 2P. \quad (1.5)$$

Несложно также показать, что обобщение полного момента импульса для вихрей удовлетворяет соотношению (оно содержится уже у Пуанкаре [49] как некоторое обобщение теоремы о кинетическом моменте в обычной механике)

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq k}^N \Gamma_i \Gamma_k = \frac{L}{\pi}.$$

Величина  $L = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j$  называется *полным вихревым моментом*. Введем также определения  $\sigma = \sum \Gamma_i$  — *суммарной циркуляции*,  $K = \sum \Gamma_i z_i = Q + iP$  — (комплексного) *момента завихренности* ( $z_i = x_i + iy_i$ ). При этом комплексная координата центра завихренности будет иметь вид  $Z = K/\sigma$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. В аналогичной форме (1.1), но с другими гамильтонианами записываются уравнения движения вихрей в стратифицированной жидкости [24] и в жидкости со свободной поверхностью [190].

**Комплексная форма уравнений вихревой динамики.** Приведем еще одну форму уравнений движения вихрей на плоскости (1.1), которая иногда используется для исследования частных решений задачи  $N$  вихрей. Зададим положение вихрей при помощи комплексных координат  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Уравнения движения (1.1) можно представить в форме [42]

$$\dot{z}_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^N{}' \frac{\Gamma_l}{\bar{z}_k - \bar{z}_l}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.6)$$

где  $\bar{z}_k = x_k - iy_k$  — число, комплексно-сопряженное с  $z_k$ .

Любопытно, что если в правой части (1.6) убрать комплексное сопряжение, то при равных интенсивностях  $\Gamma_k = \Gamma_l = \Gamma$  ( $k, l = 1, \dots, N$ ) получается интегрируемая система при любых  $N$  [74]. Действительно, дифференцируя получившиеся уравнения по времени, получаем известную систему Калоджеро–Мозера [48]

$$\ddot{z}_k = \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma}{\pi} \right) \sum_{l=1}^N{}' \frac{1}{(z_k - z_l)^3}.$$

В работе [103] Д. Чэпмен предложил лагранжеву (а не гамильтонову) форму записи уравнений (1.6) и соответствующие обобщения принципа наименьшего действия. Действительно, если определить лагранжиан  $L$  в виде

$$\begin{aligned} L(x_k, \bar{z}_k, \dot{z}_k, \dot{\bar{z}}_k) = \\ = \frac{1}{2i} \sum \Gamma_k (\bar{z}_k \dot{z}_k - z_k \dot{\bar{z}}_k) - \frac{1}{2} \sum_n \sum_k' \Gamma_k \Gamma_n \ln(z_n - z_k) (\bar{z}_n - \bar{z}_k), \end{aligned}$$

то уравнение движения для «обобщенных координат»  $z_k, \bar{z}_k$  имеет форму Эйлера – Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

которая, как известно, связана с варьированием действия  $J = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$ .

**Общие свойства движения  $N$  вихрей.** Уравнения динамики точечных вихрей имеют первый порядок относительно координат и, в отличие от задачи  $N$  тел в небесной механике, для определения движения достаточно знать лишь начальное положение системы. Этим объясняются существенные отличия динамики точечных вихрей от своего небесномеханического аналога.

Укажем здесь некоторые общие свойства движения  $N$  вихрей, доказательства которых могут быть непосредственно получены из соотношений (1.1)–(1.6). Впервые большинство этих свойств было указано Сингом [193].

**Теорема 1.1.** *Если для данной конфигурации вихрей одновременно поменять знак всех интенсивностей, то во все последующие моменты времени система будет проходить через те же конфигурации, через которые она прошла до этого момента.*

Для соответствующего поля скоростей жидкости это соответствует одновременной смене знака скорости каждой частицы жидкости.

**Теорема 1.2.** *Пусть при  $t = t_0$  все вихри располагаются на некоторой прямой, т. е. образуют коллинеарную конфигурацию, тогда конфигурации в моменты времени  $t_0 + \tau$  и  $t_0 - \tau$  получаются друг из друга отражением относительно этой прямой.*

**Теорема 1.3.** *Система вихрей при движении не может проходить более чем через две коллинеарные конфигурации, причем время перехода из одной конфигурации в другую всегда одно и то же.*

Таким образом, согласно последним двум теоремам, если известны участки траекторий вихрей между двумя коллинеарными конфигурациями, то все оставшиеся части траектории строятся путем отражения известных кусков относительно соответствующих прямых.

**Теорема 1.4.** Пусть заданы две независимые системы вихрей  $S_1$  и  $S_2$ , такие, что интенсивности вихрей  $S_2$  отличаются от интенсивностей вихрей  $S_1$  на один и тот же множитель  $K^2$  и конфигурации вихрей обеих систем подобны с коэффициентом подобия  $L^2$ . Тогда все последующие конфигурации системы  $S_2$  в моменты времени  $t_2$  подобны конфигурациям  $S_1$  при  $t_1$ , которые связаны соотношением  $\frac{t_2}{t_1} = \frac{L^2}{K^2}$ .

**Теорема 1.5.** Если интенсивности вихрей имеют одинаковый знак, то взаимные расстояния между вихрями ограничены во все время движения.

Условие знакоопределенности в этой теореме является достаточным, но не необходимым для ограниченности расстояний (или, как говорят, для финитности траекторий). Исследования компактности при условии, что имеются вихри с завихренностями различных знаков, изучены в работах [90] (см. также [15]). Они изложены нами в § 5.

Приведем еще один общий результат (не отмеченный Сингом), являющийся (как и теорема 1.4) следствием однородности уравнений (1.6).

**Теорема 1.6.** При условии  $\sum \Gamma_i \neq 0$  фазовые потоки системы на поверхностях уровня интегралов  $P = Q = 0$ ,  $I = \text{const}$ ,  $H = \text{const}$  траекторно эквивалентны, если постоянные интегралов связаны соотношением

$$H = C + \frac{1}{4\pi} \left( \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \right) \ln |I|,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Таким образом, достаточно исследовать фазовый поток системы (1.1), (1.6) при одном фиксированном значении интеграла  $I$  в зависимости от  $H$ . Для исключительного случая  $\sum \Gamma_i = 0$  результат о траекторной эквивалентности остается справедливым лишь для относительного движения вихрей (см. ниже).

## 2. Алгебраическая редукция в динамике вихрей

Уравнения (1.1) описывают абсолютное движение вихрей по отношению к фиксированной системе координат на плоскости. Наличие первых интегралов (1.4), связанных с инвариантностью системы относительно группы

движений плоскости  $E(2)$ , позволяет выполнить редукцию (приведение) системы к относительным переменным и понизить число степеней свободы.

Хорошо известно [1, 3, 15], что гамильтонова система, обладающая  $n$  инволютивными интегралами движения, допускает редукцию на  $n$  степеней свободы, т. е. в канонической форме можно исключить  $2n$  уравнений. В данном случае набор интегралов (1.4) неинволютивен (см. (1.5)), поэтому в общем случае возможна редукция лишь на две степени свободы (это соответствует тому, что из (1.4) можно скомбинировать два инволютивных интеграла, например,  $I$  и  $P^2 + Q^2$ ). Приводимые в литературе (см., например, [2, 3]) способы некоммутативной редукции для неабелевых групп симметрий здесь также неприменимы, поскольку действие группы  $E(2)$  в данном случае непуассоново (см. подробно § 5).

Существует частный случай

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i = 0, \quad P = Q = 0,$$

для которого все интегралы (1.4) находятся в инволюции, при этом возможна редукция на три степени свободы [3].

Для интенсивностей одного знака в динамике четырех вихрей в канонической форме редукция выполнена К. М. Ханиным [120]. Она была предложена им для применения методов КАМ-теории, но не всегда удобна, например, для численных исследований. Частные случаи проблемы четырех вихрей (равные интенсивности или одинаковые вихревые пары) были сведены к двум степеням свободы в работах [74, 107]. Понижение порядка для системы  $N$  вихрей в случае равных интенсивностей обсуждается также в [83].

Здесь мы предлагаем свой, достаточно универсальный, способ редукции [15], основанный на представлении уравнений движений в гамильтоновой форме со скобкой Ли–Пуассона [15]. Хотя общее число используемых при этом переменных превосходит размерность редуцированной системы, тем не менее, *реальному движению соответствует инвариантное многообразие (определяемое интегралами и инвариантными соотношениями), размерность которого ровно на четыре единицы меньше размерности исходной системы* (1.1).

Преимущество этого подхода состоит в простой (алгебраической) форме уравнений и возможности использовать для анализа системы методы теории алгебр Ли. Полученные при этом результаты остаются также справедливы для различных вихревых систем (хетонов, вихрей в стратифицированных жидкостях [24]).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В небесной механике редукция задачи  $N$  тел (понижение порядка) проводилась многими авторами, среди которых отметим Лагранжа, Якоби, Шарлье, Пуанкаре, Уиттекера, Леви-Чевиту, Рауса, Радо, Бура и Бриоски, Уинтнера и Ван Кампена [15]. Каждая из редукций обладает своими свойствами, позволяющими использовать их для различных задач — теории возмущений, алгебраических методов, анализа интегрируемости и т. д.

Укажем также, что обсуждаемый далее в работе способ редукции имеет аналогию в задаче  $N$  тел. Для случая трех тел соответствующие построения проделаны авторами совместно с А. В. Болсиновым [90], анализ общей ситуации был предпринят в [180].

Для обеих задач ( $N$  тел и  $N$  вихрей) предложенное далее введение относительных переменных (для  $N$  тел оно имеется в [15, 90]), в которые входят взаимные расстояния между телами (вихрями) и площади соответствующих треугольников, развивает идеи Мёбиуса о барицентрическом исчислении и идеи Дзиобека о стационарных конфигурациях; последний, кстати говоря, получил несколько любопытных формул, использованных в [63] для доказательства наличия симметрии всех возможных стационарных конфигураций задачи четырех одинаковых гравитирующих масс в небесной механике.

**Относительные переменные и скобка Ли–Пуассона.** Рассмотрим редукцию к относительным переменным и соответствующее понижение порядка в алгебраической форме. Формальное ее изложение и алгебро-геометрическая интерпретация приведены далее в § 5. Здесь мы ограничимся физическим описанием.

Как известно [15, 33], в пуассоновой форме в качестве переменных редуцированной системы необходимо выбрать функции, коммутирующие с интегралами (1.4). Можно показать, что в данном случае ими являются квадраты взаимных расстояний

$$M_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \quad (1.7)$$

и удвоенные ориентированные площади треугольников, натянутых на тройки вихрей  $i, j, k$ ,

$$\Delta_{ijk} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \wedge (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}_l = (x_l, y_l). \quad (1.8)$$

Функция Гамильтона в относительных переменных имеет вид

$$H = -\frac{1}{8\pi} \sum_{i,j=1}^N \Gamma_i \Gamma_j \ln M_{ij}. \quad (1.9)$$

Прямая проверка показывает, что набор переменных  $M_{ij}, \Delta_{ijk}$  замкнут относительно скобки (1.3):

$$\{M_{ij}, M_{kl}\} = 4\left(\frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ik} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jk}\right) \Delta_{ijl} + 4\left(\frac{1}{\Gamma_i} \delta_{il} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jl}\right) \Delta_{ijk},$$

$$\begin{aligned}
\{M_{ij}, \Delta_{klm}\} &= \left(\frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ik} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jk}\right) (M_{li} - M_{im} + M_{mj} - M_{jl}) + \\
&+ \left(\frac{1}{\Gamma_i} \delta_{il} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jl}\right) (M_{mi} - M_{ik} + M_{kj} - M_{jm}) + \\
&+ \left(\frac{1}{\Gamma_i} \delta_{im} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jm}\right) (M_{ki} - M_{il} + M_{lj} - M_{jk}), \\
\{\Delta_{ijk}, \Delta_{lmn}\} &= \frac{\delta_{il}}{\Gamma_i} (\Delta_{jkn} - \Delta_{jkm}) + \frac{\delta_{im}}{\Gamma_i} (\Delta_{jkl} - \Delta_{jkn}) + \quad (1.10) \\
&+ \frac{\delta_{in}}{\Gamma_i} (\Delta_{jkm} - \Delta_{jkl}) + \frac{\delta_{jl}}{\Gamma_j} (\Delta_{ikm} - \Delta_{ikn}) + \\
&+ \frac{\delta_{jm}}{\Gamma_j} (\Delta_{ikn} - \Delta_{ikl}) + \frac{\delta_{jn}}{\Gamma_j} (\Delta_{ikl} - \Delta_{ikm}) + \\
&+ \frac{\delta_{kl}}{\Gamma_k} (\Delta_{ijn} - \Delta_{ijm}) + \frac{\delta_{km}}{\Gamma_k} (\Delta_{ijl} - \Delta_{ijn}) + \frac{\delta_{kn}}{\Gamma_k} (\Delta_{ijm} - \Delta_{ijl}).
\end{aligned}$$

Скобка (1.10) еще не определяет пуассонову структуру, так как не удовлетворяет тождеству Якоби. Это связано с избыточностью переменных  $M$ ,  $\Delta$ . Действительно, их полное число равно  $C_N^2 + C_N^3 = C_{N+1}^3$ , в то время как число независимых расстояний, через которые могут быть выражены все остальные  $M$ ,  $\Delta$ , равно лишь  $2N - 3$ , что приводит к наличию линейных и квадратичных соотношений вида

$$F_{ijkl} = \Delta_{ijk} + \Delta_{ikl} - \Delta_{lij} - \Delta_{ljk} = 0, \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned}
F_{ijk} &= (2\Delta_{ijk})^2 + M_{ij}^2 + M_{jk}^2 + M_{ik}^2 - \\
&- 2(M_{ij}M_{jk} + M_{ij}M_{ik} + M_{jk}M_{ik}) = 0.
\end{aligned} \quad (1.12)$$

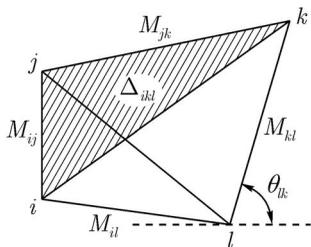


Рис. 1

Соотношения (1.11) отражают элементарный факт, что четырехугольник, натянутый на вихри  $i, j, k, l$ , может быть составлен из треугольников двумя способами (рис. 1). Уравнения (1.12) представляют собой формулы Герона, выражающие площадь треугольника через его стороны.

Можно показать, что после исключения с помощью соотношений (1.11) линейно-зависимых переменных  $\Delta_{ijk}$ , оставшиеся  $\Delta$ ,  $M$  определяют скобку Ли–Пуассона.

Уравнения движения в этом случае записываются в обычной гамильтоновой форме

$$\dot{M}_{ij} = \{M_{ij}, H\}, \quad \dot{\Delta}_{ijk} = \{\Delta_{ijk}, H\}. \quad (1.13)$$

Получившаяся скобка Ли–Пуассона вследствие существования соотношений (1.12) является вырожденной. Напомним, что для скобки Ли–Пуассона координаты  $x_1, \dots, x_n$  коммутируют линейным образом  $\{x_i, x_j\} = c_{ij}^k x_k$ , а постоянные коэффициенты  $c_{ij}^k$  являются структурными константами некоторой алгебры Ли. Алгебру Ли, соответствующую пуассоновой структуре, получающейся при ограничении скобки (1.10) на подпространство, определяемое соотношениями (1.11), мы будем называть *вихревой алгеброй*.

Уравнения (1.12) определяют инвариантные соотношения, причем функции  $F_{ijk}$  коммутируют со всеми образующими  $M_k, \Delta_{ijk}$  на совместной поверхности уровня, определяемой уравнениями (1.12). Возникающие в этом случае тождества вида  $\{\Delta, F_{ijk}\} = 0$  и  $\{M, F_{ijk}\} = 0$  представляют собой геометрические соотношения между взаимными расстояниями и площадями треугольников, натянутых на различные тройки вихрей на плоскости (некоторые из них весьма нетривиальны и имеют отношение к барицентрическому исчислению).

Как легко показать, скобка (1.10) допускает также линейную функцию Казимира, которая очевидно выражается через исходные интегралы (1.4)

$$D_0 = \sum_{i,j=1}^N \Gamma_i \Gamma_j M_{ij} = 2 \left( \left( \sum_{i=1}^N \Gamma_i \right) I - Q^2 - P^2 \right). \quad (1.14)$$

В дальнейшем эту функцию (или пропорциональную ей) мы называем *моментом системы вихрей* (который не следует путать с полным вихревым моментом и моментом завихренности, см. § 1).

**Предложение 1.1.** *Поверхность уровня  $D_0 = \text{const}$  совместно с соотношениями (1.12) определяет симплектический лист (в общем случае сингулярный) размерности  $2N - 4$ , который соответствует (симплектоморфен) приведенному фазовому пространству системы (1.1), ограничение пуассоновой структуры (1.10) на него невырожденно.*

Таким образом, относительное движение вихрей может быть описано гамильтоновой системой со скобкой Ли–Пуассона (1.10), зависящей от параметров — интенсивностей вихрей. Эта система и является приведенной, причем (для явного понижения порядка системы) необходимо ограничить структуру (1.14) на симплектический лист. Алгоритм такого ограничения

приведен нами в § 5. Вещественная форма алгебр Ли, отвечающих данным скобкам при различных значениях интенсивностей, определяет топологию симплектических листов и, следовательно, динамику приведенной системы.

Естественным с физической точки зрения вопросом является нахождение условий на интенсивности, при которых данная алгебра является компактной, поскольку это влечет компактность всех симплектических листов. В этом случае все траектории относительного движения, вне зависимости от значения энергии (1.9) и момента (1.14), финитны, и, кроме того, всегда можно выбрать ограниченную область в пространстве взаимных расстояний, которую вихри не покидают. В некомпактном случае динамика вихрей существенно иная — даже если все траектории на симплектическом листе финитны (что в общем случае не так) можно подобрать значения интеграла энергии (1.9) и момента (1.14) таким образом, что вихри покинут наперед заданную область. Проблемы классификации алгебраического типа структуры (1.10) рассмотрены нами в § 5.

Если выразить  $\Delta_{ijk}$  из (1.12) и подставить в уравнения движения для квадратов взаимных расстояний  $M_{ij}$  (1.13), получим уравнения Э.Лаура [133, 136]. С гамильтоновой точки зрения, эти уравнения получаются при ограничении скобки Пуассона (1.10) на аннуляторы (1.12). Получающаяся при этом нелинейная пуассонова структура также является вырожденной.

**Квадратуры для абсолютного движения.** В общем случае для гамильтоновой системы при понижении порядка на  $n$  степеней свободы возникает еще  $n$  квадратур, определяющих полное движение исходной системы. В данном случае  $n = 2$ , однако интегралов на единицу больше (хотя они и неинволютивны), поэтому существует только одна независимая квадратура, а остальные переменные восстанавливаются из алгебраических соотношений.

Наиболее симметричный вид квадратур указан, например, в [42] для углов наклона прямых, соединяющих пару вихрей с осью  $Ox$  (рис. 1):

$$4\pi\dot{\theta}_{ij} = \frac{2}{M_{ij}} \sum_{k=1}^n \Gamma_k + \sum_{k \neq i,j}^n \Gamma_k \left( \frac{1}{M_{ik}} + \frac{1}{M_{jk}} \right) - \frac{1}{M_{ij}} \sum_{k \neq i,j}^n \Gamma_k \left( \frac{M_{jk}}{M_{ik}} + \frac{M_{ik}}{M_{jk}} \right). \quad (1.15)$$

По известным  $\theta_{ij}$  несложно восстановить векторы  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = (\sqrt{M_{ij}} \cos \theta_{ij}, \sqrt{M_{ij}} \sin \theta_{ij})$  и с помощью интегралов  $P$  и  $Q$  (1.4) найти абсолютные координаты вихрей. Кроме того, ясно, что среди квадратур (1.15) только одна независимая, так как при фиксированных расстояниях  $M_{ij}$ , зная один угол  $\theta_{ij}$ , оставшиеся можно найти с помощью тригонометрических формул.

Замечательным следствием отсюда является то, что всем периодическим решениям приведенной системы соответствуют такие движения вихрей, для которых существует подвижная система координат, где вихри движутся по замкнутым кривым (подробнее § 7).

Несложно показать, что в случае  $\sum \Gamma_i = 0$  справедливо тождество

$$-\frac{1}{2} \sum \Gamma_k (M_{ki} - M_{kj}) = P(x_i - x_j) + Q(y_i - y_j), \quad (1.16)$$

которое позволяет без квадратур восстановить абсолютное движение по относительному при  $Q \neq 0$  и  $P \neq 0$  [42].

### 3. Проблема адвекции

Под задачей адвекции для системы  $N$  точечных вихрей понимается задача об определении траекторий частиц жидкости при заданном движении  $N$  вихрей  $-z_1(t), \dots, z_N(t)$  [70]. Другая, эквивалентная, формулировка состоит в рассмотрении предельной задачи для системы  $N + 1$  вихрей, для которой интенсивность одного вихря ( $N + 1$ ) стремится к нулю. В пределе получаем, что движение ( $N + 1$ )-го вихря не влияет на движение оставшихся  $N$  вихрей, которое определяется системой (1.1) (либо (1.6)), а уравнения движения для последнего вихря при известном движении предыдущих совпадают с уравнениями для частиц жидкости и имеют вид

$$\dot{z}_{N+1} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^N \frac{\Gamma_l}{\bar{z}_{N+1} - \bar{z}_l(t)}, \quad z_{N+1} = x + iy, \quad (1.17)$$

где  $x, y$  — координаты вихря нулевой интенсивности или частицы жидкости на неподвижной плоскости.

Уравнения (1.17), очевидно, гамильтоновы с канонической скобкой Пуассона  $\{x, y\} = 1$  и функцией Гамильтона, явно зависящей от времени:

$$H(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^N \Gamma_l \ln((x - x_l(t))^2 + (y - y_l(t))^2). \quad (1.18)$$

## § 2. Динамика точечных вихрей на сфере

### 1. Абсолютное движение

Рассмотрим задачу, родственную предыдущей, постановка которой также восходит к девятнадцатому столетию. Потенциальные течения идеальной жидкости на искривленных поверхностях рассматривались Бельтрами, Хиллом и Умовым (работы последнего относятся к области классической электродинамики, их результаты могут быть перенесены в динамику вихрей вследствие существования хорошо известной аналогии). В работе [23] известный русский механик И. С. Громека рассмотрел уравнения движения точечных вихрей на поверхностях сферы и цилиндра, а также даже более общую задачу о движении вихрей в области, ограниченной замкнутым неподвижным контуром на этих поверхностях.

Как пишет сам Громека [23]: «Задача о движении вихрей на сфере была мне указана профессором В. В. Преображенским, по мнению которого решение этого вопроса должно представлять большой интерес для целей физической географии». В [23] Громека пытался вывести уравнения движения точечных вихрей на сфере из основных принципов гидродинамики с использованием картографических преобразований. Однако он не смог найти в явном виде функцию тока, обобщающую плоскую ситуацию. В дальнейшем этой задачей занимался Э. Цермело [201]. В известной книге [28] под редакцией Б. А. Извекова и Н. Е. Кочина отмечена важная роль модели точечных вихрей и вихреисточников для целей динамической метеорологии.

Однако отметим, что для многих задач динамики атмосферы более существенна угловая скорость вращения Земли, нежели искривленность ее поверхности. Анализ такой ситуации является одной из задач геострофической гидродинамики.

Общая гамильтонова форма уравнений движения  $N$  точечных вихрей на сфере и их первые интегралы были указана В. А. Богомоловым в работе [7, 9].

Мы покажем, как уравнения движения  $N$  вихрей на сфере радиуса  $R$  можно представить в гамильтоновой форме с вырожденной пуассоновой структурой, являющейся нелинейной [15, 90].

**Вывод уравнений движения.** Приведем краткий вывод уравнений движения точечных вихрей, следуя в основном работе [7]. Рассмотрим движение идеальной несжимаемой жидкости между двумя твердыми концентрическими сферами в отсутствие внешних сил. Данная модель может в некотором приближении описывать атмосферу Земли.

Прежде всего уточним понятие точечного вихря на сфере. Пусть сфера единичного радиуса вложена в трехмерное евклидово пространство. Используя сфери-

ческие координаты  $r \in (0, \infty)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , запишем условия несжимаемости жидкости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Используя аналог функции точки на сфере, поле скоростей  $\mathbf{v}$  можно представить в форме

$$v_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial \theta}.$$

Аналог потенциального течения жидкости на сфере (т.е.  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$  всюду) описывается решением уравнения Лапласа  $\Delta A = 0$ . Осесимметричное решение этого уравнения имеет вид  $A = C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \operatorname{const}$ . Оно описывает течение на сфере с парой особенностей в диаметрально противоположных точках. Возникновение дополнительной антиподальной особенности обуславливается потенциальностью сферы: если где-то возникает (точечный) источник завихренности, то для потенциального течения должен возникнуть также (точечный) сток (или несколько стоков). Наличие антиподальной особенности делает это течение малоприводным для моделирования точечных вихрей на сфере.

Более подходящая модель точечного вихря на сфере получается, если мы рассмотрим течение жидкости с постоянной завихренностью  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{const}$ . Для функции тока получим уравнения Пуассона

$$\Delta A = \Gamma = \operatorname{const}.$$

Осесимметричное решение этого уравнения имеет вид

$$A = (C - \Gamma) \ln \sin \theta - C \ln(1 - \cos \theta) + \operatorname{const},$$

где  $C$  — константа интегрирования. Подбирая константу  $C = \Gamma$ , получим решение

$$A = -\Gamma \ln(1 - \cos \theta),$$

которое имеет особенность лишь в одной точке сферы  $\theta = 0$ . Традиционно это течение используют для моделирования точечных вихрей на сфере. Полагая вихри расположенными в точках  $(\theta_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , получим функцию точки в виде

$$A(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \ln(1 - \cos \gamma_i), \quad (2.1)$$

где  $\cos \gamma_i = \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i)$  — косинус угла между рассматриваемой точкой и вихрем. В каждой точке сферы  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$  течение, описываемое функцией  $A$  (2.1), имеет постоянную завихренность  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\sum \Gamma_i}{4\pi}$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что на плоскости для течения с постоянной завихренностью аналогичного решения с ограниченными всюду (за исключением особенностей) скоростями не существует.

Используя теорему Вейса [43], можно показать, что вихрям (2.1) в бесконечно тонком сферическом слое можно также поставить в соответствие полубесконечные вихревые нити в  $\mathbb{R}^3$ , исходящие из центра сферы. В этом случае поле скоростей жидкости задается соотношением

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{A},$$

где векторный потенциал имеет сферические координаты  $A_\theta = A_\varphi = 0$ ,  $A_r = A(\theta, \varphi)$ . В явном виде находим

$$\begin{aligned} v_r &= 0, \quad v_\theta(r, \theta, \varphi) = -\frac{1}{4\pi r} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{\sin \theta_i \sin(\varphi - \varphi_i)}{1 - \cos \gamma_i}, \\ v_\varphi(r, \theta, \varphi) &= -\frac{1}{4\pi r} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \frac{\cos \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i) - \sin \theta \cos \theta_i}{1 - \cos \gamma_i}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Несложно показать, что завихренность  $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{v}$  в каждой точке (не лежащей на вихревой нити)  $\mathbb{R}^3$ , создаваемая этим полем скоростей, равна

$$\Omega_r = \frac{\sum \Gamma_i}{4\pi r^2}, \quad \Omega_\theta = \Omega_\varphi = 0.$$

Заменяя теперь в (2.2)  $r, \theta, \varphi$  на  $R, \theta_k, \varphi_k$  и опуская члены с  $i = k$ , получим искомые уравнения движения.

**Уравнения движения и первые интегралы.** Таким образом, динамика  $N$  точечных вихрей на сфере описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_k &= -\frac{1}{4\pi R^2} \sum_{i \neq k} \Gamma_i \frac{\sin \theta_i \sin(\varphi_k - \varphi_i)}{1 - \cos \gamma_{ik}}, \\ \sin \theta_k \dot{\varphi}_k &= -\frac{1}{4\pi R^2} \sum_{i \neq k} \Gamma_i \frac{\cos \theta_k \sin \theta_i \cos(\varphi_k - \varphi_i) - \sin \theta_k \cos \theta_i}{1 - \cos \gamma_{ik}}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\cos \gamma_{ik} = \cos \theta_i \cos \theta_k + \sin \theta_i \sin \theta_k \cos(\varphi_i - \varphi_k), \quad i, k = 1, 2, \dots, N,$$

где  $\gamma_{ik}$  — угол между радиус-векторами, соединяющими центр сферы с точечными вихрями  $i$  и  $k$  (рис. 2). Эти уравнения гамильтоновы со скобкой Пуассона

$$\{\varphi_i, \cos \theta_k\} = \frac{\delta_{ik}}{R^2 \Gamma_i} \quad (2.4)$$

и гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < k}^N \Gamma_i \Gamma_k \ln \left( 4R^2 \sin^2 \frac{\gamma_{ik}}{2} \right). \quad (2.5)$$

Помимо гамильтониана, система допускает еще три интеграла движения

$$\begin{aligned} F_1 &= R \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \cos \varphi_i = c_1, \\ F_2 &= R \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \sin \varphi_i = c_2, \\ F_3 &= R \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cos \theta_i = c_3, \end{aligned} \quad (2.6)$$

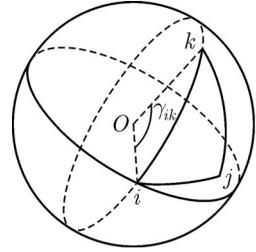


Рис. 2

которые образуют вектор  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ , называемый *моментом завихренности* [161]. Интегралы  $F_1, F_2, F_3$  неинволютивны и коммутируют аналогично компонентам вектора кинетического момента в механике:

$$\{F_i, F_j\} = \frac{1}{R} \varepsilon_{ijk} F_k. \quad (2.7)$$

**Уравнения движения в декартовых координатах.** При исследовании частных решений задачи  $N$  вихрей на сфере удобно также пользоваться уравнениями движения в (избыточных) декартовых координатах  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ ,  $r_i^2 = R^2$ . Они имеют вид [161]

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{1}{4\pi R} \sum_{j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i}{R^2 - (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)}, \quad (2.8)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — обычное скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Декартовы координаты вихрей  $x, y, z$  при вложении сферы в трехмерное пространство коммутируют как образующие алгебры  $so(3)$  (аналогично компонентам моментов для волчков):

$$\{x_{i\alpha}, x_{j\beta}\} = \frac{\delta_{ij}}{\Gamma_i} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x_{j\beta},$$

где  $i, j$  — номера вихрей,  $\alpha, \beta, \gamma$  — номера компонент.

## 2. Алгебраическая редукция в динамике вихрей на сфере

Набор интегралов (2.6) неинволютивен, поэтому все, что было сказано о редукции на плоскости (см. § 1, раздел 2), справедливо и для вихрей на сфере. В общем случае возможна редукция лишь на две степени свободы, за исключением частного случая

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0,$$

когда допускается редукция на три степени свободы. Тем не менее, случай сферы существенно сложнее, поэтому в канонической форме редукция была выполнена совсем недавно [11, 85] (см. приложение 1). Следуя [15, 90], приведем здесь редукцию в алгебраической форме.

**Относительные переменные и нелинейные скобки Пуассона.** В качестве новых приведенных (или относительных) переменных, аналогично соответствующим величинам в динамике вихрей на плоскости, примем:

$$M_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\gamma_{ij}}{2}, \quad (2.9)$$

являющиеся квадратами длин хорд между соответствующими вихрями [90]. Гамильтониан (2.5) зависит только от этих переменных:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < k}^N \Gamma_i \Gamma_k \ln M_{ik}. \quad (2.10)$$

Из соотношений между каноническими координатами (2.4) можно найти коммутаторы между величинами  $M_{ik}$ :

$$\{M_{ij}, M_{kl}\} = 4 \left( \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ik} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jk} \right) \Delta_{ijl} + 4 \left( \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{il} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jl} \right) \Delta_{ijk}, \quad (2.11)$$

где введены обозначения

$$\Delta_{ijk} = \frac{1}{R} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{r}_k, \quad (2.12)$$

т.е. скобка Пуассона между величинами  $M_{ik}$  пропорциональна объему параллелепипеда, натянутого на радиус-векторы тройки вихрей на сфере (см. рис. 2). Мы будем обозначать соответствующие характеристики задач о вихрях на плоскости и сфере одинаковыми символами.

Можно показать, что функции  $\Delta_{ijk}$ ,  $M_{ij}$  коммутируют с интегралами (2.6) и их полный набор замкнут относительно скобки (2.4):

$$\begin{aligned}
\{M_{ij}, \Delta_{klm}\} &= \left( \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ik} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jk} \right) (M_{li} - M_{im} + M_{mj} - M_{jl}) + \\
&+ \left( \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{il} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jl} \right) (M_{mi} - M_{ik} + M_{kj} - M_{jm}) + \\
&+ \left( \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{im} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jm} \right) (M_{ki} - M_{il} + M_{lj} - M_{jk}) + \\
&+ \frac{1}{2R^2} \left( \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ik} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jk} \right) (M_{jl}M_{im} - M_{mj}M_{il}) + \\
&+ \frac{1}{2R^2} \left( \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{il} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jl} \right) (M_{jm}M_{ik} - M_{jk}M_{im}) + \\
&+ \frac{1}{2R^2} \left( \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{im} - \frac{1}{\Gamma_j} \delta_{jm} \right) (M_{jk}M_{il} - M_{ik}M_{jl}), \\
\{\Delta_{ijk}, \Delta_{lmn}\} &= \frac{\delta_{il}}{\Gamma_i} \left( \Delta_{jkn} - \Delta_{jkm} + \frac{1}{2R^2} (M_{in}\Delta_{jkm} - M_{im}\Delta_{jkn}) \right) + \\
&+ \frac{\delta_{im}}{\Gamma_i} \left( \Delta_{jkl} - \Delta_{jkn} + \frac{1}{2R^2} (M_{il}\Delta_{jkn} - M_{in}\Delta_{jkl}) \right) + \\
&+ \frac{\delta_{in}}{\Gamma_i} \left( \Delta_{jkm} - \Delta_{jkl} + \frac{1}{2R^2} (M_{im}\Delta_{jkl} - M_{il}\Delta_{jkm}) \right) + \\
&+ \frac{\delta_{jl}}{\Gamma_j} \left( \Delta_{ikm} - \Delta_{ikn} + \frac{1}{2R^2} (M_{jm}\Delta_{ikn} - M_{jn}\Delta_{ikm}) \right) + \\
&+ \frac{\delta_{jm}}{\Gamma_j} \left( \Delta_{ikn} - \Delta_{ikl} + \frac{1}{2R^2} (M_{jn}\Delta_{ikl} - M_{jl}\Delta_{ikn}) \right) + \\
&+ \frac{\delta_{jn}}{\Gamma_j} \left( \Delta_{ikl} - \Delta_{ikm} + \frac{1}{2R^2} (M_{jl}\Delta_{ikm} - M_{jm}\Delta_{ikl}) \right) + \\
&+ \frac{\delta_{kl}}{\Gamma_k} \left( \Delta_{ijn} - \Delta_{ijm} + \frac{1}{2R^2} (M_{kn}\Delta_{ijm} - M_{km}\Delta_{ijn}) \right) + \\
&+ \frac{\delta_{km}}{\Gamma_k} \left( \Delta_{ijl} - \Delta_{ijn} + \frac{1}{2R^2} (M_{kl}\Delta_{ijn} - M_{kn}\Delta_{ijl}) \right) + \\
&+ \frac{\delta_{kn}}{\Gamma_k} \left( \Delta_{ijm} - \Delta_{ijl} + \frac{1}{2R^2} (M_{km}\Delta_{ijl} - M_{kl}\Delta_{ijm}) \right). \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Соответствующая алгебраическая пуассонова структура (*вихревая алгебра*) теперь является нелинейной — она содержит линейные и квадратичные слагаемые.

Отметим, что алгебры такого сорта описаны впервые в работах [90] в связи с проблемами интегрируемости и подробно описаны в книге [15].

Плоский случай (1.10) получается при  $R \rightarrow \infty$  и является линейной аппроксимацией структуры (2.13). Интересно, что возмущение (т. е. слагаемые при  $1/R^2$ ) вносится при таком подходе в скобку Пуассона, а не в гамильтониан (2.10). Естественным алгебраическим преобразованием перенести это возмущение в гамильтониан нельзя.

Уравнения движения для  $M_{ij}$ ,  $\Delta_{ijk}$  задаются теми же соотношениями (1.13):

$$\dot{M}_{ij} = \{M_{ij}, H\}, \quad \dot{\Delta}_{ijk} = \{\Delta_{ijk}, H\},$$

но в качестве скобки необходимо брать (2.11) и (2.13).

Соотношения между избыточными переменными на сфере аналогичны плоскому случаю (1.11), (1.12):

$$\begin{aligned} F_{ijkl} = & 4(\Delta_{ijk} + \Delta_{ikl} - \Delta_{lij} - \Delta_{ljk})^2 - \\ & - \frac{1}{R^2}(M_{il}M_{jl}M_{jk} - M_{ij}M_{ik}M_{jk} + M_{il}M_{kl}M_{jk} + M_{il}M_{kl}M_{ij} + \\ & + M_{il}M_{ik}M_{jl} - M_{il}M_{ik}M_{kl} + M_{il}M_{ik}M_{jk} + M_{jl}M_{kl}M_{ij} - \\ & - M_{jl}M_{kl}M_{jk} + M_{jl}M_{ik}M_{kl} + M_{jl}M_{ik}M_{jk} - M_{ij}M_{il}M_{jl} + \\ & + M_{ij}M_{il}M_{jk} + M_{ij}M_{kl}M_{jk} + M_{ij}M_{ik}M_{jl} + M_{ij}M_{ik}M_{kl} - \\ & - M_{ik}^2M_{jl} - M_{il}M_{jk}^2 - M_{il}^2M_{jk} - M_{ik}M_{jl}^2 - \\ & - M_{kl}M_{ij}^2 - M_{ij}M_{kl}^2) = 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} F_{ijk} = & (2\Delta_{ijk})^2 + (M_{ij}^2 + M_{ik}^2 + M_{jk}^2) - \\ & - 2(M_{ij}M_{jk} + M_{ik}M_{jk} + M_{ij}M_{ik}) + \\ & + \frac{1}{R^2}M_{ij}M_{jk}M_{ki} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В отличие от скобки (1.10) в динамике вихрей на плоскости, скобка (2.11), (2.13) удовлетворяет тождеству Якоби лишь при ограничении на многообразие, определяемое всеми соотношениями (2.14), (2.15). При этом ненулевые элементы тензора Якоби

$$J_{ijk} = \{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\}$$

представляют собой тождества между хордами (2.9) и ориентированными объемами (2.12) при произвольном расположении точек на сфере. Приведем

для примера соотношения для четырех вихрей, которые нам понадобятся ниже:

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 &= \frac{1}{4R^2}(\Delta_2 M_{12} + \Delta_3 M_{13} + \Delta_4 M_{14}) = \\
 &= \frac{1}{4R^2}(\Delta_1 M_{12} + \Delta_3 M_{23} + \Delta_4 M_{24}) = \\
 &= \frac{1}{4R^2}(\Delta_1 M_{13} + \Delta_2 M_{23} + \Delta_4 M_{34}) = \\
 &= \frac{1}{4R^2}(\Delta_1 M_{14} + \Delta_2 M_{24} + \Delta_3 M_{34});
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

здесь  $\Delta_1 = \Delta_{234}$ ,  $\Delta_2 = \Delta_{314}$ ,  $\Delta_3 = \Delta_{124}$ ,  $\Delta_4 = \Delta_{213}$ . Доказательство этих геометрических соотношений методами сферической геометрии весьма громоздко, а сами соотношения неочевидны. Пуассонова геометрия дает, таким образом, некоторый любопытный алгоритм их получения. Для плоскости при  $R \rightarrow \infty$  получается обычное соотношение для ориентированных площадей в четырехугольнике (1.11).

Скобка (2.11), (2.13) также допускает линейную функцию Казимира (1.14), которая связана с интегралами (2.6) соотношениями

$$\frac{D_0}{2} = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j M_{ij} = \left( R \sum_{i=1}^N \Gamma_i \right)^2 - F_1^2 - F_2^2 - F_3^2. \tag{2.17}$$

**Проблема интегрируемости.** Переход от уравнений движения (1.1) и (2.3) к гамильтоновой системе со скобкой (1.10) и (2.13), описывающей эволюцию взаимного расположения вихрей, соответствует процессу редукции в алгебраической форме. Для явного понижения порядка необходимо, так же как и в случае плоскости, ввести некоторую систему координат (не обязательно канонических) на симплектических листах, которые и являются фазовым пространством приведенной системы.

Размерность симплектического листа (в общем случае сингулярного) приведенной системы (определяется соотношениями (2.14) и (2.15) и линейным интегралом (2.17)) равна  $2N - 4$ . По теореме Лиувилля, для ее интегрируемости необходимо  $N - 3$  дополнительных инволютивных интеграла.

Следовательно

**Предложение.** Система трех вихрей интегрируема при произвольных гамильтонианах (инвариантных относительно группы движения сферы).

Для интегрируемости задачи четырех вихрей не хватает лишь одного интеграла.

### § 3. Задача трех вихрей на плоскости и сфере

Остановимся сначала на качественном анализе задачи трех вихрей; к задаче четырех вихрей (на плоскости и сфере) мы вернемся в § 6 после решения проблемы классификации вихревой алгебры и введения соответствующих симплектических координат.

**Исторические комментарии.** Задача о движении двух вихрей на плоскости была полностью решена Г. Гельмгольцем [29, 42], который установил, что если  $\Gamma_1 \neq -\Gamma_2$ , два вихря совершают равномерное вращательное движение вокруг неподвижного центра завихренности, определяемого интегралами (1.4)

$$\mathbf{r} = \frac{\Gamma_1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_2 \mathbf{r}_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad (3.1)$$

с частотой

$$\Omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi M}, \quad M = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  — радиус-векторы первого и второго вихрей,  $\Gamma_k$  — интенсивности точечных вихрей. При условии  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  центр завихренности находится на бесконечности, а два вихря движутся поступательно перпендикулярно прямой, соединяющей вихри, и со скоростью  $v = \frac{\Gamma_1}{2\pi\sqrt{M}}$ .

Динамика двух вихрей на сфере вполне аналогична плоскому случаю. Здесь общей ситуацией является вращение вокруг оси, проходящей через центр сферы и центр завихренности (3.1) (расположенный на хорде, соединяющей два вихря с радиус-вектором), который, как следует из (2.6), также неподвижен.

Как и в плоском случае, расстояние между вихрями остается постоянным. Угловая скорость такого вращения

$$\Omega = \frac{1}{2\pi M} \sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 M}{R^2}}, \quad (3.3)$$

где  $R$  — радиус сферы,  $M$  — квадрат расстояния (хорды) между вихрями. При условии  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ , два вихря движутся по сфере по двум одинаковым параллелям, расположенным по разные стороны от экватора, что было отмечено Громокой [23].

Первой нетривиальной интегрируемой системой на плоскости является задача о трех вихрях. Ей посвящены многочисленные работы, первыми

из которых являются диссертация В. Грëбли 1877 г. [111] и исследования Гринхилла [110], а также работа Синга [193].

В современный период задача движения трех вихрей на плоскости изучалась в работах [45, 67, 178, 193, 194], с точки зрения топологического анализа — в [51, 62]. Отметим, что задача трех вихрей на плоскости не принадлежит к тем интегрируемым системам, решение которых возможно в классе достаточно простых (например, эллиптических) специальных функций (из-за логарифмических слагаемых в гамильтониане общее решение имеет бесконечно-листное ветвление на комплексной плоскости времени). Исключения составляют некоторые частные случаи, например, случай равных по абсолютной величине интенсивностей вихрей.

Анализ возможных движений трех вихрей с нулевой суммарной циркуляцией, помещенных в двухслойную вращающуюся жидкость, проведен в [185].

Задача трех вихрей является интегрируемой и на плоскости Лобачевского. На ней мы не останавливаемся вследствие отсутствия реальной физической интерпретации. Отметим только, что в этом случае динамика вихрей утрачивает многие интересные особенности, присущие движению вихрей на сфере. Как и в небесной механике, эта система более близка к плоской ситуации.

Здесь мы приведем анализ движения трех вихрей на  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{S}^2$ , впервые выполненный в [90], основанный на алгебро-геометрическом исследовании приведенной системы (1.13), а затем и абсолютного движения, без использования явных квадратур. Такой подход, опирающийся на представление уравнений движения на соответствующих вихревых алгебрах, позволяет получить более наглядное описание движений системы при помощи аналогии с системой Лотки–Вольтера [20].

### 1. Аналогия с системой Лотки–Вольтера

Рассмотрим подробнее алгебру скобок (2.13) задачи трех вихрей на сфере (случай плоскости получается предельным переходом  $R \rightarrow \infty$ ):

$$\begin{aligned} \{M_i, \Delta\} &= (a_j - a_k)M_i + (a_j + a_k)(M_j - M_k) + \frac{M_i}{2R^2}(a_k M_k - a_j M_j), \\ \{M_1, M_2\} &= -4a_3\Delta, \quad \{M_3, M_1\} = -4a_2\Delta, \quad \{M_2, M_3\} = -4a_1\Delta. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь  $M_k = M_{ij}$  — квадраты расстояний между вихрями,  $\Delta$  — объем параллелепипеда, натянутого на радиус-векторы вихрей (на плоскости он переходит в площадь соответствующего треугольника),  $a_k = 1/\Gamma_k$  — обратные

интенсивности. Здесь и далее будем полагать, что индексы  $i, j, k$  принимают, соответственно, значения 1, 2, 3 и их циклические перестановки. Эта скобка якобиева без всяких ограничений.

Гамильтониан задачи трех вихрей

$$H = -\frac{1}{4\pi}(\Gamma_2\Gamma_3 \ln M_1 + \Gamma_1\Gamma_3 \ln M_2 + \Gamma_1\Gamma_2 \ln M_3) \quad (3.5)$$

генерирует фазовый поток:

$$\begin{aligned} \dot{M}_i &= \{M_i, H\} = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \left( \frac{1}{M_j} - \frac{1}{M_k} \right) \Delta, \\ \dot{\Delta} &= \{\Delta, H\} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\Gamma_2 + \Gamma_3}{M_1} (M_2 - M_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_3}{M_2} (M_3 - M_1) + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{M_3} (M_1 - M_2) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{16\pi R^2} ((\Gamma_3 - \Gamma_2)M_1 + (\Gamma_1 - \Gamma_3)M_2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)M_3). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отметим, что уравнения (3.6) обладают стандартной инвариантной мерой, т. е.  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

Ранг пуассоновой структуры (3.4) равен двум, и имеются две независимые центральные функции

$$\begin{aligned} D &= a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 D_0, \\ F &= (2\Delta)^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 - 2(M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3) + \frac{1}{R^2} M_1 M_2 M_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Симплектический лист структуры, соответствующий фазовому пространству приведенной системы, определяется как поверхность уровня  $D = \text{const}$  и  $F = 0$ . Он двумерный, и при ограничении на него системы (3.6) получим (интегрируемую) гамильтонову систему с одной степенью свободы.

Укажем на интересную аналогию между задачей о трех вихрях (на плоскости и на сфере!) и системой Лотки–Вольтерра, возникающей в математической биологии [20].

Для этого представим уравнения (3.6) в виде

$$\dot{M}_i = -\frac{\Gamma_i \Delta}{2\pi M_1 M_2 M_3} M_i (M_j - M_k), \quad (3.8)$$

где  $i, j, k$  — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3. Теперь, если ввести новое (регуляризующее) время  $\tau$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\Delta}{2\pi M_1 M_2 M_3}, \quad (3.9)$$

то для квадратов взаимных расстояний  $M_i$  получим уравнения типа Вольтерра:

$$\frac{dM_i}{d\tau} = -\Gamma_i M_i (M_j - M_k). \quad (3.10)$$

При прохождении системой вихрей коллинеарного положения ( $\Delta = 0$ ) знак в формуле (3.9) следует поменять, поэтому указанный траекторный изоморфизм является, вообще говоря, кусочным. Из этой аналогии, в частности, следует, что системы трех вихрей на плоскости и сфере траекторно кусочно-изоморфны. (В данном случае речь идет об относительном движении.)

## 2. Ли-алгебраическая классификация задачи трех вихрей на плоскости. Канонические координаты

Скобка Пуассона относительных переменных задачи трех вихрей на плоскости может быть получена из (3.4) предельным переходом  $R \rightarrow \infty$ .

Получившаяся скобка Ли–Пуассона является вырожденной и обладает двумя центральными функциями. Одна из них (линейная) — интеграл полного момента (3.7)

$$D = \sum_k a_k M_k = \frac{D_0}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}, \quad (3.11)$$

где  $a_k = 1/\Gamma_k$ .

Другая — квадратичная функция Казимира — возникает, как было отмечено, из геометрического соотношения Герона, связывающего площадь треугольника с его сторонами:

$$F = (2\Delta)^2 + M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 - 2(M_1 M_2 + M_1 M_3 + M_2 M_3). \quad (3.12)$$

Реальным движениям соответствует уровень  $F = 0$ .

Несложно видеть, что совместная поверхность уровня  $D = \text{const}$ ,  $F = 0$  в четырехмерном пространстве  $(M_1, M_2, M_3, \Delta)$  задает некоторую двумерную поверхность второго порядка, которая и является фазовым пространством приведенной (редуцированной) системы. В то же время она

является симплектическим листом скобки Ли–Пуассона (3.4) при  $R \rightarrow \infty$ . Устройство симплектического листа определяется вещественным типом алгебры Ли, соответствующей скобкам Ли–Пуассона (3.4), который зависит от интенсивностей  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ .

Чтобы показать это явно, выберем новые образующие  $D, e_1, e_2, e_3$  в виде

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\Delta}{2\sqrt{|A|}}, & e_2 &= \frac{(a_2 - a_3)M_1 + (a_3 - a_1)M_2 + (a_1 - a_2)M_3}{2\sqrt{2|A|B}}, \\ e_3 &= \frac{(a_2a_3 - a_1^2)M_1 + (a_1a_3 - a_2^2)M_2 + (a_1a_2 - a_3^2)M_3}{2A\sqrt{2B}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = \frac{\sum \Gamma_i}{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}, \quad (3.14)$$

$$B = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_1 - a_3)^2,$$

а  $D$  определено соотношением (3.11).

*Вещественный тип алгебры Ли, соответствующий пуассоновой структуре (3.4) при  $R \rightarrow \infty$ , определяется только знаком величины  $A$ .*

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Все изложенные ниже результаты могут быть получены методами аналитической геометрии при исследовании пересечения плоскости (3.11) и конуса (3.12), мы же излагаем здесь метод Ли-алгебраической классификации, поскольку он допускает наиболее простое обобщение на случай  $N$  вихрей.

Рассмотрим все возможные случаи.

$A > 0$ . Для переменных (3.13) в этом случае имеем

$$\begin{aligned} \{D, e_k\} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \\ \{e_1, e_2\} &= e_3, \quad \{e_2, e_3\} = e_1, \quad \{e_3, e_1\} = e_2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

это соответствует разложению вихревой алгебры в прямую сумму  $\mathbb{R} \oplus so(3)$ . Симплектические листы в этом случае компактны и диффеоморфны  $\mathbb{S}^2$ , они задаются соотношениями

$$D = \text{const}, \quad G^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \text{const}. \quad (3.16)$$

При этом листы, соответствующие рассматриваемой системе вследствие условия  $F = 0$ , задаются дополнительным соотношением между переменными (3.16)

$$G^2 = \frac{1}{16} \left( \frac{D}{a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3} \right)^2. \quad (3.17)$$

Тем самым мы также доказали

**Предложение 3.1.** *При  $A > 0$  взаимные расстояния между вихрями остаются ограниченными во все время движения вне зависимости от значений момента  $D$  и интеграла энергии  $H$ . Фазовое пространство редуцированной системы диффеоморфно сфере.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие  $A > 0$  для ограниченности траекторий взаимного движения вихрей впервые, по-видимому, было получено Арефом [67] с помощью геометрической интерпретации (см. ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Этот результат остается справедливым как для трех вихрей в стратифицированной жидкости [24], так и для вихрей в жидкости со свободной поверхностью (вихрей Бесселя) [190], т. к. пуассонова структура в этом случае та же, что и для вихрей на плоскости, а гамильтониан зависит лишь от взаимных расстояний. Но в этих случаях зависимость от расстояний является не логарифмической, а выражается в функциях Бесселя.

$A < 0$ . В этом случае переменные (3.13) коммутируют следующим образом:

$$\begin{aligned} \{D, e_k\} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \\ \{e_1, e_2\} &= -e_3, \quad \{e_2, e_3\} = e_1, \quad \{e_3, e_1\} = e_2, \end{aligned} \quad (3.18)$$

что соответствует разложению вихревой алгебры в прямую сумму  $\mathbb{R} \oplus so(2,1)$ . В данном случае симплектические листы являются двуполостными гиперболами и параметризуются значениями интегралов

$$D = \text{const}, \quad G^2 = e_3^2 - e_1^2 - e_2^2, \quad (3.19)$$

которые также связаны соотношением (3.17).

В этом случае при определенных значениях интенсивностей и интегралов могут существовать некомпактные (разбегающиеся) траектории (см. ниже раздел 5).

В дальнейшем для краткости случай  $A > 0$  мы будем называть *компактным*, а случай  $A < 0$ , соответственно, *некомпактным*. Кроме того, имеется *исключительный* случай  $A = 0$ , который требует отдельного рассмотрения.

$A = 0$  ( $\sum \Gamma_i = 0$ ). В этом случае базис (3.13) не определен, поэтому выберем новые образующие в виде

$$e_1 = \Delta, \quad e_2 = \frac{M_3}{2(a_1 + a_2)}, \quad e_3 = \frac{1}{2} \left( M_2 - M_1 - \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} M_3 \right), \quad (3.20)$$

при этом скобки Ли–Пуассона вихревой алгебры приводятся к форме

$$\begin{aligned} \{D, e_k\} &= 0, & \{e_1, e_2\} &= e_3, \\ \{e_3, e_1\} &= -D, & \{e_2, e_3\} &= e_1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вихревая алгебра не разлагается в прямую сумму одномерной и трехмерной алгебр, а является четырехмерной разрешимой алгеброй с максимальным разрешимым идеалом  $N$

$$N = \{D, e_1, e_3\}. \quad (3.22)$$

Квадратичная функция Казимира, следующая из соотношения (3.12), имеет вид

$$G^2 = e_1^2 + e_3^2 - 2De_2. \quad (3.23)$$

Симплектические листы, соответствующие возможным расположениям вихрей, определяемым соотношением  $F = 0$ , выделяются условиями

$$G = 0, \quad D = \text{const.}$$

При этом получается параболоид, проходящий через начало координат ( $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ ).

При  $D = 0$ , являющимся необходимым условием коллапса (т. е. слияния вихрей в процессе движения), параболоид вырождается в прямую, совпадающую с осью  $e_2$ . При этом, вследствие условия  $e_1 = \Delta = 0$ , вихри двигаются вдоль одной прямой, которая вращается в абсолютном пространстве вокруг центра завихренности.

**Канонические координаты приведенной системы в задаче трех вихрей.** Представление уравнений относительного движения трех вихрей в гамильтоновой форме со скобкой Ли–Пуассона (3.4) и Ли-алгебраическая классификация позволяют естественным образом определить в этом случае наиболее подходящие канонические переменные.

Рассмотрим здесь подробно случай выполнения условий компактности ( $A > 0$ ). Симплектические листы представляют собой двумерные сферы (3.16), в качестве канонических координат удобно использовать цилиндрические координаты  $l, L$  (сохраним для них обозначения координат Андуайе–Депри, принятые в динамике твердого тела [3]) для алгебры  $so(3)$ :

$$e_1 = L, \quad e_2 = \sqrt{G^2 - L^2} \sin l, \quad e_3 = \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \quad \{l, L\} = 1. \quad (3.24)$$

Выражения для переменных  $M_1, M_2, M_3$  в канонических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} M_i = & \frac{a_j + a_k}{2} \frac{D}{A} + 2(a_j - a_k) \sqrt{\frac{2A}{B}} \sqrt{G^2 - L^2} \sin l + \\ & + \frac{4}{\sqrt{2B}} (a_j(a_j - a_i) + a_k(a_k - a_i)) \sqrt{G^2 - L^2} \cos l, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $A, B$  определяются соотношениями (3.14).

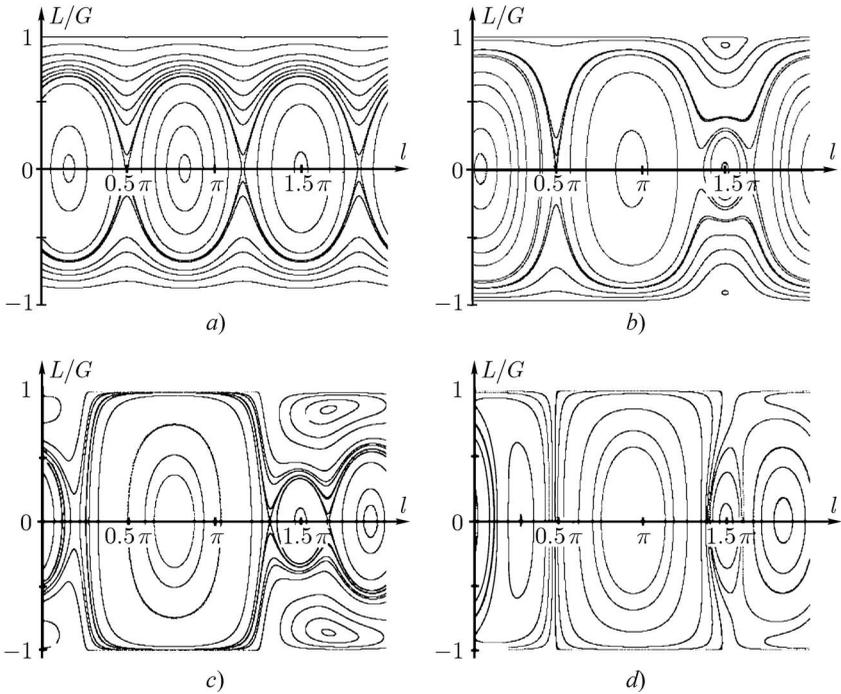


Рис. 3. Фазовый портрет для случаев: *a*) положительных равных интенсивностей; *b*)  $a_1 = a_2 \neq a_3$ ; *c*) трех положительных различных интенсивностей; *d*) одной отрицательной интенсивности. На оси  $L/G = 0$  ( $\Delta = 0$ ) располагаются коллинеарные стационарные конфигурации и особенности системы.

В частном случае равных интенсивностей из полученных выражений (3.25) следует выражение для гамильтониана, приведенное в [74]. В последней работе используется классический способ редукции к задаче с одной степенью свободы для произвольных интенсивностей (типа исключения узла по Якоби).

Фазовый портрет проще всего выглядит в нормированных канонических координатах  $(l, L/G)$ , он описывает движение изображающей точки в цилиндрических координатах по поверхности двумерной сферы  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = G^2$ . Импульс  $L$  имеет смысл ориентированной площади параллелограмма, построенного на трех вихрях ( $L \sim \Delta$ ). Развертка фазового портрета

та представлена на рис. 3 *a–d* для четырех различных случаев соотношения интенсивностей вихрей.

Замечательной особенностью новых координат является полное отсутствие несущественных особенностей на портрете (связанных, например, с отражением траектории от границ), которые присутствуют в геометрической интерпретации и являются просто следствием проекции.

Приведенные рисунки иллюстрируют аналогию между движением трех вихрей и динамикой твердого тела. Сравнивая рис. 3*a* (в случае равных интенсивностей) с фазовым портретом задачи Эйлера–Пуансо (см., например, [13]), можно связать коллинеарные конфигурации (лежащие на прямой  $L \equiv 0$ ) с неустойчивыми перманентными движениями твердого тела вокруг средней оси эллипсоида инерции, томсоновские решения (при которых  $L/G = 1$ ) — с вращениями вокруг большой (малой) оси эллипсоида инерции. Особые точки системы, которые соответствуют периодическим решениям задачи двух вихрей (два из трех вихрей всегда слиты в одной точке, а их интенсивности складываются), лежащие на прямой  $L = 0$ , можно связать с устойчивыми перманентными вращениями вокруг малой (большой) оси эллипсоида инерции. При прохождении системой коллинеарного положения (три вихря на одной прямой,  $L = 0$ ) ориентированная площадь меняет свой знак. Деформация фазовой картины при неравных интенсивностях показана на рис. 3*b, c*. При этом томсоновские решения смещаются с прямой  $L/G = 1$ , которая на сфере (3.16) соответствует одной точке — полюсу. На рис. 3*d* показан фазовый портрет, для которого одна интенсивность отрицательна, но условие компактности ( $A > 0$ ) также выполнено.

Остальные движения системы трех вихрей, не являющиеся положениями равновесия на фазовых портретах, соответствуют квазипериодическим (двухчастотным) движениям вихрей на плоскости. В зависимости от топологии фазовой кривой эти движения обладают различными особенностями: некоторые из них многократно проходят коллинеарное состояние, другие — не попадают в него никогда. Такие области разделяет сепаратрисная кривая, для которой три вихря бесконечно долго приближаются к коллинеарной (неустойчивой) конфигурации. Конкретные траектории вихрей приведены в различных работах [42, 66, 178], начиная с Грёбли [111] и Гринхилла [110]. Геометрическая интерпретация абсолютного движения, позволяющая выполнить классификацию траекторий в зависимости от значений интегралов  $h, D$ , приведена нами ниже (см. раздел об абсолютном движении и адвекции).

Приведем также, для полноты, канонические координаты в некомпактных случаях.

$A < 0$ . Для образующих (3.13) имеем

$$e_1 = \sqrt{L^2 - G^2} \cos l, \quad e_2 = \sqrt{L^2 - G^2} \sin l, \quad e_3 = L, \quad \{l, L\} = 1. \quad (3.26)$$

Именно эти координаты удобны в данном случае для численных расчетов. На фазовом портрете удобно рисовать траекторию в координа-

тах  $(l, G/L)$ , которые меняются в ограниченных пределах:  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ,  $G/L \in (-1, 1)$ .

Помимо них возможны другие канонические переменные, для которых выделенной является площадь  $\Delta$ :

$$e_1 = L, \quad e_2 = \sqrt{L^2 + G^2} \operatorname{sh} l, \quad e_3 = \sqrt{L^2 + G^2} \operatorname{ch} l, \quad \{l, L\} = 1.$$

$A = 0$ . Для образующих (3.20) имеем

$$e_1 = \sqrt{2DL} \sin l, \quad e_2 = L, \quad e_3 = \sqrt{2DL} \cos l, \quad \{l, L\} = 1. \quad (3.27)$$

В этом случае переменные  $\left(l, \frac{1}{1+L}\right)$  изменяются в прямоугольнике  $0 \leq l \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \frac{1}{1+L} \leq 1$ .

### 3. Геометрическая интерпретация и качественный анализ динамики трех вихрей на плоскости

**Геометрическая интерпретация относительного движения.** Опишем наглядную геометрическую интерпретацию движений, используемую в [194] и представленную на рис. 4 (см. также рис. 12, 15). По существу, впервые она использовалась еще Грёбли и в различных вариантах имеется в [75, 111], наиболее близкая к используемой нами указана в [67].

Взаимное расположение трех вихрей (с точностью до ориентации) задается точкой в пространстве квадратов взаимных расстояний  $M_1, M_2, M_3$ . Из соотношения Герона (3.12) следует, что выполнено неравенство

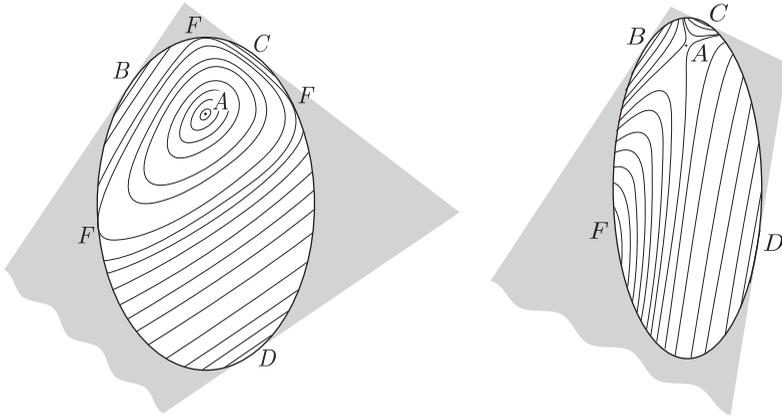
$$2(M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1) - M_1^2 - M_2^2 - M_3^2 \geq 0, \quad (3.28)$$

которое (с учетом соотношений  $M_i \geq 0$ ) определяет внутренность одной половины кругового конуса, ось которого задается уравнениями  $M_1 = M_2 = M_3$ . Он касается плоскостей  $M_k = 0$  в точках  $M_i = M_j$ ,  $i, j \neq k$ . Уровень линейного интеграла (3.11) задает плоскость, на которой располагаются траектории системы при фиксированном  $D$ . Граница области возможного движения на этой плоскости задается линией пересечения с конусом (3.28) и представляет собой кривую второго порядка. Как следует из приведенного выше анализа компактности, при  $A > 0$  имеем эллипс, при  $A < 0$  — гиперболу, при  $A = 0$  — параболу. Траектории системы (3.6) проектируются внутрь области. В случае, когда область — эллипс, характерный вид траекторий системы приведен на рис. 4.

При подходе траектории к границе области ( $\Delta = 0$ ), согласно (3.6), относительные скорости вихрей  $M_k$  стремятся к нулю. Поэтому удобнее воспользоваться регуляризованными уравнениями (3.10). После достижения кривой  $\Delta = 0$  в уравнениях (3.10) происходит смена знака, и движение происходит по той же траектории в обратном направлении. Для абсолютного движения это соответствует зеркальному отражению траектории при прохождении через коллинеарные конфигурации (теорема 1.2, § 1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Описанная геометрическая интерпретация эквивалентна некоторой проекции движения изображающей точки по симплектическому листу (3.16), (3.19), (3.23), смены направлений движения есть следствие особенностей этой проекции из пространства  $\Delta$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  в пространство  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ .

Характерный вид траекторий (при выполнении условий компактности) приведен на рис. 4.



a)  $D = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 8$

b)  $D = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = -8$

Рис. 4. Геометрическая интерпретация для компактного случая: а) все интенсивности положительны; б) одна из интенсивностей отрицательна. Темная часть соответствует нефизической области на плоскости, задаваемой линейным интегралом  $D = \text{const}$  и ограниченной условиями  $M_k > 0$ . Точка  $A$  соответствует томсоновским решениям;  $F$  — коллинеарным;  $B, C, D$  — точки, при которых два вихря слиты в один.

Траектории системы на рассматриваемой плоскости (рис. 4) и в фазовом пространстве (см. рис. 3) являются линиями уровня интеграла энергии (3.5), их вид и расположение (строение фазового портрета) полностью

определяется особенностями системы, неподвижными точками и сепаратрисами, соединяющими гиперболические неподвижные точки.

**Особенности системы.** Это точки, в которых «энергия» (3.5) обращается в бесконечность, им соответствуют решения системы, при которых два вихря из трех слиты так, что возникает система двух вихрей, вращающихся вокруг центра завихренности. На фазовом портрете (см. рис. 3) они выглядят как эллиптические особые точки. После регуляризующей замены времени  $dt = M_1 M_2 M_3 d\tau$  особенности действительно превращаются в эллиптические неподвижные точки. В геометрической интерпретации (рис. 4) особенностям соответствуют точки касания границы области возможного движения  $\Delta = 0$  с координатными плоскостями  $M_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  (при этом  $M_j = M_k$ ,  $j, k \neq i$ ). Можно показать, что у системы при любом  $D \neq 0$  всегда имеется ровно три особые точки. Рисунки 3, 4 иллюстрируют это для компактного случая.

**Томсоновские (равносторонние) конфигурации.** Запишем первые интегралы движения вихрей на плоскости в виде

$$D = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3, \quad h = e^{-\frac{4\pi}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} H} = M_1^{a_1} M_2^{a_2} M_3^{a_3}, \quad (3.29)$$

(интеграл энергии, из соображений удобства, представлен в экспоненциальной форме). В критических точках интеграла энергии  $h$  при фиксированном значении  $D$  интегралы (3.29) являются зависимыми, т. е. матрица Якоби первых интегралов (3.29) вырождена:

$$\text{rank} \left( \frac{\partial(D, h)}{\partial(M_1, M_2, M_3)} \right) < 2. \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) при произвольных интенсивностях допускает единственное решение

$$M_1 = M_2 = M_3, \quad (3.31)$$

которое соответствует неподвижной точке уравнений (3.8). В этом случае вихри на плоскости образуют правильный треугольник.

На плоскости значений первых интегралов  $h$ ,  $D$  (3.29) этим решениям соответствует (бифуркационная) кривая вида

$$h(D) = \left( \frac{D}{\sum a_i} \right)^{(\sum a_i)}. \quad (3.32)$$

Устойчивость этих конфигураций (в линейном приближении) определяется квадратом нетривиального собственного значения линеаризованной системы (3.8) вблизи неподвижной точки (3.31):

$$\lambda^2 = -C \frac{3(\sum a_i)^3}{D^2 a_1 a_2 a_3} < 0, \quad (3.33)$$

где  $C$  — положительная константа, не зависящая от интенсивностей и  $D$ . Как следует из (3.33), условие устойчивости треугольных решений не совпадает с условиями компактности ( $A > 0$ , см. рис. 5). Это иллюстрируется рисунком 4, на котором в компактном случае при одних значениях интенсивностей треугольная конфигурация устойчива (рис. 4а), а при других — нет (рис. 4б) (см. также рис. 3).

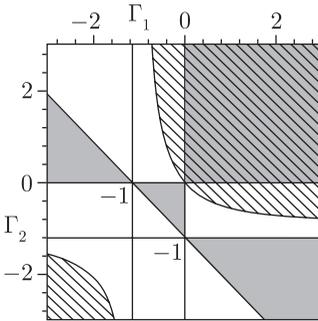


Рис. 5. Условия компактности ( $A > 0$ ) и устойчивости томсоновских конфигураций на плоскости параметров  $\Gamma_1, \Gamma_2$  при фиксированном  $\Gamma_3 = 1$ . Серым цветом обозначены области, для которых выполнено условие компактности  $A > 0$ , а штриховкой — области, для которых томсоновская конфигурация устойчива.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Частные решения, соответствующие кривой (3.32), — три вихря в вершинах правильного треугольника, вращающегося как твердое тело вокруг центра завихренности, — называются «томсоновскими» и являются устойчивыми при выполнении условия (3.33). Дж. Томсон указал их для произвольного числа вихрей равных интенсивностей и показал, что в линейном приближении такие конфигурации будут устойчивы для числа вихрей  $N < 7$ , а при  $N > 7$  — неустойчивы (теорема Томсона) [42]. Из-за наличия резонансов в системе при  $N = 7$ , линейное приближение не является достаточным. Первоначальный нелинейный анализ, выполненный Л. Хазиным [59, 60], оказался ошибочным. Вопрос устойчивости в смысле Ляпунова (т. е. с учетом нелинейных членов) полностью решен лишь недавно в работе Л. Г. Куракина и В. И. Юдовича [40]. В ней же содержится более подробная библиография. При этом случай  $N = 7$ , вопрос об устойчивости которого более ста лет оставался открытым, оказался действительно устойчивым по Ляпунову. Более подробное обсуждение этих вопросов имеется в приложении 5.

Вычисление угловой скорости вращения томсоновских конфигураций относительно центра завихренности приведено, например, в [42]:

$$\omega = \frac{\sum \Gamma_i}{2\pi M} = \frac{(\sum \Gamma_i)(\sum a_i)}{2\pi D}, \quad M_i = M, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.34)$$

Она монотонно убывает при увеличении полного момента (3.11) системы вихрей.

**Коллинеарные конфигурации.** Другая смена типа движения происходит при касании линии пересечения уровней интегралов (3.29) с кривыми нулевой площади, определяемыми уравнением

$$\Delta(M_1, M_2, M_3) = 0 \quad (\sqrt{M_i} + \sqrt{M_j} = \sqrt{M_k}),$$

возникающими из неравенств треугольников и ограничивающими физически допустимую область значений.

Точкам касания отвечают *коллинеарные конфигурации* трех вихрей (см. на рис. 4 точки типа *F*). Три вихря при этом располагаются на одной прямой и вращаются как единое целое вокруг центра завихренности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Коллинеарные и треугольные конфигурации в динамике трех вихрей имеют аналоги в классической небесной механике [3]. Им соответствуют эйлеровы и лагранжевы частные решения проблемы трех тел.

Коллинеарные конфигурации находятся из условий

$$\Delta = 0, \quad \dot{\Delta} = 0. \quad (3.35)$$

Зафиксируем положение вихрей 1, 2 на прямой, определяющей вихревую конфигурацию, так что вихрь с номером 2 находится в начале отсчета, и выберем координату  $z$  на оси так, что расстояние  $\sqrt{M_3}$  от второго до первого вихря задает единицы измерения на прямой (см. рис. 6). В этом случае квадраты расстояний, очевидно, определяются соотношениями

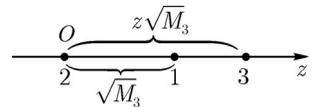


Рис. 6

$$M_1 = z^2 M_3, \quad M_2 = (1 - z)^2 M_3, \quad (3.36)$$

причем при  $z < 0$  вихрь 2 находится между вихрями 1, 3, при  $0 < z < 1$  вихрь 3 находится между 1, 2, а при  $z > 1$  вихрь 1 находится между 2 и 3.

Подставляя (3.36) во второе уравнение (3.35), получим полином третьей степени, корни которого определяют коллинеарные конфигурации

$$p(z) = (\Gamma_1 + \Gamma_2)z^3 - (2\Gamma_1 + \Gamma_2)z^2 - (2\Gamma_3 + \Gamma_2)z + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0. \quad (3.37)$$

Как следует из (3.36), для коллинеарных конфигураций имеется следующая зависимость между  $h$  и  $D$ , соответствующая бифуркационной кривой для коллинеарных решений:

$$h = (z^2)^{a_1} ((1-z)^2)^{a_2} \left( \frac{D}{a_1 z^2 + a_2 (1-z)^2 + a_3} \right)^{(\sum a_i)}, \quad (3.38)$$

где  $z$  — корень уравнения (3.37)

Зафиксируем  $\Gamma_3 = 1$ , тогда плоскость возможных значений  $\Gamma_1, \Gamma_2$  разбивается на области, в которых возможно различное количество решений уравнения (3.37) (т. е. число коллинеарных конфигураций). Изменение количества корней происходит на кривых, где функция  $p(z)$  (3.37) обращается в нуль вместе со своей первой производной  $\frac{dp}{dz}(z)$ . Эти кривые изображены на рис. 7, к ним необходимо добавить также две прямые  $\Gamma_1 = -1$  и  $\Gamma_2 = -1$ , на которых полином  $p(z)$  имеет корень  $z = 1$  либо  $z = 0$  соответственно, так как при этом происходит смена взаимного расположения корней. Вне кривых диаграммы (рис. 7) уравнение (3.37) имеет один или три корня; кривые на рисунке 7 соответствуют случаям, когда существуют 2 коллинеарных конфигурации или их нет совсем.

Тем самым получаем полную классификацию возможных коллинеарных конфигураций в задаче трех вихрей на плоскости (см. подробно рис. 7 и пояснение к нему).

Вообще говоря, справедливо следующее несложное утверждение, подтверждаемое геометрической интерпретацией на рисунке 4: *если томсоновское решение устойчиво, то соответствующий набор коллинеарных решений неустойчив, и наоборот*. Однако мы не обладаем его строгим аналитическим доказательством.

Поэтому условие  $A > 0$  определяет тип устойчивости не только томсоновских, но и коллинеарных конфигураций при заданном значении  $D$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Считается, что наиболее полный анализ устойчивости в задаче трех вихрей содержится в работе [194]. В ней выделено двенадцать специальных случаев, каждый из которых отдельно исследуется. Результаты этой работы не очень наглядны, что и отражает реальную сложность описания различных типов устойчивости в задаче трех вихрей.

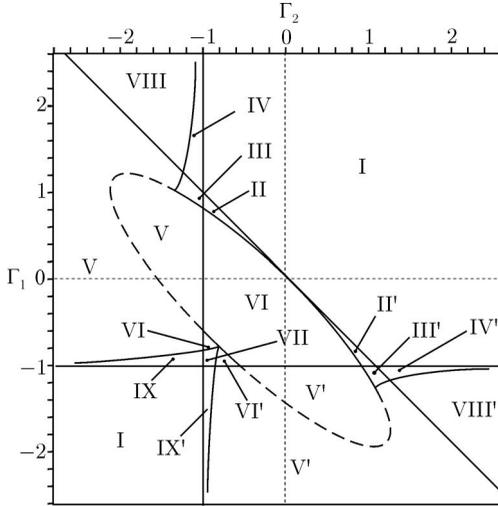


Рис. 7. Разбиение плоскости возможных значений  $\Gamma_1, \Gamma_2$  при фиксированном  $\Gamma_3 = 1$  на области, соответствующие различным коллинеарным конфигурациям. Тип коллинеарной конфигурации указан римской цифрой, полный список типов с количеством корней и их расположением следующий:

- I — 3 корня  $z_1 < 0, 0 < z_2 < 1, z_3 > 1$ ; II — 3 корня  $0 < z_1 < 1, z_2, z_3 > 1$ ;
- III — 3 корня  $z_1, z_2, z_3 > 1$ ; IV — 3 корня  $z_1 < 0, z_2, z_3 > 1$ ;
- V — 1 корень  $z_1 > 1$ ; VI — 1 корень  $0 < z_1 < 1$ ;
- VII — 3 корня  $0 < z_1, z_2, z_3 < 1$ ; VIII — 1 корень  $z_1 < 0$ ;
- IX — 3 корня  $0 < z_1, z_2 < 1, z_3 > 1$ .

Области со штрихами соответствуют аналогичным областям без штриха, при этом нужно сменить  $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$  с соответствующей перестановкой корней.

Угловая скорость вращения коллинеарной конфигурации относительно центра завихренности задается соотношением [42]

$$2\pi\omega = \frac{\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_1}{\Gamma_1\rho_1^2 + \Gamma_2\rho_2^2 + \Gamma_3\rho_3^2} = \left(\sum \Gamma_i\right) \left(\sum a_i\right) \frac{1}{D}, \quad (3.39)$$

где  $\rho_i$  — расстояние от соответствующего вихря до центра завихренности, которые выражаются через корни уравнения (3.37) по формулам

$$\rho_1 = \sqrt{M_3} \frac{-\Gamma_2 + \Gamma_3(1-z)}{\sum \Gamma_i}, \quad \rho_2 = \sqrt{M_3} \frac{\Gamma_1 + \Gamma_3 z}{\sum \Gamma_i},$$

$$\rho_3 = \sqrt{M_3} \frac{\Gamma_1(z-1) - \Gamma_2 z}{\sum \Gamma_i}.$$

Если  $\sum \Gamma_i = 0$ , то положение коллинеарных конфигураций и их угловая скорость задаются соотношениями [42]

$$\rho_1 = a \frac{\Gamma_2^2 - \Gamma_3^2}{\Gamma_2 \Gamma_3}, \quad \rho_2 = a \frac{\Gamma_3^2 - \Gamma_1^2}{\Gamma_1 \Gamma_3}, \quad \rho_3 = a \frac{\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2}{\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad a = \text{const},$$

$$2\pi\omega = \frac{1}{a^2} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}{\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1}.$$

**Статические коллинеарные конфигурации.** Как следует из формулы (3.39) при условии нулевого полного вихревого момента  $L = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j = 0$ , коллинеарные конфигурации, определяемые уравнением (3.37), неподвижны в абсолютном пространстве и образует так называемые *статические конфигурации*.

Любопытно, что аналогичные статические конфигурации существуют для вихрей на сфере (см. § 8), причем они даже более многообразны.

**Бифуркационный анализ.** Траектории системы (3.8), соответствующие относительным движениям трех вихрей, параметризуются значениями интегралов  $h, D$  (3.29). Те значения интегралов, при которых происходит перестройка типа траекторий, называются бифуркационными, они группируются в бифуркационные кривые, которые, как было сказано выше, соответствуют относительным равновесиям системы. Согласно (3.32) и (3.38), бифуркационные кривые имеют одинаковую степенную зависимость  $h(D)$  вида

$$h(D) = f(a_1, a_2, a_3) |D|^{(\sum a_i)}, \quad (3.40)$$

где  $f(a_1, a_2, a_3)$  — функция только от интенсивностей, зависящая от конкретной стационарной конфигурации. В зависимости от значений интенсивностей вихрей количество бифуркационных кривых и их расположение будет различно.

В частности, в случае, когда все интенсивности положительны и не равны друг другу  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 \neq \Gamma_3 \neq \Gamma_1$ , на плоскости  $h, D$  будут существовать три ветви, соответствующие коллинеарным движениям, и одна ветвь, соответствующая томсоновской конфигурации, которая ограничивает область возможных значений  $h$  и  $D$  сверху (рис. 8а).

При совпадении пары интенсивностей, например,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 \neq \Gamma_3$  соответствующие две бифуркационные кривые сливаются. И, наконец, в случае равных интенсивностей  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$  все три кривые, соответствующие коллинеарным конфигурациям, сливаются в одну.

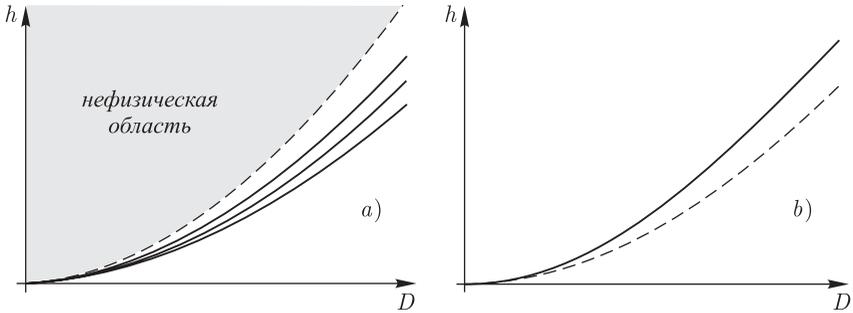


Рис. 8. Бифуркационные кривые на плоскости для случаев: а) трех различных положительных интенсивностей и б) одной отрицательной интенсивности. Штрихом показана томсоновская конфигурация, сплошной линией — коллинеарные конфигурации.

Рассмотрим другой случай движения трех вихрей, при котором также выполнено условие компактности ( $A > 0$ ), но интенсивность одного из вихрей имеет противоположный знак по сравнению с двумя другими (например,  $\Gamma_1 < 0$ , см. рис. 4b, 8b). Условие  $A > 0$  в этом случае означает, что  $-\Gamma_1 < \Gamma_2 + \Gamma_3$ , т.е. интенсивность выделенного вихря больше интенсивности двух оставшихся. Нетрудно видеть, что все остальные возможные случаи, при которых условие  $A > 0$  справедливо, сводятся к двум рассматриваемым.

Укажем только основные отличия этого случая от предыдущего. Прежде всего, из формулы (3.33) для томсоновских конфигураций следует, что они неустойчивы. Коллинеарная конфигурация, соответствующая точке  $F$  (рис. 4b) (их уже не три, а всего одна, см. на рис. 7 области V, V', VI), при этом, наоборот, является устойчивой (рис. 4b); тем не менее, несложно показать, что при  $A > 0$  область возможных значений  $h, D$  является весь положительный квадрант  $h > 0, D > 0$ . Бифуркационная кривая, соответствующая этой единственной коллинеарной конфигурации (см. рис. 8b), находится над кривой, соответствующей томсоновской конфигурации. Аналогично можно выполнить анализ в некомпактном случае.

**Абсолютное движение и адвекция.** Динамика вихрей в неподвижной системе координат при известном относительном движении получается дополнительной квадратурой (1.15), например:

$$4\pi\dot{\theta}_{ij} = \frac{2}{M_{ij}} \sum_{k=1}^n \Gamma_k + \sum_{k \neq i,j}^n \Gamma_k \left( \frac{1}{M_{ik}} + \frac{1}{M_{jk}} \right) - \frac{1}{M_{ij}} \sum_{k \neq i,j}^n \Gamma_k \left( \frac{M_{jk}}{M_{ik}} + \frac{M_{ik}}{M_{jk}} \right). \quad (3.41)$$

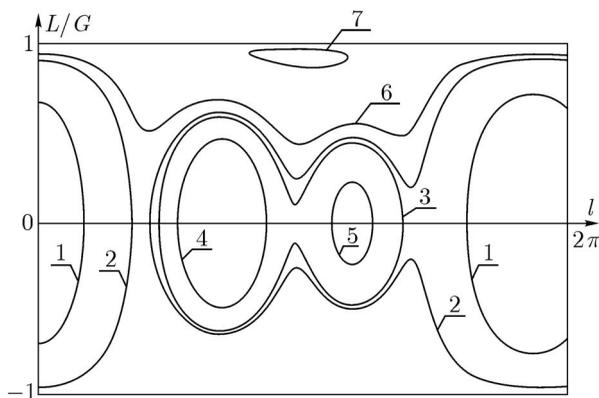


Рис. 9. Фазовый портрет относительного движения трех вихрей при  $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = 2$ ,  $\Gamma_3 = 3$ ,  $D = 1$ .

Положение всех вихрей на плоскости  $z_k(t) = x_k(t) + iy_k(t)$  получается с помощью алгебраических соотношений, использующих известный угол  $\theta_{12}(t)$ , квадраты взаимных расстояний  $M_i(t)$  и заданные постоянные интегралов  $P$ ,  $Q$  (1.4). Действительно, из (1.4) следует

$$z_k(t) = \left( \sum \Gamma_i \right)^{-1} \left( Q + iP + \sum_{j \neq k}^3 \Gamma_j \sqrt{M_{kj}} e^{i\theta_{kj}} \right), \quad (3.42)$$

где  $\theta_{13}$  и  $\theta_{23}$  могут быть найдены из теоремы косинусов:

$$\theta_{ij} + \theta_{ik} = \arccos \left( \frac{M_{jk} - M_{ij} - M_{ik}}{2\sqrt{2M_{ij}M_{ik}}} \right), \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (3.43)$$

Поскольку в правой части (3.41) стоит периодическая функция периода  $T_o$ , разложим ее в сходящийся ряд Фурье

$$4\pi\dot{\theta}_{12} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^{(n)} e^{i \frac{2\pi n}{T_o} t}. \quad (3.44)$$

Интегрируя (3.44) и учитывая (3.42), заключаем, что все углы  $\theta_{ij}$  имеют следующую зависимость от  $t$ :

$$\theta_{ij}(t) = \Omega t + g_{ij}(t), \quad (3.45)$$

где  $\Omega = a^{(0)}$ , а  $g_{ij}(t) = g_{ij}(t + T_o) - T_o$ -периодические функции времени.

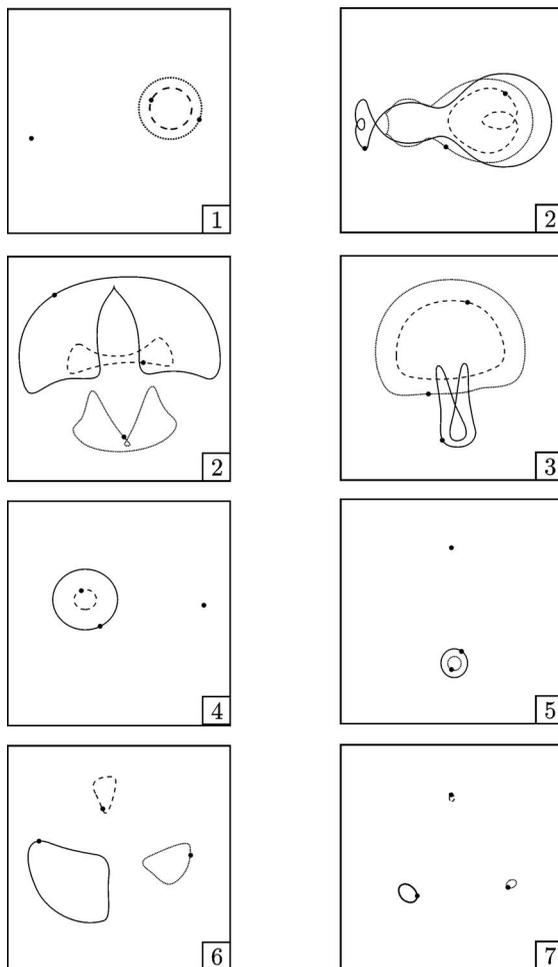


Рис. 10. Траектории абсолютного движения вихрей в специально подобранной вращающейся системе координат. Номер рисунка соответствует номеру траектории на фазовом портрете относительного движения (рис. 9).

Подставляя эту зависимость в (3.42), находим, что положение вихрей на плоскости задается следующим образом:

$$z_k(t) = \frac{Q + iP}{\sum \Gamma_i} + u_k(t)e^{i\Omega t}, \quad u_k(t) = u_k(t + T_o) \in \mathbb{C}. \quad (3.46)$$

Отсюда следует, что

*в системе координат, вращающейся вокруг центра завихренности с угловой скоростью  $\Omega$ , все вихри описывают аналитические замкнутые кривые, задаваемые функциями  $u_k(t) \in \mathbb{C}$ .*

Этот результат аналогичен известному результату для волчка Лагранжа, согласно которому в специально подобранной вращающейся системе координат ось симметрии волчка описывает замкнутые кривые. Впоследствии аналогичный результат для точки контакта диска на льду и твердого тела на шероховатой плоскости был указан в работах [34, 44]. В этих задачах такой эффект обусловлен существованием двух различных циклических переменных, что является достаточно редким случаем. Так, например, для (интегрируемого) волчка Ковалевской после исключения средней прецессии апексы будут замечать некоторые области на сфере — проекции двумерных торов.

В задаче трех вихрей замкнутость всех траекторий во вращающейся системе координат обусловлена некоммутативностью набора интегралов (1.4), и, как следствие, тем, что, хотя редукция к относительному движению исключает две степени свободы, абсолютное движение восстанавливается единственной независимой квадратурой (3.41).

Таким образом, абсолютное движение вихрей представляет собой «суперпозицию» двух простых движений: периодическое движение по замкнутым кривым во вращающейся системе координат (см. рис. 10) и вращение вокруг центра завихренности. Угловая скорость (3.45) является функцией интегралов  $H, I$  и не зависит от  $Q, P$ :  $\Omega = \Omega(H, I)$ . (Если центр завихренности лежит на бесконечности, т. е.  $\sum \Gamma_i = 0$ , то вместо вращения вокруг центра завихренности необходимо рассматривать поступательное движение вдоль некоторой прямой.)

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Возможная численная реализация поиска  $\Omega$  состоит в использовании фурье-анализа для функций  $x_i(t)$  и  $y_i(t)$ . Одна из основных частот спектра в точности совпадает с  $\Omega$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Анализ явных квадратур для абсолютного движения в случае  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\Gamma_3$  приведен в работе [35] при исследовании рассеяния вихрей.

Как следует из приведенного выше описания абсолютного движения, задача адвекции для системы трех вихрей в некоторой вращающейся системе координат приводит к одностепенной гамильтоновой системе (1.17), (1.18) с периодическим по времени возмущением. В литературе рассматривались некоторые частные постановки этой задачи, в частности, для доказательства неинтегрируемости ограниченной задачи четырех вихрей на плоскости [27]; анализ сечения Пуанкаре за период в случае равных интенсивностей содержится в работах [10, 11].

Некоторые аспекты динамики систем с квазипериодическим возмущением (уравнение Хилла с квазипериодическим возмущением) приведены в [52].

#### 4. Геометрическая интерпретация и качественный анализ динамики трех вихрей на сфере

Задача о движении трех вихрей на сфере рассматривалась в работе В. А. Богомолова [9], который хотя и указал явное решение задачи для случая равных интенсивностей, но не сделал заключения об ее интегрируемости при произвольных интенсивностях. Интегрируемость задачи трех вихрей на сфере была одновременно и независимо (1998 г.) отмечена А. В. Борисовым, В. Г. Лебедевым в [90], а также П. Ньютоном и Р. Кидамби в [122, 121], которые также предложили свои методы для классификации движений. В этой книге мы в существенно модифицированной форме излагаем результаты [90].

**Приведение к одной степени свободы.** Как было показано выше, переменные  $M_1, M_2, M_3, \Delta$  описывают редуцированную (по действию группы движений плоскости  $E(2)$ ) систему. Исследуем подробно, чему диффеоморфно (симплектоморфно) фазовое пространство приведенной системы или, что то же самое, симплектический лист алгебры скобок (3.4). Он является пересечением двух поверхностей в четырехмерном пространстве  $(M_1, M_2, M_3, \Delta)$ :

$$(2\Delta)^2 - 2 \sum_{i < j}^3 M_i M_j + \sum_{i=1}^3 M_i^2 + \frac{M_1 M_2 M_3}{R^2} = 0, \quad (3.47)$$

$$D = \sum_{i=1}^3 a_i M_i = \text{const.}$$

Рассмотрим проекцию этой поверхности в трехмерное пространство переменных  $M_1, M_2, M_3$ . Согласно (3.47), она располагается на плоскости  $D =$

$= \text{const}$  и определяется неравенством

$$2 \sum_{i < j}^3 M_i M_j - \sum_{i=1}^3 M_i^2 - \frac{M_1 M_2 M_3}{R^2} \geq 0. \quad (3.48)$$

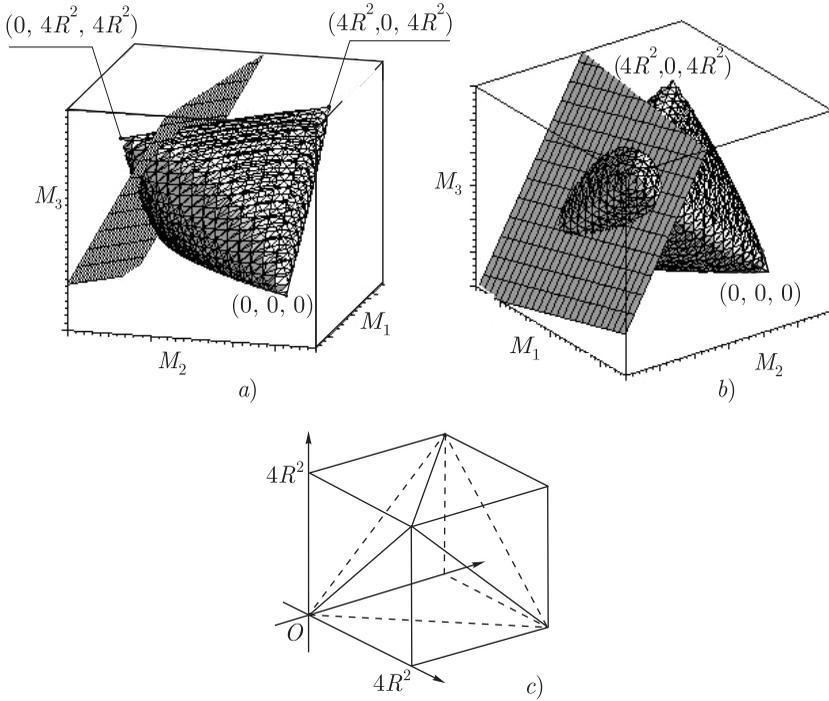


Рис. 11. *a), b)* — пересечение поверхностей  $D = \text{const}$  и  $\Delta^2 = 0$  в пространстве  $M_1, M_2, M_3$  с различных точек зрения, *c)* — схематическое изображение ребер криволинейного тетраэдра по отношению к кубу со стороной  $4R^2$ .

Построим в трехмерном пространстве  $(M_1, M_2, M_3)$  границу области (3.48), соответствующую условию  $\Delta = 0$ ; она представляет собой криволинейный (всюду выпуклый) правильный тетраэдр (см. рис. 11). Таким образом, согласно рис. 11 проекция двумерной поверхности (3.47) (фазового пространства приведенной системы) на двумерную плоскость  $D = \text{const}$

представляет собой область, ограниченную гладкой выпуклой кривой, за исключением случаев, когда

$$D = 4R^2(a_i + a_j), \quad i \neq j \quad \text{и} \quad D = 0. \quad (3.49)$$

При этом плоскость проходит через вершины тетраэдра, и кривая пересечения теряет гладкость.

Выберем на плоскости  $D = \text{const}$  координаты  $x, y$ , которые выражаются через  $M_i$  по формулам

$$\begin{aligned} x &= A_2(a_2m_1 - a_1m_2), \quad y = A_2A_3(a_1a_3m_1 + a_2a_3m_2 - A_2^2m_3), \\ m_i &= M_i - 2R^2, \quad A_2 = (a_1^2 + a_2^2)^{-1/2}, \quad A_3 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Рассмотрим теперь вложение поверхности (3.47) в трехмерное пространство  $x, y, \Delta$ , которое определяется соотношением

$$\begin{aligned} 2(\Delta)^2 &= A_2A_3(-a_1a_2x^2y + (a_1^2 - a_2^2)a_3A_3xy^2 + a_1a_2a_3^2A_3^2y^3) - \\ &- R^2(x^2 + y^2) + zA_2^2A_3(a_1a_2a_3x^2 - (a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)A_3xy + \\ &+ (2a_1^2 + 2a_2^2 - a_3^2)a_1a_2a_3A_3^2y^2) + z^2A_2A_3^2(a_3(a_1^2 - a_2^2)x - \\ &- (a_1^2 + a_2^2 - 2a_3^2)a_1a_2y) - a_1a_2a_3A_3^3z^3, \\ z &= A_3(D - 2(\Sigma a_i)R^2) = \text{const}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Воспользуемся следующим простым утверждением.

**Лемма 3.1.** Пусть  $f(x, y)$  — аналитическая функция, такая, что уравнение  $f(x, y) = 0$  определяет гладкую ограниченную замкнутую кривую на плоскости без самопересечений, при этом внутри нее  $f(x, y) > 0$ , тогда поверхность  $z^2 = f(x, y)$  в трехмерном пространстве  $(x, y, z)$  диффеоморфна сфере.

Как следствие, получаем следующий результат.

**Предложение 3.2.** Приведенное фазовое пространство для задачи трех вихрей на сфере диффеоморфно, за исключением случаев (3.49), двумерной сфере. В случаях (3.49) имеет место лишь гомеоморфизм.

Построение канонических переменных приведенной системы (3.24)–(3.27), как можно заключить из (3.50), (3.51), достаточно проблематично, и для численных расчетов и качественного анализа явные выражения, как правило, не требуются. Для этого достаточно пользоваться произвольной параметризацией симплектического листа.

Как показано в работе [11], канонические переменные приведенной системы  $N$  вихрей на сфере могут быть получены с помощью редукции, аналогичной редукции Якоби в небесной механике.

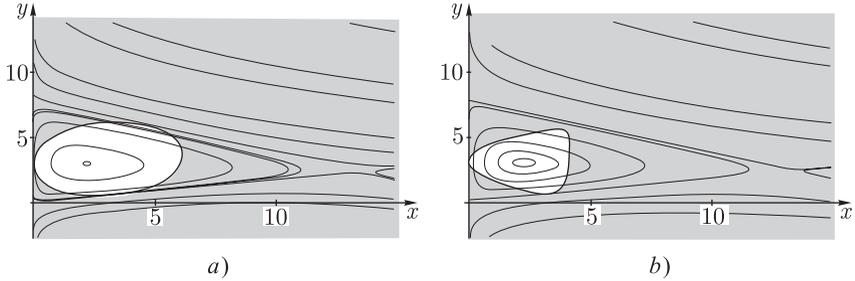


Рис. 12. Геометрическая картина изоморфизма задачи трех вихрей и задачи Лотки–Вольтерра. Часть фазовой плоскости задачи Лотки–Вольтерра, ограниченная контуром, соответствует физической области задачи трех вихрей: *a)* на плоскости; *b)* на сфере. Значения интенсивностей в обоих случаях одинаковы.

**Геометрическая интерпретация относительного движения.** Геометрическая интерпретация для плоскости, приведенная в предыдущем разделе (см. рис. 4), может быть перенесена также на сферу. При этом фазовые траектории в переменных  $M_1, M_2, M_3$  для случая сферы и плоскости, при заданных интенсивностях, совпадают с фазовыми траекториями системы Лотки–Вольтерра (3.10). Основные эффекты в динамике вихрей определяются тем, какая часть фазовых траекторий системы Лотки–Вольтерра попадает в область  $\Delta^2(M_1, M_2, M_3) \geq 0$ . Движение вихрей происходит только по этой части, поскольку при подходе траекторий к границе области (и достижении вихрями коллинеарного состояния) в уравнениях (3.10) необходимо изменить знак времени. Вид этой области (см. рис. 12) для случая сферы отличается от аналогичной области в случае плоскости, поскольку соотношение, связывающее  $\Delta$  и  $M_k$ , имеет теперь вид (3.47) и задает не круговой конус, а криволинейный тетраэдр (см. рис. 11). Его пересечение с плоскостью  $D = \text{const}$  и проекции на нее траекторий системы для некоторых случаев приведены на рисунке 12.

Как уже отмечалось выше, вид фазового портрета приведенной системы полностью определяется особенностями (сингулярностями) гамильтониана и (относительными) равновесиями системы (3.8). Приведем их последовательный анализ. Интегралы движения  $h$  и  $D$  в этом случае также задаются уравнениями (3.29).

**Томсоновские (неколлинеарные) конфигурации.** Условия для томсоновских конфигураций на сфере аналогичны условиям на плоскости:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M.$$

При этом вид зависимости интегралов  $h(D)$  для этих конфигураций также задается формулой (3.32).

Основное отличие сферы заключается в ее компактности, вследствие чего максимальная величина квадратов взаимных расстояний для томсоновских конфигураций ограничена значением  $M_{\max} = 3R^2$ . Это приводит также к тому, что от кривой (3.32) на сфере остается лишь ее часть, заключенная на интервале  $D \in [0, d_T]$  при  $\sum a_i > 0$  либо на интервале  $D \in [d_T, 0]$  при  $\sum a_i < 0$ , где  $d_T$  соответствует значению интеграла  $D$  для томсоновской конфигурации, расположенной на экваторе:

$$d_T = \left( \sum a_i \right) M_{\max} = 3 \left( \sum a_i \right) R^2. \quad (3.52)$$

В этом случае томсоновская конфигурация совпадает с одной из коллинеарных конфигураций, а ось вращения (при переменных интенсивностях) располагается в плоскости конфигурации (см. ниже).

Квадрат нетривиального собственного значения линеаризации системы (3.8) вблизи томсоновской конфигурации можно представить в виде

$$\lambda^2 = -C \frac{3 \sum a_i - D/R^2}{D^2} \frac{(\sum a_i)^2}{a_1 a_2 a_3}, \quad C > 0, \quad (3.53)$$

где  $C$  — положительная константа, не зависящая от  $D$  и интенсивностей. При  $R \rightarrow \infty$  это выражение переходит в аналогичное соотношение для плоскости (3.33). Как следует из (3.52), значение  $D$  для томсоновской конфигурации на сфере ограничено, и поэтому при фиксированных интенсивностях она всегда либо устойчива, либо неустойчива, вплоть до конфигурации, расположенной на экваторе.

Угловая скорость вращения томсоновской конфигурации вокруг вектора  $F$ , определяемого соотношениями (2.6), задается соотношением [161]

$$\omega = \frac{|F|}{2\pi RM} = \frac{\sum a_i}{2\pi R} \frac{\sqrt{R^2(\sum \Gamma_i)^2 - \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 (\sum a_i) D}}{D}.$$

**Коллинеарные конфигурации.** *Коллинеарной конфигурацией на сфере* называется конфигурация вихрей на большом круге сферы, вращающаяся

с постоянной угловой скоростью вокруг оси, расположенной в плоскости этого круга, так что расстояния между вихрями постоянны (см. рис. 13).

Очевидно, что условия для коллинеарных конфигураций на сфере аналогичны случаю плоскости

$$\Delta = 0, \quad \dot{\Delta} = 0, \quad (3.54)$$

где  $\Delta$  — объем, определяемый соотношением (2.12).

В отличие от плоского случая, уравнения (3.54) неоднородны и имеют вид (см. (3.7), (3.6))

$$\begin{aligned} 2(M_1M_2 + M_1M_3 + M_2M_3) - (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) - \frac{M_1M_2M_3}{R^2} = 0, \\ 2(\Gamma_3 + \Gamma_2)\frac{M_3 - M_2}{M_1} + (\Gamma_1 + \Gamma_3)\frac{M_1 - M_3}{M_2} + (\Gamma_2 + \Gamma_1)\frac{M_2 - M_1}{M_3} - \\ - \frac{1}{2R^2} \left( (\Gamma_3 - \Gamma_2)M_1 + (\Gamma_1 - \Gamma_3)M_2 + (\Gamma_2 - \Gamma_1)M_3 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Их необходимо дополнить интегралом момента (3.29)

$$D = a_1M_1 + a_2M_2 + a_3M_3 \quad (3.56)$$

так, чтобы получилась замкнутая система для определения коллинеарных конфигураций (т. е. величин  $M_1, M_2, M_3$ ) при фиксированном значении  $D$ .

Для коллинеарной конфигурации возможна естественная параметризация расстояний между вихрями через углы (см. рис. 13)

$$M_i = 2R^2(1 - \cos \alpha_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

В этом случае первое из уравнений (3.55) представляется в виде

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi. \quad (3.57)$$

Исключая из уравнений (3.56) и (3.57) пару углов  $\alpha_i$ , мы получим единственное уравнение, определяющее коллинеарную конфигурацию вихрей на сфере.

В отличие от плоского случая, кривые, определяющие зависимость  $h(D)$  для коллинеарных конфигураций, могут быть построены лишь численно. Они имеют достаточно сложную форму (см. далее рис. 14).

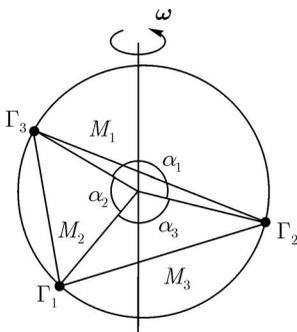


Рис. 13

Кроме того, вследствие компактности сферы, возможные значения момента  $D$  ограничены (см. рис. 11); так, если все  $\Gamma_i > 0$ , то  $0 < D < d_m$  (либо  $0 < D < d'_k$ ), а если один из  $\Gamma_i$  меньше нуля (положим  $\Gamma_k < 0$ ,  $\Gamma_i, \Gamma_j > 0$ ,  $i, j \neq k$ ), то  $0 > d_m < D < d'_k > 0$ , где

$$d_m = R^2 \frac{(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)^2}{a_1 a_2 a_3} = R^2 \frac{(\sum \Gamma_i)^2}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3},$$

$$d'_k = 4R^2(a_i + a_j) = 4R^2 \frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{\Gamma_i \Gamma_j}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i, j \neq k. \quad (3.58)$$

При (экстремальном) значении  $D = d_m$  коллинеарная конфигурация трех вихрей может быть найдена аналитически; в этом случае (см. также [161])

$$\cos \alpha_k = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_k^2 - \Gamma_i^2 - \Gamma_j^2}{\Gamma_i \Gamma_j}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad i, j \neq k,$$

$$h|_{D=d_m} = \left( \frac{R^2 \sum \Gamma_i}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} \right)^{\sum a_i} \prod_{k=1}^3 \left( \Gamma_k (\Gamma_i + \Gamma_j - \Gamma_k) \right)^{a_k}. \quad (3.59)$$

Значения момента  $D = d'_k$  совпадают со значениями (3.49), в которых теряет гладкость приведенное фазовое пространство. Они играют важную роль в бифуркационном анализе (см. ниже), им отвечают особенности фазового портрета, при которых пара из трех вихрей сливается  $M_k \rightarrow 0$ ,  $M_i = M_j \rightarrow 4R^2$  ( $i, j \neq k$ ), при этом  $h \rightarrow 0$  или  $h \rightarrow \infty$ . При изменении величины  $D$  (в компактном случае при увеличении  $D$ ) из этих решений рождаются совершенно новые коллинеарные конфигурации, отсутствующие в плоской задаче трех вихрей (см. далее рис. 14, 15).

Заключение об устойчивости коллинеарных конфигураций при конкретных интенсивностях можно сделать по виду траекторий в геометрической интерпретации (см. рис. 12, 15), на которых коллинеарные конфигурации соответствуют точкам касания траекторий с границей  $\Delta = 0$ , при этом  $M_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Несложно получить угловую скорость вращения коллинеарной конфигурации в неподвижной системе координат. Она определяется соотношением

$$\omega = \frac{a_i \sin \alpha_i - a_j \sin \alpha_j}{\sqrt{R^2 (\sum \Gamma_i)^2 - \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 D}} = \frac{1}{4\pi r^3} \left( a_i \operatorname{ctg} \frac{\alpha_i}{2} - a_j \operatorname{ctg} \frac{\alpha_j}{2} \right). \quad (3.60)$$

Отсюда, в частности, несложно получить уравнения для определения стационарных коллинеарных конфигураций в следующей симметричной форме:

$$\frac{a_1 \sin \alpha_1 - a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} - a_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2}} = \frac{a_2 \sin \alpha_2 - a_3 \sin \alpha_3}{a_2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_2}{2} - a_3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_3}{2}} = \frac{a_3 \sin \alpha_3 - a_1 \sin \alpha_1}{a_3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_3}{2} - a_1 \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2}},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi. \quad (3.61)$$

где  $\alpha_i$  — углы между вихрями на рисунке 13.

**Статические коллинеарные конфигурации.** Из формулы (3.60) следует, что при  $\omega = 0$  существуют конфигурации, неподвижные в абсолютном пространстве и определяемые соотношениями

$$\Gamma_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2} = \Gamma_2 \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} = \Gamma_3 \operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}.$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} = \frac{\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_1 \Gamma_3}}{\Gamma_i}. \quad (3.62)$$

Из уравнений абсолютного движения вихрей (2.3) следует, что для этих конфигураций интеграл «энергии»  $h = M_1^{a_1} M_2^{a_2} M_3^{a_3}$  достигает своего абсолютного максимума на сфере  $h = E_m$ :

$$E_m = (4R^2)^{\sum a_k} \prod_k \left( \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 a_3 / a_k^2} \right)^{a_k}.$$

В последнем случае соответствующее значение полного момента вычисляется по формуле

$$d_E = (4R^2)(a_1 + a_2 + a_3) \sum_k \frac{a_k}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 a_3 / a_k^2)}.$$

Вопрос об устойчивости статической конфигурации трех вихрей на сфере не может быть решен при помощи линейного приближения (как для относительного, так и абсолютного движения). Подробно устойчивость стационарных конфигураций трех вихрей на сфере проанализирована в работе [173]. Исследование статических конфигураций  $N$  вихрей равной интенсивности, расположенных на экваторе, содержится в [173] (см. также [38]).

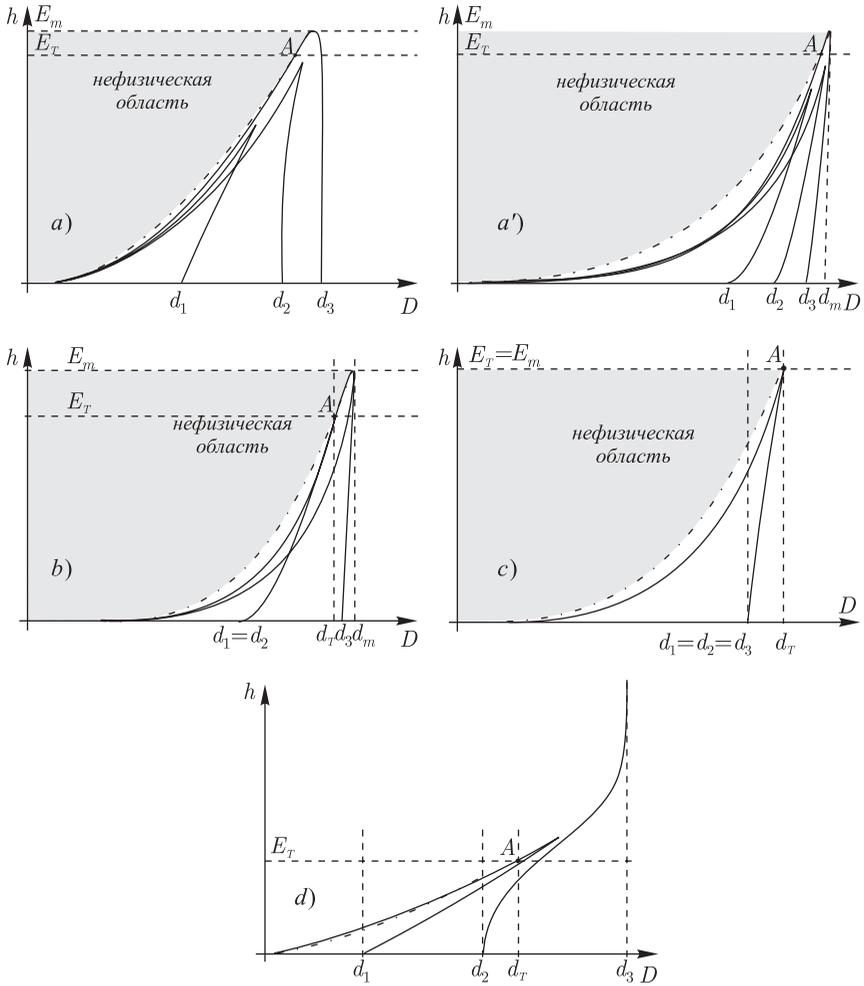


Рис. 14. Бифуркационные диаграммы для случаев: а), а') различных положительных интенсивностей; б) положительных интенсивностей (две совпадают); в) равных положительных интенсивностей; г) одной отрицательной интенсивности. Обозначения кривых совпадают с рис. 8. Серым цветом обозначена нефизическая область значений.

**Бифуркационный анализ.** Построим бифуркационные кривые, соответствующие томсоновским и коллинеарным стационарным решениям на плоскости интегралов  $h, D$  (3.29). Для томсоновских решений кривая определяется тем же выражением, что и для плоскости (3.32), а для коллинеарных система (3.55) может быть решена лишь численно. Результаты численного построения бифуркационных диаграмм для случаев различных соотношений интенсивностей представлены на рисунке 14. (Здесь мы, как и в задаче трех вихрей на плоскости, ограничиваемся случаем  $A > 0$ , для которого диаграммы имеют более простой вид.)

С помощью численных расчетов для каждого набора интенсивностей, при которых построены бифуркационные диаграммы, могут быть получены другие характеристики относительного и абсолютного движения: величина угловой скорости, угол наклона плоскости вихрей по отношению к оси вращения, квадрат собственного значения, определяющий устойчивость линеаризованной системы вблизи данной конфигурации (см. далее рис. 16, 17).

Замечательным эффектом движения вихрей на сфере, отсутствующим в плоском случае, является *рождение новых коллинеарных конфигураций* (в рассматриваемом случае устойчивых) из задачи двух вихрей при  $D = d'_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  (3.58). Так, при увеличении  $D$  происходит распад одного вихря суммарной интенсивности  $\Gamma_i + \Gamma_j$  на два с интенсивностями  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_j$ . Как показано на рисунке 15, при дальнейшем увеличении  $D$  эти конфигурации сливаются с коллинеарными конфигурациями, получающимися при продолжении по параметру из плоской задачи (т. е. системы при малых  $D/R^2$ ), и исчезают (рис. 14).

*Случай положительных интенсивностей.* Рассмотрим бифуркационную диаграмму для случая  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 \neq \Gamma_3 \neq \Gamma_1$  (см. рис. 14a, a'). Томсоновские конфигурации (штрихпунктирная кривая) существуют лишь при  $D \leq d_T$  (3.52). При  $D = d_T$ , достигнув максимально возможного значения  $E_T < E_m$ , томсоновская конфигурация сливается (рис. 14, точка A) с коллинеарной конфигурацией, определяемой наиболее верхней из веток (рис. 14a, a') бифуркационной диаграммы для плоскости. При этом все три вихря лежат в экваториальной плоскости, и расстояния между ними равны друг другу. При увеличении  $D$ , проходя через максимум энергии  $E_m$  при  $D = d_m$ , эта (коллинеарная) конфигурация в дальнейшем эволюционирует по мере увеличения  $D$  либо к задаче двух вихрей при  $D = d_3$  (рис. 14a), либо к коллинеарной конфигурации (3.59) при максимальном значении момента  $D = d_m$  (рис. 14a'). Две другие коллинеарные конфигурации, соответствующие двум верхним сплошным кривым на рис. 8a для плоскости, сливаются с коллинеарными конфигурациями (рис. 14a, a'), возникающими из задачи двух вихрей при значениях момента  $d'_1, d'_2$  (распад одного

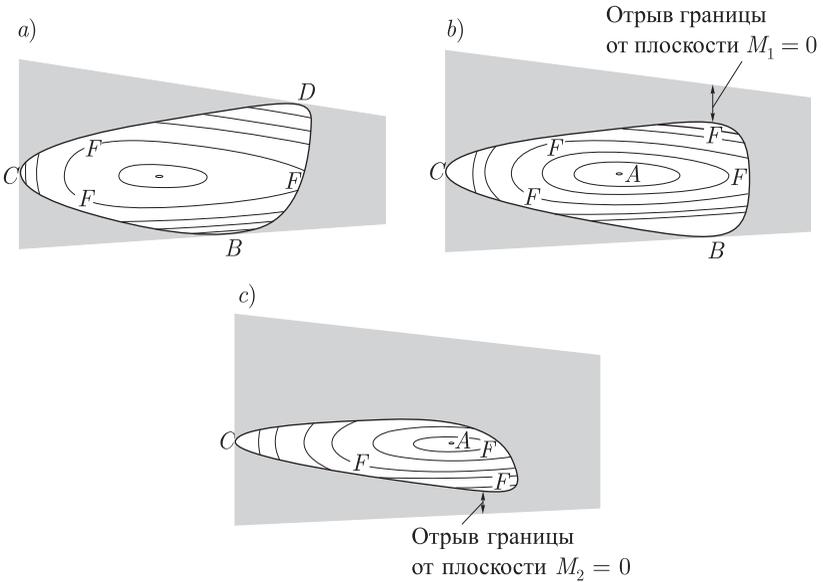


Рис. 15. Геометрическая картина рождения коллинеарных решений из задачи двух вихрей. Последовательные рисунки *a*), *b*), *c*) показывают изменение положений точек касания границы физически допустимой области при увеличении полного момента  $D$ . Обозначения особых точек соответствуют рис. 4.

вихря). Такие (коллинеарные) конфигурации отсутствуют в случае плоскости вследствие некомпактности. Их появление становится понятным из рисунка 15, на котором показан отрыв физической области (определяемой условием  $\Delta^2 > 0$ ) от границ  $M_k = 0$ .

В случае, когда выполнено соотношение  $\Gamma_1 = \Gamma_2 \neq \Gamma_3$ , в точке  $A$  происходит слияние не только томсоновской и коллинеарной веток, аналогичных случаю плоскости, но и коллинеарной конфигурации, возникающей при  $D = d_1 = d_2$  (см. рис. 14*b*).

Наконец, для трех равных интенсивностей все возможные конфигурации сливаются вместе в точке  $A$  при максимальном значении энергии  $E = E_m = E_T$  и момента  $D = d_T$  (рис. 14*c*), при этом получается статическая конфигурация (3.62).

В абсолютном движении угловая скорость вращения томсоновских конфигураций при увеличении момента (взаимных расстояний) монотонно уменьшается

Рис. 16. Зависимость углов наклона нормали к плоскости вихрей по отношению к оси вращения для томсоновских конфигураций в случае различных положительных интенсивностей.

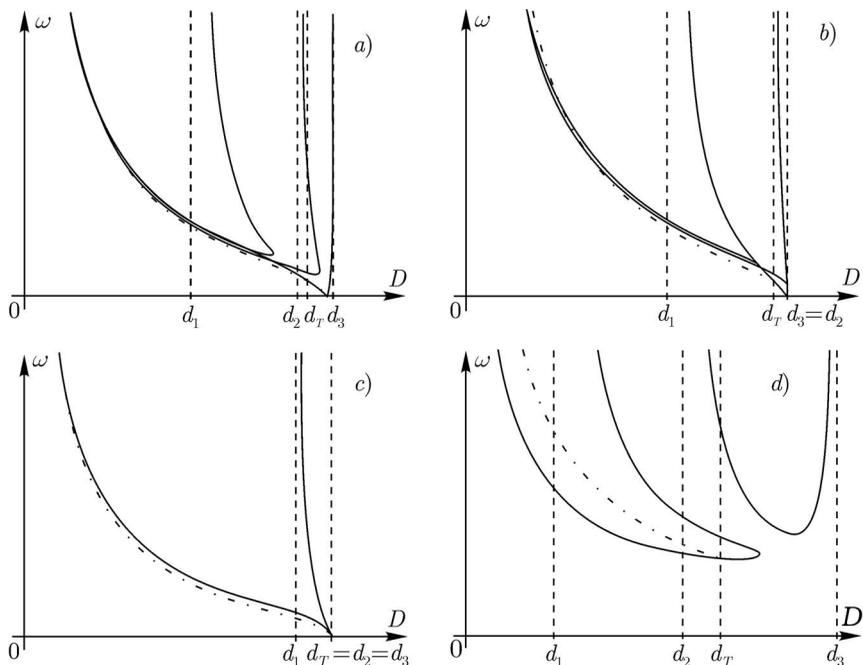
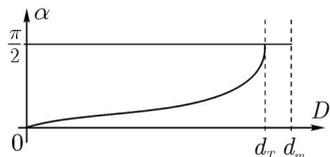


Рис. 17. Угловые скорости для случаев: *a*) различных положительных интенсивностей; *b*) положительных интенсивностей (две совпадают); *c*) равных положительных интенсивностей; *d*) одной отрицательной интенсивности.

(см. рис. 17), а угол наклона нормали треугольника к оси вращения монотонно возрастает от нуля (как для плоскости) до значения  $\pi/2$  (при  $D = d_T$ ) в момент слияния томсоновских и коллинеарных конфигураций (рис. 16) за исключением случая равных интенсивностей, когда наклон оси вообще не изменяется ( $\alpha = \pi/2$ ).

В отличие от томсоновских конфигураций, ось вращения для коллинеарных конфигураций всегда лежит в плоскости вихрей и не меняется ни при каких значениях момента.

Поведение угловой скорости вращения коллинеарных конфигураций в зависимости от момента  $D$  является достаточно сложным (рис. 17). К монотонному спадаанию графиков, характерному для плоского случая, добавляется их слияние, что приводит к достаточно сложным кривым. Стоит отметить бесконечную величину угловой скорости, возникающую в момент рождения нового вихря из задачи двух вихрей. В рамках принятой модели это увеличение угловой скорости ( $\omega \rightarrow \infty$  при  $D \rightarrow d_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ) относится к разным траекториям, но если присутствует «слабая» диссипация и константы энергии и момента медленно эволюционируют, то их возможно наблюдать и для конкретного движения (при этом в системе происходит также скачки давления). Конечно, дополнительным условием наблюдаемости таких эффектов в физической ситуации является устойчивость соответствующих стационарных движений.

Увеличение угловой скорости можно объяснить тем, что при рождении пары вихрей из одного возникает коллинеарная конфигурация, вращающаяся вокруг оси, проходящей через третий вихрь. Этот вихрь практически не оказывает никакого влияния на это вращение, а зависимость угловой скорости от расстояния для пары вихрей дается формулой (3.3).

Оказывается, что коллинеарные конфигурации, происходящие из аналогичных конфигураций на плоскости, также неустойчивы уже в линейном приближении. Однако коллинеарные конфигурации, появляющиеся из задачи двух вихрей, являются устойчивыми. Природа этой устойчивости хорошо видна из геометрической интерпретации, представленной на рисунке 15. Возможно, что явления такого сорта, происходящие в атмосфере Земли (заведомо обладающей диссипацией), ответственны за возникновение различных катастрофических процессов (типа ураганов), сопровождающих резкие перестройки динамики вихревых образований. Обратный процесс, приводящий к коллапсу (слиянию) двух вихрей, невозможный для модели идеальной жидкости, в случае небольшой диссипации и уменьшения  $D$  может приводить к образованию атмосферных вихрей с большой угловой скоростью вращения.

*Случай одной отрицательной интенсивности.* Бифуркационная диаграмма при  $\Gamma_1 < 0$ ,  $-\Gamma_1 > \Gamma_2 + \Gamma_3$  приведена на рисунке 14d. В этом случае поведение бифуркационных кривых при увеличении  $D$  аналогично поведению в уже рассмотренных ситуациях. Существующие в случае плоскости томсоновская и коллинеарная конфигурации сливаются в точке  $A$  (см. рис. 14d), а затем, по мере увеличения  $D$ , исчезают, слившись с одной из коллинеарных веток, родившихся из задачи двух вихрей. Отличие от случая только положительных интенсивностей заключается в том, что возможные значения интеграла  $h = M_1^{a_1} M_2^{a_2} M_3^{a_3}$  неограниченны сверху, и это проявляется в существовании коллинеарных решений, не ограниченных по энергии сверху. Эти решения появляются также благодаря стационарным конфигурациям задачи двух вихрей. По-видимому, справедливо следующее утверждение: все коллинеарные конфигурации в данном случае являются устойчивыми, в то время как томсоновская — неустойчива.

Отметим также, что изменение параметров абсолютного движения вихрей *качественно* ничем не отличается от случая положительных интенсивностей.

В заключительной части раздела явно выделим *основные отличия сферического случая от плоского, возникающие при изменении полного момента  $D$* :

- 1) *слияние томсоновских и коллинеарных конфигураций на сфере;*
- 2) *рождение устойчивых коллинеарных конфигураций из задачи двух вихрей, угловая скорость которых в момент появления стремится к бесконечности;*
- 3) *наклон и эволюция плоскости томсоновских конфигураций;*
- 4) *существование статических конфигураций на сфере.*

Как следствие этого, можно сделать вывод, что фазовые потоки задачи трех вихрей на сфере при различных значениях момента не изоморфны друг другу (ср. с теоремой 1.6).

В работе [90] и в книге [15] приведены также исследования в случае невыполнения условия компактности ( $A > 0$ ). К сожалению, в книге [161] они не отмечены, хотя в ней имеется ряд других интересных наблюдений, полученных автором [161] вместе с Кидамби.

**Геометрическая интерпретация для абсолютного движения.** Приведем одно любопытное наблюдение, касающееся движения трех вихрей на сфере, указанное в [161]. Проведем плоскость через три точки на сфере, в которых расположены вихри. Можно показать, что во время движения вихрей эта плоскость всегда проходит через конец вектора  $\mathbf{F}/(\sum \Gamma_i)$  (центр завихренности), определяемого интегралами (2.6). Таким образом, можно сделать некоторые качественные выводы о характере движения в зависимости от того, где находится центр завихренности по отношению к сфере.

## 5. Проблемы коллапса и рассеяния

Остановимся вкратце на проблемах коллапса (одновременного столкновения) и рассеяния трех вихрей на плоскости и сфере, имеющие интересные гидродинамические следствия [46, 141].

Проблема коллапса является одной из наиболее интересных проблем, связанных с вихрями, и представляет большой интерес для теоретической гидромеханики как одна из моделей, на которых может быть понят сценарий перехода к турбулентности, заключающийся в неединственности решений

гидродинамических уравнений Эйлера. Действительно, теоремы существования и единственности для этих уравнений доказаны в предположении достаточной гладкости первоначального поля скоростей. С математической точки зрения, процесс коллапса вихрей, представляющий собой слияние особых решений уравнения Эйлера типа  $\delta$ -функции, при обращении времени будет определять распад вихрей с соответствующей потерей единственности. Поэтому большой интерес представляет изучение этой проблемы с точки зрения регуляризации столкновений аналогично тому, как это делается в классической небесной механике [3]. Для физики атмосферы явление коллапса может рассматриваться как модель формирования крупных атмосферных вихрей.

**Коллапс.** Рассмотрим условия возникновения одновременного коллапса трех вихрей на плоскости и сфере. Известно, что коллапс невозможен для взятой отдельно любой из пар вихрей, поскольку при сближении такой пары влияние третьего (удаленного) вихря пренебрежимо мало, а два вихря на плоскости (сфере) движутся относительно друг друга так, что расстояние между ними сохраняется (3.2).

В связи с тем, что при коллапсе все  $M_k \rightarrow 0$ , *необходимым условием коллапса является выполнение соотношения  $D = 0$ .*

На плоскости при  $D = 0$ , согласно (3.16), (3.17), (3.19), (3.23), симплектический лист, соответствующий фазовому пространству редуцированной системы при  $A > 0$  (условие компактности), вырождается в точку, при  $A < 0$  — в конус, а при  $A = 0$  — в прямую. Для геометрической интерпретации (см. п. 3, 4) области возможного движения являются, соответственно, точкой, углом на плоскости и прямой. Аналогичные утверждения справедливы и для одновременного коллапса  $N$  вихрей, случаи  $N = 4, 5$  изучаются в [46]. Таким образом, движение вихрей возможно лишь при условии  $A \leq 0$ . Причем в случае  $A = 0$  вихри движутся вдоль одной прямой.

Необходимые условия коллапса вихрей на сфере, очевидно, будут совпадать с условиями для плоскости, так как на малых расстояниях влияние кривизны на динамику вихрей несущественно.

Исследуем сначала возможность *однородного коллапса* для трех вихрей. При однородном коллапсе все расстояния между вихрями одинаковым образом зависят от времени, так что их отношения сохраняются [46]. Используя изоморфизм с задачей Лотки–Вольтерра (3.10), рассмотрим однородную систему уравнений вида

$$\frac{dM_i}{d\tau} = \Gamma_i M_i (M_j - M_k), \quad (3.63)$$

где  $i, j, k$  — циклическая перестановка чисел 1, 2, 3. Однородные асимптотические решения системы (3.63) будем искать в виде

$$M_k = \frac{C_k}{\tau}. \quad (3.64)$$

Отметим, что такие решения используются в методе Ковалевской, где  $\tau$  считается принадлежащим комплексной плоскости.

*Нетривиальные решения вида (3.64) возможны только при условии  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$  (достаточное условие однородного коллапса).*

Если это условие выполняется, то решение может быть записано в виде

$$M_1 = \frac{C}{\tau}, \quad M_2 = \frac{C + a_3}{\tau}, \quad M_3 = \frac{C - a_2}{\tau}, \quad (3.65)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Решение (3.65), имеющее один существенный свободный параметр, содержит только коллапсирующие и разбегающиеся (для случая плоскости) траектории. Существует также особое решение  $M_1 = M_2 = M_3 = \text{const}$ , описывающее томсоновские конфигурации.

Пользуясь соотношением

$$dt = \frac{2\pi M_1 M_2 M_3}{\Delta} d\tau, \quad (3.66)$$

можно получить асимптотику решения (3.65) в реальном времени

- 1) для плоскости:  $t = \frac{D}{\tau}$ ,  $M_i = C_i^* t$ ;
- 2) для сферы:

$$t = AR^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{B}{\tau R^2}} \right),$$

$$M_i = D_i R^2 \left( 1 - \left( 1 - \frac{t}{AR^2} \right)^2 \right),$$

где  $A, B, C_i^*, D, D_i = \text{const}$ . Для сферы абсолютное движение вихрей при условиях  $D = 0$  и  $\sum a_i = 0$  заключается в разбегании вихрей из одной точки (полюса) до момента достижения экватора и дальнейшем сближении в другой точке (противоположном полюсе). Как показано, например,

в [46], неоднородный, т. е. отличный от (3.64), коллапс в системе трех вихрей невозможен.

Исследование коллапса трех и четырех вихрей с точки зрения особенностей на комплексной плоскости времени (аналогичные исследования имеются в небесной механике) содержится в работе [125] (см. также работу [46]).

**Рассеяние.** В системе трех вихрей на плоскости *рассеивающимися* назовем траектории, для которых по крайней мере одно из взаимных расстояний  $(M_1, M_2, M_3)$  бесконечно увеличивается (см. [35]).

В отличие от коллапса, рассеяние может происходить при  $D \neq 0$ . Рассмотрим сначала случай  $D = 0$ , для которого все траектории в пространстве  $M_1, M_2, M_3$  классифицируются просто. Введем величину

$$A = \sum_{i < j} a_i a_j < 0, \quad a_i = \Gamma_i^{-1}.$$

**Предложение 3.3.** *Рассеяние в системе трех вихрей при  $D = 0$  возможно тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\text{либо} \quad A < 0, \quad \Gamma_i = -\Gamma_j, \quad |\Gamma_i| \neq \Gamma_k, \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (3.67)$$

$$\text{либо} \quad A < 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad (3.68)$$

$$\text{либо} \quad A = 0. \quad (3.69)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно (3.16), при  $A > 0$  симплектический лист, соответствующий относительному движению, компактен, поэтому все расстояния ограничены и рассеяние невозможно.

Без ограничения общности положим

$$\Gamma_3 = -1, \quad \Gamma_1, \Gamma_2 > 0$$

и выразим  $M_3$  из уравнения  $D = 0$ :

$$M_3 = a_1 M_1 + a_2 M_2. \quad (3.70)$$

Рассмотрим проекцию траектории на плоскость  $M_1, M_2$  (см. геометрическую интерпретацию выше). Физически допустимая область в квадранте  $M_1, M_2 > 0$  ограничена неравенством треугольника

$$\begin{aligned} (2\Delta)^2 = 2(M_1 M_2 + (M_1 + M_2)(a_1 M_1 + a_2 M_2)) - \\ - (M_1^2 + M_2^2 + (a_1 M_1^2 + a_2 M_2^2)) \geq 0, \end{aligned}$$

которое определяет внутренность угла, ограниченного двумя прямыми

$$M_2 = \left( \frac{1 \pm \sqrt{-A}}{1 - a_2} \right)^2 M_1, \quad -A = a_1 + a_2 - a_1 a_2. \quad (3.71)$$

При  $a_1 = 1$  одна прямая совпадает с осью  $OM_1$ , при  $a_2 = 1$  другая прямая совпадает с осью  $OM_2$  (см. рис. 18), а при  $a_1 = a_2 = 1$  обе прямые совпадают с осями так, что разрешено движение во всем квадранте  $M_1, M_2 > 0$  (см. рис. 19).

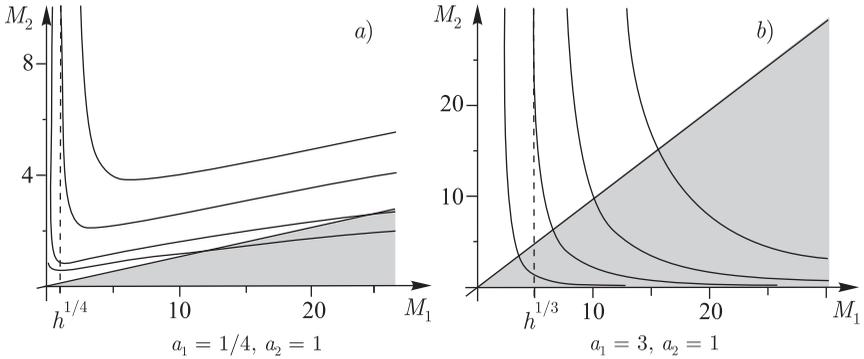


Рис. 18. Траектории на плоскости  $M_1, M_2$  при условии  $a_2 = 1$  ( $a_1 < 1$  — рисунок *a*,  $a_1 > 1$  — рисунок *b*). Хорошо заметны изменения взаимного расстояния  $M_1$  от  $h^{1/a_1}$  до значения определяемого пересечением траектории с границей области.

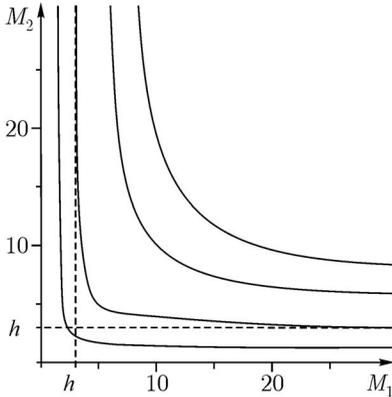


Рис. 19. Траектории на плоскости  $(M_1, M_2)$  при  $a_1 = a_2 = 1$ . Хорошо видно, что происходит обмен вихрями в паре при переходе от  $t \rightarrow -\infty$  ( $M_2 \rightarrow h^{-1}$ ) к  $t \rightarrow +\infty$  ( $M_1 \rightarrow h^{-1}$ ).

Траектория системы на плоскости  $M_1, M_2$  задается линией уровня интеграла энергии (3.29)

$$h = M_1^{a_1} M_2^{a_2} (a_1 M_1 + a_2 M_2)^{-1} = \text{const.} \quad (3.72)$$

Анализируя асимптотическое поведение этой кривой при  $M_1, M_2 \rightarrow 0, \infty$ , можно выделить 9 различных типов значений параметров  $a_1, a_2$ :

- 1)  $a_1 + a_2 < 1$ , 2)  $a_1 + a_2 > 1, a_1 < 1, a_2 < 1$ , 3)  $a_1 < 1, a_2 > 1$ ,  
 4)  $a_1 > 1, a_2 < 1$ , 5)  $a_1 > 1, a_2 > 1, A < 0$ , 6)  $a_1 + a_2 = 1$ ,  
 7)  $a_1 = 1, a_2 \neq 1$ , 8)  $a_1 \neq 1, a_2 = 1$ , 9)  $a_1 = a_2 = 1$ .

Доказательство теперь сводится к анализу расположения траекторий системы (3.72) по отношению к границам (3.71) в этих случаях. Несложно показать, что:

- в случае 1 все кривые компактны и в начале координат касаются осей;
- в случаях 2–5 все кривые некомпактны, но пересекают границы физической области (3.71) так, что все движения ограничены;
- в случае 6 все траектории — прямые, выходящие из начала координат;
- в случае 7 справедливо равенство  $M_1 = \frac{a_2 M_2}{h^{-1} M_2^{a_2} - 1}$ , траектории пересекают одну границу  $M_2 = \frac{(a_2 - 1)^2}{4} M_1$  (другая граница совпадает с осью  $OM_2$ ), при  $M_1 \rightarrow \infty$  траектория асимптотически приближается к прямой  $M_2 = h^{1/a_2}$ ;
- в случае 8 справедливо равенство  $M_2 = \frac{a_1 M_1}{h^{-1} M_2^{a_1} - 1}$ , траектории также пересекают одну границу  $M_2 = \frac{(1 - a_2)^2}{4} M_1$  (другая граница совпадает с осью  $OM_1$ ) и при  $M_2 \rightarrow \infty$  асимптотически приближаются к прямой  $M_1 = h^{1/a_1}$  (см. рис. 18);
- в случае 9  $M_1^{-1} + M_2^{-1} = h^{-1} = \text{const}$ , область ограничена осями  $OM_1$  и  $OM_2$ , а траектории — гиперболы, асимптотически приближаются к прямым  $M_1 = h$  при  $M_2 \rightarrow \infty$  и  $M_2 = h$  при  $M_1 \rightarrow \infty$  (см. рис. 19).

Таким образом, при  $A < 0$  рассеяние возможно лишь в случаях 6–9, что соответствует первым двум условиям (случай  $b$  соответствует так называемому однородному рассеянию).

При  $A = 0$  область возможных движений вырождается в прямую  $M_2 = \frac{M_1}{(1 - a_2)^2}$  так, что происходит рассеяние или коллапс в зависимости от начального расположения вихрей. Тем самым предложение доказано полностью. ■

Как было показано при доказательстве при  $D = 0$ , рассеяние происходит при наличии в системе вихревой пары (за исключением случая  $\sum a_i = 0$ ). В неподвижной системе координат движение выглядит следующим образом: вихревая пара приближается из бесконечности к неподвижному вихрю, рассеивается на нем и снова удаляется на бесконечность, при этом первоначально покоившийся вихрь описывает замкнутую кривую; траектории вихрей могут быть весьма запутанными (см. рис. 20).

Традиционно такое рассеяние, при котором вихри в рассеивающейся вихревой паре не замещаются, называется *прямым*. Условно его обозначают как  $(12) + 3 \rightarrow (12) + 3$ . В случае, когда все интенсивности по модулю одинаковы, происходит *обменное рассеяние*, при котором вихри в паре замещаются  $(12) + 3 \rightarrow (13) + 2$  (см. рис. 20).

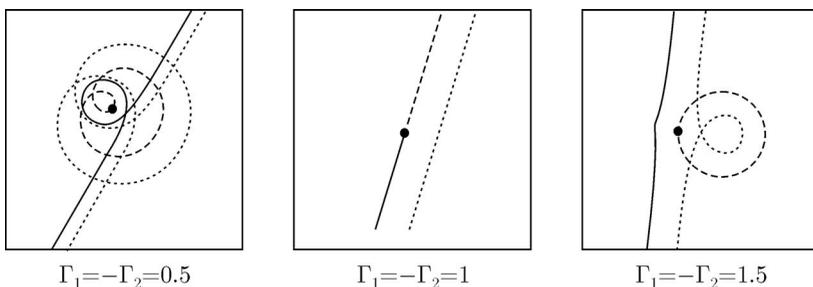


Рис. 20. Рассеяние вихревой пары на одиночном вихре  $\Gamma_3 = 1$  при  $D = 0$ . Центральный рисунок соответствует обемному рассеянию.

**Предложение 3.4.** *Необходимые и достаточные условия рассеяния при  $D \neq 0$  и  $A \neq 0$  также совпадают с (3.67) и (3.68).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

При  $D \neq 0$  функция Герона записывается в виде (вновь полагаем  $\Gamma_3 = -1, \Gamma_1, \Gamma_2 = 0$ )

$$4\Delta^2 = 4M_1M_2 - (M_1(1 - a_1) + M_2(1 - a_2) + D)^2. \quad (3.73)$$

Доказательство предыдущего утверждения при  $A \neq 0$  опиралось лишь на асимптотические свойства траекторий, когда хотя бы одно из  $M_i \rightarrow \infty$ ,

а кроме того, согласно (3.73), граница области  $4\Delta^2 = 0$  при этом также асимптотически определяется формулой (3.71), следовательно, условия (3.67) и (3.68) остаются необходимыми и достаточными условиями рассеяния. ■

Как следует из доказательства предложения 3.3, в случае  $D = 0$  либо все траектории системы при фиксированных значениях интенсивностей компактны, либо все траектории рассеиваются. При  $D \neq 0$  это уже несправедливо: компактные траектории в фазовом пространстве сосуществуют наряду с рассеивающимися.

Анализ рассеяния при произвольном  $D$  в случае  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\Gamma_3$  при помощи явных квадратур выполнен в работе [35]. При этом возможны следующие ситуации в зависимости от значений интегралов (3.72) и  $D$  (полагаем  $\Gamma_1 = 1$ ):

- 1)  $\frac{D}{h} < -1$  — вихревая пара приближается из бесконечности (вдоль некоторой прямой) к одиночному вихрю и, рассеявшись, улетает на бесконечность, изменив направление движения (прямое рассеяние);
- 2)  $-1 < \frac{D}{h} < 0$  — возможны две ситуации в зависимости от начальных условий. Во-первых, система может совершать квазипериодические движения в ограниченной области. Во-вторых, вихревая пара приближается из бесконечности к одиночному вихрю, после чего происходит обмен вихрями в этой паре, и вновь образовавшаяся пара удаляется на бесконечность вдоль другого направления (обменное рассеяние);
- 3)  $0 < \frac{D}{h} < 2$  — возможно только обменное рассеяние;
- 4)  $2 < \frac{D}{h}$  — возможно только прямое рассеяние.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно определить новые переменные, с помощью которых задача о разбегании вихрей на плоскости может быть сведена к исследованию коллапса:

$$x_1 = \frac{1}{M_2 M_3}, \quad x_2 = \frac{1}{M_1 M_3}, \quad x_3 = \frac{1}{M_1 M_2}. \quad (3.74)$$

Уравнения движения для них имеют вид

$$\leftrightarrow \dot{x}_1 = x_1((\Gamma_2 - \Gamma_3)x_1 + \Gamma_3 x_2 - \Gamma_2 x_3), \quad (3.75)$$

а соотношение, ограничивающее физическую область  $\Delta^2 \geq 0$ , не изменится:

$$2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0. \quad (3.76)$$

Выберем, как и выше,  $a_3 = -1$ ,  $a_2, a_3 > 0$ .

Наличие в системе вихревой пары ( $a_1 = 1$  или  $a_2 = 1$ ) является необходимым и достаточным условием рассеяния.

## § 4. Другие разрешимые задачи динамики точечных вихрей на $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{S}^2$ . Методы качественного исследования

В отличие от задач двух и трех вихрей, система четырех вихрей на плоскости в общем случае уже не является интегрируемой [42, 47, 101]. На сфере имеет место аналогичная ситуация [4, 7, 79]. Для задачи четырех вихрей на плоскости имеются частные случаи интегрируемости, достаточно полный обзор которых содержится в книге [42]. Известны также частные решения (стационарные и статические конфигурации) системы  $n$  вихрей на плоскости [42]. Их сферические аналоги указаны, например, в [15, 90]. Здесь мы остановимся на наиболее известных решениях, рассматривая их с точки зрения методов, развитых в предыдущих разделах.

### 1. $N$ вихрей с нулевым моментом завихренности

**Сведение к приведенной системе задачи  $(N - 1)$  вихрей.** Существует частный случай задачи  $N$  вихрей на плоскости и сфере, для которого возможна редукция к приведенной системе  $(N - 1)$  вихрей с приведенной функцией Гамильтона, но с той же скобкой Пуассона (определяемой вихревой алгеброй плоскости или сферы). Для плоскости этот случай определяется условиями

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i = 0, \quad Q = P = 0, \quad (4.1)$$

где  $Q, P$  — интегралы момента завихренности для плоскости (1.4). Для сферы аналогично имеем

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0, \quad (4.2)$$

где  $F = (F_1, F_2, F_3)$  — момент завихренности на сфере (2.6).

Согласно соотношениям (1.5) и (2.7), на поверхности уровня первых интегралов, определяемой условиями (4.1) (для плоскости) и (4.2) (для сферы), система обладает *тремя инволютивными интегралами* (вместо двух в общем случае). Следовательно, при этом возможна редукция на три степени свободы (вместо двух) [3], в канонической форме эта редукция выполнена в работе [11] (см. приложение 1).

Любопытно, что приведенная в § 1 форма уравнений (1.13) для квадратов относительных расстояний и площадей (объемов) позволяет выполнить эту редукцию в гамильтоновой форме наиболее простым образом для произвольного количества вихрей (как для плоскости, так и для сферы) и проясняет связь с задачей  $(N - 1)$  вихря.

**Предложение 4.1.** *При условиях (4.1) на плоскости (соответственно, (4.2) на сфере) редуцированная система для задачи  $N$  вихрей эквивалентна редуцированной системе задачи  $N - 1$  вихрей, записанной в переменных  $M_{ij}$ ,  $\Delta_{ijk}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, N - 1$ , с гамильтонианом (1.2) (либо (2.5)), в котором переменные  $M_{iN}$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  выражены через  $M_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N - 1$  и скобкой (1.10) для плоскости (соответственно, (2.13) для сферы).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как показано в [15], для выполнения редукции на три степени свободы необходимо указать набор переменных, коммутирующих с интегралами (1.4) и (2.6) при выполнении условий (4.1) для плоскости и (4.2) для сферы. Кроме того, новые переменные должны удовлетворять двум условиям:

- 1) для новых переменных симплектический лист (соответствующий фазовому пространству приведенной системы) должен иметь размерность  $2N - 6$ ,
- 2) функция Гамильтона выражается через эти переменные.

Очевидно, что набор переменных, определяющих квадраты взаимных расстояний и площади (объемы) для  $N - 1$  вихря, коммутирует (по построению) с интегралами  $Q$ ,  $P$  (соответственно,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ) не только на нулевом, но и на произвольном уровне и удовлетворяет первому свойству.

Покажем, что он удовлетворяет и второму.

Рассмотрим последовательно случаи плоскости и сферы. Для плоскости геометрический смысл уравнений (4.1) состоит в том, что каждый вихрь находится в центре завихренности всех остальных вихрей. Действительно, выражая, например,  $\Gamma_N = -\sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i$  из (4.1), получаем, что абсолютные координаты  $N$ -го вихря определяются выражениями

$$\mathbf{r}_N = \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i. \quad (4.3)$$

Теперь с помощью соотношения (4.3) находим, что

$$\begin{aligned} M_{kN} &= |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_N|^2 = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i \right)^{-2} \left( \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i^2 |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^2 + 2 \sum_{i < j}^{N-1} \Gamma_i \Gamma_j (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i \right)^{-2} \left( \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i^2 M_{ik} + \sum_{i < j, i, j \neq k}^{N-1} \Gamma_i \Gamma_j (M_{ik} + M_{jk} - M_{ij}) \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

На сфере геометрический смысл соотношений (4.2) несколько иной, он заключается в том, что центр завихренности системы  $N$  вихрей совпадает с геометрическим центром сферы. Тем не менее, координаты любого вихря могут быть выражены через координаты остальных  $N - 1$  вихрей: например,

$$\mathbf{r}_N = -\Gamma_N^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i \mathbf{r}_i. \quad (4.4)$$

Аналогично, исходя из соотношения (4.4), получаем

$$\begin{aligned} M_{kN} &= |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_N|^2 = 2 \left( R^2 + \Gamma_N^{-1} \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_i) \right) = \\ &= \Gamma_N^{-1} \left( 2R^2 \left( \sum_{i=1}^N \Gamma_i \right) - \sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i M_{ik} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Тем самым функция Гамильтона как для случая плоскости (1.2), так и для случая сферы (2.5), может быть выражена через квадраты взаимных расстояний для  $N - 1$  вихрей  $M_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N - 1$ . ■

Как следствие, получаем, что в случае (4.1) для плоскости и (4.2) для сферы система обладает  $N$  (зависимыми) интегралами движения вида

$$D_k = \sum_{\substack{i < j \\ i, j \neq k}}^N \Gamma_i \Gamma_j M_{ij}. \quad (4.6)$$

Точнее, при условиях (4.1) на плоскости все интегралы (4.6) пропорциональны моменту завихренности

$$D_k = -\Gamma_k^{-1} I, \quad I = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{r}_i^2, \quad (4.7)$$

а на сфере при условиях (4.2) все интегралы выражаются через интенсивности  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ :

$$D_k = 2R^2 \left( \left( \sum_{i=1}^N \Gamma_i \right)^2 - 2\Gamma_k \sum_{i=1}^N \Gamma_i \right).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Для задачи четырех вихрей на плоскости при условиях (4.1) в работе [106] выполнена редукция по Раусу на три степени свободы посредством явного исключения всех циклических переменных с помощью канонических преобразований. При таком подходе остается невыясненной связь с задачей  $(N-1)$  вихрей и возникает необходимость рассмотрения всевозможных частных случаев.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Первоначально связь с приведенной системой задачи  $(N-1)$  вихрей для этого случая была указана в книге [15]; впоследствии, для случая четырех вихрей на плоскости при нулевом суммарном моменте, в работе [76] были указаны интегралы (4.6) и показано, что этот случай частной интегрируемости может быть исследован при помощи качественных методов задачи трех вихрей. Тем не менее, гамильтонова природа редукции и ее обобщение на систему  $N$  вихрей и случай сферы в работе [76] не были указаны.

**Четыре вихря на плоскости.** Для случая четырех вихрей на плоскости явные формулы (4.3) квадратов расстояний от первых трех вихрей до четвертого вихря  $M_{14}$ ,  $M_{24}$ ,  $M_{34}$  имеют вид

$$M_{k4} = \left( \sum_{l=1}^3 \Gamma_l^2 \right)^{-2} \left( \Gamma_i^2 M_j + \Gamma_j^2 M_i + \Gamma_i \Gamma_j (M_i + M_j - M_k) \right), \quad i \neq j \neq k \neq i, \quad (4.8)$$

где  $M_i$  — взаимные расстояния для трех вихрей (3.4). Соответствующий приведенный гамильтониан получается подстановкой (4.8) в исходный (1.2).

*Так как система трех вихрей интегрируема вне зависимости от вида гамильтониана, заданного на алгебре (3.4), описанный случай соответствует частному случаю интегрируемости задачи четырех вихрей (впервые, видимо, указанному В. В. Козловым в [30] (1983 г.) и подробно исследованному Б. Экхардтом в [106] (1988 г.)). При этом выполняются условия (4.1).*

При помощи предложения 4.1 можно выполнить понижение порядка и построить фазовые портреты интегрируемого случая задачи четырех вихрей с нулевой суммарной интенсивностью и нулевым суммарным моментом. Для этого необходимо получить уравнения в канонических переменных на приведенном фазовом пространстве, пользуясь соображениями § 2. На симплектическом листе алгебры трех вихрей, определяемом интегралом момента (4.6)

$$\tilde{D}_4 = \frac{D_4}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} = a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3,$$

имеются стандартные канонические переменные  $L, l$  (3.24).

С помощью уравнения (4.7) соотношения (4.8) при условии (4.1) могут быть представлены в виде

$$M_{k4} = (\Gamma_k \Gamma_4)^{-1} \Gamma_i \Gamma_j (M_k - (a_i + a_j)I), \quad i \neq j \neq k \neq i,$$

а уравнения движения, описывающие эволюцию сторон и площади треугольника, составленного из вихрей 1, 2, 3, запишутся в форме

$$\begin{aligned} \pi \dot{M}_k &= \Delta \Gamma_k \left( \frac{1}{M_i} - \frac{1}{M_j} + \frac{\Gamma_i \Gamma_4}{\Gamma_j \Gamma_k} \frac{1}{M_i - (a_j + a_k)I} - \frac{\Gamma_j \Gamma_4}{\Gamma_i \Gamma_k} \frac{1}{M_j - (a_i + a_k)I} \right), \\ 4\pi \dot{\Delta} &= \sum_{k=1}^3 \Gamma_k \Gamma_4 \left( \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{\Gamma_k \Gamma_4} \frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_k - (a_i + a_j)I} \right) \left( (a_i - a_j)M_k - \right. \\ &\quad \left. - (a_i + a_j)(M_i - M_j) \right), \quad (4.9) \end{aligned}$$

где  $k, i, j$  — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3.

Опираясь на условия компактности в задаче трех вихрей (предложение 3.1), несложно получить следующее условие для данной задачи.

**Предложение 4.2.** *Для системы четырех вихрей на плоскости в случае  $\sum_{i=1}^4 \Gamma_i = 0$  и  $P = Q = 0$ , если три вихря из четырех имеют интенсивности одного знака (случай 3–1), то фазовое пространство приведенной системы компактно и диффеоморфно (симплектоморфно) сфере, в противном случае (случай 2–2) фазовое пространство некомпактно (диффеоморфно плоскости).*

Очевидно, что в компактном случае все взаимные расстояния между вихрями также остаются ограниченными. Как и в задаче трех вихрей, вид фазового портрета определяется типом и взаимным расположением неподвижных точек и особенностей системы, а также соединяющими гиперболические неподвижные точки сепаратрисами (см. рис. 21–25). Неподвижные точки приведенной системы соответствуют стационарным решениям, для которых вихри совершают движения, сохраняя взаимные расстояния. Вследствие однородности уравнений движения вихрей на плоскости, связь между энергией  $h = e^{-4\pi H}$  и моментом  $D_4$  для стационарных решений с учетом (4.1) и (4.8) определяется зависимостью

$$h = f(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) |D_4|^{-\frac{1}{2}} \left( \left( \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \right)^2 + \sum_{i=1}^3 \Gamma_i^2 \right),$$

где  $f(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$  — некоторая функция, зависящая от интенсивностей.

Отсюда, в частности, следует, что *при фиксированных интенсивностях*  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  *количество неподвижных точек одно и то же при всех значениях интеграла момента*  $D_4$  *(для сферы это несправедливо).*

Бифуркационный анализ, состоящий в нахождении явного вида функции  $f(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ , может быть выполнен так же, как в разделе 3.

Используя уравнение (4.9) для  $\dot{\Delta} = 0$  и параметризацию (3.36), несложно получить уравнение, определяющее коллинеарные конфигурации:

$$\begin{aligned} & \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)z^3 - (2\Gamma_1 + \Gamma_2)z^2 - (\Gamma_2 + 2\Gamma_3)z + \Gamma_2 + \Gamma_3}{z(1-z)} + \\ & + \left(\sum \Gamma_i\right)^4 \frac{z(1-z)}{((\Gamma_1 + \Gamma_2)z - \Gamma_1)(\Gamma_3z + \Gamma_1)(\Gamma_3z - \Gamma_2 - \Gamma_3)} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Числитель этого выражения является полиномом шестой степени, а его (вещественные) корни определяют коллинеарные конфигурации. Численный анализ уравнения (4.10) и результаты работы [106] показывают, что в данном случае *коллинеарных конфигураций не существует* (хотя это строго не доказано).

Анализ уравнений (4.9) показывает, что при фиксированном значении  $I = \text{const}$  система обладает не более чем четырьмя, точнее восемью (с учетом возможных разных знаков площади  $\Delta$ ), неподвижными точками, которые соответствуют неколлинеарным конфигурациям. Максимум достигается, например, в случае  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -\frac{1}{3}\Gamma_4$ . При этом существует одна устойчивая конфигурация (звездочка), когда вихри 1, 2, 3 образуют равносторонний треугольник, а четвертый находится в его центре, и три неустойчивые, когда вихри 1, 2, 3 образуют равнобедренный треугольник, квадраты сторон которого удовлетворяют соотношениям  $M_i = M_j, M_k = (3\sqrt{3} - 5)M_i, i, j, k = 1, 2, 3$  и  $i \neq j \neq k \neq i$ , а четвертый вихрь лежит внутри него.

Кроме того, на фазовом портрете системы выделяются особые точки, в которых пара вихрей сливается, при этом энергия (1.2)  $H \rightarrow \pm\infty$ ; вблизи них траектории ведут себя как в окрестностях эллиптических неподвижных точек (см. рис. 21–25).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно указать регуляризующую замену времени, превращающую такую особенность в эллиптическую неподвижную точку. Подобная регуляризация в небесной механике хорошо известна [3]; для задачи трех вихрей она указана в предыдущем параграфе (см. стр. 49).

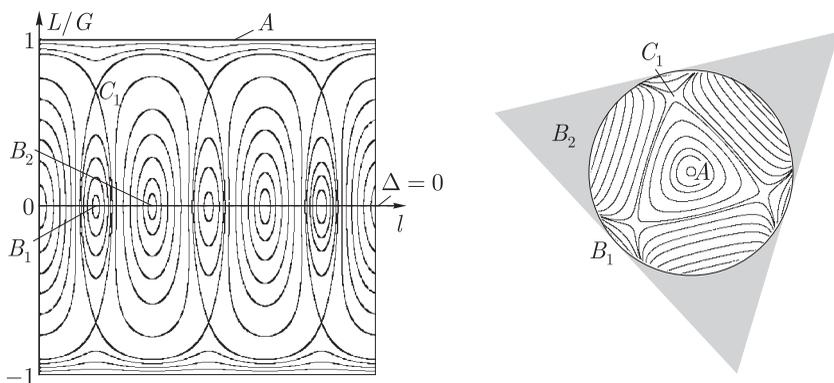


Рис. 21. Фазовый портрет и геометрическая интерпретация случая, когда три интенсивности совпадают ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -\frac{1}{3}\Gamma_4 = 1$  и  $\tilde{D}_4 = 1$ ). На прямой  $\Delta = 0$  расположены шесть особенностей системы (в этих точках вихри попарно слиты). Верхний и нижний отрезок соответствуют решению типа звездочки, вращающейся в разных направлениях. Неустойчивые точки соответствуют решениям равнобедренного типа.

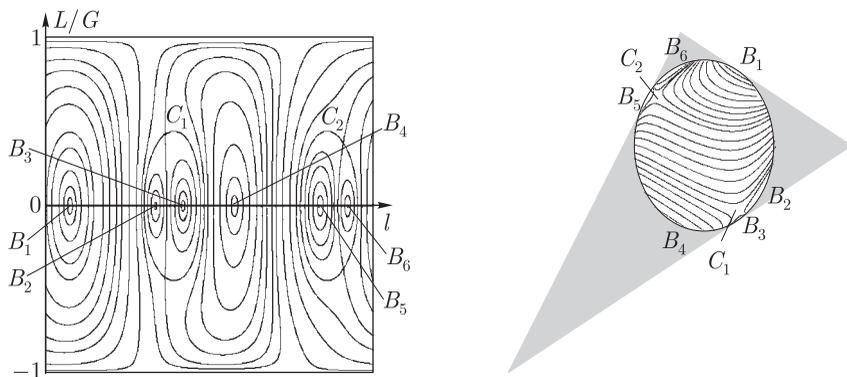


Рис. 22. Фазовый портрет при произвольных интенсивностях ( $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 2, \Gamma_3 = 4, \Gamma_4 = -7$  и  $\tilde{D}_4 = 1$ ). Кроме того, в приводимом случае исчезла эллиптическая особая точка (случай 5, см. текст).

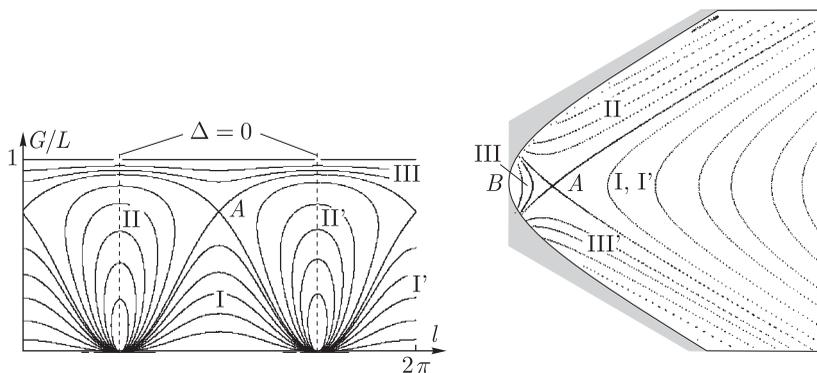


Рис. 23. Фазовый портрет и геометрическая интерпретация в случае  $(\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma_3 = -\Gamma_4 = 1, \tilde{D}_4 = 2)$ . Области I, I' соответствуют обменному рассеянию вихревых пар, области II, II' — прямому рассеянию, а область III содержит только компактные траектории. Точка B в геометрической интерпретации соответствует верхнему отрезку фазового портрета ( $G/L = 1$ ) — это особенность, в которой вихри попарно слиты.

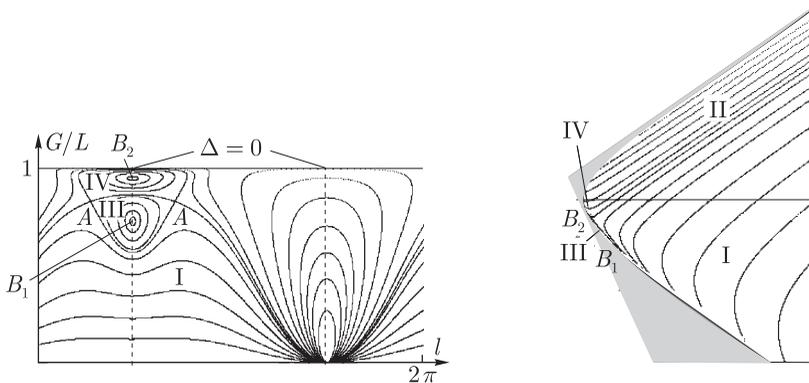


Рис. 24. Фазовый портрет и геометрическая интерпретация при условии  $(\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1, \Gamma_3 = -\Gamma_4 = 4, \tilde{D}_4 = 2)$ . Области I, II соответствуют прямому рассеянию вихревых пар, в областях III, IV все траектории компакты. Точки  $B_1$  и  $B_2$  — особенности системы, в которых слиты вихри (1,4) и (1,3) соответственно.

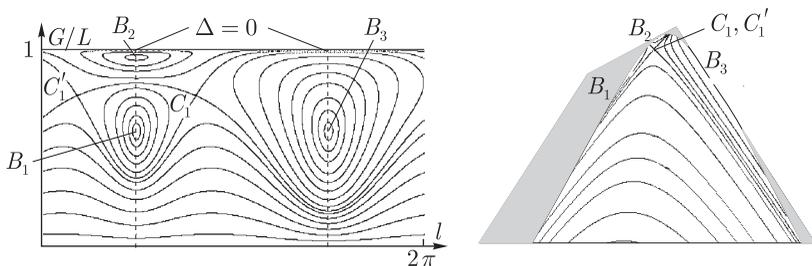


Рис. 25. Фазовый портрет и геометрическая интерпретация для несовпадающих по модулю интенсивностей ( $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = -2$ ,  $\Gamma_3 = 4$ ,  $\Gamma_4 = -3$ ,  $\tilde{D}_4 = 1$ ). Все траектории в этом случае компактны.  $B_1, B_2, B_3$  — особые точки системы, в которых сливаются, соответственно, вихри (1,4), (1,3), (1,2).

Используя условия (4.1), несложно показать, что все особенности располагаются на поверхности  $\Delta = 0$  [76]. Максимальное количество особенностей равно шести, соответствует всем возможным (сливающимся) парам, составленным из четырех вихрей и достигается на всех фазовых портретах в случае 3–1 (см. рис. 21, 22).

Помимо естественного представления траекторий приведенной системы в канонических координатах на симплектическом листе (рис. 21–25, слева), в данном случае геометрическая интерпретация задачи трех вихрей (см. § 3, раздел 3) также дает наглядное представление о движениях системы в пространстве взаимных расстояний  $M_1, M_2, M_3$  (рис. 21–25, справа). Рассмотрим подробнее возможные типы фазовых портретов и соответствующие геометрические интерпретации в случаях компактности и некомпактности фазового пространства приведенной системы.

*Случай 3–1.* (Три интенсивности одного знака, а четвертый противоположного.) Как следует из предложения 4.2 фазовое пространство приведенной системы компактно и симплектоморфно сфере. Согласно работе [106] (и также [76]), в этом случае выделяется пять типов качественно различного устройства фазового портрета (приведенной системы):

- 1) три интенсивности совпадают по величине ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -\frac{1}{3}\Gamma_4$ );
- 2) пара интенсивностей совпадает по величине ( $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ) и существует устойчивая неподвижная точка;
- 3) пара интенсивностей совпадает по величине и не существует устойчивой неподвижной точки;

- 4) все интенсивности различны и существует устойчивая периодическая точка;
- 5) все интенсивности различны и не существует устойчивой неподвижной точки.

На рисунках 21, 22 приведены две крайние из только что описанных ситуаций 1 и 5. В работах [106] и [76] приводятся фазовые портреты (в переменных (3.26)) и геометрическая интерпретация в остальных ситуациях. Строгого доказательства того, что этими ситуациями исчерпываются все возможные типы фазовых портретов, и окончательный бифуркационный анализ этой задачи, по-видимому, пока не выполнены.

В работе [106] приведен вид множества в пространстве параметров (интенсивностей), при которых на портрете существует эллиптическая неподвижная точка.

*Случай 2–2.* (Две интенсивности одного знака и две противоположно-го). Из предложения 6 следует, что фазовое пространство некомпактно. Из результатов работы [106] и наших численных исследований (подтверждаемых работой [76]) следует, что выделяются три случая различных фазовых портретов.

- 1) Все интенсивности равны по абсолютной величине ( $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma_3 = -\Gamma_4$ , см. рис. 23). (Две одинаковые вихревые пары.)
- 2) Две пары противоположных по знаку интенсивностей, совпадающих по величине ( $\Gamma_1 = -\Gamma_2 \neq \Gamma_3 = -\Gamma_4$ , см. рис. 24). (Две различные вихревые пары.)
- 3) Все интенсивности различаются по величине, см. рис. 25.

Фазовые портреты в канонических переменных (3.26) и геометрическая интерпретация для случаев 1–3 приведены на рисунках 23–25. В первом случае портрет наиболее прост, на нем выделяется только одна неустойчивая неподвижная точка.

**Аналогия со случаем Делоне.** Приведем еще одно общее замечание. Указанные частные случаи интегрируемости соответствуют ситуации, при которой интеграл достигает  $D$  своего экстремального значения. Очевидно, что при этом в системе обязательно появляются дополнительные инвариантные соотношения. Для интегрируемых систем это приводит к дополнительному вырождению. Примером может служить случай Делоне для волчка Ковалевской. В этом случае интеграл Ковалевской, являющийся суммой двух полных квадратов, обращается в нуль, и двумерные торы вырождаются в одномерные (периодические и асимптотические решения).

## 2. Центральнo- и зеркальнo-симметричные решения в задаче четырех вихрей

Общие уравнения движения вихрей на плоскости (1.1) и сфере (2.3) при некоторых ограничениях на интенсивности  $\Gamma_i$  допускают конечную группу симметрий, элементами которой являются перестановки и отражения в некоторых плоскостях. Такие дискретные симметрии не приводят к существованию общих интегралов движения и не позволяют понизить порядок системы в общем виде. Однако наличие этих симметрий приводит к существованию инвариантных подмногообразий, решение на которых может быть, как правило, получено в квадратурах [22, 42].

Рассмотрим две задачи динамики четырех вихрей на плоскости и сфере, обладающие двумя типами симметрии — центральной и зеркальной (для плоскости также — осесимметричной). Если описание зеркальной симметрии восходит к Грёбלי [111] и Гринхиллу [110], то центрально-симметричные решения, по-видимому, впервые были указаны Д. Н. Горячевым [22]. Обе задачи допускают естественное качественное исследование при помощи геометрической интерпретации, обобщающей приводимую в § 3. Обобщение центрально-симметричных решений на задачу  $2n$  вихрей на плоскости было получено Х. Арефом [69], хотя частные, но замечательные результаты были описаны еще Д. Н. Горячевым [22] (см. приложение 4). Некоторые частные решения, обладающие соответствующими симметриями, были описаны и изучены в [83].

**Центрально-симметричное решение при  $D_0 = 0$ .** Уравнения движения четырех вихрей на сфере (плоский случай получается предельным переходом  $R \rightarrow \infty$ ) при условии  $\Gamma_1 = \Gamma_3$ ,  $\Gamma_2 = \Gamma_4$  допускают инвариантные соотношения

$$\begin{aligned} M_{14} = M_{23} = M_1, \quad M_{12} = M_{34} = M_3, \\ \Delta_{234} = \Delta_{124} = \Delta_1, \quad \Delta_{213} = \Delta_{314} = \Delta_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отметим, что соотношения (4.11) определяют непуассоново подмногообразие.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Подмногообразие, определяемое соотношениями (4.11), пуассоново лишь при условии  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ .

Геометрический смысл уравнений (4.11) состоит в том, что центрально-симметричная конфигурация вихрей — параллелограмм, сохраняющий эту симметрию во все моменты времени (см. рис. 26). (Очевидно, что на сфере фигура, образуемая вихрями, не является плоской; тем не менее, для краткости ее мы также называем параллелограммом.)

Анализ центрально-симметричного решения на плоскости в абсолютных переменных при помощи явных квадратур выполнен Д. Н. Горячевым [22] (см. также [69]). Однако он мало прояснил качественные свойства движения и привел к довольно запутанной классификации. Здесь мы указываем метод качественного анализа относительного движения с помощью анализа траекторий в пространстве переменных  $M_{ij}$ .

Уравнения, описывающие эволюцию сторон  $M_1$ ,  $M_3$  и диагоналей  $M_{13} = M_2$ ,  $M_{24} = M_4$  параллелограмма (см. рис. 26), имеют вид

$$\begin{aligned}\pi \dot{M}_1 &= \Gamma_1 \Delta_2 \left( \frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_3} \right) + \Gamma_2 \Delta_1 \left( \frac{1}{M_4} - \frac{1}{M_3} \right), \\ \pi \dot{M}_3 &= \Gamma_1 \Delta_2 \left( \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2} \right) + \Gamma_2 \Delta_1 \left( \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_4} \right), \\ \pi \dot{M}_2 &= 2\Gamma_2 \Delta_2 \left( \frac{1}{M_3} - \frac{1}{M_1} \right), \quad \pi \dot{M}_4 = 2\Gamma_1 \Delta_1 \left( \frac{1}{M_3} - \frac{1}{M_1} \right).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Уравнения для  $\dot{\Delta}_1$  и  $\dot{\Delta}_2$  существенно сложнее и различаются на плоскости и сфере.

На сфере между объемами  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и квадратами сторон  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  имеются дополнительные геометрические соотношения (2.16), указанные выше. В данном случае они могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned}\Delta_1 (4R^2 - M_2) + \Delta_2 (4R^2 - M_1 - M_3) &= 0, \\ \Delta_1 (4R^2 - M_1 - M_3) + \Delta_2 (4R^2 - M_4) &= 0.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Система (4.13) разрешима относительно  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  при условии

$$2(M_1 + M_3) - (M_2 + M_4) + \frac{1}{4R^2} (M_2 M_4 - (M_1 + M_3)^2) = 0,\tag{4.14}$$

которое задает инвариантное соотношение, содержащее только  $M_i$ . Линейный интеграл уравнений (4.12), соответствующий функции Казимира (1.14), имеет вид

$$D_0 = 2\Gamma_1 \Gamma_2 (M_1 + M_3) + \Gamma_1^2 M_2 + \Gamma_2^2 M_4.\tag{4.15}$$

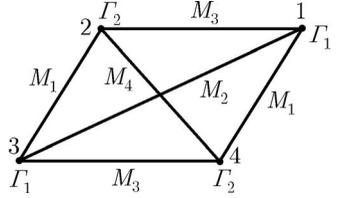


Рис. 26. Схематическое изображение расположения вихрей центрально-симметричной конфигурации.

Кроме того, система обладает интегралом энергии, который (в экспоненциальной форме) имеет вид

$$h = (M_1 M_3)^{2\Gamma_1 \Gamma_2} M_2^{\Gamma_1^2} M_4^{\Gamma_2^2}. \quad (4.16)$$

Интегралы (4.15) и (4.16) совместно с геометрическим соотношением (4.14) полностью определяют вид траектории в пространстве переменных  $M_1, M_2, M_3, M_4$ . Зависимости  $\Delta_1(M)$  и  $\Delta_2(M)$  могут быть получены с помощью формулы Герона (1.12) или ее обобщения (2.15).

Качественный анализ возможных траекторий теперь может быть выполнен стандартными методами анализа функций. Для простоты ограничимся случаем  $D_0 = 0$ , являющимся также необходимым условием коллапса [46]. В § 7 подробно анализируется случай  $D_0 \neq 0$  при условии, что все интенсивности равны между собой. Динамика на плоскости и сфере несколько отличается, поэтому рассмотрим эти случаи по отдельности.

*Случай плоскости.* Соотношения (4.13), (4.14) для плоскости ( $R \rightarrow \infty$ ) упрощаются:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\Delta_2 = \Delta, \\ 2(M_1 + M_3) - (M_2 + M_4) &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Исключая  $M_2, M_4$  при  $D_0 = 0$  и  $\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 \neq 0$  с помощью уравнений (4.15) и (4.17), представим интеграл энергии (4.16) в форме

$$\begin{aligned} (M_1 - M_3)^2 &= (M_1 + M_3)^2 - C(M_1 + M_3)^{-2\alpha}, \\ \alpha &= \frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}{4\Gamma_1\Gamma_2}, \quad C = \text{const}, \quad C > 0. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Показатель  $\alpha < 0$  в силу того, что при  $D_0 = 0$  интенсивности  $\Gamma_1, \Gamma_2$  имеют разные знаки.

В квадранте  $M_1 > 0, M_3 > 0$ , (который соответствует возможным значениям  $M_i$  вследствие того, что  $M_i$  — квадраты сторон), в зависимости от  $\alpha$  возможны три типа траекторий (4.18):

- 1°.  $\alpha < -1$  — все траектории замкнуты, выходят из начала координат, касаясь осей  $OM_1, OM_3$  (см. рис. 27a).
- 2°.  $-1 < \alpha < 0$  — траектории — кривые, асимптотически приближающиеся к координатным осям (см. рис. 27b).
- 3°.  $\alpha = -1$  — все траектории — прямые, проходящие через начало координат (см. рис. 27c) (однородный коллапс) [46].

Физическая область на плоскости  $(M_1, M_3)$  определяется той частью положительного квадранта ( $M_1 > 0, M_3 > 0$ ), для которой выполнено неравенство  $\Delta^2 > 0$ .

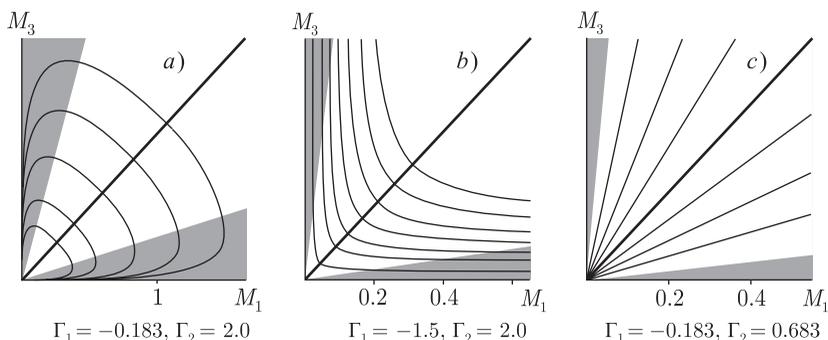


Рис. 27. Проекция траекторий системы и границы для плоскопараллельного случая на плоскости  $M_1, M_3$  (стороны параллелограмма).

При достижении траекторией границы  $\Delta^2 = 0$  вихри образуют коллинеарную конфигурацию и движутся на плоскости  $(M_1, M_3)$  по той же траектории в обратном направлении; тем не менее, в этом случае знак  $\Delta$  изменился и взаимное расположение вихрей другое (хотя взаимные расстояния те же). Каждой точке траектории на плоскости  $(M_1, M_3)$  соответствуют две конфигурации вихрей, которые отличаются лишь перестановкой:  $1 \leftrightarrow 3$  либо  $2 \leftrightarrow 4$ , т. е. знаком  $\Delta$  (см. рис. 26).

Как легко показать, уравнение  $\Delta^2 = 0$  определяет две прямые на плоскости  $(M_1, M_3)$ , которые при любых интенсивностях  $\Gamma_1, \Gamma_2$  располагаются внутри квадранта  $M_1 > 0, M_3 > 0$ . Следовательно, за исключением случая  $3^\circ$  вихри движутся в ограниченной области без столкновений и разбегания. В случае  $3^\circ$  в системе происходит либо однородный коллапс всех вихрей, либо однородное рассеяние.

Случай  $\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 = 0$  рассмотрим отдельно, так как при этом из соотношений (4.15), (4.17) невозможно выразить  $M_2$  и  $M_4$ . Так как в данном случае мы полагаем, что  $D_0 = 0$ , то  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют разные знаки. Положим  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$ , непосредственно из уравнений (4.12) следует, что существует интеграл, заменяющий интеграл момента  $D_0$ , который имеет вид

$$M_2 - M_4 = 2a = \text{const.}$$

Таким образом, в данном случае получаем

$$M_2 = M_1 + M_3 + a, \quad M_4 = M_1 + M_3 - a$$

и из интеграла энергии (4.16) находим уравнение траектории на плоскости  $(M_1, M_3)$  в виде

$$\frac{h}{16} ((M_1 + M_3)^2 - (M_1 - M_3)^2)^2 = (M_1 + M_3)^2 - a^2, \quad h > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из соотношений (4.15) и (4.17) следует, что для двух вихревых пар одинаковой интенсивности ( $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ ) на плоскости центрально-симметричное решение существует лишь при  $D_0 = 0$ .

*Случай сферы.* Для центрально-симметричной конфигурации на сфере также рассмотрим проекцию траекторий системы (4.12) на плоскость  $(M_1, M_3)$  (см. рис. 28). При этом возникают два отличия от плоского случая, связанные с нелинейностью уравнения (4.14). Во-первых, для всяких фиксированных величин  $M_1, M_3$  существуют два решения уравнения (4.14) и, следовательно, два различных (пространственных) параллелограмма с заданными сторонами на сфере, которые не сводятся друг к другу перестановкой  $1 \rightarrow 3$  ( $2 \rightarrow 4$ ). Во-вторых, меняется вид физической области, определяемой неравенствами  $\Delta_i^2 > 0$ ,  $i = 1, 2$ .

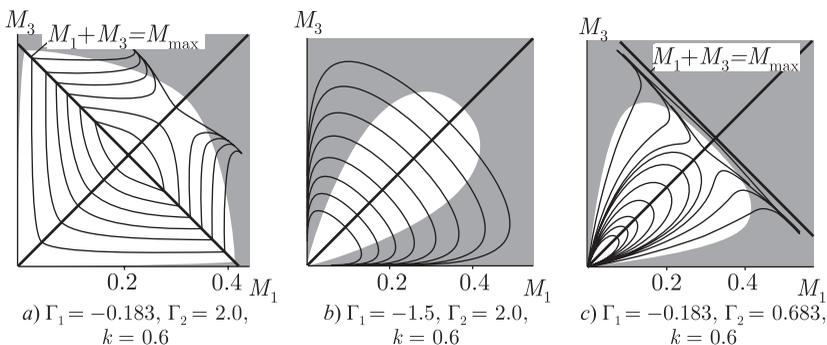


Рис. 28. Геометрическая интерпретация в случае сферы: показаны проекции траекторий на плоскость взаимных расстояний  $(M_1, M_3)$ . Серым цветом закрашивается нефизическая область. На рис. *a*) траектории, располагающиеся выше прямой  $M_1 + M_3 = M_{\max}$ , являются фиктивными, они получаются из реальных траекторий отражением относительно этой прямой.

Выберем новые переменные  $x, y, M, N$ :

$$\begin{aligned} x &= \Gamma_1 M_2 + \Gamma_2 M_4, & y &= \Gamma_1^2 M_2 - \Gamma_2^2 M_4, \\ M &= M_1 + M_3, & N &= M_1 - M_3. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Используя соотношения (4.15) при  $D_0 = 0$  и (4.14), выразим переменные  $x, M$  по формулам

$$x = -\frac{y^2}{16R^2\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}, \quad (4.20)$$

$$M = \frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{2\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}y + \frac{y^2}{16R^2\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2}, \quad (\Gamma_1\Gamma_2 < 0). \quad (4.21)$$

Используя интеграл энергии (4.16), находим уравнение для траектории в переменных  $y, N$

$$(M^2 - N^2)^{2\Gamma_1\Gamma_2} (\Gamma_2 x - y)^{\Gamma_1^2} (\Gamma_1 x - y)^{\Gamma_2^2} = \text{const},$$

где  $M$  и  $x$  предполагаются выраженными через  $y, N$  по формулам (4.20) и (4.21).

Проекция траектории  $y(t), N(t)$  на плоскость  $(M_1, M_3)$  определяется формулами

$$M_1 = \frac{1}{2}(M + N), \quad M_3 = \frac{1}{2}(M - N). \quad (4.22)$$

Уравнение (4.21) допускает вещественные решения лишь при  $M \leq M_{\max} = -\frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}{\Gamma_1\Gamma_2} R^2$ . Поэтому в случае сферы физически доступная область на плоскости определяется неравенствами

$$M_1 + M_3 \leq M_{\max}, \quad (4.23)$$

$$4\Delta_1^2 = 2(M_1 M_4 + M_3 M_4 + M_1 M_3) - M_1^2 - M_3^2 - M_4^2 - \frac{1}{R^2} M_1 M_3 M_4 > 0,$$

$$4\Delta_2^2 = 2(M_1 M_2 + M_3 M_2 + M_1 M_3) - M_1^2 - M_3^2 - M_2^2 - \frac{1}{R^2} M_1 M_3 M_2 > 0. \quad (4.24)$$

В области (4.23) уравнение (4.21) имеет два корня, поэтому на плоскость  $(M_1, M_3)$  проектируются две различные области возможных расположений вихрей, определяемые неравенствами (4.24) и уравнением (4.21). Если области (4.24) не достигают прямой  $M_1 + M_3 = M_{\max}$  (рис. 28*b, c*), то точка, начиная двигаться внутри одной области, остается там во все моменты времени. При достижении границ ( $\Delta_i = 0$ ) необходимо сменить знак времени, и траектория проходит в обратном направлении. В случае, когда прямая  $M_1 + M_3 = M_{\max}$  проходит внутри областей (4.24) (рис. 28*a*), траектория, достигая ее, переходит из одной области в другую и описывается другим решением уравнения (4.21).

Характерной особенностью фазовых портретов в случае сферы является появление новых неподвижных точек устойчивых (на границе  $\Delta = 0$ ) и неустойчивых (отсутствующих в плоском случае). В случае выполнения второго необходимого условия коллапса  $\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 = -4\Gamma_1\Gamma_2$  (рис. 28*c*). Часть траекторий, выходящих из начала координат, вновь попадает туда, не достигая границы области (коллинеарных положений), а часть — только после ее достижения (в случае плоскости все траектории были прямыми линиями (рис. 14*c*). При этом коллансирующие траектории сосуществуют с ограниченными, причем в отличие от плоского случая коллапс неоднородный.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Как видно из приведенного анализа, для сферы использование геометрической проекции приводит к весьма запутанной картине траекторий, что происходит благодаря существованию нескольких решений уравнений (4.20)

и (4.21). Остается открытым вопрос о нахождении подходящих переменных, аналогичных каноническим координатам в задаче трех вихрей (3.24), устраняющим все особенности проекции в рассматриваемой геометрической интерпретации.

**Зеркально-симметричное решение (чехарда Гельмгольца).** Для системы двух взаимодействующих вихревых пар  $\Gamma_1 = -\Gamma_4$ ,  $\Gamma_2 = -\Gamma_3$  общая система четырех вихрей на сфере и на плоскости также допускает инвариантные соотношения

$$\begin{aligned} M_{12} = M_{34} = \overline{M}_1, \quad M_{13} = \overline{M}_{24} = M_3, \\ \Delta_{123} = \Delta_{234} = \Delta_1, \quad \Delta_{124} = \Delta_{134} = \Delta_2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Геометрический смысл этих уравнений заключается в том, что вихри, расположенные в начальный момент в вершинах трапеции, образуют трапецию во все время движения (см. рис. 29). Данная конфигурация обладает зеркальной (осевой) симметрией. Уравнения, описывающие эволюцию сторон и диагоналей трапеции, имеют вид

$$\begin{aligned} \pi \dot{M}_1 &= \Gamma_2 \Delta_1 \left( \frac{1}{M_4} - \frac{1}{M_3} \right) + \Gamma_1 \Delta_2 \left( \frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_3} \right), \\ \pi \dot{M}_3 &= \Gamma_2 \Delta_1 \left( \frac{1}{M_4} - \frac{1}{M_1} \right) + \Gamma_2 \Delta_2 \left( \frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_1} \right), \\ \pi \dot{M}_2 &= 2\Gamma_2 \Delta_2 \left( \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_3} \right), \quad \pi \dot{M}_4 = 2\Gamma_1 \Delta_1 \left( \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_3} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь  $M_2 = M_{14}$ ,  $M_4 = M_{23}$  — основания трапеции (см. рис. 29).

Поскольку трапеция представляет собой плоскую фигуру, геометрические соотношения между  $M_i$ ,  $\Delta_i$  (2.16) в данном случае имеют одинаковую форму на плоскости и сфере:

$$\begin{aligned} \Delta_1 M_4 + \Delta_2 (M_3 - M_1) &= 0, \\ \Delta_1 (M_3 - M_1) + \Delta_2 M_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

и условие разрешимости (4.27) относительно  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  дает дополнительное инвариантное соотношение, содержащее только  $M_i$ :

$$M_2 M_4 - (M_1 - M_3)^2 = 0. \quad (4.28)$$

Интеграл момента (3.11) имеет вид

$$D_0 = 2\Gamma_1 \Gamma_2 (M_1 - M_3) - \Gamma_1^2 M_4 - \Gamma_2^2 M_2. \quad (4.29)$$

Интеграл энергии (в экспоненциальной форме) запишется в виде

$$h = M_1^{2\Gamma_1\Gamma_2} M_3^{-2\Gamma_1\Gamma_2} M_2^{-\Gamma_1^2} M_4^{-\Gamma_2^2}. \quad (4.30)$$

Из уравнений (4.27), (4.28), (4.30) следует, что траектории системы в пространстве  $M_1, M_2, M_3, M_4$  совпадают для динамики вихрей на плоскости и сфере. Различие между этими задачами заключается в виде физических областей, определяемых неравенствами (4.24).

Как и в случае центрально-симметричных решений, уравнения (4.28)–(4.30) полностью определяют траекторию системы (4.26). Приведем краткий качественный анализ на плоскости и сфере с помощью геометрической интерпретации, рассматриваемой выше (для центрально-симметричного решения). Выполним замену переменных, используемую выше (4.19). Вследствие существования интеграла момента, между переменными  $x, y$  выполнено соотношение

$$\frac{4\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} D_0 x + y^2 + \frac{2(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{\Gamma_1 + \Gamma_2} D_0 y + D_0^2 = 0. \quad (4.31)$$

Используя (4.31) и уравнение (4.28), находим

$$N = -\frac{y^2}{4\Gamma_1\Gamma_2 D_0} + \frac{D_0}{4\Gamma_1\Gamma_2}. \quad (4.32)$$

Кроме того, интеграл энергии (4.30) запишем в форме

$$\left(\frac{M+N}{M-N}\right)^{2\Gamma_1\Gamma_2} (\Gamma_2 x + y)^{-\Gamma_1^2} (\Gamma_1 x - y)^{-\Gamma_2^2} = \text{const}. \quad (4.33)$$

При  $D_0 \neq 0$  из соотношений (4.19), (4.31) и (4.32) все  $M_1, M_2, M_3, M_4$  могут быть выражены через  $M, y$ . Таким образом, уравнение (4.33) определяет траекторию на плоскости  $M, y$ .

По аналогии с центрально-симметричным решением рассмотрим проекцию траектории на плоскость  $(M_1, M_3)$ . Физическая область помимо неравенств (4.24) определяется дополнительным условием (следствием соотношения (4.32))

$$y^2 = D_0(D_0 - 4\Gamma_1\Gamma_2 N) > 0. \quad (4.34)$$

В каждую точку на плоскости  $(M_1, M_3)$ , удовлетворяющую неравенствам (4.24), (4.34), проектируются две различные точки фазового пространства — два решения уравнения (4.32). Более наглядно это можно представить себе, если считать, что по линии  $M_1 - M_3 = N_0 = \frac{D_0}{4\Gamma_1\Gamma_2}$  склеены две различные области, определенные неравенством (4.24). При достижении точкой границы  $\Delta_i = 0$ , она отражается обратно и движется по той же траектории, а при достижении границы (4.34) точка переходит из одной области в другую (см. рис. 30a, 30b).

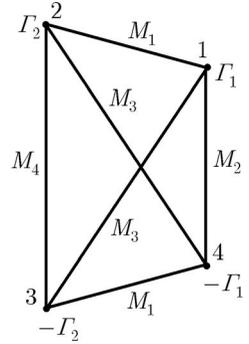


Рис. 29

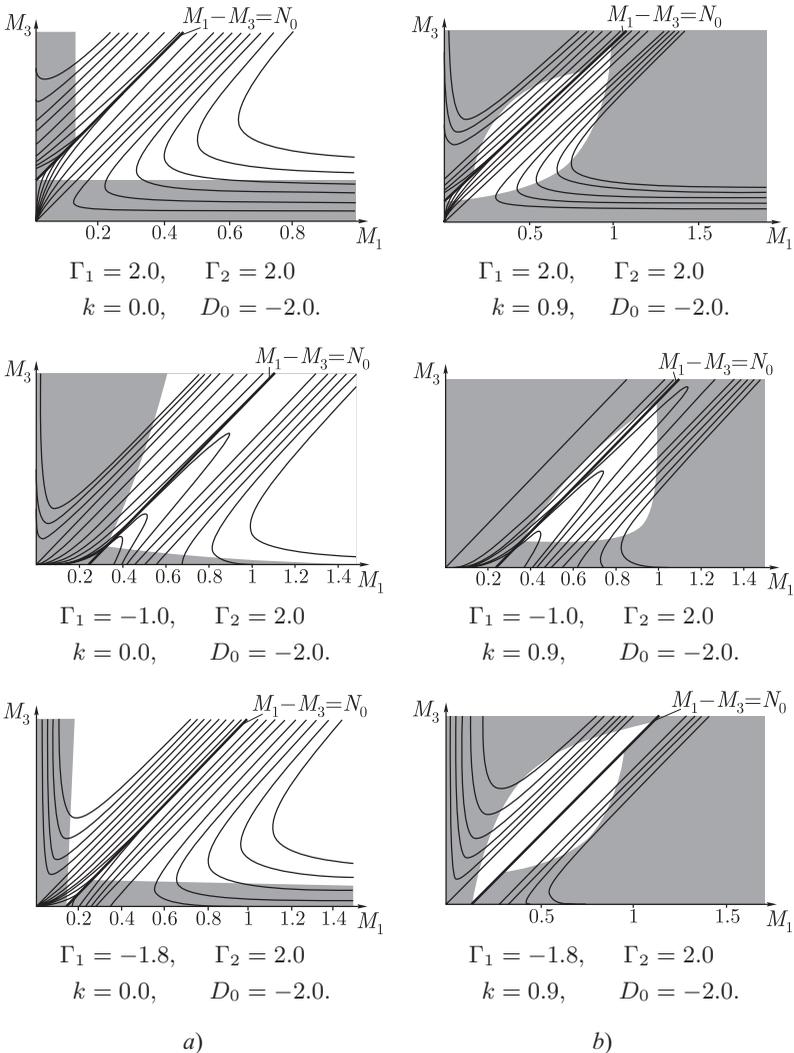


Рис. 30. Геометрическая интерпретация для зеркально-симметричного решения на плоскости (a) и на сфере (b). Фиктивные траектории, лежащие выше прямой  $M_1 - M_3 = N_0$ , получены из реальных траекторий отражением относительно этой прямой; это сделано для удобства, чтобы не загромождать рисунок пересекающимися кривыми, соответствующими разным решениям уравнения (4.32).

На рисунках мы для удобства развернули области, склеенные по линии  $M_1 - M_3 = N_0$ . Отличие плоскости от сферы проявляется в виде физических областей. Для плоскости (см. рис. 30а) существуют 2 типа траекторий:

- 1) траектории, касающиеся один раз границы  $\Delta_i = 0$  и уходящие на бесконечность (т. е. возможно рассеяние);
- 2) траектории, заключенные между границами  $\Delta_i = 0$ .

Этим случаям соответствуют различные движения вихрей: в первом случае вихри разбегаются, проходя лишь один раз через коллинеарную конфигурацию, во втором — вихревые пары попеременно проходят друг через друга (*чехарда Гельмгольца*), оставаясь на ограниченном расстоянии. Для сферы существуют только траектории второго типа. Анализ чехарды на плоскости проведен другим методом в [42].

Для полноты приведем также уравнения движения и геометрическую интерпретацию при нулевом моменте  $D_0 = 0$  (являющемся необходимым условием коллапса [46]). Согласно (4.31), в этом случае  $y = 0$ , и все взаимные расстояния  $M_1, \dots, M_4$  могут быть выражены через переменные  $x, M$  по формулам

$$M_2 = \frac{\Gamma_2 x}{\Gamma_1(\Gamma_1 + \Gamma_2)}, \quad M_4 = \frac{\Gamma_1 x}{\Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_2)},$$

$$M_1 = \frac{1}{2}(M + N), \quad M_3 = \frac{1}{2}(M - N), \quad N = \frac{x}{\Gamma_1 + \Gamma_2}.$$

Траектория, определяемая интегралом (4.33), находится из уравнения

$$M = \frac{x}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{Cx^{2\alpha} + 1}{Cx^{2\alpha} - 1}, \quad \alpha = \frac{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2}{4\Gamma_1\Gamma_2}, \quad (4.35)$$

где  $C > 0$  — постоянная, выражающаяся через  $h$ . Уравнение, определяющее вид области ( $\Delta_i > 0$ ) на плоскости  $m, x$ , имеет вид

$$\Gamma_1\Gamma_2 \left( x(m - ax) - \frac{(m^2 - x^2)x}{8R^2(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2} \right) > 0, \quad m = (\Gamma_1 + \Gamma_2)M. \quad (4.36)$$

Анализируя (4.35), (4.36) вблизи начала координат  $m = x = 0$ , можно заключить, что для зеркально-симметричного решения одновременный коллапс четырех вихрей невозможен.

Интересные исторические факты и численное исследование устойчивости чехарды вихрей приведены в работе [61].

Разобранные выше интегрируемые системы вихревой динамики допускают достаточно полный анализ с помощью методов качественного исследования динамических систем на плоскости. В то же время применение для них классических методов явного решения с помощью теории специальных (абелевых) функций приводит к очень громоздким выражениям, не позволяющим составить какого-либо представления о реальном движении [22].

## § 5. Классификация и симплектизация вихревой алгебры для плоскости

В первом разделе было приведено физическое описание динамики точечных вихрей на плоскости с помощью переменных расстояний и площадей, которые определяют структуру Ли–Пуассона и соответствующую вихревую алгебру. В этом разделе мы рассмотрим более формальные построения. Они были выполнены авторами совместно с А. В. Болсиновым [90] и предполагают владение основами теории алгебр Ли (см. например [5]).

Основные результаты, полученные с помощью этой техники, следующие:

- 1) Выполнение эффективной редукции в случае непуассонова действия группы симметрий при произвольных значениях интенсивностей.
- 2) Обобщение условия компактности фазового пространства редуцированной системы на случай интенсивностей разных знаков (напомним, что Синг [193] получил достаточное условие финитности траекторий, заключающееся в знакоопределенности всех интенсивностей см. § 1).
- 3) Построение канонических переменных редуцированной системы при произвольных интенсивностях в компактном случае.

### 1. Вихревая алгебра и лиевы пучки

Зададим координаты вихрей  $x_k, y_k, k = 1, \dots, n$  комплексными числами  $z_k = x_k + iy_k, k = 1, \dots, n$ . Набор  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$  определяет вектор в комплексном линейном пространстве  $\mathbb{C}^n$ , в котором имеется эрмитова форма вида

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w})_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n \Gamma_i z_i \bar{w}_i, \quad \Gamma_i \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Мнимая часть (5.1) задает симплектическую форму, соответствующую скобке Пуассона (1.3)  $\{x_i, y_j\} = \frac{\delta_{ij}}{\Gamma_i}$ . Оказывается, что в переменных  $M, \Delta$  получается скобка Ли–Пуассона (1.10), линейно-зависящая от обратных интенсивностей.

Для определения вещественного типа соответствующей алгебры Ли укажем явный изоморфизм с некоторым лиевым пучком [15, 16].



Перейдем к случаю произвольных интенсивностей  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . Рассмотрим лиев пучок на алгебре косоэрмитовых  $n \times n$ -матриц, порожденный коммутаторами вида

$$[X, Y]_{\Gamma^{-1}} = X\Gamma^{-1}Y - Y\Gamma^{-1}X, \quad (5.3)$$

где  $\Gamma^{-1}$  — вещественная диагональная матрица вида

$$\Gamma^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\Gamma_1}, \dots, \frac{1}{\Gamma_n}\right). \quad (5.4)$$

Замечательным является тот факт, что подалгебра  $L$  является замкнутой относительно коммутатора  $[\cdot, \cdot]_{\Gamma^{-1}}$  и, следовательно, семейство коммутаторов (5.3) порождает некоторый лиев пучок на  $L$ . Более того, ограничивая на  $L$  коммутатор  $[\cdot, \cdot]_{\Gamma^{-1}}$ , мы получаем алгебру Ли, изоморфную вихревой алгебре  $L_\Gamma$  (1.10), отвечающей интенсивностям  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . Таким образом, можно установить симметричный изоморфизм между семейством вихревых алгебр и несложным лиевым пучком. Пользуясь этой конструкцией, опишем свойства вихревых алгебр.

**Предложение 5.3.** *При положительных  $\Gamma_i$  вихревая алгебра изоморфна алгебре  $u(n-1)$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Соответствующий изоморфизм строится следующим образом. Рассмотрим сначала случай, когда интенсивности равны единице. Все матрицы (5.2) являются косоэрмитовыми и удовлетворяют свойству  $Az_0 = 0$ , где  $z_0$  — вектор с координатами  $(1, 1, \dots, 1)$ . Другими словами, этот вектор инвариантен под действием вихревой алгебры. Следовательно, инвариантно и его ортогональное дополнение, то есть гиперплоскость  $V_1 = \{z \mid \sum z_i = 0\}$ . Рассмотрим все косоэрмитовы матрицы, обладающие этим свойством (то есть зануляющие фиксированный вектор), — они образуют подалгебру  $u(n-1)$ . Таким образом, вихревая подалгебра вкладывается в  $u(n-1)$ . Их размерности совпадают, поэтому совпадают и сами алгебры.

Более явно это можно показать, перейдя к другому базису в пространстве  $\mathbb{C}^n$ . Рассмотрим  $e_1, e_2, \dots, e_n$  следующего вида:  $e_1, \dots, e_{n-1}$  — ортонормированный базис в гиперплоскости  $V_1$ , а  $e_n = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ . Переписывая матрицы (5.2) из вихревой алгебры в этом новом базисе, мы видим, что они приобретают вид

$$\begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A_{n-1} & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

где  $A_{n-1}$  — косоэрмитова матрица размером  $(n-1) \times (n-1)$ . В этом базисе изоморфизм вихревой алгебры с  $u(n-1)$  становится явным. Недостаток такого базиса в том, что его нельзя сделать симметричным относительно всех вихрей.

Обобщим эти рассуждения на случай произвольных интенсивностей. Переход к новому базису в  $\mathbb{C}^n$  задает сопряжение матриц в алгебре (5.2) вида  $A = CA'C^{-1}$ , где  $C$  — матрица перехода (в нашем случае ее можно считать вещественной и ортогональной  $C^{-1} = C^T$ ). При такой замене коммутатор вихревой алгебры (5.3) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} A\Gamma^{-1}B - B\Gamma^{-1}A &= CA'C^{-1}\Gamma^{-1}CB'C^{-1} - CB'C^{-1}\Gamma^{-1}CA'C^{-1} = \\ &= C[A', B']_{\Gamma'}C^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$\Gamma' = C^{-1}\Gamma^{-1}C = \begin{pmatrix} & & & \gamma_{1n} \\ & \Gamma'_{n-1} & & \vdots \\ & & & \gamma_{n-1,n} \\ \gamma_{1n} & \cdots & \gamma_{n-1,n} & \gamma_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\Gamma'_{n-1}$  — симметричная  $(n-1) \times (n-1)$ -матрица, соответствующая ограничению формы  $\Gamma^{-1}$  на гиперплоскость  $V_1$ . Это следует из соотношения  $C^{-1} = C^T$ .

Учитывая, что последние строка и столбец матриц  $A'$  и  $B'$  обращаются в нуль, находим, что вихревой коммутатор преобразуется к виду

$$[A'_{n-1}, B'_{n-1}]_{\Gamma'_{n-1}}.$$

Отметим теперь, что матрица  $\Gamma'_{n-1}$  положительно определена и вещественна, следовательно, из нее можно извлечь корень  $(\Gamma'_{n-1})^{1/2}$ . Тогда замена

$$A'_{n-1} = (\Gamma'_{n-1})^{-1/2} A''_{n-1} (\Gamma'_{n-1})^{-1/2} \quad (5.6)$$

приводит коммутатор  $[A'_{n-1}, B'_{n-1}]_{\Gamma'_{n-1}}$  к стандартному. При этом матрицы остаются косоэрмитовыми. Это рассуждение также показывает, что рассматриваемый нами вихревой пучок является подпучком стандартного пучка на пространстве косоэрмитовых матриц. ■

Кроме того, из приведенного доказательства вытекает следующее важное следствие: *свойства вихревой алгебры Ли, отвечающей параметрам  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ , полностью определяются свойствами билинейной формы  $\Gamma'_{n-1}$ , которая является ограничением формы  $\Gamma^{-1}$  на подпространство  $V_1 = \{z_1 + \dots + z_n = 0\}$  (в частности, сигнатурой этого ограничения).*

## 2. Теорема о компактности (финитности)

Найдем условия, при которых алгебра  $L_\Gamma$  компактна, то есть изоморфна алгебре Ли  $u(N-1)$ . В этом случае все орбиты коприсоединенного представления также компактны [5], и, следовательно, компактно фазовое пространство приведенной системы для задачи  $n$  вихрей, при этом все взаимные расстояния ограничены. Согласно приведенному выше следствию, необходимым и достаточным условием компактности является знакоопределенность формы  $\Gamma'_{n-1}$ . В этом случае имеются следующие возможности (мы предполагаем, что интенсивности конечны и отличны от нуля).

- 1) Форма  $\Gamma^{-1}$  знакоопределенна, то есть все  $\Gamma_i$  одновременно либо положительны, либо отрицательны.
- 2) Форма  $\Gamma^{-1}$  имеет сигнатуру  $(n-1, 1)$  (то есть все  $\Gamma_i$  положительны кроме одного). Действительно, для положительной определенности ограничения на  $V_1$  требуется, чтобы на одномерном ортогональном (относительно  $\Gamma$ ) дополнении к  $V_1$  форма  $\Gamma^{-1}$  была отрицательно определена. Это условие легко найти, если заметить, что ортогональным дополнением к  $V_1$  в смысле формы (5.4) является одномерное подпространство, натянутое на вектор  $v_\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ . Оно имеет вид

$$(v_\Gamma, v_\Gamma)_{\Gamma^{-1}} = \sum \Gamma_i < 0.$$

- 3) Аналогичное утверждение для случая сигнатуры  $(1, n-1)$ .

Окончательно получаем следующее

**Предложение 5.4.** *Вихревая алгебра Ли  $L_\Gamma$  и, соответственно, фазовое пространство приведенной системы задачи  $n$  вихрей являются компактными в следующих и только в следующих случаях:*

- 1) *все интенсивности имеют одинаковый знак;*
- 2) *все интенсивности, кроме одной положительны, и  $\sum_{i=1}^n \Gamma_i < 0$ ;*
- 3) *Все интенсивности, кроме одной отрицательны, и  $\sum_{i=1}^n \Gamma_i > 0$ .*

Аналогично определим условия, когда вихревая алгебра не будет «полупростой». Это случается тогда и только тогда, когда форма  $\Gamma'_{n-1}$  вырождена на  $V_1$ . Из линейной алгебры следует, что это условие эквивалентно

тому, что ортогональное дополнение к  $V_1$  лежит в  $V_1$ . Последнее, в свою очередь, означает, что  $v_\Gamma \in V_1$ , то есть

$$\Gamma_1 + \dots + \Gamma_n = 0.$$

Отметим еще одно обстоятельство. Подпространство  $\Delta \subset L$ , натянутое на векторы  $\Delta_{lmn}$ , является подалгеброй для любой алгебры из пучка. Условие ее компактности точно такое же, что и условие компактности для всей  $L_\Gamma$ : форма  $\Gamma'_{n-1}$  должна быть положительно определенной. Поэтому *вихревая алгебра  $L_\Gamma$  компактна тогда и только тогда, когда компактна подалгебра  $\Delta$ .*

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Устройство и условия компактности приведенного фазового пространства можно получить, исследуя (методами аналитической геометрии) совместную поверхность уровня первых интегралов (1.4). Интересно, что алгебраический подход позволяет решить и эту чисто геометрическую задачу.

### 3. Сингулярные орбиты и редукция по симметриям

Для объяснения происхождения лиевых пучков, связанных с вихревой алгеброй, и описания (сингулярных) симплектических листов, соответствующих фазовому пространству приведенной системы, рассмотрим переход к относительным переменным с точки зрения редукции по симметриям [1, 3, 150].

Функция Гамильтона (1.2) и уравнения движения (1.1) вихрей инвариантны относительно действия группы движений плоскости  $E(2)$ , которое можно представить в виде

$$g: z \rightarrow e^{i\varphi} z + az_0, \quad g \in E(2), \quad (5.7)$$

где  $z_0 = (1, \dots, 1)$ ,  $a = a_x + ia_y$ . Параметры  $\varphi$ ,  $a_x$ ,  $a_y$  определяют трансляцию и поворот, соответствующие элементу  $g \in E(2)$ .

Действие (5.7) *непуассоново* [1]. Напомним, что действие (связной) группы Ли пуассоново, если гамильтонианы, соответствующие элементам  $a$ ,  $b$  ее алгебры Ли, коммутируют следующим образом:  $\{H_a, H_b\} = H_{[a,b]}$ . В данном случае интегралы движения (1.4), соответствующие трансляциям  $Q$ ,  $P$  и вращению  $I$ , образуют пуассонову структуру, которая отличается от скобки Ли–Пуассона алгебры  $e(2)$  на постоянную величину — коцикл. Легко видеть, что этот коцикл является неустранимым [1] и стандартная редукция по моменту [150] невозможна (она строится лишь для пуассоновых действий). Для проведения редукции в алгебраической форме [15] воспользуемся отображением момента несколько иначе.

Рассмотрим действие линейных преобразований, сохраняющих форму  $(\cdot, \cdot)_\Gamma$  (5.1). Соответствующие линейные операторы (матрицы) образуют группу, изоморфную  $U(p, q)$ ,  $p + q = n$ , и удовлетворяют соотношениям

$$XGX^+ = \Gamma, \quad \Gamma = \text{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n),$$

а операторы соответствующей алгебры Ли (со стандартным матричным коммутатором)  $A \in u(p, q)$ :

$$A\Gamma + \Gamma A^+ = 0. \quad (5.8)$$

С учетом равенства  $\Gamma^+ = \Gamma$ , из соотношения (5.8) следует, что матрица  $A\Gamma$  является косоэрмитовой. После замены  $\phi(A) = A\Gamma$  стандартный коммутатор переходит в коммутатор  $[\cdot, \cdot]_{\Gamma^{-1}}$  (5.3):

$$\phi([A, B]) = [\phi(A), \phi(B)]_{\Gamma^{-1}}.$$

Преимущество такого подхода состоит в том, что при любых  $\Gamma_i$  алгебра (5.8) представляется на одном и том же пространстве косоэрмитовых матриц. Однако вместо стандартного коммутатора необходимо использовать  $[\cdot, \cdot]_{\Gamma^{-1}}$ . На соответствующей коалгебре  $u^*(p, q)$  в этом случае возникает пучок скобок Пуассона  $\{\cdot, \cdot\}_{\Gamma^{-1}}$ .

Линейные векторные поля, соответствующие операторам (5.8) в комплексной форме, имеют вид

$$\mathbf{v}_A = A\mathbf{z} = \phi(A)\Gamma^{-1}\mathbf{z}$$

и являются гамильтоновыми [2] с гамильтонианом

$$H_A = \frac{i}{2}(A\mathbf{z}, \mathbf{z})_\Gamma = \frac{i}{2}\bar{\mathbf{z}}^T A\Gamma\mathbf{z} = \frac{i}{2}(\phi(A)\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \frac{i}{2}\bar{\mathbf{z}}^T \phi(A)\mathbf{z}. \quad (5.9)$$

При этом коммутатору  $[\cdot, \cdot]_{\Gamma^{-1}}$  соответствует скобка  $\{\cdot, \cdot\}_{\Gamma^{-1}}$  функций Гамильтона:

$$\{H_{\phi(A)}(\mathbf{z}), H_{\phi(B)}(\mathbf{z})\}_{\Gamma^{-1}} = \frac{i}{2}([\phi(A), \phi(B)]_{\Gamma^{-1}}\mathbf{z}, \mathbf{z}). \quad (5.10)$$

Деля стандартное отождествление  $u(n)$  и  $u^*(n)$  при помощи формы  $\langle A, B \rangle = \text{Tr} AB$ , мы можем явно описать отображение момента  $\mu(\mathbf{z})$ :

$$\text{Tr} \mu(\mathbf{z})\phi(A) = \text{Tr} \frac{i}{2}\bar{\mathbf{z}}^T \phi(A)\mathbf{z} = \text{Tr} \left( \frac{i}{2}\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}^T \right) \phi(A).$$

Отсюда

$$\mu(\mathbf{z}) = \frac{i}{2} \mathbf{z} \bar{\mathbf{z}}^T = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} z_1 \bar{z}_1 & \cdots & z_1 \bar{z}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n \bar{z}_1 & \cdots & z_n \bar{z}_n \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Формула (5.11) определяет отображение на сингулярную симплектическую орбиту алгебры  $u(p, q)$  (относительно скобки  $[\cdot, \cdot]_{\Gamma^{-1}}$ ), которая определяется еще дополнительно, как поверхность уровня интеграла (1.4). В случае всех положительных (отрицательных) интенсивностей орбита топологически гомеоморфна  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , так как при отображении (5.11) склеиваются все точки вида  $e^{i\varphi} \mathbf{z}$  — орбиты действия, группы вращения (5.4). Интеграл (1.4)  $I = \sum \Gamma_i z_i \bar{z}_i$  является функцией Казимира, следовательно, выполнена редукция по нему.

На приведенном пространстве матриц (5.11) выполним редукцию по оставшимся интегралам  $P, Q$  (1.4). Вследствие их некоммутативности возможна редукция лишь на одну степень свободы. Постоянное векторное поле, соответствующее трансляции в направлении  $a = a_x + ia_y$ , порождается линейным гамильтонианом вида

$$H_a = (z, \Gamma a z_0) = (z, a z_0)_{\Gamma}.$$

Несложно показать, что гамильтонианы (5.9), коммутирующие с  $H_a$ , порождаются матрицами, для которых

$$A \Gamma z_0 = \phi(A) z_0 = 0.$$

То есть  $\phi(A)$  принадлежат подпространству  $L$ , определенному в предыдущем пункте (матрицы (5.11) этому пространству не принадлежат).

Теперь легко видеть, что квадраты взаимных расстояний и площадей также допускают естественное представление вида

$$\begin{aligned} M_{ij}(x, y) &= |z_i - z_j|^2 = i(M_{ij} \mathbf{z}, \mathbf{z}), \\ \Delta_{ijk}(x, y) &= i(\Delta_{ijk} \mathbf{z}, \mathbf{z}), \end{aligned}$$

где  $M_{ij}, \Delta_{ijk}$  — матрицы (5.2). Отображение момента  $\mu(\mathbf{z})$  в соответствующую алгебру  $u(p', q')$ ,  $p' + q' = n - 1$  имеет в этом случае вид

$$\mu(\mathbf{z}) = \frac{i}{2} \left( \mathbf{z} - \frac{(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) \Gamma \mathbf{z}_0}{\sum \Gamma_i} \right) \left( \bar{\mathbf{z}} - \frac{(\mathbf{z}, \mathbf{z}_0) \Gamma \bar{\mathbf{z}}_0}{\sum \Gamma_i} \right)^T. \quad (5.12)$$

Матрицы (5.12) удовлетворяют соотношению  $\mu(\mathbf{z})\mathbf{z}_0 = 0$ , т. е. принадлежат подпространству  $L$ , определенному в предыдущем пункте. В компактном случае соответствующая орбита гомеоморфна  $\mathbb{C}P^{n-2}$  и соответствует приведенному фазовому пространству при редукции на две степени свободы.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** (Ко)алгебра  $u(n)$  допускает линейную замену переменных  $h_i \mapsto h_i + \lambda D$ ,  $D = \sum_{i=1}^n h_i$ ,  $\lambda = \text{const}$ , сохраняющую коммутационные соотношения. При этом орбиты, задаваемые матрицами  $F \in u(n)$  ранга 1, отображаются в орбиты, для которых единичный ранг имеет матрица  $(A - \lambda D)$ .

Орбита, задаваемая соотношениями Герона (в компактном случае), после перехода от переменных  $M, \Delta$  к стандартным переменным алгебры  $u(n-1)$  оказывается именно среди указанных выше орбит при некотором  $\lambda$ .

#### 4. Канонические координаты приведенной системы

Опишем алгоритм построения канонических координат для приведенной системы  $n$  вихрей в случае компактной алгебры, т. е.  $(u(n-1))$ . Выше был указан способ приведения вихревой алгебры, (для этого случая) к стандартному представлению в виде косозермитовых  $(n-1) \times (n-1)$ -матриц с обычным матричным коммутатором (5.6):

$$A''_{n-1} = \begin{pmatrix} ih_1 & x_{12} + iy_{12} & \cdots & x_{1,n-1} + iy_{1,n-1} \\ -x_{12} + iy_{12} & ih_2 & \cdots & x_{2,n-1} + iy_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{1,n-1} + iy_{1,n-1} & -x_{2,n-1} + iy_{2,n-1} & \cdots & ih_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Зададим пуассоново отображение  $\mathbb{R}^{2(n-1)} \rightarrow u^*(n-1)$  на сингулярную орбиту  $u^*(n-1)$ , которую образуют матрицы ранга 1 (то есть любые их миноры  $2 \times 2$  равны нулю):

$$\begin{aligned} h_i &= p_i, \\ x_{ij} &= 2\sqrt{h_i h_j} \sin(\varphi_i - \varphi_j), \quad i, j = 1, \dots, n-1. \\ y_{ij} &= 2\sqrt{h_i h_j} \cos(\varphi_i - \varphi_j), \end{aligned} \tag{5.14}$$

Каноническая скобка  $\{\varphi_i, p_j\} = \delta_{ij}$  переходит в стандартную скобку Ли-Пуассона на  $u^*(n-1)$ . Орбита в переменных  $p_i, \varphi_i$  задается соотношением

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} = C = \text{const}.$$

Для введения на ней симплектических координат выполним каноническую замену

$$\begin{aligned} r_0 &= p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}, & s_0 &= \varphi_1, \\ r_1 &= p_2 + \cdots + p_{n-1}, & s_1 &= -\varphi_1 + \varphi_2, \\ & \vdots & & \vdots \\ r_{n-2} &= p_{n-2}, & s_{n-2} &= -\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Легко видеть, что отображение (5.14) не зависит от  $s_0$ , следовательно,  $s_1, \dots, s_{n-2}$ ,  $r_1, \dots, r_{n-2}$  задают симплектические координаты на  $2(n-2)$ -мерной орбите.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Обобщим здесь замечание Арефа [67] относительно того, что геометрический и бифуркационный анализ задачи трех вихрей, а также общие теоремы, доказанные в этом разделе, могут быть естественно перенесены на системы, в которых гамильтониан (энергия взаимодействия вихрей) не является логарифмическим. Например, в случае наличия свободной границы жидкости, впервые рассмотренном Стюартом [190], в гамильтониане вместо логарифмов возникают слагаемые вида  $\Gamma_i \Gamma_j K_0(l_{ij})$ ,  $i \neq j$ , где  $K_0$  является функцией Бесселя нулевого порядка. Иногда соответствующие вихри называют вихрями Бесселя. Эти системы возникают при исследовании движения вихрей в атмосфере Земли, при этом наиболее интересной моделью является взаимодействие хетонов, получающихся из условий геострофического приближения, т. е. вихрей нулевой суммарной интенсивности, но расположенных в различных слоях жидкости, взаимодействующих между собой. Эта модель подробно описана в работе [24]. Интересно было бы обобщить геострофическую вихревую модель на случай движения на сфере.

## § 6. Задача четырех вихрей на плоскости

### 1. Канонические приведенные координаты

При помощи описанного выше алгоритма укажем явно канонические координаты для задачи четырех вихрей равной интенсивности.

Координаты на алгебре  $u(3)$ , соответствующие матричному представлению вида (5.13)

$$A_3'' = \begin{pmatrix} ih_1 & x_3 + iy_3 & -x_2 + iy_2 \\ -x_3 + iy_3 & ih_2 & x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 & -x_1 + iy_1 & ih_3 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

согласно предыдущим рассуждениям, линейно выражаются через площади и квадраты расстояний:

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_r \delta_{(x_i)}^r \Delta_r(z), & y_i &= \sum_{k<l} m_{(y_i)}^{kl} M_{kl}(z), \\ h_i &= \sum_{k<l} m_{(h_i)}^{kl} M_{kl}(z), & i &= 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для определения коэффициентов  $\delta_{(x_i)}^k$ ,  $m_{(y_i)}^{kl}$ ,  $m_{(h_i)}^{kl}$  воспользуемся предложением 5.3 и матричной реализацией (5.2) элементов  $\Delta_r$ ,  $M_{kl}$ , где  $\Delta_1 = = \Delta_{234}$ ,  $\Delta_2 = -\Delta_{134}$ ,  $\Delta_3 = \Delta_{124}$ ,  $\Delta_4 = -\Delta_{123}$ . Выберем ортогональную матрицу  $C$ , приводящую матрицы вихревой алгебры (5.2) с помощью преобразования  $C^T A C$  к блочному виду (5.5), в следующей форме:

$$C = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Полагая затем одну из координат  $h_i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$  в получившейся матрице  $A_3$  равной 1, а остальные 0, и решая систему линейных уравнений, находим соответствующие коэффициенты  $\delta_{(x_i)}^k$ ,  $m_{(y_i)}^{kl}$ ,  $m_{(h_i)}^{kl}$ . В данном случае

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(-\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_4), & x_2 &= \frac{1}{4}(-\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + \Delta_4), \\ x_3 &= \frac{1}{4}(-\Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4), & y_1 &= \frac{1}{2}(M_{14} - M_{23}), \\ y_2 &= \frac{1}{2}(M_{13} - M_{24}), & y_3 &= \frac{1}{2}(M_{12} - M_{34}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{1}{4}(M_{12} + M_{34} + M_{13} + M_{24} - M_{14} - M_{23}), \\
h_2 &= \frac{1}{4}(M_{12} + M_{34} - M_{13} - M_{24} + M_{14} + M_{23}), \\
h_3 &= \frac{1}{4}(-M_{12} - M_{34} + M_{13} + M_{24} + M_{14} + M_{23}). \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Канонические координаты (5.15), которые обозначим  $(g, G, h, H)$ , задаются соотношениями

$$\begin{aligned}
x_1 &= -2\sqrt{(H-G)G} \sin g, & x_2 &= 2\sqrt{(D-H)G} \sin(h+g), \\
x_3 &= -2\sqrt{(D-H)(H-G)} \sin h, & y_1 &= 2\sqrt{(H-G)G} \cos g, \\
y_2 &= 2\sqrt{(D-H)G} \cos(h+g), & y_3 &= 2\sqrt{(D-H)(H-G)} \cos h, \\
h_1 &= D - H, & h_2 &= H - G, & h_3 &= G,
\end{aligned} \quad (6.5)$$

где  $D = \frac{D_0}{2 \sum \Gamma_i} = \frac{1}{4} \sum_{k < l} M_{kl}$  — константа функции Казимира  $u(3)$ , при этом  $0 < G < H < D$ .

Гамильтониан в новых переменных может быть представлен в форме

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ \ln((D-G)^2 - 4(D-H)(H-G) \cos^2 h) + \right. \\
&\quad + \ln((D-H+G)^2 - 4(D-H)G \cos^2(h+g)) + \\
&\quad \left. + \ln(H^2 - 4G(H-G) \cos^2 g) \right\}. \quad (6.6)
\end{aligned}$$

## 2. Сечение Пуанкаре. Неинтегрируемость и хаос

Согласно теореме 1.6 (см. § 1), значение интеграла момента можно зафиксировать (выберем  $D = 1$ ). Таким образом, в задаче четырех вихрей равной интенсивности существует лишь один параметр — значение интеграла энергии (гамильтониана).

Построим отображение Пуанкаре на плоскости  $(g, G)$  при различных значениях энергии  $E = \mathcal{H}(h, H, g, G)$ . В качестве секущей выберем плоскость  $H = 0.5$ . Пересечение данной плоскости с изоэнергетическим уровнем представляет собой довольно сложную поверхность. Поэтому отображение Пуанкаре лучше рассмотреть прямо на этой поверхности в трехмерном пространстве  $(g, \frac{G}{H}, h)$ . На рисунке 31 приведено такое отображение (рис. *a* и *b*) и поверхность, на которой оно строится (рис. *c* и *d*).

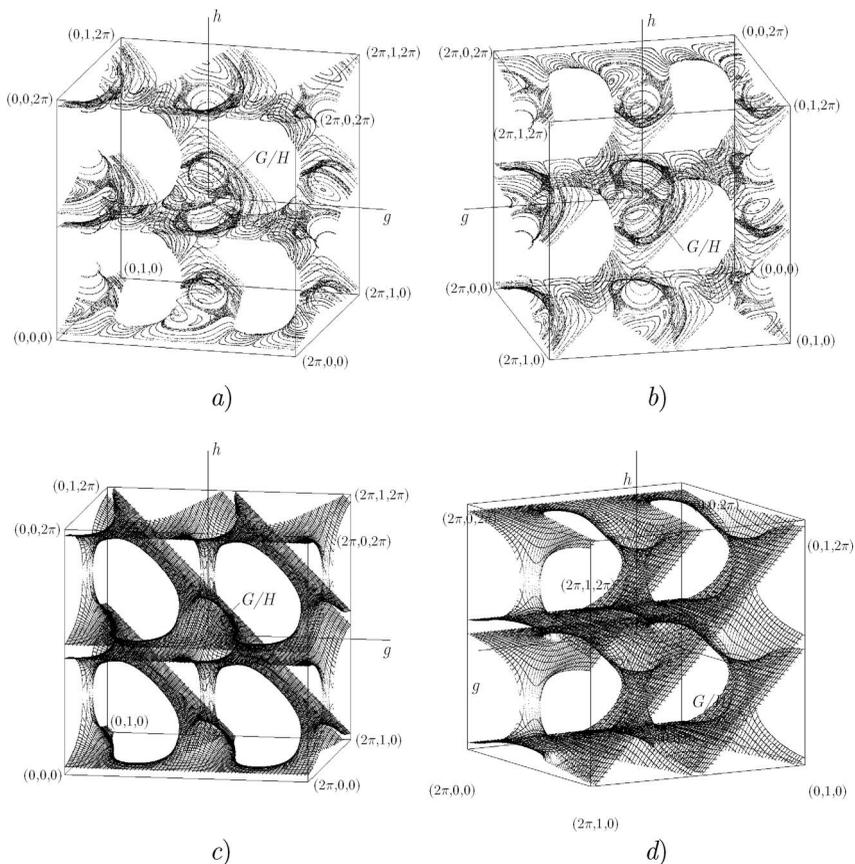


Рис. 31

Как уже указывалось, другой тип редукции проблемы четырех вихрей, допускающий обобщение на сферу и родственной редукции Якоби в небесной механике, рассмотрен в работах [11, 85]. В работе [10] с помощью этой редукции изучен один из сценариев перехода к хаосу в задаче четырех вихрей, связанный с бифуркациями удвоения периода (см. приложение 1).

## § 7. Относительные хореографии в задаче трех и четырех вихрей равной интенсивности

### 1. Относительные хореографии в задаче трех вихрей

Как было замечено в § 3, для системы трех вихрей на плоскости существует вращающаяся система координат, в которой все вихри движутся по замкнутым кривым. Для задачи трех вихрей равных интенсивностей оказывается, что справедливо существенно более сильное утверждение, которое приводит к существованию так называемых относительных хореографий.

Запишем уравнения движения и интегралы задачи для этого случая в форме

$$\begin{aligned} 2\pi\dot{M}_1 &= \Delta\left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_3}\right), & 2\pi\dot{M}_2 &= \Delta\left(\frac{1}{M_3} - \frac{1}{M_1}\right), \\ 2\pi\dot{M}_3 &= \Delta\left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}\right), \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$D = M_1 + M_2 + M_3, \quad h = M_1M_2M_3. \quad (7.2)$$

**Теорема 7.1.** *Если для заданной траектории интегралы движения удовлетворяют условию*

$$\frac{D^3}{54} < h \leq \frac{D^3}{27}, \quad (7.3)$$

*то существует вращающаяся система координат, в которой все три вихря движутся по одной и той же замкнутой кривой (см. рис. 32).*

Подобного рода решения для задачи трех тел в небесной механике были найдены недавно в работах [52, 158] и получили название *относительных хореографий*. Если траектория замкнута в неподвижном пространстве, такие решения называют *абсолютными хореографиями*, или просто *хореографиями*.

Таким образом, в задаче трех вихрей на плоскости все движения, удовлетворяющие условию (7.3), являются относительными хореографиями. На бифуркационной диаграмме (см. рис. 33) условию (7.3) соответствует область между томсоновской и коллинеарной бифуркационными кривыми.

Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

**Предложение 7.1.** *Если для какого-либо решения уравнений (7.1) существуют моменты времени  $t_1, t_2, t_3$ , такие, что выполнено равенство*

$$M_1(t_1) = M_2(t_2) = M_3(t_3),$$

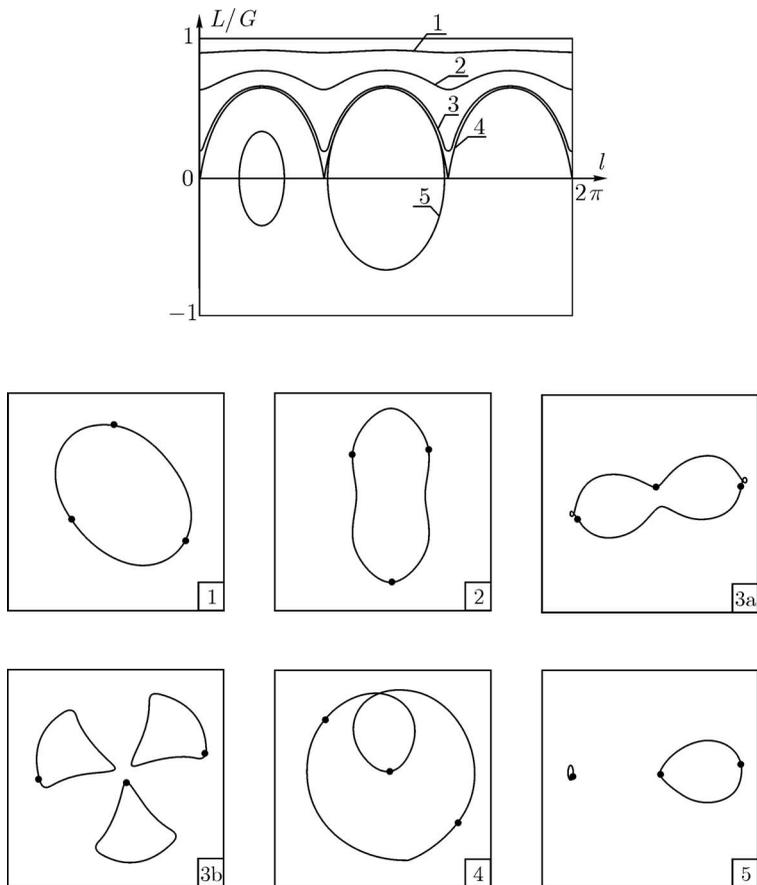
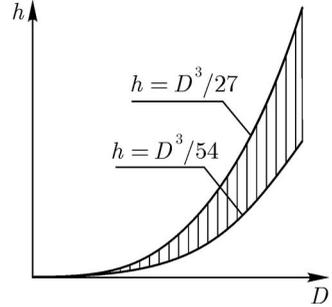


Рис. 32. Несколько траекторий на фазовом портрете для трех вихрей равной интенсивности  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$  и соответствующие им хореографические кривые во вращающейся системе координат. Для траектории 3 приведены два рисунка, соответствующие системам, вращающимся с различной угловой скоростью. Траектории 5 и всем траекториям «вдали» от томсоновской конфигурации соответствуют «несвязные хореографии», когда два вихря движутся по одной замкнутой кривой, а третий вихрь — по другой.

Рис. 33. Бифуркационная диаграмма задачи трех вихрей при равных интенсивностях вихрей ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$ ). Верхняя кривая соответствует томсоновским стационарным конфигурациям, а нижняя — коллинеарным.



то

$$M_1(t_1 + t) = M_2(t_2 + t) = M_3(t_3 + t) = f(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Получим уравнение, описывающее эволюцию одной из сторон вихревого треугольника  $M_i(t)$ . Из (7.2) для  $M_j$  и  $M_k$ ,  $j, k \neq i$ , находим

$$M_j = \frac{M_i(D - M_i) \pm \sqrt{M_i^2(D - M_i)^2 - 4hM_i}}{2M_i},$$

$$M_k = \frac{M_i(D - M_i) \mp \sqrt{M_i^2(D - M_i)^2 - 4hM_i}}{2M_i}.$$
(7.4)

Выражая из формулы Герона  $\Delta = \Delta(M_i)$  и подставляя в (7.1), получим уравнение первого порядка вида

$$\dot{M}_i = G_{\pm}(M_i), \quad i = 1, 2, 3,$$
(7.5)

где функция  $G_{\pm}$  не зависит от номера  $i$ . Вследствие теоремы единственности и автономности уравнения (7.5), получаем доказательство предложения. ■

Используя уравнение (7.5), можно показать, что при выполнении условия (7.3) все взаимные расстояния трех вихрей удовлетворяют условиям предложения 7.1. Заметим также, что в случае  $h < \frac{D^3}{54}$  только пара из трех расстояний удовлетворяет условию  $M_1(t_1) = M_2(t_2)$ .

**Предложение 7.2.** Если при условии (7.3) существуют такие моменты времени  $t_1, t_2$ , что для некоторого решения уравнений (7.1) периода  $T$

выполнено равенство

$$M_1(t_1) = M_2(t_2),$$

то при этом выполняются также равенства

$$M_2(t_1) = M_3(t_2), \quad M_3(t_1) = M_1(t_2)$$

и, кроме того,

$$t_2 - t_1 = \frac{nT}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Первая часть предложения следует из соотношений (7.4), выражающих любые две стороны через одну при фиксированных значениях интегралов  $h$  и  $D$ . Кроме того, из вида фазового портрета (см. рис. 32,3а) следует, что при условии (7.3) ориентированная площадь  $\Delta$  сохраняет знак в процессе движения, поэтому треугольник вихрей не меняет ориентацию.

Таким образом, в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  вихри образуют равные и одинаково ориентированные треугольники с точностью до циклической перестановки вершин. Поскольку все вихри одинаковы, время  $t_2 - t_1$  не зависит от расстановки вихрей (с заданными номерами) в вершинах треугольника, и, очевидно, оно может быть лишь кратным трети полного периода движения, т. е.

$$t_2 - t_1 = \frac{T}{3}n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.1.

Согласно предложениям 7.1, 7.2, при фиксированных  $h$  и  $D$ , удовлетворяющих условию (7.3), решение уравнений (7.1) удовлетворяет соотношениям

$$M_1(t) = f(t), \quad M_2(t) = f(t + T/3), \quad M_3(t) = f(t + 2T/3) \quad (7.6)$$

либо

$$M_1(t) = f(t), \quad M_2(t) = f(t + 2T/3), \quad M_3(t) = f(t + T/3),$$

т. е. вихри вращаются по часовой или против часовой стрелки через треть периода, образуя один и тот же треугольник, что и в начале.

Используя соотношения (3.41)–(3.46) с учетом (7.6), несложно убедиться, что

$$z_k(t) = \frac{Q + iP}{\sum \Gamma_i} + u(t + (k-1)T/3)e^{i\Omega t}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где  $u(t)$  — комплекснозначная  $T$ -периодическая функция. Следовательно, все вихри в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , движутся по одной и той же кривой, задаваемой функцией  $u(t) \in \mathbb{Z}$ , со сдвигом по времени на одну треть периода. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Угловая скорость вращения системы координат задается соотношением

$$\Omega = \frac{3\tilde{f}_0}{4\pi},$$

где  $\tilde{f}_0$  — нулевая гармоника в разложении в ряд Фурье функции  $f^{-1}(t)$  в соотношениях (7.6).

Аналогично можно показать, что для всех остальных движений ( $h < D^3/54$ ), за исключением асимптотических, можно выбрать систему координат, в которой два вихря движутся по одной и той же замкнутой кривой, а третий — по другой.

## 2. Хореографии в задаче трех вихрей на сфере

Для случая сферы, обобщая рассуждения предыдущего раздела, также несложно доказать следующую теорему.

**Теорема 7.2.** *Для всякого решения задачи трех вихрей, для которого интегралы движения  $h, D$  (7.2) принадлежат области  $C_1$  (см. рис. 34), существует (вращающаяся) система координат, в которой вихри движутся по одной замкнутой кривой (см. рис. 35а–е).*

*Если  $h, D \in C_2$  (см. рис. 34), то существует подвижная система координат, в которой два вихря движутся по одной замкнутой кривой, а третий — по другой (см. рис. 35f, g).*

## 3. Относительные хореографии в задаче четырех вихрей на плоскости

В отличие от задачи трех вихрей, система четырех вихрей (равных интенсивностей) на плоскости не является интегрируемой, поэтому ее решения не допускают достаточно полного описания. Методом, описанным в § 3 (см. раздел «Абсолютное движение и адвекция»), можно показать, что периодическим решениям приведенной системы соответствуют такие движения вихрей в абсолютном пространстве, что в некоторой вращающейся системе координат все вихри движутся по замкнутым кривым. Если эти кривые для каждого вихря одинаковы и переводятся друг в друга поворотом относительно центра завихренности, то существует также вращающаяся система

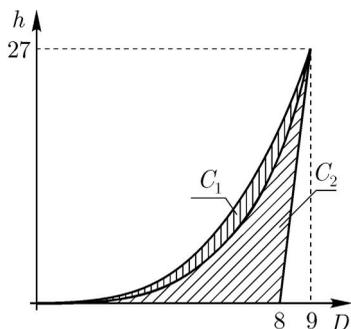


Рис. 34. Бифуркационная диаграмма задачи трех тел равной интенсивности ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$ ,  $R = 1$ ) на сфере. Заштрихованы области возможных значений интегралов. Верхняя кривая соответствует томсоновской стационарной конфигурации, а две другие — коллинеарным.

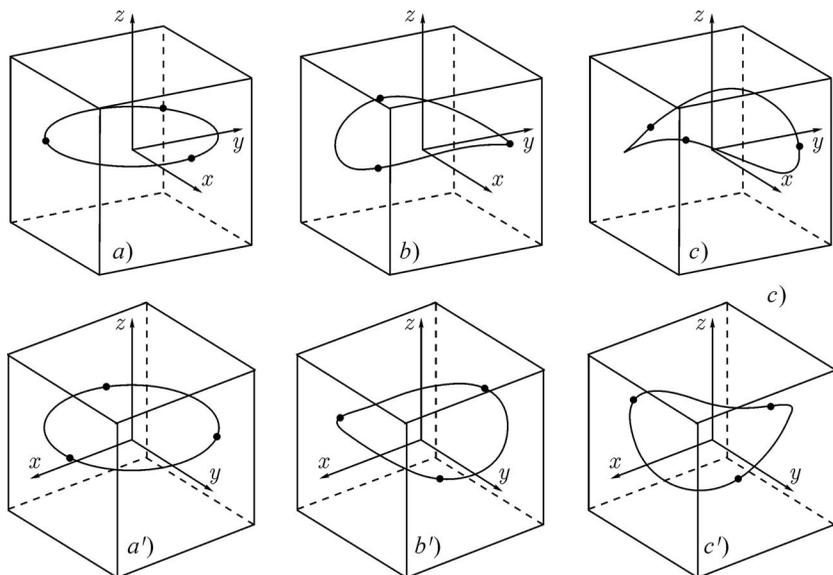


Рис. 35. Пространственные относительные хореографии в задаче трех вихрей на сфере, показанные с двух разных точек зрения ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$ ,  $D = 8.75$ ,  $R = 1$ ). Рисунки *a)–e)* соответствуют связным хореографиям, *f)–g)* — несвязным. Фазовый портрет приведенной системы в этом случае аналогичен плоскому (см. рис. 32). От *a)* к *g)* значение постоянной энергии увеличивается (упорядочение аналогично рис. 32). Продолжение см. на стр. 119.

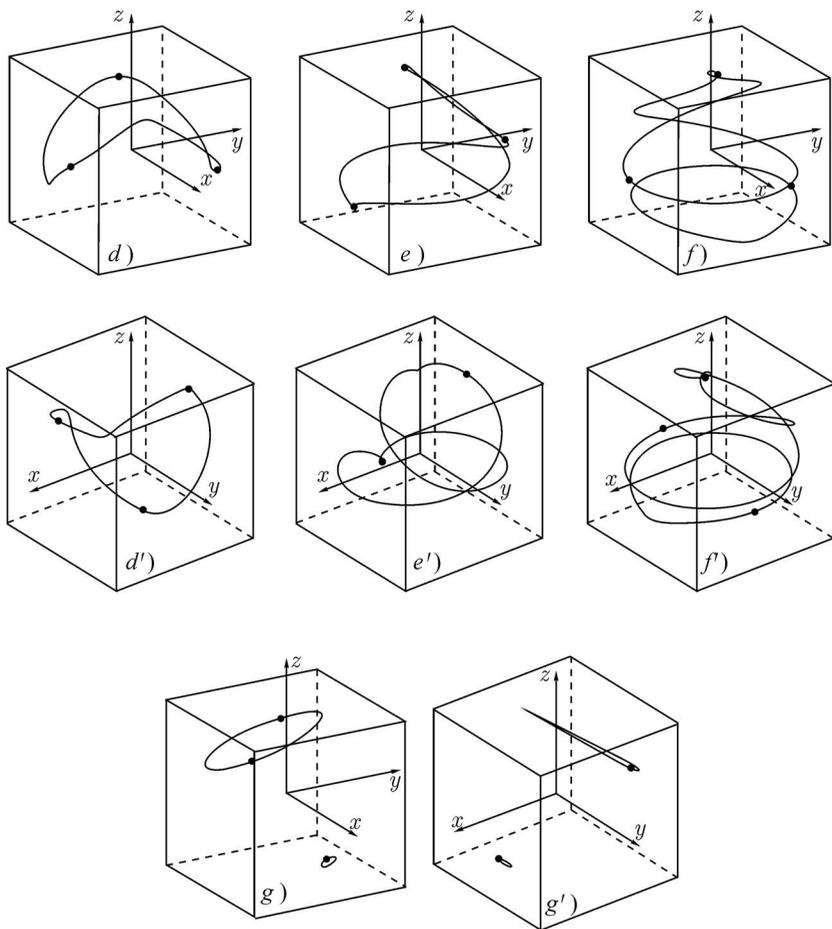


Рис. 35. Продолжение.

координат, в которой вихри движутся по одной и той же кривой, т. е. образуют относительную хореографию. Кроме этого, в задаче четырех вихрей возможны также несвязные относительные хореографии, когда вихри парами движутся по двум различным замкнутым кривым, когда три вихря движутся по одной замкнутой кривой, а четвертый по другой, когда вихри движутся по трем различным замкнутым кривым, и самый крайний случай, когда каждый вихрь движется по своей, отличной от других замкнутой кривой.

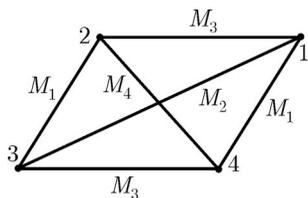


Рис. 36

Рассмотрим сначала частный случай, для которого решение может быть построено аналитически (так называемое решение Горячева). Пусть в начальный момент времени вихри располагаются в вершинах параллелограмма (рис. 36). Как было показано в § 4, в этом случае вихри образуют параллелограмм во все моменты времени. Воспользуемся результатами § 4 и запишем интеграл (1.14) и инвариантное соотношение для этого случая:

$$\begin{aligned} D_0 &= 2(M_1 + M_3) + (M_2 + M_4), \\ 0 &= 2(M_1 + M_3) - (M_2 + M_4). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} 2(M_1 + M_3) &= a, & 2(M_1 - M_3) &= x, \\ M_2 + M_4 &= b, & M_2 - M_4 &= y, \end{aligned} \quad (7.8)$$

где  $x \in [-a, a]$ ,  $y \in [-b, b]$ .

Как следует из (7.7),  $a = b$ , при этом интеграл «энергии»  $h = e^{-4\pi E}$  запишется в форме

$$h = \left( \frac{a^2 - x^2}{16} \right)^2 (a^2 - y^2), \quad (7.9)$$

а траектория на плоскости  $(x, y)$  представляет собой замкнутую кривую (рис. 37). Кроме того, физическая область на плоскости ограничена также кривой  $\Delta^2 = 0$ , которая в данном случае задается выражением

$$a^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

При достижении границы ( $\Delta = 0$ ) точка отражается от нее и движется по той же траектории в обратном направлении, при этом происходит смена ориентации площади параллелограмма.

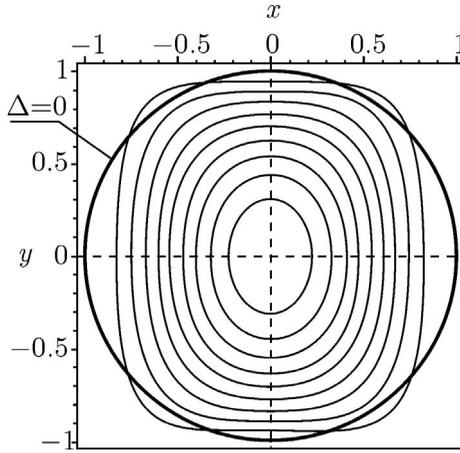


Рис. 37. Траектория приведенной системы для центрально-симметричного решения при равных интенсивностях вихрей.

Прямая  $x = 0$  на рисунке 37 соответствует случаю, когда параллелограмм становится ромбом, а  $y = 0$  — параллелограмму с равными диагоналями. Точка  $x = y = 0$  соответствует квадрату, т. е. томсоновской конфигурации.

Можно показать, что для траекторий на рисунке 37, которые не достигают границы  $\Delta = 0$  (в этом случае энергия меньше некоторого критического значения  $E < E_C$ , соответствующего стационарной коллинеарной конфигурации), существуют моменты времени  $t_1, t_2$ , такие, что

$$M_1(t_1) = M_3(t_2).$$

Пользуясь методом предыдущего раздела (см. предложения 7.1, 7.2 и теорему 7.1), несложно показать, что этим решениям приведенной системы соответствуют относительные конфигурации в абсолютном пространстве (см. рис. 38). Если  $E > E_C$ , то траектория достигает границы  $\Delta = 0$ , а хореографии становятся несвязными.

Из приведенных рассуждений следует, что решение в форме параллелограмма рождается из томсоновской конфигурации четырех вихрей (т. е. решение в виде квадрата, которое является неподвижной точкой приведенной системы, см. рис. 37). Как показывают численные исследования, вблизи томсоновской конфигурации при увеличении энергии, помимо «паралле-

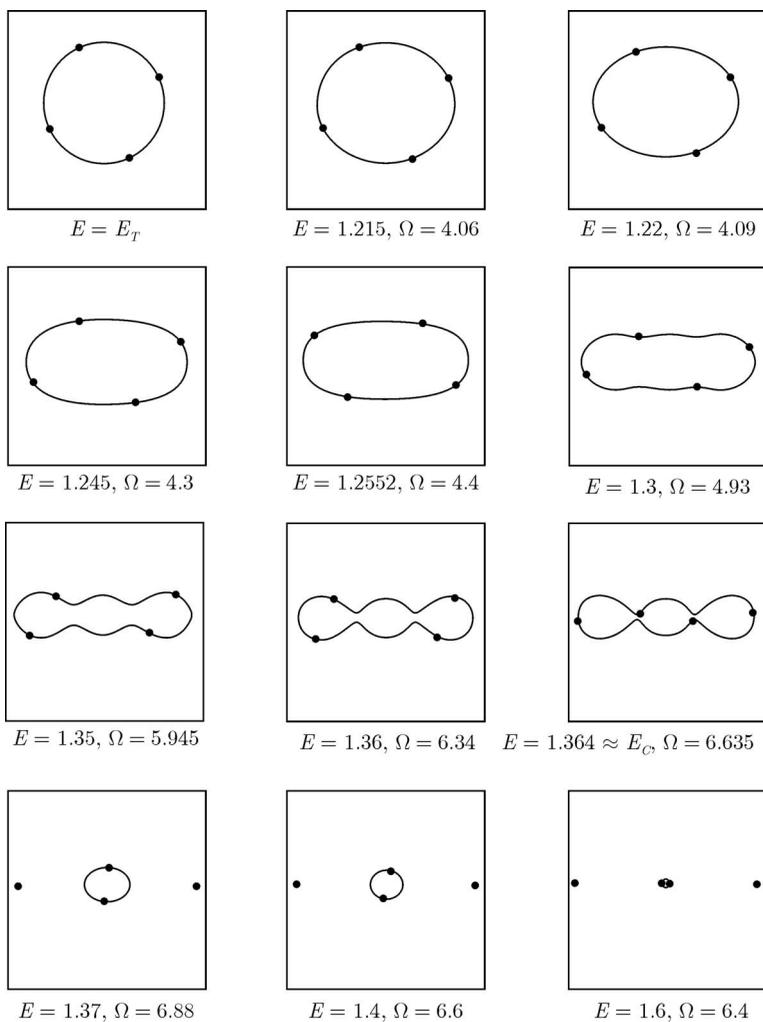


Рис. 38. Относительные хореографии центрально-симметричного решения (параллелограмм). Как видно из рисунка, это решение рождается из томсоновской конфигурации ( $E = E_T$ ), и при дальнейшем увеличении энергии хореография теряет связность, проходя через коллинеарную конфигурацию ( $E = E_C$ ).

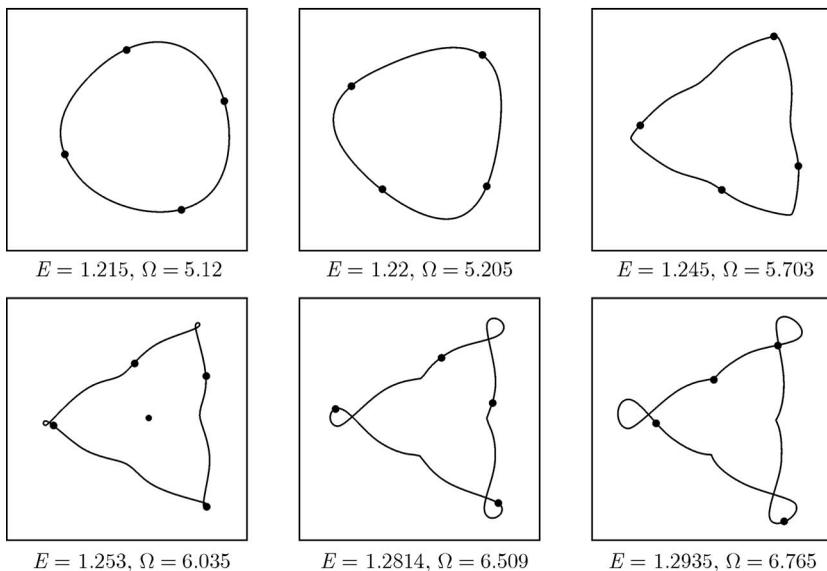


Рис. 39. Относительная хореография (отличная от центрально-симметричной), рождающаяся из томсоновского решения. Видно, что с увеличением энергии теряется гладкость кривой и появляются самопересечения. (Получается методом продолжения по параметру — энергии.)

лограмного», рождается еще одно устойчивое периодическое решение, которое также задает относительную хореографию (рис. 39) (по-видимому, оно не описывается никакими явными аналитическими формулами); при дальнейшем увеличении  $E$  оно теряет устойчивость при  $E_* \approx 1.26$ .

Кроме этих периодических решений на фазовом портрете выделяются также периодические решения, рождающиеся вблизи особенностей, в которых слиты вместе три вихря. Эти периодические решения приводят к несвязным относительным хореографиям, в которых три вихря движутся по одной замкнутой кривой, четвертый — по другой (см. рис. 40).

Помимо этого, на фазовом портрете существуют дополнительные (коротко)периодические решения приведенной системы, которые пока слабо изучены. Им соответствуют несвязные относительные хореографии, некоторые из которых приведены на рисунке 41.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Укажем также начальные условия для пары периодических решений в случаях хореографий, приведенных на рис. 39, 40. Остальные периодические решения получаются продолжением по энергии.

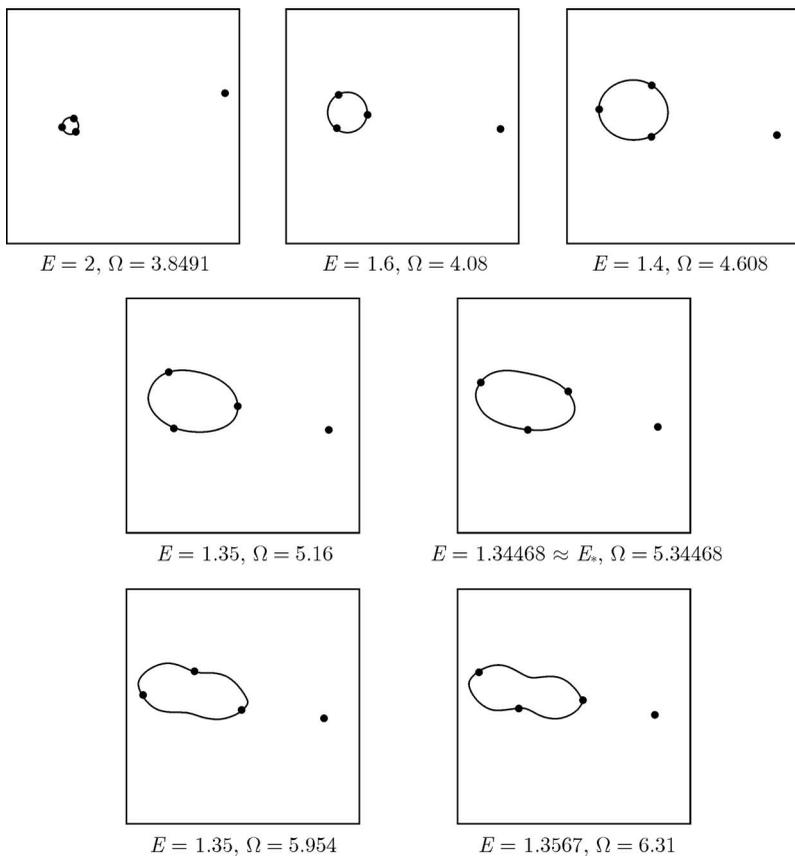
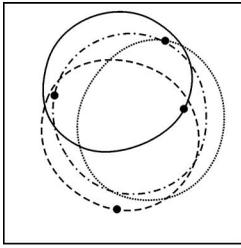
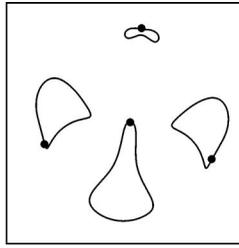


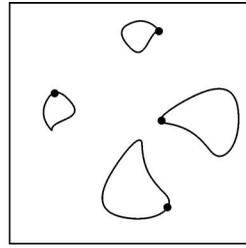
Рис. 40. Несвязная относительная хореография, соответствующая устойчивому периодическому решению (приведенной системы), рождающемуся вблизи особенности ( $E \rightarrow \infty$ ), в которой сливаются три вихря. При уменьшении энергии это решение исчезает, слившись при  $E = E_*$  с неустойчивым периодическим решением (приведенной системы), которому соответствуют хореографии с невыпуклой кривой (последние два рисунка). (Эти решения получаются методом продолжения по параметру — энергии.)



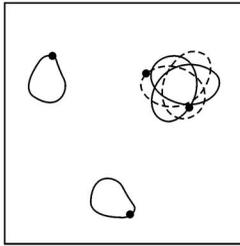
$$E = 1.245, g = 3.9910, \\ G = 0.0749, \Omega = 1.67$$



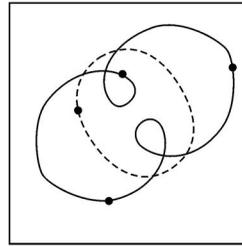
$$E = 1.2552, g = 3.7071, \\ G = 0.0883, \Omega = 8.03$$



$$E = 1.2552, g = 3.4601, \\ G = 0.0426, \Omega = 8.16$$



$$E = 1.293, g = 6.2064, \\ G = 0.3999, \Omega = 7.11$$



$$E = 1.3, g = 4.9172, \\ G = 0.2550, \Omega = 3.68$$

Рис. 41. Различные относительные хореографии задачи четырех вихрей. Приведены также начальные условия в переменных (6.4), (6.5), соответствующие периодическим решениям приведенной системы ( $D_0 = 1, H = 0.5$ ).

1) Для хореографии на первом из рисунков 39 имеем

$$D_0 = 1, E = 1.215, H = 0.5, g = 4.977537, G = 0.003149.$$

2) Для хореографии на первом из рисунков 40 имеем

$$D_0 = 1, E = 2, H = 0.5, g = 3.32352, G = 0.319208.$$

Переменные  $D_0, E, H, g, G, h$  приведены в § 6, см. (6.4), (6.5). Начальное значение неизвестной  $h$  находится из уравнения

$$\mathcal{H}(D_0, g, G, H, h) = E,$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан (6.6).

#### 4. Исторические комментарии

Указанные решения задачи трех и четырех вихрей имеют интересные аналогии в задаче трех, четырех и  $n$  тел из небесной механики. В 1975 г. Хенон в [115] указал периодические орбиты задачи трех тел с равными массами, рождающиеся из хорошо известных решений Шубарта (для которых три одинаковых тела периодически движутся по одной прямой). При этом тела во вращающейся системе координат описывают различные замкнутые кривые (в современной терминологии, образуют несвязные относительные хореографии).

В 1993 году К. Мур [158] указал при помощи численных экспериментов новые решения задачи трех тел одинаковой массы. Для одного из решений тела с одинаковым сдвигом по времени (равными трети периода) описывают одну и ту же кривую вида восьмерки. Это решение было перетворено в 1999 г. А. Шенсине и Р. Монтгомери [104], которые дали также доказательство ее существования, используя вариационные методы. Аналогичное решение для  $n = 4$  было найдено Джервером, а для достаточно больших  $N - K$ . Симо, который также численно показал устойчивость «восьмерки» для трех тел. К. Симо ввел удачный термин «хореографии» для таких периодических решений. Большинство посвященных хореографиям работ (до 2001 года), переведенных на русский язык, собраны в книге [52]. Более новые работы можно найти на интернет-сайтах К. Симо<sup>2</sup> и А. Шенсине<sup>3</sup>.

Насколько нам известно, хореографии системы точечных вихрей на плоскости и сфере ранее не изучались, и результаты по ним изложены в [14] (К. Симо рассматривал только проблему  $n$  тел с логарифмическим потенциалом взаимодействия).

Оказывается [88, 89], что в проблеме трех и четырех вихрей на  $\mathbb{R}^2$  и  $S^2$  кроме относительных существуют также абсолютные хореографии, когда вихри описывают одну и ту же кривую не во вращающейся системе координат, а в абсолютном пространстве (см. приложения 2, 3). Эти движения наиболее замечательны и существенно отличаются от соответствующих хореографий в небесной механике.

Отметим кстати, что до сих пор не исследована возможность существования хореографий в небесной механике в пространствах постоянной кривизны ( $S^3$  — трехмерная сфера,  $L^3$  — пространство Лобачевского). Как известно [15], в этом случае также имеются эйлеровы и лагранжевы стационарные конфигурации, но они существенно более разнообразны.

---

<sup>2</sup><http://www.maia.ub.es/dsg/preprints.html>

<sup>3</sup>[http://www.bdl.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chen\\_preprint.html](http://www.bdl.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chen_preprint.html)

## § 8. Стационарные и статические конфигурации вихрей на плоскости и сфере. Аналогия с задачей $n$ тел

### 1. Стационарные конфигурации на плоскости

**Теоремы Палмора и О'Нейла.** Приведенные в § 1 формы уравнений динамики вихрей на плоскости и на сфере могут быть использованы для нахождения *стационарных конфигураций*, являющихся частными решениями уравнений движения.

Стационарные конфигурации  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  выделяются условием на координаты  $z_i$  и скорости  $2\pi \frac{dz_k}{dt} = V_k = \frac{1}{i} \sum_{j \neq k} \Gamma_j (\bar{z}_k - \bar{z}_j)^{-1}$  вида

$$V_i - V_j = \frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_j}{dt} = \omega(z_i - z_j), \quad \forall \quad i, j,$$

что означает сохранение отношений расстояний  $\frac{|z_i - z_j|}{|z_k - z_i|}$  во время движения. К стационарным конфигурациям относятся:

- а) *положения равновесия*  $V_1 = \dots = V_n = 0$ ;
- б) *твердотельные трансляции*  $V_1 = \dots = V_n = V \neq 0$ ,  $V = \text{const}$ , при которых все вихри движутся с одной постоянной скоростью;
- в) *относительные равновесия*, при которых вихри вращаются вокруг некоторого центра  $z_0$  (центра завихренности) как твердое тело с постоянной угловой скоростью  $\omega$

$$V_k = i\omega(z_k - z_0), \quad k = 1, \dots, n;$$

- г) *конфигурации коллапса*, для которых все вихри стремятся к центру завихренности  $z_0$ , а расстояния между ними уменьшаются таким образом, что конфигурация остается геометрически подобной начальной.

Напомним некоторые обозначения § 1:

$$\sigma = \sum \Gamma_i, \quad K = \sum \Gamma_i z_i, \quad L = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j, \quad z_0 = K/\sigma.$$

Часто под стационарными конфигурациями понимают только относительные равновесия, называя положения равновесия также *статическими конфигурациями*. В дальнейшем мы будем пользоваться этой общепринятой в механике терминологией. Легко показать, что

**Лемма 8.1.** *Каждое положение равновесия удовлетворяет условию  $L = 0$ , а для каждой твердотельной трансляции необходимо выполнение равенства  $\sigma = 0$ .*

Остановимся более подробно на вопросах, связанных с количеством стационарных и статических конфигураций. С помощью топологических методов, восходящих к Смейлу [53] и Палмору [171], в работе [166] О'Нейлом была доказана теорема

**Теорема 8.1.** *Для почти всех циркуляций  $\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ , удовлетворяющих условию  $L = 0$  (соответственно,  $\sigma = 0$ ), существует ровно  $(n - 2)!$  (соответственно,  $(n - 1)!$ ) положений равновесия (соответственно, твердотельных конфигураций).*

В работе [166] О'Нейл также усилил результаты Палмора относительно обобщения небесномеханической теоремы Мультона [160] о числе стационарных коллинеарных конфигураций. Напомним: теорема Мультона утверждает, что в задаче  $n$  тел, взаимодействующих по ньютоновскому закону, на уровне интеграла момента имеется ровно  $\frac{n!}{2}$  коллинеарных конфигураций различных масс, соответствующих относительным равновесиям.

Эта теорема была доказана Мультоном [160] даже для более общего случая, когда коллинеарная конфигурация не стационарна, а пульсирует (при этом каждая из масс движется по эллипсу). Доказательство Мультона вполне естественное. Оно опирается на индукцию при переходе от  $n$  масс к  $(n + 1)$  массе, причем  $(n + 1)$ -я масса первоначально предполагается «нулевой». Центральное место в доказательстве Мультона при этом отводится исследованию условий невырожденности, при которых  $(n + 1)$ -я масса принимает уже конечное «фиксированное» значение. Эта задача из теории определителей показывает существенность условия, что все массы являются положительными.

С.Смейл в работе [53] дал топологическую интерпретацию частного случая теоремы Мультона (для чисто стационарных конфигураций), используя при этом одну естественную общую гипотезу, которая, видимо, до сих пор не вполне доказана.

Пользуясь соображениями Смейла, Палмор [171] показал, что *теорема Мультона остается справедливой для точечных вихрей в случае знакоопределенности всех циркуляций, например  $\Gamma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

Обобщение О'Нейла состоит в том, что для случая  $L \geq 0$  введение одной отрицательной циркуляции, например  $\Gamma_n < 0$ , приводит к тому, что число коллинеарных конфигураций становится не меньше, чем  $S(n - 2)!$ , где  $S$  обозначает число пар  $(l, n)$ , таких, что  $\Gamma_l + \Gamma_n > 0$ .

Кроме того, для любых циркуляций (при  $\sigma \neq 0$ ,  $L \neq 0$ ) число коллинеарных конфигураций оказывается не большим, чем  $\frac{n!}{2}$  [166].

Напомним, что доказательства подобных утверждений топологическими методами (впервые примененными Смейлом в [53]) основывается на представлении относительных равновесий как критических точек гамильтониана на уровне интеграла момента  $I = \sum \Gamma_i |z_i|^2$  и при условии перехода в систему центра завихренности  $z_0 = 0$ .

Действительно, запишем гамильтониан системы в виде

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln |z_i - z_j|^2.$$

Его производная Ли вдоль вектора  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  равна

$$\begin{aligned} dH(\mathbf{v}) &= - \sum_{l < j} \frac{\Gamma_l \Gamma_j}{|z_l - z_j|^2} (z_l - z_j, v_l - v_j) = - \sum_{i \neq j} \frac{\Gamma_l \Gamma_j}{|z_l - z_j|^2} (z_l - z_j, v_l) = \\ &= - \sum_i \Gamma_l \left( \sum_j' \frac{\Gamma_j}{\bar{z}_l - \bar{z}_j}, v_l \right) = - \sum_i \Gamma_l \left( \frac{V_l}{i}, v_l \right), \end{aligned}$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — обычное скалярное произведение векторов (т.е.  $(u, v) = \operatorname{Re}(\bar{u}, v)$ ). Умножая обе части условия стационарности

$$V_l = i\omega z_l \tag{8.1}$$

на  $\Gamma_l \bar{z}_l$  и суммируя, получим  $\omega = \frac{L}{8I}$ , где  $I = \sum \Gamma_l |z_l|^2$ . Кроме того, введем новый приведенный гамильтониан

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2} \sum_{l < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln \left[ \frac{|z_l - z_j|^2}{|I|} \right] = H + \frac{1}{2} L \ln |I|. \tag{8.2}$$

Его производная равна

$$D\tilde{H}(\mathbf{v}) = DH(\mathbf{v}) + \frac{1}{2} \frac{L}{S} DS(\mathbf{v}) = - \sum \Gamma_l \left( \frac{V_l}{i} - \frac{L}{I} z_i, v_i \right).$$

Учитывая теперь равенство  $\omega = \frac{L}{I}$ , мы видим, что условие (8.1) для стационарных конфигураций как раз эквивалентно условию на критические точки функции  $\tilde{H}(z)$ .

Для того чтобы эти точки были невырожденными, необходимо перейти в систему центра завихренности, зафиксировать момент  $I$  и профакторизовать систему по действию однопараметрической группы симметрий, определяемой  $I$  (т. е. поворотом вокруг центра завихренности). При этом, как заметил Смейл, мы от первоначального фазового пространства  $\mathbb{C}^n$  перейдем к приведенному пространству  $\mathbb{C}P^{n-2} \setminus \Delta$ , представляющему собой комплексное проективное пространство с исключенной диагональю

$$\Delta = \{z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^n, z_i, z_j, i \neq j\},$$

соответствующей совпадению координат пары вихрей. Этот результат получен нами в § 5 несколько другим, более алгебраическим, образом.

Теперь доказательство сформулированного выше обобщения теоремы Мультона (при  $\Gamma_i > 0$ ) сводится к тому, что  $\mathbb{R}P^{n-2} \setminus \Delta$  имеет  $\frac{n!}{2}$  компонент связности, а элементарная теория Морса исключает существование двух невырожденных критических точек (максимумов) функции (8.2) на одной компоненте. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Условиями стационарности вихревых конфигураций являются требования сохранения  $N(N-1)/2$  взаимных расстояний:  $\dot{M}_{ij} = 0$ . В относительных переменных они имеют одну и ту же форму как для конфигураций на плоскости, так и на сфере:

$$\sum_{l=1}^N \left( \frac{1}{M_{il}} - \frac{1}{M_{jl}} \right) \Gamma_l \Delta_{ijl}(M) = 0. \quad (8.3)$$

Зависимость  $\Delta_{ijk}$  от  $M_{ij}$  определяется функциями уравнениями (1.7) и (1.8) (либо (2.9), (2.12)).

Вопрос о количестве произвольных стационарных конфигураций еще далек от разрешения. Напомним, что в классической небесной механике до сих пор не доказана гипотеза о конечности стационарных конфигураций для почти всех значений масс, восходящая к Уинтнеру [57]. В вихревой динамике даже для правильной формулировки соответствующей гипотезы, видимо, необходимы некоторые ограничения, связанные со знакоопределенностью интенсивностей. Действительно, в работе [177] указан «контрпример» к гипотезе Уинтнера, для которого в задаче пяти тел имеется континуум стационарных состояний, при этом, однако, одна из масс является отрицательной.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для динамики точечных вихрей на сфере очень сложно найти какие-либо простые аналоги сформулированных утверждений. Как и в обычной небесной механике, в пространствах постоянной кривизны имеются существенные

сложности при исследовании коллинеарных и статических конфигураций. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить существующие конфигурации для задачи трех вихрей, рассматриваемой на плоскости и на сфере, где количество конфигураций зависит также от величины момента  $D$ .

**Коллинеарные конфигурации одинаковых вихрей.** Рассмотрим более подробно коллинеарные конфигурации *одинаковых* точечных вихрей, для которых они неподвижно располагаются на некоторой прямой, вращающейся равномерно вокруг центра завихренности.

Координаты  $(x_1, \dots, x_N)$  вихрей в коллинеарной конфигурации удовлетворяют следующей системе нелинейных уравнений

$$\lambda x_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{x_i - x_j}, \quad \lambda = \frac{2\pi\omega}{\Gamma}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8.4)$$

Без ограничения общности положим  $\lambda = 1$ . Решение  $(x_1, \dots, x_N)$  системы (8.4) мы выберем в качестве корней полинома

$$P(x) = (x - x_1) \dots (x - x_N).$$

Очевидно, что

$$P' = P \sum_{i=1}^N \frac{1}{x - x_i}, \quad P'' = 2P \sum_{i < j}^N \frac{1}{x - x_i} \frac{1}{x - x_j}.$$

Поэтому

$$P'' = 2P \sum_{\alpha=1}^N \frac{x_\alpha}{x - x_\alpha} = -2NP + 2xP'. \quad (8.5)$$

Этому дифференциальному уравнению удовлетворяют полиномы Эрмита  $H_N(x)$ , т. е. имеется связь между координатами вихрей в коллинеарных конфигурациях с нулями ортогональных полиномов. Она впервые была замечена Стилтесом (1885 г.) [191] и независимо указана многими авторами (см. также [96]). Коллинеарные конфигурации  $N$  одинаковых вихрей неустойчивы при  $N \geq 3$ . Это может быть установлено из анализа линейной системы; соответствующие вычисления имеются в [91] (см. также [68]).

Отметим, что решения системы (8.4) при  $\lambda = 1$  являются также положениями равновесия натуральной системы с гамильтонианом

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + U_1(q), \quad U_1(q) = \frac{1}{2} \sum q_i^2 - \sum_{j < k} \ln |q_j - q_k|. \quad (8.6)$$

Эта связь впервые была замечена Калоджеро [96] (см. также [95]), который показал также, что корни уравнения

$$x_j = \sum_{j \neq k}^N \frac{1}{(x_j - x_k)^3}, \quad (8.7)$$

соответствующие положениям равновесия гамильтоновой системы

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + U_2(q),$$

$$U_2(q) = \frac{1}{2} \sum q_i^2 + \sum_{j < k} (q_j - q_k)^{-2}, \quad (8.8)$$

являются также корнями (8.4), (8.6).

Отметим, что системы (8.6), (8.8), которые при произвольном  $\lambda$  могут быть записаны в виде

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \frac{1}{2} \lambda \sum q_i^2 - \sum_{j < k} \ln |q_j - q_k|, \quad (8.9)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + \frac{1}{2} \lambda \sum q_i^2 + \sum (q_j - q_k)^{-2}, \quad (8.10)$$

не являются интегрируемыми, исключая систему (8.10) при  $\lambda = 0$ . В этом случае мы имеем частный случай хорошо известной системы Калоджеро–Мозера [90].

**Лос-Аламосский каталог и симметричные конфигурации.** Некоторые стационарные конфигурации, обладающие дискретными симметриями, были известны еще В. Кельвину, Дж. Дж. Томсону и Т. Хавелоку. В. Кельвин и Дж. Дж. Томсон изучали равномерно вращающиеся (с угловой скоростью  $\omega$ )  $N$ -угольники, в вершинах которых располагаются вихри одинаковой интенсивности  $\Gamma$  [195]. При этом

$$z_\alpha = R_0 e^{\frac{-2\pi i(\alpha-1)}{N}}, \quad \omega = \frac{\Gamma(N-1)}{4\pi R_0^2}, \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

где  $R_0$  — «радиус» томсоновской конфигурации. Эти конфигурации оказались устойчивыми при  $N \leq 7$  и неустойчивыми при  $N > 7$  (см. [40]).

В работе [154] проведен линейный анализ устойчивости полигональных конфигураций при наличии произвольного центрального вихря. Мы приведем здесь только один результат по устойчивости для вращающегося многоугольника из равных вихрей с интенсивностями  $\Gamma$  и центральным вихрем с интенсивностью  $p\Gamma$ . Этот многоугольник вращается с угловой скоростью  $\omega = \frac{\Gamma}{4\pi R^2}(N-1+2p)$  и при  $p = -(N-1)/2$  является неподвижным. Такая конфигурация устойчива по Раусу при выполнении неравенств [94]

$$\begin{aligned} (N^2 - 8N + 8)/16 < p < (N - 1)^2/4, & \text{ если } N \text{ четно,} \\ (N^2 - 8N + 7)/16 < p < (N - 1)^2/4, & \text{ если } N \text{ нечетно.} \end{aligned}$$

Очевидно, что при  $N < 6$  эти условия могут выполняться даже в том случае, если центральный вихрь имеет противоположный остальным знак.

В работе [113] Т. Хавелок рассмотрел влияние неподвижной круговой границы на устойчивость томсоновских многоугольников с тем же центральным вихрем. Граница дестабилизирует устойчивость и делает случай  $N = 7$  неустойчивым. Кроме того, конфигурации с  $N < 7$  в достаточной близости от границы также становятся неустойчивыми (см. [17]). Еще в работе [113] рассмотрены два вложенных друг в друга многоугольника и соответствующие условия устойчивости.

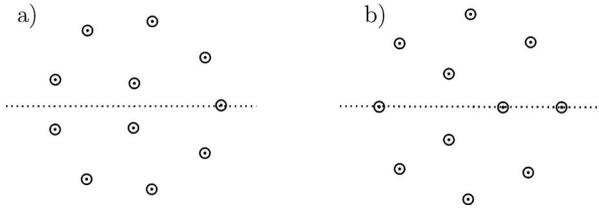


Рис. 42

Наиболее полным собранием численно полученных устойчивых относительных равновесий для  $N = 1, \dots, 50$ , при которых вихри располагаются на вложенных друг в друга концентрических окружностях («атомных оболочках», по терминологии Кельвина) является Лос-Аламосский каталог [98, 99]. Следует иметь в виду, однако, что при этом вихри движутся внутри круговой области, ограниченной гладкими стенками (последнее часто опускается при изложении). Эти конфигурации обязательно обладают либо центральной, либо осевой (зеркальной) симметрией. Например, на рисунке 42 для системы одиннадцати вихрей указаны две возможности

( $11 = 2 + 9$  или  $11 = 3 + 8$ ), обе имеющие ось симметрии. Теоретический анализ устойчивости этих конфигураций выполнен в [97].

В работе [72] развиты новые методы исследования симметричных вихревых конфигураций, для которых одинаковые вихри расположены на концентрических окружностях (с центральным или без центрального вихря). Полностью определены все конфигурации, при которых вихри (в произвольном числе) располагаются на трех окружностях (см. также [142]).

Отметим совпадение численных результатов [98, 99] с экспериментами Майера [151] с плавающими магнитами, которые описаны в известной книге Дж. Дж. Томсона «Электричество и материя». В работе [97] приводятся результаты для стационарных конфигураций без наличия круговой области.

Существует два наблюдения, которые можно сделать из анализа конфигураций Лос-Аламосского каталога.

- 1) Для любого  $N$  существует устойчивая стационарная конфигурация (это доказано в [97] только до  $N = 50$ ).
- 2) Каждая устойчивая конфигурация обладает некоторой симметрией, т. е. любая несимметричная конфигурация неустойчива (см. далее).

Насколько нам известно, в полном объеме эти гипотезы пока не доказаны.

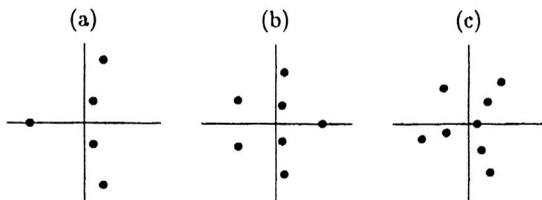


Рис. 43

**Несимметричные стационарные конфигурации на  $\mathbb{R}^2$ .** Оказывается, что кроме симметричных существуют, начиная с  $N = 8$ , несимметричные конфигурации, найденные совсем недавно. Как уже указывалось, они были отмечены в [78, 109] (см. рис. 43). Хорошо известен следующий алгоритм, пригодный для их поиска. Сначала рассматривается некоторая известная (возможно, симметричная) конфигурация  $z_1, \dots, z_N$ , как известно,

удовлетворяющая системе

$$-i\omega\bar{z}_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta \neq \alpha}^N \frac{\Gamma_\beta}{z_\alpha - z_\beta}. \quad (8.11)$$

При этом уравнение

$$-i\omega\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Gamma_\alpha}{z - z_\alpha}, \quad (8.12)$$

очевидно, определяет положение  $z$  вихря нулевой интенсивности, который также вращается с первоначальной конфигурацией (аналогично задаче адвекции). Уравнение (8.12) иногда называют *уравнением Мортона*, который вывел его в [159].

Далее поиск несимметричной конфигурации заключается в численном продолжении конфигурации по параметру, представляющему собой (сначала малую) интенсивность  $N + 1$  вихря, до необходимого значения (в случае равных интенсивностей  $\Gamma_1 = \dots = \Gamma_N = \Gamma$  — до значения  $\Gamma$ ). Имея несимметричные решения, их можно использовать также в качестве начального приближения. Интересно было бы исследовать подобные конфигурации на плоскости, а также на сфере.

Отметим, что в небесной механике нахождение несимметричных конфигураций при помощи компьютерных вычислений [109] вызвало значительное внимание вследствие существовавших гипотез относительно того, что любая стационарная конфигурация должна иметь хотя бы одну ось симметрии.

Сделаем еще одно замечание относительно задачи о движении четырех одинаковых точечных вихрей и соответствующей задачи о плоском движении четырех равных тел в небесной механике. Как недавно показал А. Албуи [63, 64], в задаче четырех равных гравитирующих масс имеются только четыре типа возможных стационарных конфигураций:

- I) коллинеарная;
- II) четыре тела находятся в вершинах квадрата;
- III) три тела находятся в вершинах равностороннего треугольника, а четвертый — в центре;
- IV) три тела находятся в вершинах равнобедренного треугольника, а четвертое располагается на высоте, приведенной к основанию.

Расположение четвертого тела рассчитано Албуи в работах [63, 64], где он также показал, что последний тип конфигурации невозможен для задачи четырех вихрей (хотя такая конфигурация была предсказана Палмором в [171]).

Укажем, что в связи с проблемой, поставленной Смейлом в [53], были получены верхние и нижние оценки для числа относительных равновесий. Так, Палмором в [169] было показано (для задачи  $n$  тел), что для любых значений масс  $m_1, \dots, m_n$  ( $n \geq 3$ ),  $m_i > 0$  (кроме, быть может, множества меры нуль), число плоских относительных равновесий конечно и не меньше  $\frac{1}{2} \left\{ (2^{n-1}(n-2) + 1)(n-2)! - \frac{n!}{2} \right\}$ . Для равных масс при использовании их оценок следует учитывать возможность перестановки между этими массами. Следуя работе [37], мы можем утверждать, что если для значений масс  $m_1, \dots, m_n$  существует конечное число плоских относительных равновесий, то это число не превышает  $2(n-2)6^{(n-2)(n-3)/2}(3n-1)^n(3n+1)^{n-1}$ . К сожалению, эти оценки, видимо, являются совершенно неоптимальными. К. Симо на докладе в честь 60-летия А. Шенсине построил с помощью компьютера плоские относительные равновесия для нескольких сотен одинаковых масс, но эти результаты еще не опубликованы.

В работе [167] с помощью алгебраической геометрии указан ряд результатов относительно числа стационарных конфигураций вихрей, образующих кольца, прямые и решетки (т. е. вихрей на торе).

Отметим еще две работы Палмора [170, 168], в которых с помощью топологических методов изучаются вырожденные относительные равновесия и бифуркации стационарных вихревых конфигураций. В последней работе кроме вихрей, движущихся по плоскости, рассматриваются вихри внутри круговой области (при этом сравнивается эффект изменения топологии фазового пространства этих двух задач).

В заключение отметим работы [155, 156], в которых найдены новые относительные равновесия для задачи  $n$  тел и  $n$  вихрей с неравными интенсивностями. Они обнаружены при помощи продолжения по параметру массы одного тела (интенсивности одного вихря) и дальнейшим анализом условий вырождения.

**Представление Лакса и стационарные конфигурации.** Этот раздел носит предварительный характер, но, возможно, способен дать стимул к некоторым новым исследованиям, связанным с более глубоким проникновением современной алгебры в вихревую динамику. Действительно, как мы уже видели в § 5, в результате редукции уравнения движения могут быть

записаны на орбите коприсоединенного представления алгебры Ли  $u(n-1)$ . Эта орбита сингулярна и состоит из матриц вида

$$L = \frac{i}{2} z \bar{z}^T,$$

где  $z = (z_1, \dots, z_n)$  и  $\sum z_i = 0$  (в системе, связанной с центром завихренности).

Согласно общему принципу, который подробно описан в наших книгах [15, 16], мы можем переписать уравнения в форме Лакса:

$$\frac{dL}{dt} = [L, A],$$

где  $A = dH(L)$  — дифференциал гамильтониана, который имеет вид

$$H(L) = \sum \Gamma_i \Gamma_j \log M_{ij}(L).$$

Здесь  $M_{ij}$  интерпретируется как элемент алгебры  $u(n-1)$  (см. (5.2)), а  $M_{ij}(L)$  — это стандартное спаривание между алгеброй и коалгеброй, т. е. при сделанном нами отождествлении  $M_{ij}(L) = \pm \text{Tr } M_{ij} L = |z_i - z_j|^2$ .

Явная форма для дифференциала гамильтониана следующая:

$$dH(L) = \sum \Gamma_i \Gamma_j \frac{1}{M_{ij}(L)} M_{ij},$$

то есть  $dH(L)$  — это линейная комбинация матриц  $M_{ij}$ . Поэтому выражение для матрицы  $A$  имеет вид

$$A = dH(L) = i \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\Gamma_1 \Gamma_j}{|z_1 - z_j|^2} & -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|z_1 - z_2|^2} & \cdots & -\frac{\Gamma_1 \Gamma_n}{|z_1 - z_n|^2} \\ -\frac{\Gamma_2 \Gamma_1}{|z_2 - z_1|^2} & \sum_j \frac{\Gamma_2 \Gamma_j}{|z_2 - z_j|^2} & \cdots & -\frac{\Gamma_2 \Gamma_n}{|z_2 - z_n|^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\Gamma_n \Gamma_1}{|z_n - z_1|^2} & \cdots & -\frac{\Gamma_n \Gamma_{n-1}}{|z_n - z_{n-1}|^2} & \sum_j \frac{\Gamma_n \Gamma_j}{|z_n - z_j|^2} \end{pmatrix}.$$

Если все интенсивности совпадают между собой и равны единице, то матрица  $A$  упрощается:

$$A = i \begin{pmatrix} \sum_j \frac{1}{|z_1 - z_j|^2} & -\frac{1}{|z_1 - z_2|^2} & \cdots & -\frac{1}{|z_1 - z_n|^2} \\ -\frac{1}{|z_2 - z_1|^2} & \sum_j \frac{1}{|z_2 - z_j|^2} & \cdots & -\frac{1}{|z_2 - z_n|^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{|z_n - z_1|^2} & \cdots & -\frac{1}{|z_n - z_{n-1}|^2} & \sum_j \frac{1}{|z_n - z_j|^2} \end{pmatrix}.$$

В случае, когда интенсивности различны, требуется дополнительная процедура, приводящая коммутатор к стандартному виду.

В терминах  $L$ - $A$ -пары стационарные конфигурации точечных плоских вихрей описываются естественным образом. Условие стационарности эквивалентно коммутируемости матриц  $L$  и  $A$ :  $[L, A] = 0$ . В нашем случае это означает, что

$$\frac{i}{2}Az\bar{z}^T = \frac{i}{2}z\bar{z}^TA = -\frac{i}{2}z(\bar{A}z)^T.$$

Обозначая  $\mathbf{b} = Az$ , имеем  $\mathbf{b}\bar{z}^T = -z\bar{\mathbf{b}}^T$ . Можно показать, что это возможно лишь при условии  $\mathbf{b} = i\lambda z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . В свою очередь, это эквивалентно тому, что  $z$  является собственным вектором матрицы  $A$  (с чисто мнимым собственным значением).

В результате получаем следующий набор соотношений:

$$\begin{pmatrix} \sum_j \frac{1}{|z_1 - z_j|^2} & -\frac{1}{|z_1 - z_2|^2} & \cdots & -\frac{1}{|z_1 - z_n|^2} \\ -\frac{1}{|z_2 - z_1|^2} & \sum_j \frac{1}{|z_2 - z_j|^2} & \cdots & -\frac{1}{|z_2 - z_n|^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{|z_n - z_1|^2} & \cdots & -\frac{1}{|z_n - z_{n-1}|^2} & \sum_j \frac{1}{|z_n - z_j|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

который переписывается в хорошо известной форме:

$$\sum_j \frac{1}{z_k - z_j} = \lambda \bar{z}_k, \quad \text{где } k = 1, \dots, n,$$

где  $\lambda$  играет роль угловой скорости вращения конфигурации.

Как уже отмечалось, стационарные конфигурации изучались во многих работах (см. [42]). По-видимому, новые результаты могут быть получены с использованием следующих соображений:

- 1) стационарные конфигурации могут быть интерпретированы как собственные векторы матрицы  $A$ ;
- 2) стационарные конфигурации могут быть интерпретированы как особые точки гамильтониана на орбите (т. е. на  $\mathbb{C}P^{n-1}$ ). В качестве гамильтониана можно взять функцию  $\tilde{H} = \prod_{k \neq j} |z_k - z_j|^2$ . Это положительная функция, которая обращается в нуль на подмногообразии «коллпаса».

Отметим, что эти соображения уже использовались Палмором [171] и О'Нейлом [166] при доказательстве своих оценок для числа коллинеарных конфигураций (как и Смейлом при анализе задачи  $n$  тел [53]).

## 2. Стационарные конфигурации на сфере

**Условие стационарности.** На сфере условие стационарности конфигурации, заключающееся в ее равномерном вращении вокруг некоторой оси с угловой скоростью  $\omega$ , имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{v}_i = \frac{1}{4\pi R} \sum_{j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_i}{R^2 - (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i.$$

Если выбрать в качестве оси вращения ось  $z$ ,

$$\theta_i = \theta_i^o = \text{const}, \quad \varphi_i = \omega t + \varphi_i^o.$$

Для случая равных интенсивностей на сфере существуют аналоги томсоновских и коллинеарных конфигураций, которые далее мы рассмотрим более подробно. Отметим также, что в работе [146] показано, что для каждой конечной дискретной группы и каждой ее подгруппы существует некоторая стационарная конфигурация, для которой эта группа является группой симметрий, а подгруппа — ее стационарной подгруппой.

На этом пути можно получить вложенные многоугольники, симметричные многогранники и пр. Количество вихрей в такой конфигурации равно отношению порядка группы к порядку стационарной подгруппы. Например, «правильный» восьмиугольник с попарно равными сторонами является стационарной конфигурацией для группы  $C_{4v}$  с тривиальной стационарной подгруппой.

**Аналог томсоновской конфигурации.** Аналог томсоновской  $N$ -угольной конфигурации вихрей равной интенсивности на сфере радиуса  $R$  располагается на широте  $\theta = \theta_0$ , координаты  $\varphi_k$  связаны соотношениями:  $\varphi_k - \varphi_i = (k - i)2\pi/N$  (см. рис. 44). Угловая скорость вращения вокруг оси  $z$ , перпендикулярной плоскости конфигурации, согласно уравнениям (2.3):

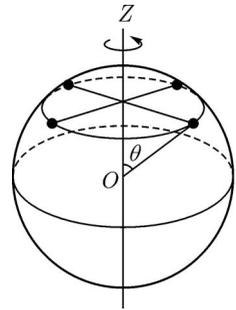


Рис. 44

$$\Omega = \frac{\Gamma(N-1) \operatorname{ctg} \theta_0}{4\pi R^2 \sin \theta_0}. \quad (8.13)$$

Интересно, что угловая скорость цепочки вихрей убывает от полюсов к экватору, и на экваторе конфигурация становится статической. Исследования условий линейной устойчивости томсоновских конфигураций на сфере впервые были выполнены В. А. Богомоловым [8], далее они несколько раз независимо переоткрывались, в частности — нами в [15] (см. также [175]). Следующее утверждение является аналогом теоремы Томсона.

**Теорема 8.2.** *Для правильной  $N$ -угольной стационарной конфигурации вихрей на сфере справедливо следующее:*

- 1) *если  $N \geq 7$ , то конфигурация неустойчива в линейном приближении;*
- 2) *при удалении от полюса (или при увеличении кривизны) конфигурации с  $N = 4, 5, 6$  последовательно теряют устойчивость на предельных широтах  $\theta_0^*$ , определяемых значениями*

$$N = 4, \quad \cos^2 \theta_0^* = 1/3;$$

$$N = 5, \quad \cos^2 \theta_0^* = 1/2;$$

$$N = 6, \quad \cos^2 \theta_0^* = 4/5;$$

- 3) *конфигурации с  $N = 2, 3$  являются устойчивыми в линейном приближении.*

Отметим, что, как уже указывалось в случае плоскости ( $R = \infty$ ), случай  $N = 7$  является устойчивым в нелинейном смысле.

В работе [84] доказана строгая устойчивость по Раусу  $N$ -угольных конфигураций для  $N \leq 6$  при  $\theta_0 < \theta_0^*$ . На предельных широтах  $\theta_0^*$  необходим дополнительный анализ, учитывающий нелинейные члены. Он был выполнен Л. Г. Куракиным [38]; в этой работе показано, что при  $N = 4, 5, 6$  в критическом случае  $\theta_0 = \theta_0^*$  стационарное вращение является устойчивым по Раусу (как относительное равновесие). Отметим также ряд родственных работ, связанных с относительными равновесиями точечных вихрей на сфере их устойчивостью. В работе [146] указаны различные типы симметричных относительных равновесий вихрей на сфере и детально изучен случай двух параллельных колец равных вихрей (т. е. расположенных на двух разных широтах), вращающихся вокруг общей оси. В работе [173] обоснована нелинейная устойчивость вихревого треугольника на сфере, включая и случай расположения его на экваторе. Эти результаты получены с помощью «метода энергии-момента», развитого в [172]. Нелинейный анализ

устойчивости системы  $2N$  точечных вихрей на сфере ( $N$  вихрей интенсивности 1 и  $N$  вихрей интенсивности  $-1$ ) приведен в работе [138]. В работе [93] выполнен линейный анализ устойчивости полигональных конфигураций с произвольным центральным вихрем и изучены условия бифуркации полигональных конфигураций при изменении интенсивностей. Линейная и нелинейная устойчивость конфигурации из двух вихревых колец изучена в [140]. Устойчивость многоугольников вихрей на вращающейся сфере, а также устойчивость полигональных конфигураций на плоскости в рамках геострофической модели (т. е. для вихрей Бесселя) приведены в [137]. Наконец, в работе [82] повторно переоткрыты результаты работы [84]. Многие ссылки работы [82] ошибочны с исторической точки зрения.

**Аналог коллинеарных конфигураций вихрей на сфере.** Для аналога коллинеарной конфигурации на сфере вихри располагаются в одной плоскости, проходящей через диаметр (на большом круге), которая вращается вокруг оси, лежащей в этой плоскости (см. рис. 45).

Коллинеарные конфигурации на сфере можно найти из уравнений (2.3), используя следующее условие: все координаты  $\varphi_i$  точечных вихрей имеют равные значения (или отличаются на  $\pi$ ). При этом  $\Delta_{ijl}(M) = 0$ , а координаты  $\theta_i$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) являются корнями системы тригонометрических уравнений:

$$4\pi R^2 \Omega \sin \theta_k = \sum_{i \neq k}^N \Gamma_i \operatorname{ctg} \left( \frac{\theta_k - \theta_i}{2} \right) \quad (1 \leq k \leq N). \quad (8.14)$$

Рассмотрим более подробно систему вихрей равной интенсивности  $\Gamma_k = 1$ ,  $k = 1, \dots, N$ . В этом случае корни  $\theta_i$ , определяющие коллинеарные конфигурации, можно найти как положения равновесия системы  $N$  частиц на окружности, задаваемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N p_k^2 + 4\pi R^2 \Omega \sum_{k=1}^N \cos \theta_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N'} \ln \left| \sin \left( \frac{\theta_k - \theta_i}{2} \right) \right|. \quad (8.15)$$

Действительно, положения равновесия такой цепочки частиц совпадают с корнями системы (8.14).

Система (8.15) при  $\Omega = 0$  рассматривалась Ф. Дайсоном в [105] при изучении статистических свойств уровней энергии одномерного классиче-

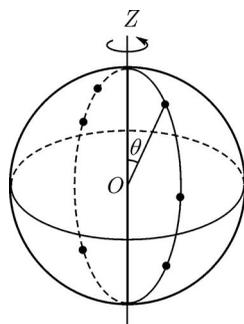


Рис. 45

ского кулоновского газа. В книге [48] приведены результаты анализа линейной устойчивости положений равновесия системы (8.15) при  $\Omega = 0$ :  $\theta_i = \theta_0 + k\pi/N$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

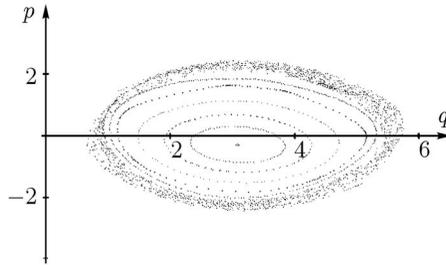


Рис. 46

Отметим, что система на сфере, определяемая гамильтонианом (8.15), в общем случае не является интегрируемой. На рис. 46 приведен фазовый портрет отображения Пуанкаре при  $N = 2$ ,  $\Omega \neq 0$ . Наличие областей стохастичности свидетельствует об отсутствии дополнительного аналитического первого интеграла.

Случай же цепочки «атомов» на окружности без «внешнего» потенциального поля ( $\Omega = 0$ ), взаимодействующих по закону (8.15), положения равновесия которых совпадают со статической коллинеарной конфигурацией вихрей на меридиане, заслуживает особого рассмотрения. Более подробно вопрос об интегрируемости системы (8.15) на окружности, называемой также системой Дайсона, обсуждается в работе [12] (см. приложение 10). Эта система неинтегрируема, но обладает «квазиинтегралом», хорошо аппроксимирующим поведение системы при малых значениях энергии. Устойчивость стационарных конфигураций вихрей на сфере обсуждается в [165].

### 3. Статические конфигурации (положения равновесия)

Рассмотрим сначала статические конфигурации на плоскости. Наиболее изученным является случай, когда все интенсивности вихрей равны друг другу по модулю. Например, в [55] В. М. Ткаченко указана простейшая статическая конфигурация, для которой три вихря одного знака расположены в вершинах равностороннего треугольника, а вихрь противоположного знака расположен в центре этого треугольника. Общая методика нахождения

статических конфигураций вихрей с одинаковым модулем была разработана В. М. Ткаченко в его диссертации (1964, Институт Физических проблем АН СССР), а затем, независимо, Х. Арефом [71].

Для  $N^+$  вихрей с интенсивностями  $\Gamma$  и координатами  $\xi_i \in \mathbb{C}$  ( $i = 1, \dots, N^+$ ), а также для  $N^-$  вихрей с интенсивностями  $-\Gamma$  и координатами  $\zeta_j \in \mathbb{C}$  ( $j = 1, \dots, N^-$ ) определим полиномы

$$P(z) = \prod_{i=1}^{N^+} (z - \xi_i), \quad Q(z) = \prod_{j=1}^{N^-} (z - \zeta_j). \quad (8.16)$$

Непосредственным дифференцированием можно показать, что эти полиномы удовлетворяют уравнению

$$QP'' + PQ'' = 2P'Q', \quad (8.17)$$

которое впервые получено Ткаченко. Из анализа коэффициента при наивысшей степени  $z^{N^+ + N^- - 2}$  можно получить диофантово уравнение

$$N^+(N^+ - 1) + N^-(N^- - 1) = 2N^+N^-,$$

решение которого (с точностью до замены  $N^+ \rightarrow N^-$ ,  $N^- \rightarrow N^+$ ) имеет вид

$$N^+ = \frac{n(n+1)}{2}, \quad N^- = \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решения уравнений (8.16), (8.17) методами компьютерной алгебры в сочетании с общими методами решения нелинейных алгебраических систем приведены в [71]. В частности, при  $N^+ = 36$  и  $N^- = 28$  получается замечательная «ореолообразная» конфигурация.

Как уже было отмечено (см. теорему 8.1), необходимым условием для статических конфигураций на плоскости является равенство  $L = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j = 0$ , поэтому статическая конфигурация из вихрей со знакоопределенными (в частности — равными) интенсивностями невозможна. Для сферы поиск и исследование статических конфигураций вихрей равной интенсивности является уже вполне содержательной и интересной задачей. Как легко показать из условий  $\dot{\varphi}_i = \dot{\theta}_i = 0$ , конфигурации вихрей, формирующие платоновы тела (правильные многогранники: тетраэдр, октаэдр, куб, икосаэдр, додэкаэдр), являются статическими. Относительно устойчивости этих конфигураций имеется несколько работ [146, 173], и тем не менее, ряд вопросов до сих пор остается открытым. Отметим, например, любопытный результат Л. Г. Куракина [38]: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр — устойчивы, а куб

и додекаэдр — неустойчивы (т. е. устойчивы правильные многогранники с треугольными гранями).

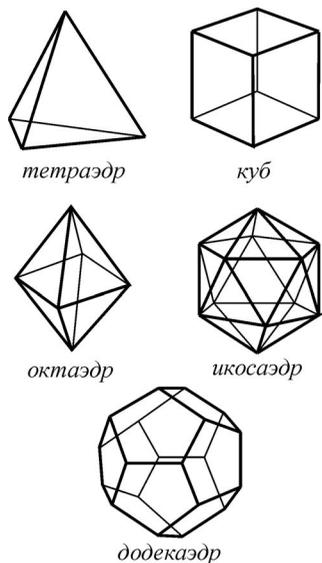


Рис. 47

Интересно, что в небесной механике (как на пространствах постоянной кривизны (например, на  $S^2$ ), так и на плоскости) справедлива теорема Ирншоу о неустойчивости произвольных статических конфигураций [31]. В динамике вихрей это не так: как мы уже указали, конфигурации тетраэдра, октаэдра и икосаэдра являются устойчивыми.

Статические и стационарные конфигурации имеют важное значение для физики атмосферы. Особенно это касается устойчивых конфигураций при условии что рассматривается модель атмосферы Земли, обладающая малой вязкостью. За счет вязкости вихри (циклоны, смерчи, ураганы) стремятся попасть в эти состояния и могут находиться в них достаточно долго. С помощью компьютерного моделирования можно рассматривать не только стационарные конфигурации вихрей, но и более общие классы устойчивых периодических решений. Они также представляют большой интерес для физики

атмосферы.

В заключение отметим работу [139], в которой обнаружены любопытные относительные периодические движения системы  $n$  вихрей на плоскости, сфере и других поверхностях и изотропией (цилиндр, эллипсоид). Они названы танцующими вихрями и тесно связаны со стационарными конфигурациями. Периодические решения вихрей на различных многообразиях с симметрией указаны также в [189].

#### 4. Коллапс и гомографические конфигурации вихрей на плоскости и сфере

1. Напомним, что гомографическими решениями в задаче  $n$  тел в небесной механике называются частные решения, для которых конфигурация тел остается подобной начальной во все моменты времени [3]. Рассмотрим аналогичные решения в задаче  $n$  точечных вихрей на плоскости.

В соответствии с этим определением, для взаимных расстояний выполнены соотношения

$$l_{\alpha\beta}(t) = u(t)l_{\alpha\beta}^0, \quad u(0) = 1, \quad (8.18)$$

где  $l_{\alpha\beta} = |z_\alpha - z_\beta|$ ,  $l_{\alpha\beta}^0$  — начальные расстояния между вихрями.

Укажем простейшие следствия соотношения (8.18), при условии, что  $u(t) \neq \text{const}$  [46].

$$1^\circ. \quad \sum_{\alpha < \beta}^n \Gamma_\alpha \Gamma_\beta = 0.$$

$$2^\circ. \quad \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_\alpha \neq 0.$$

3°. В системе координат с началом в центре завихренности (т. е. при  $\sum \Gamma_\alpha z_\alpha = 0$ )

$$I = \sum \Gamma_\alpha |z_\alpha|^2 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (8.18) в гамильтониан системы точечных вихрей, находим

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\alpha < \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta (\ln l_{\alpha\beta}^0 + \ln u(t)),$$

учитывая, что  $H = \text{const}$ , в то время как  $u(t) \neq \text{const}$ , получим 1°. Используя 1°, находим

$$\left( \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_\alpha \right)^2 = \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_\alpha^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_\alpha \neq 0.$$

Запишем простое тождество

$$\left( \sum \Gamma_\alpha \right) I = \sum_{\alpha < \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta l_{\alpha\beta}^2 - \left| \sum \Gamma_\alpha z_\alpha \right|^2,$$

учитывая, что  $\sum \Gamma_\alpha \neq 0$  и в системе центра завихренности  $\sum \Gamma_\alpha z_\alpha = 0$ , получим  $I = (\sum \Gamma_\alpha)^{-1} u^2(t) \sum \Gamma_\alpha \Gamma_\beta (l_{\alpha\beta}^0)^2$ . Учитывая, что  $I = \text{const}$ , находим  $\sum \Gamma_\alpha \Gamma_\beta (l_{\alpha\beta}^0)^2 = \sum \Gamma_\alpha \Gamma_\beta l_{\alpha\beta}^2(t) = 0$ , следовательно,  $I = 0$ . ■

Условия 1°, 3° иногда называют *необходимыми условиями* коллапса [46] (хотя в доказательстве совершенно не используется условие  $u(t) \rightarrow 0$ ).

2. Рассмотрим теперь абсолютное движение вихрей для гомографических решений. Выбирая начало координат в центре завихренности ( $\sum \Gamma_\alpha z_\alpha = 0$ ), находим

$$\left( \sum_{\beta=1}^n \Gamma_\alpha \right) |z_\alpha|^2 = \sum_{\beta \neq \alpha}^n \Gamma_\beta l_{\alpha\beta}^2 - I, \quad l_{\alpha\beta}^2 = |z_\alpha|^2 + |z_\beta|^2 - 2|z_\alpha||z_\beta| \cos(\varphi_\alpha - \varphi_\beta).$$

Используя условие  $3^\circ$  и соотношение (8.18), получим

$$|z_\alpha(t)| = u(t) |z_\alpha(0)|, \quad \varphi_\alpha(t) - \varphi_\beta(t) = \text{const},$$

следовательно, для гомографических решений координаты вихрей в системе центра завихренности определяются соотношением

$$z_\alpha(t) = u(t) e^{i\theta(t)} z_\alpha^0, \quad (8.19)$$

где  $z_\alpha^0$  — начальные координаты вихрей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что наиболее общая зависимость  $z_\alpha$  для гомографических решений имеет вид

$$z_\alpha(t) = u(t) e^{i\theta(t)} z_\alpha^0 + z_c(t).$$

Как мы видим, если  $u(t) \neq \text{const}$ , то  $z_c(t) = 0$ . Как несложно показать, необходимыми условиями того, что  $z_c(t) \neq 0$ , являются

$$u(t) = 1, \quad \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_\alpha = 0.$$

Несложно найти явный вид функций  $u(t)$ ,  $\theta(t)$ . Действительно, подставляя (8.19) в уравнения движения, находим

$$(u\dot{u} - i\dot{\theta}u^2) = \frac{1}{2\pi i} (z_\alpha^0)^{-1} \sum_{\beta \neq \alpha}^n \Gamma_\beta \frac{z_\alpha^0 - z_\beta^0}{z_\alpha^0 - z_\beta^0} = a - ib, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (8.20)$$

Таким образом, в правой части стоит некоторое постоянное (комплексное) число, которое мы обозначили  $a - ib$ , и поскольку левая часть (8.20) не зависит от номера  $\alpha$ , мы получаем систему уравнений для определения (начальной) конфигурации вихрей:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta \neq \alpha}^n \Gamma_\beta \frac{z_\alpha^0 - z_\beta^0}{z_\alpha^0 - z_\beta^0} = (a - ib) \bar{z}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (8.21)$$

При этом, согласно (8.20),  $u\dot{u} = a$ ,  $\dot{\theta}u^2 = b$  и, следовательно,

$$u^2 = 1 + 2at, \quad \dot{\theta} = \frac{b}{2a} \ln(1 + 2at). \quad (8.22)$$

Отсюда как следствие получаем

**Предложение.** Все гомографические решения в задаче  $n$  вихрей на плоскости соответствуют либо одновременному общему коллапсу вихрей (при  $a < 0$ ), либо разбеганию вихрей на бесконечность (при  $a > 0$ ).

Из этого следует, что ограниченных гомографических решений (в частности, периодических или квазипериодических), отличных от относительных равновесий (т. е. при  $a = 0$ ), в задаче  $n$  вихрей на плоскости не существует.

Систему уравнений (8.21) называют также *достаточными условиями* однородного коллапса вихрей на плоскости.

Отметим, что при  $a = 0$  система (8.21) определяет конфигурации, соответствующие относительным равновесиям. Они достаточно подробно исследованы. При этом общий анализ решений системы (8.21) в зависимости от интенсивностей вихрей при  $n \geq 4$  остается открытой и сложной проблемой. Та же самая проблема разрешимости системы (8.21) еще более усложняется при  $a \neq 0$ .

**Замечания.** 1. При  $b = 0$  получаем  $\dot{\theta} = 0$ , и решения (8.19), (8.22) описывают так называемый гомотетический коллапс, либо гомотетическое рассеяние, при этом вихри движутся вдоль неподвижных лучей, исходящих из центра завихренности.

2. Как следует из (8.22), при  $a < 0$  вихри коллапсируют за конечное время и если при этом  $b \neq 0$ , они делают бесконечное число оборотов вокруг центра завихренности.

3. Коллапс в задаче трех вихрей на плоскости изучался в работах [67, 46]. В работе [46] исследуется коллапс вихрей для случая специального частного осесимметричного решения (решение Горячева [22]) в задаче четырех и пяти вихрей.

4. Вопрос о возможности *неоднородного* коллапса  $n$  вихрей на плоскости (т. е. без сохранения самоподобия конфигурации) остается открытым при  $n \geq 4$ . Скорее всего, *неоднородный коллапс на плоскости невозможен*. В частности, в задаче трех вихрей неоднородный коллапс невозможен.

**3. Коллапс на сфере.** Коллапс и рассеяние вихрей на сфере еще почти совсем не изучены. Отметим только очень частные результаты.

1. В задаче трех вихрей существует только однородный коллапс, при этом вихри выходят из одного полюса и заходят в другой [90, 121].

2. В задаче четырех вихрей для осесимметричного решения показано [90], что коллапс возможен, при этом необходимые условия коллапса  $1^\circ$ – $2^\circ$  выполнены (а условие  $3^\circ$  имеет вид  $\sum_{\alpha < \beta} \Gamma_\alpha \Gamma_\beta l_{\alpha\beta}^2 = 0$ ). Коллапс в этом случае неоднородный, т. е. соотношение (8.18) не выполняется.

Любопытно, что в этом случае имеются как коллапсирующие траектории, выходящие из одного полюса и входящие в другой, так и траектории, выходящие и входящие в один и тот же полюс сферы.

## § 9. Движение вихрей на плоскости внутри и вне круга<sup>4</sup>

### 1. Движение точечных вихрей, ограниченное произвольной областью

Прежде чем подробно остановиться на случае круговой области, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с движением точечных вихрей внутри произвольной области. При этом обычно предполагается, что взаимодействие идеальной жидкости с твердыми стенками также идеально, т. е. выполняется условие непротекания. Оказывается, что такое взаимодействие не «портит» гамильтоновой природы уравнений движения. Эти вопросы изложены в книгах [161, 42, 54]. Укажем только, что с точки зрения гамильтоновой динамики обычно изучались лишь движения одного вихря (которые всегда интегрируемы) внутри или вне наиболее простых областей. Эти области могут быть как неограниченными (плоская граница, двугранный угол, прямолинейный канал), так и односвязными ограниченными (прямоугольник, круг). Здесь мы рассмотрим вопросы, связанные с движением вихрей только в круговой области, которая допускает существование дополнительного первого интеграла, соответствующего вращению вокруг центра круга. В частности, это обуславливает интегрируемость задачи двух точечных вихрей (и уже неинтегрируемость трех).

Из гидродинамики идеальной жидкости на плоскости и теории конформных отображений следует, что если имеется аналитическое отображение  $\zeta = f(z)$  произвольной односвязной области  $D$  в  $z$ -плоскости на единичный круг в  $\zeta$ -плоскости, то движение  $N$  точечных вихрей с интенсивностями  $\Gamma_i$  внутри области  $D$  описывается гамильтоновой системой

$$\Gamma_j \dot{\bar{z}}_j = 2i \frac{\partial H}{\partial z_j}, \quad (9.1)$$

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \Gamma_j^2 \ln \frac{|f'(z_j)|}{|1 - f_j \bar{f}_j|} - \frac{1}{2\pi} \sum_{j < k}^N \Gamma_j \Gamma_k \ln \frac{|f_j - f_k|}{|1 - f_j \bar{f}_k|},$$

где  $f_j = f(z_j)$ .

В явном виде комплексное отображение  $\zeta = f(z)$  строится только в простейших случаях, описанных выше. Их построение восходит к Э. Раусу [179] и Н. Е. Жуковскому [25]. Функцию тока, соответствующую потенциальному движению жидкости внутри (вне) области  $D$ , часто называют функцией Кирхгофа – Рауса. Если область не является односвязной, то задача описания движения вихрей существенно усложняется. Применение теории аналитических функций к описанию движения точечного вихря вблизи

<sup>4</sup>Этот параграф написан совместно с А. А. Килиным.

двух круговых цилиндров имеется в работе [116]. При этом гамильтониан системы, описывающий движение точечных вихрей, получается очень громоздким и содержит эллиптические  $\theta$ -функции.

Теория движения точечных вихрей внутри неподвижных областей на сфере разработана в работе [123].

## 2. Исторические комментарии

В этом разделе мы систематизируем основные результаты по движению точечных вихрей вне и внутри круговой области, рассматривая интегрируемые случаи, вопросы устойчивости, а также более общую хаотическую динамику, возникающую при добавлении однородного набегающего потока. Здесь мы используем методы качественного анализа, развитые в работах [15, 14].

Прежде всего отметим, что наиболее изучены уравнения движения точечных вихрей на плоскости (параллельных вихревых нитей бесконечно-малого сечения) в идеальной жидкости, восходящие к Кирхгофу [128]. Их свойства, интегралы и частные решения описаны во многих работах, обзор которых дан, например, в [14]. В то же время уже Гельмгольцем в его фундаментальном исследовании [114], положившем начало теории вихрей, было рассмотрено движение точечных вихрей, взаимодействующих с идеальной поверхностью для простейшего случая — плоскости. Общая форма уравнений движения точечных вихрей внутри (и вне) произвольной области, использующая теорию конформных отображений, была получена Э. Раусом в 1881 г. [179].

Впервые задачу о движении точечных вихрей в круге рассмотрел А. Гринхилл в 1877 г. [110]. С помощью метода зеркальных отражений он исследовал движение одного и двух вихрей внутри и вне круговой области. Вскоре после этого, в 1879 году, Т. Льюис [143] рассмотрел задачу о положении равновесия одного вихря в секторе круга с углом  $\frac{2\pi}{N}$ . С помощью метода зеркальных отображений Т. Льюис перешел от поставленной задачи к вопросу о движении  $2N$  вихрей, равных по величине и чередующихся по знаку интенсивностей внутри круга, и указал статическую конфигурацию для этих двух систем.

Позднее, в 1931 году, Т. Хавелок в замечательной работе [113] продолжил исследования устойчивости стационарных конфигураций вихрей внутри и вне круга. Он поставил и полностью исследовал вопрос о линейной устойчивости полигональных конфигураций вихрей равных интенсивностей (когда вихри расположены в вершинах правильного многоуголь-

ника) как внутри, так и вне круговой области. Это исследование обобщает анализ устойчивости аналогичных конфигураций вихрей на плоскости, выполненный еще Дж. Дж. Томсоном [195] и уточненный для случая семи вихрей Т. Хавелоком в той же работе [113] (в расчетах для правильного семиугольника у Томсона была допущена ошибка, см. подробнее § 8).

Из общих работ по движению точечных вихрей в жидкости, ограниченной абсолютно гладкими стенками, следует также отметить работу Линя [148], в которой, в частности, показано, что уравнения движения вихрей внутри и вне кругового цилиндра являются гамильтоновыми с той же скобкой, что и в отсутствие цилиндра. Среди современных исследований движения вихрей внутри круга следует указать работы [43, 112, 124, 126, 182].

Естественным обобщением задачи о движении вихрей вне круговой области является задача о движении вихрей вне круга в набегающем потоке, равномерном на бесконечности. Постановка этой задачи связана с безциркуляционным обтеканием цилиндра при малых числах Рейнольдса ( $Re \approx 13-40$ ) и возникновением за цилиндром пары вихрей (напомним, что при больших числах Рейнольдса ( $Re \approx 100-140$ ) за «плохообтекаемым» цилиндром образуется двойная цепочка вихрей, расположенных в шахматном порядке, называемая дорожкой Кармана, исследованию которой посвящено множество работ [54, 145]). Возникновение (вследствие отрыва пограничного слоя) пары вихрей за цилиндром обеспечивает вихревое сопротивление, которое отсутствует в идеальной (безвихревой) модели обтекания (парадокс Эйлера – Даламбера).

В 1913 году в работе [108] Л. Фёппль рассмотрел движение вихревой пары (двух вихрей равных, но противоположных интенсивностей) вблизи кругового цилиндра в набегающем потоке. Основным результатом этой работы явилось найденное им положение равновесия, в котором вихри располагаются за цилиндром симметрично относительно прямой, проходящей через центр цилиндра параллельно направлению потока. Кроме того, он показал, что это положение равновесия является линейно устойчивым по отношению к симметричным относительно направления потока возмущениям и неустойчивыми по отношению к асимметричным (и, следовательно, возмущениям общего положения). Все эти результаты обсуждаются в трактате Ламба [41]. В [92] рассматривается обобщенная задача Фёппля, учитывающая в первом порядке движение цилиндра при взаимодействии с ним пары вихрей. Из современных работ, посвященных развитию исследований Фёппля, следует также отметить работы [131, 196], в которых проводится аналитический и численный анализ устойчивости положений равновесия в нелинейной постановке.

В данном параграфе мы рассмотрим несколько задач о движении точечных вихрей внутри и вне кругового цилиндра в наиболее общей постановке, когда циркуляция вокруг цилиндра не равна нулю. В первой части параграфа выводятся гамильтоновы уравнения движения вихрей внутри и вне круговой области с циркуляцией. Здесь же приводится единственный дополнительный (наряду с гамильтонианом) интеграл движения полученных уравнений, позволяющий полностью проинтегрировать задачу двух вихрей. Во второй части параграфа для полученных уравнений движения рассматриваются аналоги томсоновских конфигураций вихрей, представляющие собой полигональные конфигурации вихрей равных интенсивностей. Для них получены аналитические условия устойчивости в зависимости от числа вихрей и отношения радиусов конфигурации и цилиндра. В третьей части параграфа рассматривается движение точечных вихрей вблизи кругового цилиндра в набегающем потоке. С помощью численного исследования отображения Пуанкаре показана неинтегрируемость уравнений движения двух вихрей в потоке. Описано также решение Фёппля и условия его устойчивости.

### 3. Уравнения движения и первый интеграл

**Уравнения движения вихрей внутри кругового цилиндра.** Рассмотрим движение  $N$  точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной абсолютно гладкими стенками в форме кругового цилиндра радиуса  $R$ . Хотя выше была указана гамильтонова форма уравнений движения в произвольной области (9.1), мы приведем здесь их явный вывод, опираясь на метод зеркальных отражений, который в теории вихрей восходит, по-видимому, к А. Гринхиллу [110] (первоначально этот метод развивался в электродинамике).

Как известно, в каждый момент времени  $t$  при наличии точечных вихрей функция тока жидкости  $\Psi$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Psi = -\sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta(z - z_k(t)), \quad (9.2)$$

где  $\Gamma_k$  — интенсивность  $k$ -го вихря,  $z_k(t)$  — его комплексная координата в момент времени  $t$ , а  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака. Кроме того, на границе области функция тока должна удовлетворять условию

$$\Psi(z)|_{|z|=R} = \text{const}. \quad (9.3)$$

Для решения уравнения (9.2) с граничными условиями (9.3) воспользуемся методом зеркальных отражений. Согласно ему, влияние границы области равносильно добавлению  $N$  вспомогательных вихрей, являющихся инверсными образами исходных с противоположными интенсивностями. То есть

$$\Gamma'_k = -\Gamma_k, \quad z'_k = \frac{R^2}{z_k}. \quad (9.4)$$

Для полученной системы  $2N$  вихрей стандартным способом вычислим комплексный потенциал течения (см., например, [42, 43])

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln(z - z_k) - \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln\left(z - \frac{R^2}{z_k}\right) \right) \quad (9.5)$$

и функцию тока  $\Psi = \text{Im}(F(z))$ . Нетрудно убедиться, что полученная таким образом функция тока удовлетворяет уравнению (9.2) и граничному условию (9.3).

С помощью найденного комплексного потенциала течения получим теперь уравнения движения вихрей. Согласно формуле Гельмгольца [114], для нахождения скорости вихря из комплексной скорости частиц жидкости в точке расположения вихревой нити необходимо вычесть «самодействие» вихря

$$\dot{z}_k = \lim_{z \rightarrow z_k} \left( \frac{dF}{dz} - \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{z - z_k} \right). \quad (9.6)$$

Подставив выражение для комплексного потенциала (9.5) в (9.6), получим

$$\dot{z}_k = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{\Gamma_j}{z_k - z_j} + \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j \bar{z}_j}{R^2 - z_k \bar{z}_j} \right). \quad (9.7)$$

Уравнения (9.7) можно представить в гамильтоновой форме [148] с постоянной скобкой Пуассона

$$\{z_k, \bar{z}_j\} = -\frac{2i}{\Gamma_k} \delta_{kj} \quad (9.8)$$

и гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \left( \sum_{k, j=1, k \neq j}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln |z_k - z_j| + \sum_{k, j=1}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln \left| \frac{1}{R^2 - z_k \bar{z}_j} \right| \right). \quad (9.9)$$

**Уравнения движения вихрей вне круга.** Как и выше, во все моменты времени функция тока вне круга является неособым решением уравнения Пуассона (9.2) с граничными условиями (9.3). Используя метод зеркальных изображений с инверсными вихрями (9.4), находим комплексный потенциал течения в форме [43, 117]

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln(z - z_k) - \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_k}\right) \right) + C_1 \ln z + w(z), \quad (9.10)$$

где  $C_1 = \text{const}$ , а  $w(z)$  — однозначный комплексный потенциал внешнего стационарного обтекания цилиндра, определяемый помимо условий (9.3) дополнительными условиями на бесконечности, связанными с особенностями конкретной задачи. Последние два слагаемых обращаются в нуль для случая внутренности круга благодаря требованию регулярности решения в нуле.

Уравнения движения вихрей, соответствующие потенциалу (9.10), получаются с помощью формулы Гельмгольца (9.6). Если мы потребуем, чтобы полученные уравнения движения при  $R \rightarrow 0$  переходили в обычные уравнения движения вихрей на плоскости, то необходимо в (9.10) положить  $w(z) = 0$ ,  $C_1 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^N \Gamma_i$ . Это эквивалентно требованию обращения в нуль циркуляции по контуру, охватывающему цилиндр и не содержащему вихрей, и условию, что жидкость на бесконечности покоится.

Соответствующие уравнения движения принимают вид

$$\dot{z}_k = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{\Gamma_j}{z_k - z_j} - \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j \bar{z}_j}{z_k \bar{z}_j - R^2} + \frac{1}{z_k} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \right), \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.11)$$

Как и в случае движения вихрей внутри цилиндра, уравнения (9.11) можно представить в гамильтоновом виде со скобкой (9.8) и гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \left( \sum_{k, j=1, k \neq j}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln |z_k - z_j| - \sum_{k, j=1}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln |z_k \bar{z}_j - R^2| + \left( \sum_{j=1}^N \Gamma_j \right) \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln(z_k \bar{z}_k) \right). \quad (9.12)$$

Ниже мы рассмотрим простейший случай, когда  $w(z) \neq 0$ , соответствующий наличию набегающего потока, равномерного на бесконечности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что уравнения движения (9.7) и (9.11) не получаются друг из друга с помощью инверсии (9.4), то есть траектории движения вихрей внутри и вне цилиндра не являются подобными относительно этой инверсии.

**Момент завихренности.** Полученные уравнения движения вихрей внутри (9.7) и вне (9.11) цилиндра допускают один дополнительный первый интеграл движения — *момент завихренности*

$$I = \sum_{k=1}^N \Gamma_k z_k \bar{z}_k. \quad (9.13)$$

Существование этого интеграла является следствием инвариантности уравнений относительно поворотов вокруг центра круга, сохранившейся после добавления цилиндрической границы. Наличие интеграла (9.13) обуславливает полную интегрируемость (по Лиувиллю) задачи о движении двух вихрей внутри и вне цилиндрической области. Этот интеграл пропадает при малом (например, эллиптическом) искривлении границы области, и задача двух вихрей становится уже неинтегрируемой [200].

#### 4. Томсоновские конфигурации вихрей внутри и вне цилиндра

Рассмотрим аналоги стационарных томсоновских конфигураций  $N$  вихрей (т. е. правильные  $N$ -угольники) при движении внутри (или вне) круговой цилиндрической области. Впервые эта задача рассматривалась Т. Хавелоком [113]. Так как конфигурации представляют собой правильные  $N$ -угольники, вращающиеся с постоянной угловой скоростью вокруг своего центра, совпадающего с центром цилиндра, положения вихрей задаются следующими выражениями:

$$z_k^{(0)} = r e^{i \left( \frac{2\pi}{N} k + \omega t \right)}, \quad k = 1 \dots N. \quad (9.14)$$

Подставив (9.14) в уравнения движения (9.7) и (9.11), получим зависимость частоты вращения конфигурации внутри и вне цилиндра от числа вихрей и отношения радиусов цилиндра и многоугольника:

$$\begin{aligned} \omega_{in} &= \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \left( N - 1 - \frac{2N}{1 - (R/r)^{2N}} \right), \\ \omega_{out} &= \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \left( 3N - 1 - \frac{2N}{1 - (R/r)^{2N}} \right). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Рассмотрим устойчивость указанных конфигураций в линейном приближении. Пусть  $\eta_k$  — малое возмущение положений (9.14):

$$z_k = z_k^{(0)} (1 + \eta_k), \quad \eta_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.16)$$

Подставив (9.14) и (9.16) в уравнения движения и выделив линейные по  $\eta$  слагаемые, получим линеаризованную систему уравнений для малых возмущений вблизи стационарного решения (9.14)

$$\dot{\eta}_k = -i\omega(\eta_k + \bar{\eta}_k) + i\frac{\Gamma}{8\pi r^2} \sum_{j=1}^N A_{kj} \bar{\eta}_j + i\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \sum_{j=1}^N B_{kj} (\bar{\eta}_k + \eta_j), \quad (9.17)$$

где

$$A_{kj} = \delta_{kj} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{N}n\right)} - (1 - \delta_{kj}) \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{N}(k-j)\right)}, \quad (9.18)$$

$$B_{kj} = \left( \frac{R}{r} e^{i\frac{\pi}{N}(k-j)} - \frac{r}{R} e^{-i\frac{\pi}{N}(k-j)} \right)^{-2}.$$

Уравнения (9.17) являются общими для движения вихрей и внутри и вне цилиндра. Отличие этих двух случаев заключается в различном выражении для частоты  $\omega$ . В первом случае в качестве частоты берется  $\omega_{in}$ , а во втором —  $\omega_{out}$ .

Матричные элементы  $A_{kj}$  и  $B_{kj}$  зависят только от разности индексов; таким образом, эти матрицы диагонализуются с помощью дискретного преобразования Фурье. Выполним соответствующую замену переменных:

$$\xi_k = \sum_{j=1}^N T_{kj} \eta_j, \quad T_{kj} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\frac{2\pi}{N}kj}. \quad (9.19)$$

Система уравнений (9.17) в новых переменных распадается на  $N$  независимых пар уравнений

$$\begin{cases} \dot{\xi}_k = -iC_k \xi_k - iD_k \bar{\xi}_{N-k}, \\ \dot{\xi}_{N-k} = iC_{N-k} \bar{\xi}_{N-k} + iD_k \xi_k, \end{cases} \quad (9.20)$$

где

$$C_k = \omega - \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \sum_{n=1}^N \frac{e^{i\frac{2\pi}{N}kn}}{\left( \frac{R}{r} e^{i\frac{\pi}{N}n} - \frac{r}{R} e^{-i\frac{\pi}{N}n} \right)^2}, \quad (9.21)$$

$$D_k = \omega - \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\left( \frac{R}{r} e^{i\frac{\pi}{N}n} - \frac{r}{R} e^{-i\frac{\pi}{N}n} \right)^2} - \frac{\Gamma}{4\pi r^2} k(N-k).$$

Здесь и далее все индексы рассматриваются с точностью до добавления или вычитания  $N$  (например,  $\xi_0 = \xi_N$ ).

Собственные числа системы (9.20) легко находятся и равны

$$\lambda_k^\pm = -\frac{i}{2}(C_k - C_{N-k}) \pm \sqrt{4D_k^2 - (C_k + C_{N-k})^2}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (9.22)$$

Под устойчивостью томсоновских конфигураций в данном случае понимается устойчивость по Раусу, согласно которой конфигурация является устойчивой, если устойчива (по Ляпунову) соответствующая ей неподвижная точка приведенной системы после исключения циклической переменной, отвечающей интегралу момента (9.13). В наших обозначениях циклическая переменная —  $\xi_N$ , поэтому из рассмотрения необходимо исключить соответствующие нулевые собственные числа  $\lambda_N^\pm$ .

Таким образом, под устойчивостью томсоновской конфигурации мы будем понимать устойчивость относительно оставшихся переменных  $\xi_1, \dots, \xi_{N-1}$ . Для устойчивости томсоновской конфигурации в линейном приближении необходимо, чтобы все собственные числа (9.22) при  $k = 1, \dots, N-1$  были чисто мнимыми. Заметим, что выражение под знаком корня в (9.22) симметрично относительно замены индекса  $k \rightarrow N-k$ . Таким образом, *условием устойчивости конфигурации в линейном приближении является выполнение неравенства*

$$4D_k^2 - (C_k + C_{N-k})^2 < 0 \quad (9.23)$$

для всех  $k = 1, \dots, \left[\frac{N}{2}\right]$ . Условие (9.23) применимо как для случая движения вихрей внутри круга, так и для движения вне его при подстановке в выражения (9.21) угловой скорости (9.15).

Критические значения радиусов томсоновских конфигураций внутри ( $r_N^*$ ) и вне ( $r_N^{**}$ ) круга, при которых происходит смена устойчивости, для разных  $N$  приведены в таблице 1. При  $N = 2, \dots, 6$  конфигурация внутри круга, радиус которой меньше критического значения  $r_N^*$ , является устойчивой в линейном приближении. Если же радиус конфигурации больше критического значения, то она неустойчива. Для движения вихрей вне цилиндра все происходит наоборот. Конфигурации с радиусами, меньшими критического  $r_N^{**}$ , являются неустойчивыми, а с большими — устойчивыми в линейном приближении. В случае движения семи и более вихрей как внутри, так и вне цилиндра при любом конечном значении радиуса конфигурации одно из собственных чисел имеет действительную часть и конфигурации являются неустойчивыми при всех радиусах уже в линейном приближении.

Таблица 1. Критические значения радиусов томсоновских конфигураций внутри ( $r_N^*$ ) и вне ( $r_N^{**}$ ) цилиндрической области.

$N$	$r_N^*/R$	$r_N^{**}/R$
2	0.4623206277	2.594686210
3	0.5668166853	1.911467042
4	0.5743169766	1.801510057
5	0.5883033778	1.728780016
6	0.5469198246	1.838084361
7, 8, ...	—	—

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С точностью до третьего знака указанные критические значения радиусов совпадают с найденными Т. Хавелоком [113]. Дальнейшее несовпадение, по-видимому, объясняется неточностью его «ручных» вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для критических значений радиусов  $r_N^*$  ( $r_N^{**}$ ) сделать заключение об устойчивости по линейному приближению невозможно. В этом случае необходимо исследовать нелинейную устойчивость [38].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нелинейная устойчивость вихрей внутри круговой области исследована в работе [39]. Как уже указывалось, в 1931 г. Т. Хавелок установил, что линеаризованная система имеет экспоненциально растущие решения, когда  $N \geq 7$  и параметр  $p = \frac{r_N^2}{R^2}$  больше некоторой критической величины  $p_{*n}$  ( $p_{*n} < p < 1$ ) при  $2 \leq n \leq 6$ . В работе [39] задача устойчивости исследована в точной нелинейной постановке во всех остальных случаях:  $0 < p \leq p_{*n}$ ,  $n = 2, \dots, 6$ . Указаны необходимые и достаточные условия устойчивости и неустойчивости при  $n \neq 5$ . Для вихревого пятиугольника остался неясным ответ на вопрос об устойчивости для некоторого множества значений параметра  $p$  меры нуля. Часть условий устойчивости основана на том, что относительный гамильтониан системы достигает минимума на траектории стационарного движения вихревого  $n$ -угольника. Особого подхода потребовал случай его знакопеременности  $n = 3, 5$ . Для его анализа применены результаты КАМ-теории. Перечислены и исследованы все встречающиеся резонансы до четвертого порядка включительно. Оказалось, что два из них приводят к неустойчивости.

Как было показано в [130], правильный семиугольник вихрей на плоскости (в отсутствие цилиндра) является устойчивым в нелинейном приближении. Из приведенных выше результатов следует, что добавление цилиндрической границы (как внешней, так и внутренней) нарушает устойчивость этой конфигурации. Аналогичное нарушение устойчивости плоской конфи-

гурации семи вихрей происходит также при сколь угодно малом искривлении плоскости и исследовании задачи о движении вихрей на сфере [84]. Однако в случае вихрей на сфере томсоновские конфигурации двух и трех вихрей всегда остаются устойчивыми, в то время как добавление границы может сделать их неустойчивыми.

Несколько результатов относительно числа стационарных вихревых конфигураций и их бифуркаций внутри круговой области с помощью топологических методов получены в работе Палмора [168].

### 5. Движение $N$ вихрей вне кругового цилиндра в набегающем потоке

Рассмотрим задачу о движении  $N$  вихрей вблизи цилиндра в набегающем потоке, скорость которого на бесконечности постоянна, примем ее параллельной оси  $x$ . Функция тока такого течения должна удовлетворять уравнениям (9.2) с условием непротекания (9.3) и граничным условием на бесконечности

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{|x|=\infty} = V = \text{const}, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{|x|=\infty} = 0. \quad (9.24)$$

Комплексный потенциал стационарного обтекания имеет вид [43]

$$w(z) = V \left( z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (9.25)$$

Согласно (9.10), полный комплексный потенциал системы равен

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln(z - z_k) - \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln\left(z - \frac{R^2}{\bar{z}_k}\right) + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln z \right) + V \left( z + \frac{R^2}{z} \right). \quad (9.26)$$

Используя (9.6), находим уравнения движения системы вихрей вблизи цилиндра

$$\dot{z}_k = \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{j=1, j \neq k}^N \frac{\Gamma_j}{z_k - z_j} - \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j \bar{z}_j}{z_k \bar{z}_j - R^2} + \frac{1}{z_k} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \right) + V \left( 1 - \frac{R^2}{z_k^2} \right). \quad (9.27)$$

Уравнения (9.27) также гамильтоновы со скобкой (9.8) и гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \left( \sum_{k,j=1, k \neq j}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln |z_k - z_j| - \sum_{k,j=1}^N \Gamma_k \Gamma_j \ln |z_k \bar{z}_j - R^2| + \left( \sum_{j=1}^N \Gamma_j \right) \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln(z_k \bar{z}_k) \right) + \frac{V}{2i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k (z_k - \bar{z}_k) \left( 1 - \frac{R^2}{|z_k|^2} \right). \quad (9.28)$$

Заметим, что добавление набегающего потока нарушает инвариантность относительно вращений. В результате дополнительный интеграл  $I$  пропадает, а задача о движении двух вихрей вокруг цилиндра становится неинтегрируемой, что будет показано далее с помощью построения отображения Пуанкаре.

Рассмотрим качественный анализ некоторых задач о движении пары вихрей внутри и вне цилиндрической области.

## 6. Движение двух вихрей вне круга в набегающем потоке

**Сечение Пуанкаре и хореографии.** В работе [148] Линь выполнил общий анализ движения одного вихря вне круга в набегающем потоке [43]. Рассмотрим теперь случай, когда количество вихрей равно двум. В этом случае мы получаем систему с двумя степенями свободы [149]; для нее можно построить отображение Пуанкаре.

Перейдем к новым переменным

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2}(\Gamma_2 r_2 + \Gamma_1 r_1), & L &= \frac{1}{2}(\Gamma_2 r_2 - \Gamma_1 r_1), \\ g &= \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1), & l &= \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1), \end{aligned} \quad (9.29)$$

где  $\varphi_k$  и  $\sqrt{2r_k}$  задают полярные координаты вихрей, то есть  $z_k = \sqrt{2r_k} e^{i\varphi_k}$ . Можно показать, что новые координаты являются каноническими ( $\{l, L\} = \{g, G\} = 1$ , остальные скобки равны нулю).

Рассмотрим проекцию на плоскость переменных  $\left(l, \frac{2 \operatorname{arctg} L}{\pi}\right)$  сечения уровня энергии  $H = 0$ , которое задается уравнением  $g = 0$ ; фазовый поток системы порождает на этом сечении отображение первого возвращения (отображение Пуанкаре). На рисунке 48 приведены фазовые портреты системы (9.27) при различных скоростях набегающего потока. При отличной

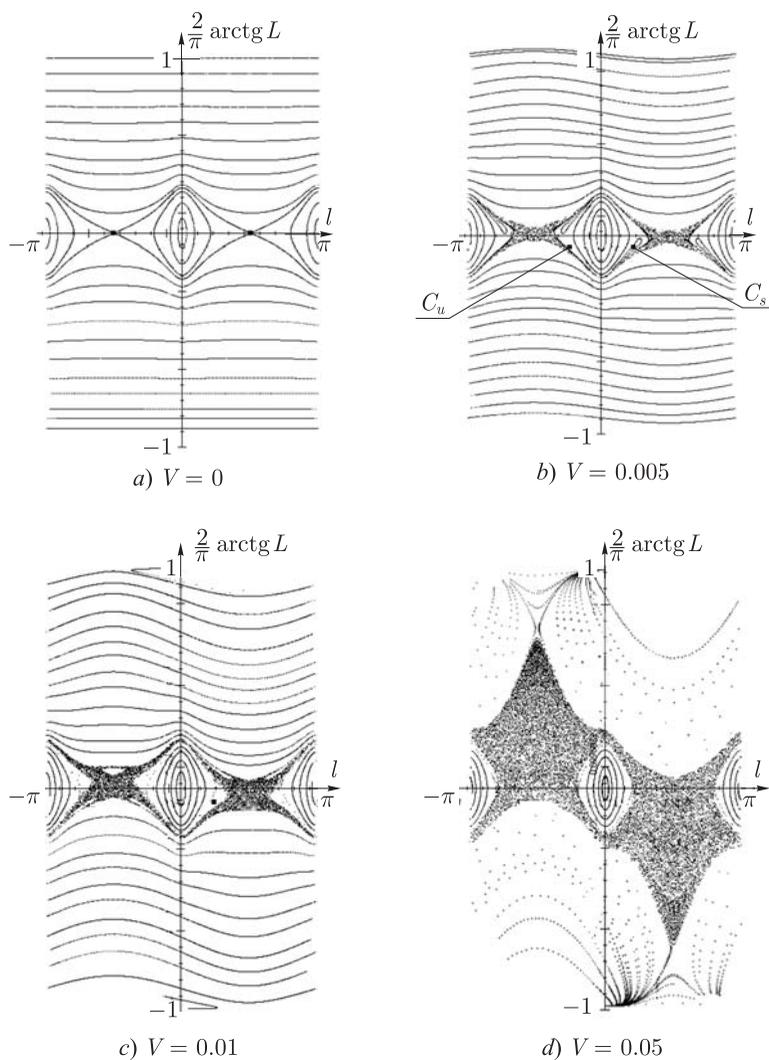


Рис. 48. Переход к хаосу в системе двух вихрей равной интенсивности ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ ) на нулевом уровне энергии ( $E = 0$ ) при увеличении скорости набегающего потока (сечение плоскостью  $g = 0$ ).

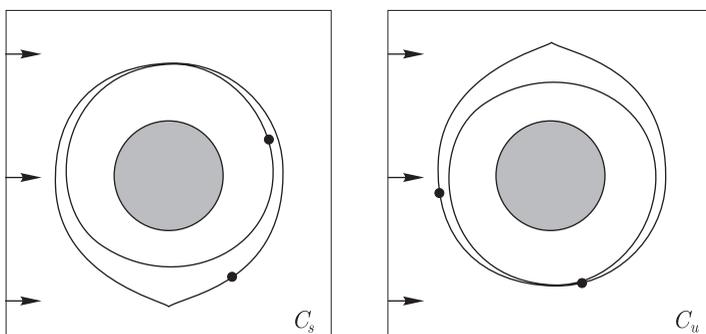


Рис. 49. Связные хореографии, соответствующие устойчивой  $C_s$  и неустойчивой  $C_u$  — неподвижным точкам на рис. 48b. Стрелками показано направление набегающего потока.

от нуля скорости набегающего потока  $V$  вблизи сепаратрис возникает стохастический слой, который увеличивается при увеличении  $V$ . Кроме того, как видно из рисунка, при увеличении  $V$  в системе появляются рассеивающиеся траектории (для них  $\frac{2}{\pi} \arctg L \rightarrow \pm 1$ ). Точкам  $(0, 0)$  и  $(\pm\pi, 0)$  на портрете соответствуют особенности (сингулярности) гамильтониана, в которых вихри сливаются. Вблизи этих точек при сколь угодно больших скоростях расположены ограниченные траектории, соответствующие движениям вихрей вблизи цилиндра, при которых вихри находятся очень близко к друг другу. (При подходящей регуляризации эти точки становятся эллиптическими особыми точками.) По мере увеличения скорости  $V$  (см. рис. 48d) ограниченными остаются лишь траектории, окружающие сингулярности, остальные траектории системы — «рассеивающие», при этом либо один, либо оба вихря относятся потоком на бесконечность. Отметим, что в этом случае точка проводит в «стохастическом слое» лишь ограниченное время, покидая его при  $t \rightarrow \pm\infty$  и рассеиваясь так, что  $\frac{2}{\pi} \arctg L \rightarrow \pm 1$ .

Очевидно, что неподвижным точкам отображения Пуанкаре соответствуют периодические движения вихрей, при которых они движутся по замкнутым кривым. Удивительной особенностью случая равных интенсивностей является существование таких периодических решений, когда два вихря движутся по одной и той же траектории в неподвижной системе координат (см. рис. 49). Такие решения называются (*абсолютными*) хореографиями [52] и в этой задаче, по-видимому, указываются впервые (см.

также [88]). В работе [88] приводятся также относительные и абсолютные хореографии в задаче трех и четырех вихрей на плоскости и сфере.

В работе [149] при помощи теории возмущений и численных экспериментов исследуется движение пары вихрей одинаковой интенсивности вне круга в набегающем потоке в случае, когда расстояние между вихрями мало по сравнению с радиусом круга. (Таким движениям на фазовом портрете рис. 48 соответствуют траектории, окружающие сингулярности  $(0, 0)$  и  $(\pm\pi, 0)$ .)

**Движение вихревой пары за круговым цилиндром в набегающем потоке. Решение Фёппля** Рассмотрим, следуя Фёпплю [108], частный случай задачи о движении двух вихрей за цилиндром в набегающем потоке, когда интенсивности вихрей равны по величине и противоположны по знаку:  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$ . Как известно, в этом случае существуют симметричные относительно направления потока положения равновесия (статические конфигурации) вихрей, когда они неподвижно стоят за цилиндром. Подставляя условие равновесия  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$  в уравнения (9.27) при условии  $z_2 = \bar{z}_1$ , получим систему уравнений, определяющую искомое, симметричное относительно направления потока, положение равновесия вихрей. После некоторых преобразований полученной системы для координат вихрей  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_0, -y_0)$  получим уравнения

$$r_0^2 - R^2 = \pm 2y_0 r_0, \quad y_0 \left(1 - \frac{R^4}{r_0^4}\right) = \frac{\Gamma}{4\pi V}, \quad (9.30)$$

где  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  — расстояние от центра цилиндра до положения равновесия. Отсюда несложно получить уравнения шестой степени для определения  $r_0$ .

Собственные числа системы, линеаризованной вблизи данного положения равновесия, равны

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\Gamma R}{2\pi} \frac{\sqrt{-(3r_0^2 - R^2)(r_0^4 + 2R^2 r_0^2 + 5R^4)}}{(r_0^4 - R^4)(r_0^2 - R^2)},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \frac{\Gamma R}{2\pi} \frac{\sqrt{3r_0^6 + 3R^2 r_0^4 - 3R^4 r_0^2 + R^6}}{(r_0^4 - R^4)(r_0^2 - R^2)}. \quad (9.31)$$

В (9.31) первая пара собственных чисел соответствует возмущениям, сохраняющим симметрию относительно потока, а вторая пара — возмущениям, не сохраняющим симметрию. Как видно из (9.31), первая пара собственных

чисел является чисто мнимой, следовательно, рассматриваемые положения равновесия являются устойчивыми относительно симметричных возмущений. Однако вторая пара собственных чисел всегда действительна, следовательно, в целом положение равновесия является неустойчивым.

Отметим, что в фазовом пространстве рассматриваемой задачи решение Фёппля лежит в области энергий, при которых все движения общего положения являются неограниченными. Поэтому не удастся построить соответствующее отображение Пуанкаре. Тем не менее, видимо, эта система также не является интегрируемой.

## 7. Движение двух вихрей внутри цилиндра

**Редукция.** Рассмотрим теперь движение вихрей внутри круга, которое описывается системой (9.9). Еще Гринхилл показал [110], что один вихрь вращается равномерно по окружности, концентрической с границей круга (это справедливо и для вихря вне круга при отсутствии набегающего потока, см. также [43]).

Частные постановки этой задачи рассматривались в работах [43, 112, 124, 126]. Милн-Томсон [43] изучил случай взаимодействия вихревой пары ( $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ ) с круговым цилиндром, когда выполнено условие симметрии, т. е. перпендикуляр к середине отрезка, соединяющего вихри, проходит через центр круга. Он нашел равновесные конфигурации и рассмотрел влияние равномерного потока. В работе [112] для случая вихревой пары уравнения движения проинтегрированы в квадратурах. Кроме того в этой работе найдены частные решения для случая двух вихревых пар (четыре вихря с интенсивностями  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3 = -\Gamma_4$ ), обладающие осью (плоскостью) симметрии, проходящей через центр круга.

Для двух частных случаев этой задачи о двух вихрях  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  и  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  в [124] выполнен качественный анализ фазового потока и построены все возможные при этом типы фазового портрета приведенной системы (см. ниже рис. 50, 53), помимо этого в работах [124, 126] рассмотрены частные постановки задачи о движении двух вихревых  $N$ -угольников.

Выполним качественный анализ динамики для задачи двух вихрей произвольной интенсивности внутри цилиндра с помощью методов, развитых в работе [14].

Как было отмечено выше, данная система является интегрируемой по Лиувиллю ввиду наличия двух интегралов движения — гамильтониана (9.9) и момента (9.13). Оказывается, в этом случае переменные (9.29) позволяют наиболее просто понизить порядок. Действительно, подставив равенство  $r_k = \frac{1}{4} z_k \bar{z}_k$  в выражение для  $G$ , получим, что  $G = \frac{I}{4}$  является инте-

гравом движения. Таким образом, мы привели исходную задачу к системе с одной степенью свободы, гамильтониан которой параметрически зависит от  $G$ :

$$H = \frac{1}{4\pi} \left( \Gamma_1^2 \ln(R^2 - 2r_1) + \Gamma_2^2 \ln(R^2 - 2r_2) + \right. \\ \left. + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left( R^2 + \frac{(R^2 - 2r_1)(R^2 - 2r_2)}{2(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos 2l)} \right) \right), \quad (9.32)$$

где  $r_1 = \frac{G-L}{\Gamma_1}$ ,  $r_2 = \frac{G+L}{\Gamma_2}$ . Отметим, что все решения системы (9.32) всегда являются периодическими.

**Фазовые портреты и бифуркационный анализ.** Траектории системы (9.32), образующие фазовый портрет, представляют собой линии уровня гамильтониана. Рассмотрим их проекцию на плоскость переменных  $(l, \frac{2}{\pi} \arctg L)$ , область определения которых в общем случае является прямоугольником  $0 \leq l \leq \pi$ ,  $-1 \leq \frac{2}{\pi} \arctg L \leq 1$  (см. рис. 50–54).

Вид фазового портрета (при каждом фиксированном  $G$ ) определяется неподвижными точками и особенностями гамильтониана. Под особенностями мы понимаем сингулярности функции (9.32), в которых она обращается в бесконечность. Сингулярностям соответствуют случаи, когда один (или оба) вихря расположены на границе круга либо когда вихри находятся в одной и той же точке. Особенности первого типа на фазовом портрете лежат на границах области возможных движений (ОВД), которые при фиксированном  $I$  заключены между горизонтальными прямыми  $L = \frac{1}{4}I - \frac{1}{2}R^2\Gamma_1$  и  $L = \frac{1}{2}R^2\Gamma_2 - \frac{1}{4}I$ ; так что на фазовом портрете внутри ОВД присутствует лишь особенность второго типа, которая располагается в точке  $l = 0$ ,  $L = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** После регуляризующей замены времени  $dt = (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos 2l)d\tau$  эта особенность системы становится неподвижной точкой.

Неподвижным точкам системы (9.32) соответствуют стационарные решения (относительные равновесия) уравнений (9.7), в которых вихри движутся по концентрическим окружностям вокруг начала координат. В зависимости от значения  $I = \text{const}$  у системы могут быть одна, две или три неподвижных точки. В пространстве значений интегралов  $H = \text{const}$ ,  $I = \text{const}$  неподвижным точкам соответствуют бифуркационные кривые (ветви), образующие так называемую бифуркационную диаграмму задачи (см. рис. 50–53). Несложно показать, что в точках бифуркационных кривых интегралы  $H$  и  $I$  исходной системы (9.7) становятся зависимыми.

Уравнения, определяющие неподвижные точки (9.32), имеют вид

$$\begin{aligned} \pi \dot{L} &= \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \sqrt{r_1 r_2} \sin 2l (R^2 - 2r_2) (R^2 - 2r_1)}{(R^4 + 4r_1 r_2 - 4R^2 \sqrt{r_1 r_2} \cos 2l) (r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos 2l)} = 0, \\ 2\pi \dot{l} &= \frac{\Gamma_1}{R^2 - 2r_1} - \frac{\Gamma_2}{R^2 - 2r_2} - \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2 + 2\frac{L \cos 2l}{\sqrt{r_1 r_2}}}{2(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos 2l)} + \\ &\quad + \frac{2\left(\frac{R^2 \cos 2l}{\sqrt{r_1 r_2}} - 2\right)L}{2(r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos 2l)R^2 + (R^2 - 2r_1)(R^2 - 2r_2)} = 0. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Подставляя различные решения  $L(I)$  и  $l(I)$  системы (9.33) в выражение для энергии (9.32), получаем уравнения бифуркационных кривых  $E = H(L(I), l(I), I)$ .

Заметим, что уравнения (9.33) инвариантны относительно одновременной смены знаков интенсивностей вихрей и изменения направления времени, поэтому далее мы отдельно рассмотрим два случая.

**I.  $\Gamma_1 > 0, \Gamma_2 > 0$ .** В этом случае область изменения интеграла момента (9.13) определяется неравенствами  $0 \leq I \leq (\Gamma_1 + \Gamma_2)R^2$ . Левая граница ( $I = 0$ ) соответствует случаю, когда оба вихря сливаются в центре цилиндра ( $L = G = 0$ ), правая граница соответствует случаю, когда оба вихря касаются стенок цилиндра ( $G = \frac{1}{4}(\Gamma_1 + \Gamma_2)R^2, L = \frac{1}{4}(\Gamma_2 - \Gamma_1)R^2$ ). В обоих случаях энергия такой конфигурации стремится к бесконечности, поэтому при приближении к этим значениям интеграла  $G = \frac{I}{4}$  на бифуркационной диаграмме наблюдается асимптотическое поведение кривых  $H(I)$ , соответствующих неподвижным точкам (см. рис. 50, 51). Кроме указанных, существует еще две асимптоты (при  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ ), соответствующие случаю касания стенки цилиндра только одним вихрем (при этом другой вихрь находится в центре цилиндра). Из уравнений (9.33) и (9.29) можно показать, что эти асимптоты определяются уравнениями  $I = \Gamma_2 R^2, L = \Gamma_1 R^2$  (см. рис. 51).

На рисунке 50 изображена бифуркационная диаграмма для случая  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$  и все возможные типы фазовых портретов приведенной системы, соответствующих различным областям на диаграмме; этот случай обладает дополнительной симметрией. Фазовый портрет при малых значениях интеграла момента (рис. 50а) определяется одной устойчивой эллиптической

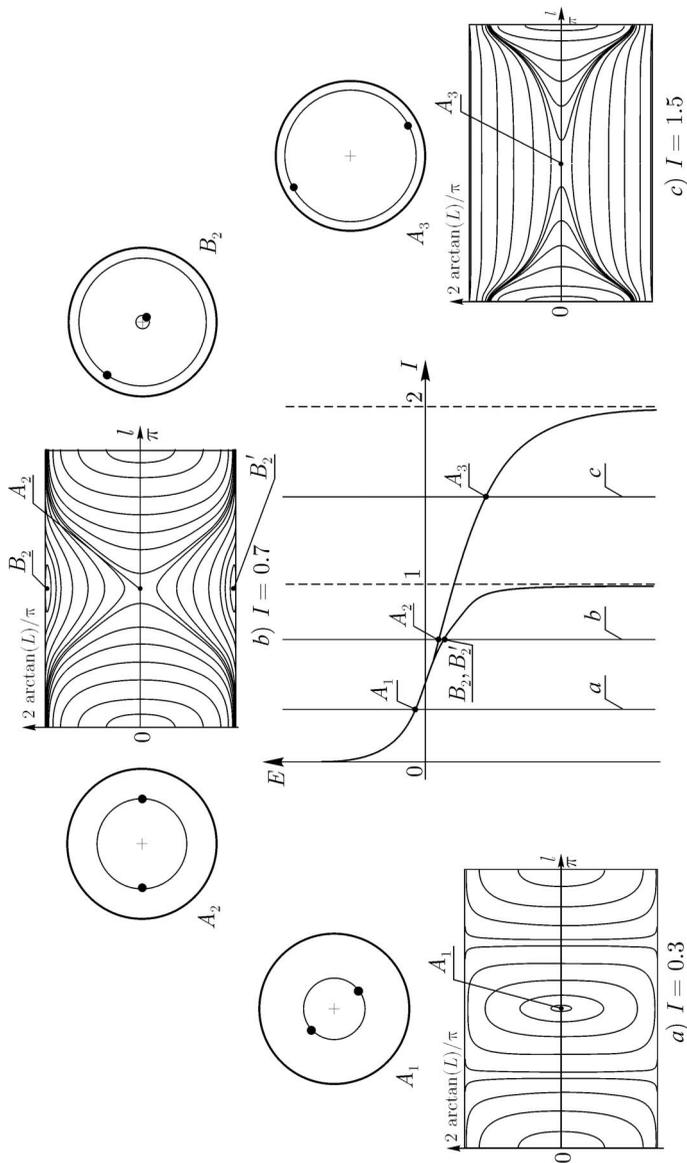


Рис. 50. Бифуркационная диаграмма, фазовые портреты и относительные равновесия системы (9.32) при  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ ,  $R = 1$ . Рисунок а)-с) соответствуют значениям интеграла, отмеченным на бифуркационной диаграмме, неподвижные точки и соответствующие им периодические движения вихрей обозначены одними и теми же буквами.

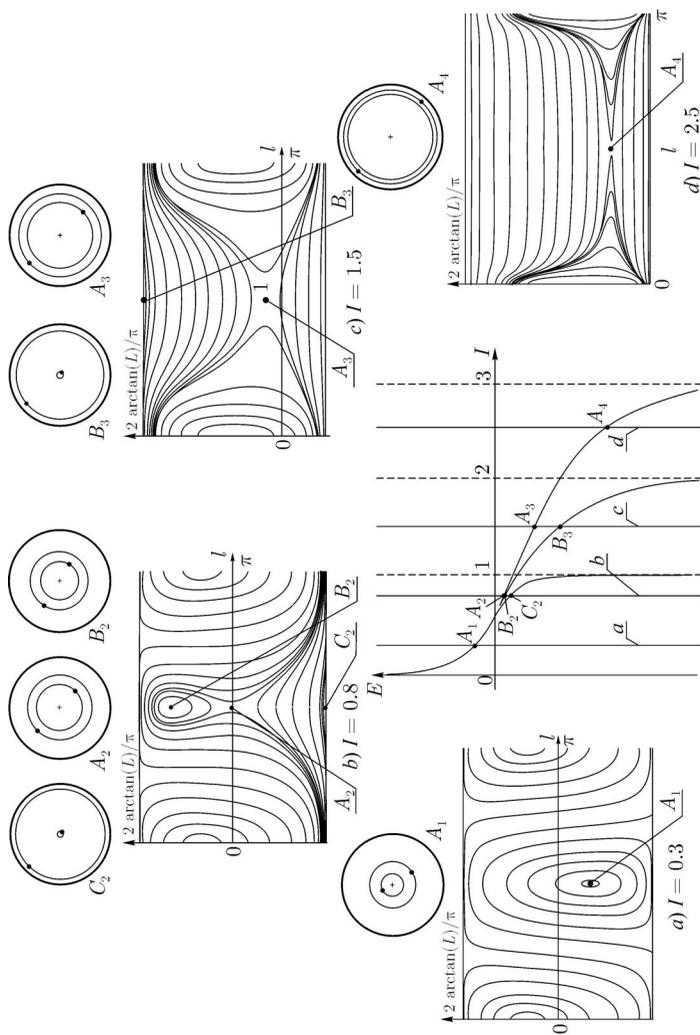


Рис. 51. Бифуркационная диаграмма, фазовые портреты и относительные равновесия системы (9.32) при  $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = 2$ . Сверху и по бокам диаграммы (рис. *a-d*) приведены четыре качественно различных фазовых портрета на разных уровнях интеграла  $I$ . Для каждой неподвижной точки на фазовом портрете приведены соответствующие траектории движения вихрей.

неподвижной точкой и одной особенностью в точке  $l = 0$ ,  $L = 0$ . Особенность соответствует слияние двух вихрей, а неподвижной точке — вращение вихрей по одной и той же окружности вокруг центра цилиндра, при котором они находятся на одной прямой с центром круга по разные стороны от него. При увеличении интеграла момента радиус этой окружности растет, и при некотором критическом значении данная конфигурация становится неустойчивой (рис. 50*b*). После бифуркации (типа вилки) из нее рождаются еще две устойчивые неподвижные точки, соответствующие вращению вихрей по различным окружностям, по разные стороны от центра цилиндра. В рассматриваемом случае равных интенсивностей оба устойчивых решения соответствуют одной и той же ветви диаграммы.

При дальнейшем увеличении момента мы пересекаем асимптоту на бифуркационной диаграмме  $I = \Gamma_1 R^2$ , после чего пропадает пара устойчивых периодических решений (при этом вихрь, движущийся по большей окружности, достигает границы). При  $I > \Gamma_1 R^2$  на фазовом портрете остается только одна неустойчивая неподвижная точка и особенность, вблизи которой траектории ведут себя, как в окрестности эллиптической неподвижной точки. (рис. 50*c*).

На рисунке 51 приведена бифуркационная диаграмма для случая неравных интенсивностей ( $\Gamma_1 = 1$ ,  $\Gamma_2 = 2$ ). В отличие от рассмотренного случая равных интенсивностей, нижняя ветвь диаграммы на рисунке 50 расщепляется на две части и, как следствие, (вместо нетипичной бифуркации типа вилки предыдущего случая) возникает бифуркация слияния неустойчивой и устойчивой неподвижных точек (рис. 51).

**II.  $\Gamma_1 < 0$ ,  $\Gamma_2 > 0$ .** Область изменения интеграла момента (9.13) в рассматриваемом случае определяется неравенствами  $\Gamma_1 R^2 \leq I \leq \Gamma_2 R^2$ . Границы этой области теперь соответствуют случаям, когда один из вихрей касается цилиндра, а другой находится в его центре.

Рассмотрим сначала случай  $|\Gamma_1| \neq |\Gamma_2|$  ( $\Gamma_1 = -1$ ,  $\Gamma_2 = 2$ ). На бифуркационной диаграмме имеются три кривые, соответствующие неподвижным точкам системы (9.32) (рис. 52). Верхняя кривая соответствует устойчивой неподвижной точке, существующей при всех значениях момента  $I$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При малых  $I$  для данного периодического решения вихрь отрицательной интенсивности движется по окружности меньшего радиуса, чем вихрь положительной интенсивности. При увеличении  $I$  радиус окружности, по которой движется вихрь отрицательной интенсивности, увеличивается, а радиус окружности, по которой движется вихрь положительной интенсивности, уменьшается. Таким образом в области изменения момента  $I$  всегда существует такое его значение, при котором эти два радиуса становятся равны, и вихри движутся по одной и той же окружности.

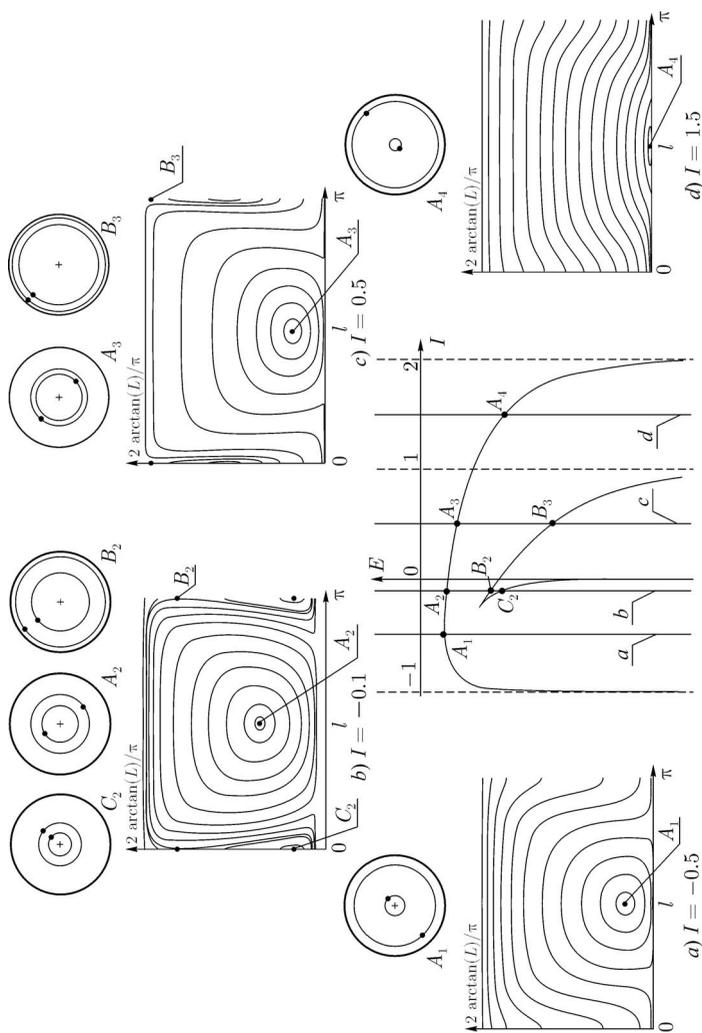


Рис. 52. Бифуркационная диаграмма системы (9.32) при  $\Gamma_1 = -1, \Gamma_2 = 2$ . На рисунках  $a-d$  приведены четыре качественно различных фазовых портрета для разных значений интеграла  $I$ , отмеченных на бифуркационной диаграмме. Для каждой неподвижной точки фазовых портретов приведены соответствующие траектории движения вихрей.

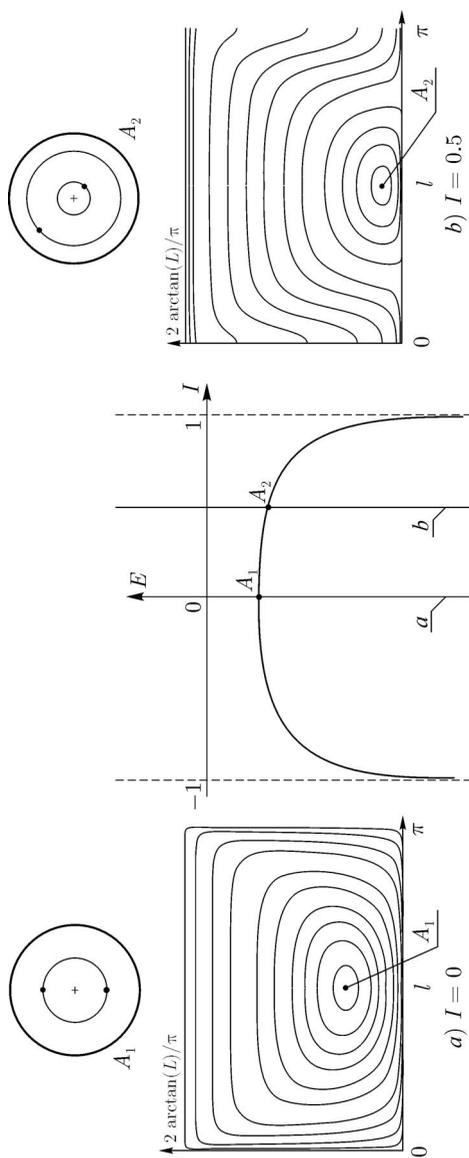


Рис. 53. Бифуркационная диаграмма системы (9.32) при  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = -1$ . На рисунках  $a$ – $b$  приведены два качественно различных фазовых портрета на разных уровнях интеграла  $I$ . Для каждой неподвижной точки фазовых портретов приведены соответствующие траектории движения вихрей.

Две другие ветви соответствуют устойчивой (нижняя) и неустойчивой (средняя) неподвижным точкам (рис. 52*b*). Обе эти точки соответствуют таким вращениям вихрей, при которых во все время движения они остаются на одной прямой с центром цилиндра по одну сторону от него. Устойчивая точка соответствует вращениям вихрей с меньшими радиусами, чем неустойчивая. Кроме того, средняя и нижняя ветви имеют асимптоты (внутри области возможных значений интеграла момента), которые задаются соотношениями

$$I = 0 \quad (\text{нижняя}), \quad I = (\Gamma_1 + \Gamma_2)R^2 \quad (\text{средняя}).$$

При прохождении первой асимптоты неподвижная точка, соответствующая нижней ветви, превращается в особенность, а при прохождении второй — оставшаяся неподвижная точка, соответствующая средней ветви, вместе с родившейся особенностью подходит к границе ОВД и исчезает. Все возможные типы фазового портрета приведенной системы для этого случая приведены на рис. 52*a–d*.

Рассмотрим теперь случай  $\Gamma_2 = -\Gamma_1 = 1$ , характеризующийся дополнительной симметрией. Его бифуркационная диаграмма изображена на рисунке 53. Основным отличием этого случая от предыдущего является отсутствие дополнительных периодических решений. Действительно, при уменьшении разности абсолютных значений вихрей ( $|\Gamma_1| \rightarrow |\Gamma_2|$ ) две центральные ветви бифуркационной диаграммы приближаются друг к другу, а при достижении равенства — сливаются и уходят на бесконечность. Отметим также, что симметричная конфигурация, при которой расстояния от центра цилиндра до обоих вихрей равны, достигается в этом случае при  $G = 0$  и соответствует статической конфигурации исходной задачи (угловая скорость вращения вихрей равна нулю). Типичные фазовые портреты приведены на рисунке 53*a–b*.

## 8. Движение двух вихрей вне кругового цилиндра

Рассмотрим задачу о движении двух точечных вихрей вне кругового цилиндра без набегающего потока. В данном разделе мы будем полагать, что центральный вихрь (интенсивности  $\sum \Gamma_i$ ) отсутствует. В такой постановке уравнения движения после приведения их к одной степени свободы будут совпадать с (9.33), а гамильтониан можно получить из (9.32) путем замены  $(R^2 - 2r_k)$  на  $(2r_k - R^2)$ . Основное отличие рассматриваемого случая от движения вихрей внутри круга заключается в разной области определения переменных  $G$  и  $L$ , которая задается теперь неравенствами

$$2\frac{G-L}{\Gamma_1} \geq R^2, \quad 2\frac{G+L}{\Gamma_2} \geq R^2 \quad (9.34)$$

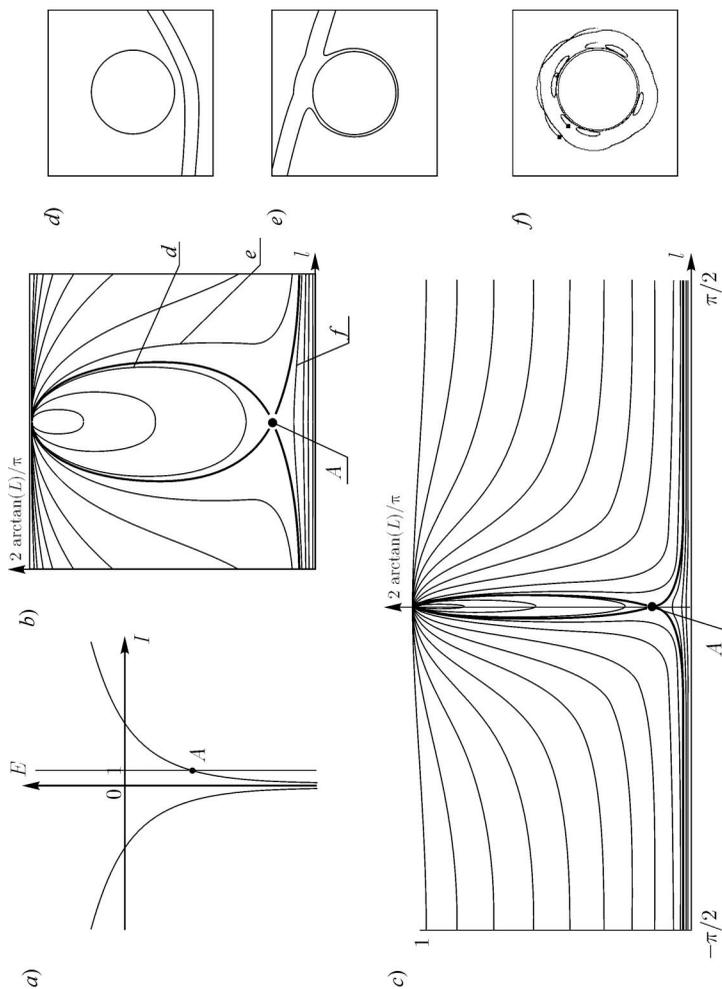


Рис. 54. *a)* Бифуркационная диаграмма задачи о движении пары вихрей ( $\Gamma_2 = -\Gamma_1 = 1$ ) вне кругового цилиндра. На рисунке *b)* — фазовый портрет приведенной системы на уровне интеграла  $I = 1$ , рисунок *c)* — увеличение центральной части фазового портрета; *d)*–*f)* абсолютные траектории движения вихрей, соответствующие различным фазовым траекториям на портрете.

и является неограниченной. Для построения фазового портрета вновь воспользуемся переменными  $(l, \frac{2}{\pi} \arctg L)$ , для которых область определения ограничена прямоугольником  $0 \leq l < \pi$ ,  $-1 < \frac{2}{\pi} \arctg L < 1$ .

По аналогии с задачей о движении двух вихрей внутри круга можно выполнить полный качественный анализ данной системы. Здесь мы ограничимся рассмотрением движения вихревой пары ( $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ ) вне круга. На рисунке 54а приведена бифуркационная диаграмма для этого случая. Как видно из диаграммы, при всех значениях интеграла  $I$  на фазовом портрете системы имеется лишь одна неподвижная точка (рис. 54б, с); фазовый портрет качественно не меняется при изменении  $I$ . Исключение составляет значение  $I = 0$ , при приближении к которому неподвижная точка стремится к особенности гамильтониана, а оба вихря начинают касаться стенок цилиндра. На бифуркационной диаграмме такое поведение соответствует асимптоте при  $I = 0$ .

Как видно из рис. 54с, неподвижная точка и выходящие из нее сепаратрисные решения делят ОВД на три области различных типов траекторий вихрей. Первая область — внутри петли сепаратрисы — соответствует простому рассеянию вихревой пары на цилиндре (рис. 54д), при котором вихревая пара приходит из бесконечности, взаимодействует с цилиндром и уходит на бесконечность (на портрете в точку  $l = 0$ ,  $L = \infty$ ). Вторая область — между сепаратрисами — соответствует такому рассеянию, при котором вихри обходят цилиндр с разных сторон (рис. 54д). И третья область — ниже сепаратрис — соответствует компактным квазипериодическим вращениям вихрей вокруг цилиндра. Очевидно, что переход траектории системы из одной области в другую невозможен, что, в частности, приводит к невозможности такого явления, как захват вихрей цилиндром.

При добавлении малого возмущения (например, малые колебания круга) вблизи сепаратрис возникает стохастический слой, и, по-видимому, возможен захват одного или обоих вихрей, хотя подробно этот вопрос не изучен (см. для примера [117, 149]). Если область не является круговой, то система двух вихрей уже не является интегрируемой. Аналитическое доказательство этого факта имеется в [200].

## § 10. Движение периодических цепочек и решеток из точечных вихрей

В этом параграфе мы рассмотрим взаимодействие периодических цепочек точечных вихрей, для которых вихри расположены через равный промежуток на одной прямой, и вихревых решеток, когда вихри образуют регулярную двоякопериодическую структуру с периодами  $2\omega_1$  и  $2\omega_2$ . Эти задачи равносильны, соответственно, задачам о движении точечных вихрей на цилиндре  $Syl^2$  (цепочки) и торе  $T^2$  (решетки). Рассмотрим последовательно два эти случая.

### 1. Вихри на цилиндре

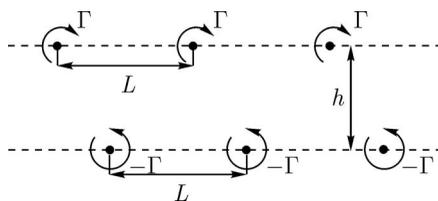


Рис. 55. Дорожки Бенара – Кармана за цилиндром.

Уравнения движения для этой задачи впервые были получены А. А. Фридманом и П. Я. Полубариновой (Кочиной) в 1928 г. [58] простой периодизацией обычной плоской задачи  $N$  вихрей; более частные формы были рассмотрены Г. Ламбом [41], Т. Карманом [119] в связи с задачей вихревого обтекания цилиндра идеальной жидкостью и образованию за ним двух бесконечных вихревых цепочек, в которых вихри расположены в шахматном порядке (дорожки Бенара – Кармана, см. рис. 55).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Статья [58] замечательна также тем, что в ней получены уравнения движения и первые интегралы для динамики точечных вихреисточников, обобщающих модель точечных вихрей. В работе [21] именно вихреисточники предлагаются использовать для моделирования атмосферных образований. Еще одно важное значение модель вихреисточников имеет для моделирования грунтовых вод, например, нефтяных пластов. При этом в роли вихреисточников выступают скважины, которые, с одной стороны, обладают некоторой завихренностью, а с другой стороны — постоянным оттоком жидкости. Движение вихреисточников исследуется в приложении 10. Уравнения движения простых источников, независимо от [58], были получены в [6], там же указаны простейшие случаи их движения.

Для модели вихревой дорожки традиционно рассматривается случай двух цепочек с противоположными циркуляциями  $\Gamma$  и  $-\Gamma$  и с периодом  $L$ . Для анализа устойчивости их можно разбить на четыре цепочки (как было предложено Н. Е. Кочиным [36]), рассматривая каждый второй вихрь в цепочках. Естественно, что при этом период цепочек становится  $2L$ . Т. Карман

показал, что (относительные) равновесия неустойчивы в линейном приближении, за исключением случая, когда вихри располагаются в строгом шахматном порядке (см. рис. 55) и выполнено условие

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sh}^{-1}(1) \approx 0.281. \quad (10.1)$$

Однако при более полном нелинейном анализе Н. Е. Кочин показал [36], что и в этом случае система будет также неустойчива по Ляпунову. Схожий критический случай встречается при анализе устойчивости томсоновской конфигурации семи вихрей, оказавшейся устойчивой в нелинейном приближении.

В оправдание результатов Кармана предлагались различные соображения, связанные с рождением периодических и квазипериодических решений вблизи положений равновесия [145]. Мы здесь только заметим, что для критических случаев (когда одно или несколько собственных значений обращается в нуль) устойчивость или неустойчивость в нелинейном смысле надо понимать особым образом. В обоих случаях система, как правило, выходит из положения равновесия за счет либо диссипации (в эксперименте), либо погрешностей численных методов (при численном моделировании). Интересно было бы получить соответствующие оценки для времени этого выхода и ввести количественные показатели устойчивости. Еще один способ обосновать наблюдаемую устойчивость вихревых дорожек состоит в замене точечных вихрей системой вихревых пятен [174, 181] (см. также [54, 147]).

Отметим также, что периодические вихревые цепочки были рассмотрены А. А. Фридманом для моделирования порывистости ветра [28].

Формально «периодизуя» гамильтониан плоского случая для цепочек с шагом  $L$ , получим

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum'_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln |z_{\alpha} - z_{\beta} - nL|. \quad (10.2)$$

Функция (10.2) является расходящейся, для ее сходимости добавим в нее постоянное слагаемое и перегруппируем члены, в результате чего получим

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum'_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln |z_{\alpha} - z_{\beta} - nL| + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum'_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln |nL| = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln \left| (z_{\alpha} - z_{\beta}) \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{z_{\alpha} - z_{\beta}}{nL} \right)^2 \right] \right| = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln \left| \sin \frac{\pi}{L} (z_{\alpha} - z_{\beta}) \right|. \quad (10.3) \end{aligned}$$

Уравнения динамики вихрей можно представить в виде

$$\frac{d\bar{z}_\alpha}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{\beta=1}^N \Gamma_\beta \Phi_{Cyl}(z_\alpha - z_\beta), \quad (10.4)$$

где  $\Phi_{Cyl}(z) = \frac{\pi}{L} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{L} z \right)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (10.4) могут быть получены непосредственным суммированием поля скоростей бесконечного числа вихрей; в отличие от (10.2) эти ряды являются сходящимися.

Уравнения (10.3), (10.4) обладают интегралами, указанными Биркгофом и Фишером (1959) [80]:

$$P = \sum \Gamma_i x_i, \quad Q = \sum \Gamma_i y_i, \quad \{Q, P\} = \sum \Gamma_i$$

или, в комплексной форме,  $Z = Q + iP = \sum \Gamma_i z_i$ .

Очевидно, что по теореме Лиувилля интегрируемыми оказываются задачи двух вихрей и трех вихрей с нулевой суммарной интенсивностью (Ареф, 1984 г. [65]).

Для последней задачи явное приведение к одной степени свободы (т. е. к системе на плоскости) выполняется при помощи переменных [164]

$$\zeta_1 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{L}(z_2 - z_3), \quad \zeta_2 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{L}(z_3 - z_1), \quad \zeta_3 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{L}(z_1 - z_2),$$

удовлетворяющих соотношению  $\zeta_1 \zeta_2 + \zeta_2 \zeta_3 + \zeta_3 \zeta_1 = 1$ .

Приведенная система и ее фазовый портрет в частном случае описаны в [164]. Более подробный анализ содержится в работе [77], где указаны также условия, при которых система имеет периодическую и квазипериодическую симметрии, изучены особые точки и построено несколько траекторий абсолютного движения.

Более сложные неинтегрируемые системы типа (10.3), (10.4), начиная с трех вихрей с ненулевой суммарной циркуляцией, пока еще совсем не изучены.

## 2. Вихри на торе

Случай решеток можно получить из случая цепочек при помощи еще одного суммирования. Введем два периода  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ , пользуясь стандартными обозначениями из теории эллиптических функций. Пусть  $\tau = \omega_2/\omega_1$  имеет положительную мнимую часть.

Исходя из рассуждений Ткаченко [56], в работе [164] О'Нейл получил явное выражение для гамильтониана с помощью эллиптических функций

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_\alpha \Gamma_\beta \left[ \ln |\theta_1(z_\alpha - z_\beta, \tau)| - \pi \frac{[\text{Im}(z_\alpha - z_\beta)]^2}{\Delta} \right], \quad (10.5)$$

где  $\theta_1$  — якобиева тэта-функция,  $\Delta = 2i(\omega_1 \bar{\omega}_2 - \omega_2 \bar{\omega}_1) = 4|\omega_1|^2 \text{Im} \tau$ . Уравнения движения при этом имеют вид

$$\frac{d\bar{z}_\alpha}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum'_{\beta=1}^N \Gamma_\beta \Phi_{\mathbb{T}^2}(z_\alpha - z_\beta), \quad (10.6)$$

$$\Phi_{\mathbb{T}^2}(z) = \zeta(z) + \left[ \frac{\pi \bar{\omega}_1}{\Delta \omega_1} - \frac{\eta_1}{\omega_1} \right] z - \frac{\pi}{\Delta} \bar{z},$$

где  $\zeta$  — функция Вейерштрасса с полупериодами  $\omega_1, \omega_2$ , а  $\eta_1 = \zeta(\omega_1)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Выражение (10.5) для практических вычислений тогда удобнее представить в вещественной форме, не переходя к тэта-функциям [199]:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\alpha, \beta=1}^N \Gamma_\alpha \Gamma_\beta h(x_\alpha - x_\beta, y_\alpha - y_\beta),$$

где

$$h(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left( \frac{\text{ch}(x - 2\pi m) - \cos y}{\text{ch}(2\pi m)} \right) - \frac{x^2}{2\pi}.$$

Здесь мы для простоты предположили, что решетка имеет два одинаковых вещественных периода, равных  $2\pi$ .

Уравнения (10.5), (10.6) имеют интегралы

$$Q = \sum \Gamma_i x_i, \quad P = \sum \Gamma_i y_i, \quad \{Q, P\} = \sum \Gamma_i$$

(или  $Z = Q + iP = \text{const}$ ), поэтому задачи двух вихрей и трех вихрей с нулевой суммарной интенсивностью  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0$  будут интегрируемыми [164, 192].

Анализ различных частных ситуаций для последней задачи и несколько редуцированных фазовых портретов построены Х. Арефом и М. Стремлером в [192], где указаны также различные возможные типы таких портретов,

обладающих периодической и квазикристаллической симметриями. Неинтегрируемые и хаотические системы, имеющиеся при большей размерности (например, при  $N = 3$ ,  $\sum \Gamma_i \neq 0$ ) пока еще не изучены.

Движение точечных вихрей на цилиндре с геометрической точки зрения рассматривается в недавней работе [157]. В ней развит гамильтонов формализм, с помощью которого доказана единственность относительных равновесий для вихрей одинакового знака, а также рассмотрен случай  $\sum \Gamma_i = 0$ . В [157] указано несколько результатов, касающихся относительных периодических и квазипериодических орбит, включая, как следствие, классические результаты о чехарде вихрей и вихревых дорожках Кармана. Одно из периодических решений, рассмотренное в [157], соответствует «танцующим вихрям», которые более подробно (для различных поверхностей с симметрией, включая цилиндр) рассмотрены в [189] (см. также приложение 3).

Проблема коллапса вихрей на цилиндре и торе изучена в работе [163]. Показано, что движение вблизи столкновения является асимптотическим к обычному гомографическому коллапсу. В [163] с помощью численных расчетов указано «двоякосингулярное» решение, когда вихри коллапсируют при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ . При этом такое движение происходит за конечный промежуток времени, а вихри переходят (в двоякопериодическом случае) из одной ячейки в другую.

В заключение отметим также работы [132, 135, 134, 187, 186, 188, 197, 198], присланные нам Л. Занетти. Эти работы итальянской школы (в основном Э. Лауры и его учеников) мало цитируются, хотя содержат интересные результаты относительно частных решений задачи движения вихрей на плоскости и их устойчивости.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука, 1991.
- [2] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. *Симплектическая геометрия*. Ижевск: Изд-во РХД, 2000. 168 с.
- [3] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. *Математические аспекты классической и небесной механики* // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 3.
- [4] Багрец А. А., Багрец Д. А. *Неинтегрируемость гамильтоновых систем вихревой динамики* // Рег. и хаот. дин. 1997. Т. 2. № 1; 2. С. 36–43; 58–65.
- [5] Барут А., Рончка Р. *Теория представлений групп и ее приложения*. М.: Мир, 1980. Т. 1, 2. Пер. с англ. Barut A., Raczka R. *Theory of Group Representations and Applications* // PWN. Polish Scientific Publishers, 1977.
- [6] Богомолов В. А. *Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков* // Изв. АН СССР, Мех. жидкости и газа. 1976. № 4. С. 21–27.
- [7] Богомолов В. А. *Динамика завихренности на сфере* // Изв. АН. СССР Мех. жид. и газа. 1977. № 6. С. 57–65.
- [8] Богомолов В. А. *Модель колебаний центров действия атмосферы* // Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 3. С. 243–249.
- [9] Богомолов В. А. *О двумерной гидродинамике на сфере* // Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 1. С. 29–35.
- [10] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. *Переход к хаосу в динамике четырех точечных вихрей на плоскости*, принято в Доклады РАН.
- [11] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. *Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере*, Нелинейная динамика, 2005, т. 1, № 2, стр. 233–246.
- [12] Борисов А. В., Козлов В. В. *Неинтегрируемость системы взаимодействующих частиц с потенциалом Дайсона* // Доклады РАН. 1999. Т. 366. № 1. С. 30–31.
- [13] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

- [14] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур* // В кн.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [15] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд-во РХД, 1999. 464 с.
- [16] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Современные методы теории интегрируемых систем*. Москва–Ижевск: ИКИ, 2003.
- [17] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. *Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области* / В кн. «Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей» (ред. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский). Москва–Ижевск: ИКИ, 2003. С. 414–440.
- [18] Бэтчелор Дж. *Введение в динамику жидкости*. М.: Мир, 1973. Пер. с англ. Batchelor G. K. *An introduction to fluid mechanics*. Camb. Univ. Press, 1967.
- [19] Вилля А. *Теория вихрей*. М.–Л.: ОНТИ, 1936. Пер. с фр. Villat H. *Leçons sur la théorie des tourbillions*. Gauthier-Villars, 1930.
- [20] Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование*. М.: Наука, 1976. Пер. с фр. Volterra V. *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris: Gauthier-Villars, 1931.
- [21] Голубева О. В. *К вопросу о движении цепочек вихрей и вихреисточников на поверхности сферы* // ДАН СССР. 1949. Т. LXV. № 5. С. 653–656.
- [22] Горячев Д. Н. *О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей*. Москва: Унив. тип., 1898.
- [23] Громека И. С. *О вихревых движениях жидкости на сфере*. Собрание протоколов заседания секции физ.-мат. общества естествоиспытателей при Казанском университете. В кн. Громека И. С. Собр. соч. М.: АН СССР, 1952.
- [24] Гряник В. М., Соколовский М. А., Веррон Ж. *Динамика бароклиных вихрей с нулевой суммарной интенсивностью (хетонов)* // В кн. «Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей» / Ред. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский. Москва–Ижевск: ИКИ, 2003. С. 547–622.
- [25] Жуковский Н. Е. *К вопросу о разрезании вихревых шнугов*. Полное собр. соч. М.–Л.: ОНТИ, 1936. Т. 3. С. 387–405.
- [26] Жуковский Н. Е. *Обобщение задачи Бьёркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы*. Собрание сочинений. Ленинград, 1949. Т. 2. 665 с.

- [27] Зиглин С. Л. *Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей* // ДАН СССР. 1979. Т. 250. № 6. С. 1296–1300.
- [28] Извеков Б. А., Кочин Н. Е. (ред.) *Динамическая метеорология*. Л.: Ред. изд. отд. ЦУЕГМС, 1935. Гидрометеоиздат, 1937. Т. 1, 2.
- [29] Кирхгоф Г. *Механика. Лекции по математической физике*. М.: АН СССР, 1962. Пер. с нем. Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik*. Leipzig: Mechanik, 1874.
- [30] Козлов В. В. *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике* // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
- [31] Козлов В. В. *Об одной задаче Кельвина* // Прикл. мат. и мех. 1989. Т. 53. № 1. С. 165–167.
- [32] Козлов В. В. *Общая теория вихрей*. РХД, Изд. дом «Удм. унив.», 1998.
- [33] Козлов В. В. *Симметрия, топология и резонансы в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та, 1995.
- [34] Козлов В. В., Колесников Н. Н. *О теоремах динамики* // ПММ. 1978. Т. 42. № 2. С. 28–33.
- [35] Коновалюк Т. П. *Классификация взаимодействия вихревой пары с точечным вихрем в идеальной жидкости* // Гидромеханика, АН УССР. 1990. Т. 62. С. 64–71.
- [36] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидромеханика*. ГИТТЛ. 1955. Т. 1.
- [37] Кузьмина Р. П. *О верхней оценке числа центральных конфигураций в плоской задаче  $n$  тел* // Доклады АН СССР. 1977. Т. 234. № 5. С. 1016–1019.
- [38] Куракин Л. Г. *О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере* // ДАН. 2003. Т. 388. № 4. С. 482–487.
- [39] Куракин Л. Г. *Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области* // Доклады РАН, 2004, т. 399, № 1, с. 52–55.
- [40] Куракин Л. Г., Юдович В. И. *Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника* // В кн.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. См. также Kurakin L. G., Yudovich V. I. *The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon* // Chaos. 2002. V. 12. № 3. P. 574–595.
- [41] Ламб Г. *Гидродинамика*. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. Пер. с англ. Lamb H. *Hydrodynamics*. Ed. 6-th. N. Y., Dover publ., 1945.

- [42] Мелешко В. В., Константинов М. Ю. *Динамика вихревых структур*. Киев: Наукова думка, 1993.
- [43] Милн-Томсон Л. М. *Теоретическая гидродинамика*. М.: Мир, 1964. Пер. с англ. Milne-Thomson L. M. *Theoretical Hydrodynamics*. 1968.
- [44] Мошук Н. К. *Качественный анализ движения тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой плоскости* // ПММ. 1988. Т. 52. № 2. С. 203–210.
- [45] Новиков Е. А. *Динамика и статистика системы вихрей* // ЖЭТФ. 1975. Т. 68. Вып. 5. С. 1868–1882.
- [46] Новиков Е. А., Седов Ю. Б. *Коллапс вихрей* // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. Вып. 2(8). С. 588–597.
- [47] Новиков Е. А., Седов Ю. Б. *Стохастические свойства системы четырех вихрей* // ЖЭТФ. 1978. Т. 75. Вып. 3. С. 868–876.
- [48] Переломов А. М. *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*. М.: Наука, 1990.
- [49] Пуанкаре А. *Теория вихрей*. Ижевск: Изд-во РХД, 2001. 160 с. Пер. с фр. Poincaré H. *Théorie des tourbillions*. Paris: Carre, 1893.
- [50] Рамоданов С. М. *Движение кругового цилиндра и  $N$  точечных вихрей в идеальной жидкости* // В кн.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. См. также Ramodanov S. M. *The motion of a circular cylinder and  $N$  point vortices in a perfect fluid* // Reg. & Chaot. Dyn. 2002. V. 7. № 3. P. 201–298.
- [51] Селиванова Е. Н. *Топология задачи о трех точечных вихрях* // Труды МИРАН им. В. А. Стеклова. 1994. Т. 205. С. 141–149.
- [52] Симо К. (ред.) *Современные проблемы хаоса и нелинейности*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 304 с.
- [53] Смейл С. *Топология и механика* // Усп. мат. наук. 1972. Т. 27. № 2. С. 77–133. Пер. с англ. Smale S. *Topology and Mechanics* // Inv. Math. 1970. 10. P. 305–331. 11. P. 45–64.
- [54] Сэффмэн Ф. Дж. *Динамика вихрей*. М.: Научный мир, 2000. Пер. с англ. Saffman P. G. *Vortex Dynamics*. Camb. Univ. Press, 1992.
- [55] Ткаченко В. М. *О вихревых решетках* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. Вып. 6(12). С. 1875–1883.
- [56] Ткаченко В. К. *Устойчивость вихревых решеток* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. Вып. 6. С. 1573–1585.
- [57] Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики*. М.: Наука, 1967. 524 с. Пер. с англ. Wintner A. *The analytical foundations of*

- celestial mechanics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. London: Humphrey Milford. Oxford University Press. 1941. 524 p.
- [58] Фридман А. А., Полубаринова П. Я. *О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости*. Геофизический сборник. 1928. С. 9–23.
- [59] Хазин Л. Г. *Правильные многоугольники из точечных вихрей и резонансная неустойчивость стационарных состояний* // ДАН. 1976. Т. 230. № 4. С. 799–802.
- [60] Хазин Л. Г. *Устойчивость положения равновесия гамильтоновых систем при кратных частотах*. В сб.: Н. Е. Кочин и развитие механики. М.: Наука, 1984. С. 174–185.
- [61] Acheson D. J. *Instability of vortex leapfrogging*, Eur. J. Phys., 2000, v. 21, p. 269–273.
- [62] Adams M., Ratiu T. S. *The three point vortex problem: commutative and non-commutative integrability in Hamilton dynamical systems* // Cont. Math. 1998. V. 81. P. 245–257.
- [63] Albouy A. *Simétrie des configurations centrales de quatre corps*. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1995. V. 320. P. 217–220.
- [64] Albouy A. *The symmetric central configurations of four equal masses* // Cont. Math. 1996. V. 198. P. 131–135.
- [65] Aref H. *Chaos in the dynamics of a few vortices — fundamentals and applications* // IUTAM Congress. 1984 (invited lecture).
- [66] Aref H. *Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 345–389.
- [67] Aref H. *Motion of three vortices* // Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 6. P. 1392–1409.
- [68] Aref H. *On the equilibrium and stability of a row of point vortices* // J. Fluid Mech. 1995. V. 290. P. 167–191.
- [69] Aref H. *Point vortex motions with a center of symmetry* // Phys. Fluids. 1982. V. 25(12). P. 2183–2187.
- [70] Aref H. *Stirring by chaotic advection* // J. Fluid. Mech. 1984. V. 143. P. 1–21.
- [71] Aref H. *The numerical experiment in fluid mechanics* // J. Fluid. Mech. 1986. V. 173. P. 15–41.
- [72] Aref H., van Buren M. *Vortex triple rings*, Phys. of Fluids, 2005, v. 17, 057104.
- [73] Aref H., Newton P. K., Stremler M., Tokieda T., Vainchtein D. L. *Vortex Crystals* // Adv. Appl. Mech., 2003, v. 29, p. 1–79.

- [74] Aref H., Pomphrey N. *Integrable and chaotic motions of four vortices. I. The case of identical vortices* // Proc. R. Soc. London. 1982. V. 380A. P. 359–387.
- [75] Aref H., Rott N., Thomann H. *Grobli's solution of the three-vortex problem* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1992. V. 24. P. 1–20.
- [76] Aref H., Stremler M. A. *Four-vortex motion with zero total circulation and impulse* // Phys. Fluids. 1999. 11(12). P. 3704–3715.
- [77] Aref H., Stremler M. A. *On the motion of three point vortices in a periodic strip* // J. Fluid. Mech. 1996. 314. P. 1–25.
- [78] Aref H., Vainchtein D. L. *Point vortices exhibit asymmetric equilibria* // Nature. 1998. V. 392. 23 April. P. 769–770.
- [79] Bagrets A. A., Bagrets D. A. *Nonintegrability of two problems in vortex dynamics* // Chaos. 1997. V. 7. № 3. P. 368–375.
- [80] Birkhoff G., Fisher J. *Do vortex sheet roll up?* // Rend. di Circolo Math. di Palermo. 1959. V. 8. P. 77–90.
- [81] Bjerknes V. F. *Fields of force*. New York: The Columbia University Press, 1906.
- [82] Boatto S., Cabral H. *Nonlinear stability of latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere* // SIAM J. Appl. Math. 2003. V. 64. № 1. P. 216–230.
- [83] Boatto S., Laskar J. *Point vortex cluster formation in the plane and on the sphere. An energy bifurcation condition* // Chaos. 2003. V. 13. № 3. P. 824–835.
- [84] Borisov A. V., Kilin A. A. *Stability of Thomson's configurations of vortices on a sphere* // Reg. & Ch. Dyn. 2000. V. 5. № 2.
- [85] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. *Reduction and chaotic behavior of point vortices on a plane and a sphere*, accepted for publication in the Expanded Volume of DCDS devoted to the 4th Int-I Conference on Dynamical Systems and Differential Equations (Pomona, June 2004).
- [86] Borisov A. V., Mamaev I. S. *An Integrability of the problem of motion of cylinder and vortex in the ideal fluid* // Reg. & Chaot. Dyn. 2003. V. 2. P. 31–35.
- [87] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Integrability of the problem of motion of a cylinder and a point vortex in a perfect fluid*. Reg. & Chaot. Dyn. 2003. V. 8. № 2. P. 163–166.
- [88] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. *New periodic solutions for three of four identical vortices on a plane and a sphere*, accepted for publication in the Expanded Volume of DCDS devoted to the 4th Int-I Conference on Dynamical Systems and Differential Equations (Pomona, June 2004).

- [89] Borisov A. V., Mamaev I. S., Tronin K. G. *Absolute choreographies of point vortices on sphere*, Reg. & Chaot. Dyn., 2006, v. 11, № 1.
- [90] a) Borisov A. V., Pavlov A. E. *Dynamics and Statics of vortices on a Plane and a Sphere*. I // Reg. & Ch. Dynamics. 1998. V. 3. № 1. P. 28–39.  
b) Borisov A. V., Lebedev V. G. *Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere*. II. *General compact case* // Reg. & Ch. Dynamics. 1998. V. 3. № 2. P. 99–114.  
c) Borisov A. V., Lebedev V. G. *Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere*. III. *General compact case* // Reg. & Ch. Dynamics. 1998. V. 3. № 4. P. 76–90.  
d) Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. *Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics*. IV. *Classification of algebra of  $n$  vortices on a plane. Solvable problems of vortices dynamics. Algebraization and reduction in a three-body problem* // Reg. & Ch. Dynamics. 1999. V. 4. № 1. P. 23–50.
- [91] Bruschi M. *On the algebra of certain matrices related to the zeros of Hermit polynomials* // Lett. Nuovo Cim. 1979. V. 24. P. 509–511.
- [92] Burdick L. W., Kelly S. D., Marsden J. E., Shashikanth B. N. *The Hamiltonian structure of a two-dimensional rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices*. Physics of Fluids. 2002, v. 14, № 3, p. 1214–1227.
- [93] Cabral H., Meyer K., Schmidt D. *Stability and bifurcations for the  $N + 1$  vortex problem on the sphere*. Reg. & Ch. Dynamics. 2003. V. 8. № 3. P. 259–282.
- [94] Cabral H., Schmidt D. *Stability of relative equilibria in the problem of  $N + 1$  vortices* // SIAM. J. of Math. Analysis. 1999. V. 31. P. 231–250.
- [95] Calogero F. *Integrable many-body problems*. Lectures given at NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Equations in Physics and Mathematics, Istanbul, August. 1977. P. 3–53.
- [96] Calogero F. *On the zeros of the classical polynomials* // Lett. al Nuovo Cimento. 1977. V. 19. № 13. P. 505–508.
- [97] Campbell L. J. *Transverse normal modes of finite vortex arrays* // Phys. Rev. B. 1981. V. 24A. № 2. P. 514–534.
- [98] Campbell L., Ziff R. *A catalog of two-dimensional vortex patterns*. Los Alamos Scientific Laboratory Report No. La-7384-MS. 1978.
- [99] Campbell L. J., Ziff R. M. *Vortex patterns and energies in a rotation superfluid* // Phys. Rev. B. 1979. V. 20. № 5. P. 1886–1901.
- [100] Castilla M. S. A. C., Moauro V., Negrini P., Oliva W. M. *The four positive vortices problem. Regions of chaotic behavior and non-integrability* // Ann. de l'Institut Henri Poincaré. Phys. Theor. 1993. 59(1). P. 99–115.

- [101] Castilla M.S.A.C., Moauro V., Negrini P.P., Oliva W.M. *The non-integrability of the four positive vortices problem* // PhD Thesis, Dip. Mat. Università, Trento, UTM, May 1992.
- [102] Celletti A., Falcolini C. *A remark on the KAM theorem applied to a four-vortex system* // J. Stat. Phys. 1998. 52. 1–2. P. 471–477.
- [103] Chapman D. *Ideal vortex motion in two dimensions: symmetries and conservation laws* // J. Math. Phys. 1978. V. 19(9). P. 1988–1992.
- [104] Chenciner A., Montgomery P. *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses* // Annals of Math. 2000. V. 152. P. 881–901.
- [105] Dyson F. J. *Statistical theory of the energy levels of complex systems. I, II, III* // J. of Math. Phys. 1962. V. 3. № 1. P. 140–156; 157–165; 166–175.
- [106] Eckhardt B. *Integrable four vortex motion* // Phys. Fluids. 1988. V. 31(10). P. 2796–2801.
- [107] Eckhardt B., Aref H. *Integrable and chaotic motion of four vortices. II. Collision dynamics of vortex pairs* // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1988. V. 326. P. 655–696.
- [108] Föppl L. *Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder*. Sitzungsber. K. Bähr Akad. Wiss I, 7 (1913); *Vortex motion behind a circular cylinder*. NASA TM 77015
- [109] Glass K. *Equilibrium configurations for a system of  $N$  particles in the plane* // Phys. Lett. 1997. A. V. 235. P. 591–596.
- [110] Greenhill A. G. *Plane vortex motion* // Quart. J. Pure Appl. Math. 1877/78. V. 15. № 58. P. 10–27.
- [111] Gröbli W. *Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden* // Vierteljahrsh. d. Naturforsch. Gesellsch. 1877. V. 22. P. 37–81, 129–165.
- [112] Hardin J.C., Mason J.P. *Periodic motion of two and four vortices in a cylindrical pipe* // Phys. Fluids. 1984. 27 (7). P. 1583–1589.
- [113] Havelock T.H. *The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation* // Phil. Mc. 1931. Ser. 7. V. 11. № 70. P. 617–633.
- [114] Helmholtz H. *Über Integrale hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen*. J. rein. angew. Math. 1858, v. 55, S. 25–55., см. также русский перевод с комментариями С. А. Чаплыгина в книге Гельмгольц Г. *Основы вихревой теории*. М.-Иж., ИКИ. 2002, 82 с.
- [115] Hénon A. *A family of periodic solutions of the planar three-body problem and their stability* // Cel. Mech. 1976. V. 13. P. 267–285.
- [116] Johnson E.R., McDonald Robb N. *The motion of a vortex near two circular cylinders* // Proc. R. Soc. Lond. A. 2004. V. 460. P. 939–954.

- [117] Kadtke J. B., Novikov E. A. *Chaotic capture of vortices by a moving body I. Bound pair model*. Chaos. 1993, 3, p. 543.
- [118] Kadtke J. B., Novikov E. A. *Chaotic capture of vortices by a moving body. I. The single point vortex case* // Chaos. 1993. 3(4). P. 543–553.
- [119] Karman Th. von. *Über den Mechanismus des Widerstands, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt* // Göttingen Nach. Math. Phys. Kl. 1911. P. 509–519.
- [120] Khanin K. M. *Quasi-periodic motions of vortex systems* // Physica D. 1982. V. 4. P. 261–269.
- [121] Kidambi R., Newton P.K. *Collision of three vortices on a sphere* // II Nuovo Cimento. 1999. V. 22. № C(6). P. 779–791.
- [122] Kidambi R., Newton P.K. *Motion of three point vortices on a sphere* // Physica D. 1998. V. 116. P. 143–175.
- [123] Kidambi R., Newton P.K. *Vortex motion on a sphere with solid boundaries* // Phys. Fluids. 2000. V. 12(3). P. 581–588.
- [124] Kimura Y. *Motion of two point vortices in a circular domain*. J. Phys. Soc. Japan. 1988, v. 57, № 5, p. 1641–1649.
- [125] Kimura Y. *Vortex collapse from the viewpoint of complex-time singularity*, Physica D, 1991, v. 51, p. 512–519.
- [126] Kimura Y., Kusumoto Y., Hasimoto H. *Some particular solutions for symmetric motion of point vortices in a circular cylinder*. J. Phys. Soc. Japan. 1984, v. 53, № 9, p. 2988–2995.
- [127] Kimura Y., Okamoto H. *Vortex Motion on a Sphere* // J. of Phys. Soc. Jap. 1987. V. 56. № 12. P. 4203–4206.
- [128] Kirchhoff G. R. *Vorlesungen über Mathematische Physik*. Teubner, Leipzig. 1876, v. I.
- [129] Koiller J., Carvalho S.P. *Non-integrability of the four-vortex system: analytical proof* // Comm. Math. Phys. 1989. 120(4). P. 643–652.
- [130] Kurakin L. G., Yudovich V. I. *The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon*. Chaos. 2002, v. 12, № 3, p. 574–595.
- [131] de Laat T. W. G., Coen R. *Two-dimensional vortex motion in the cross-flow of a wing-body configuration*. J. Fluid Mech. 1995, 305, 93.
- [132] Laura E. *Questioni di stabilità relative al moto di  $n$  filetti vorticosi* // Atti Ist. Veneto Sci. Lett. Arti. Cl Sci. Mat. Nat. 1932. V. 92. Pt. 2. P. 387–398.
- [133] Laura E. *Sul moto parallelo ad un piano un fluido in cui vi sono  $N$  vortici elementari* // Atti della Reale Accad. 1902. V. 37. P. 369–476.
- [134] Laura E. *Sulla stabilità delle configurazioni rigide di quattro vortici rettilinei* // Atti Ist. Veneto Sci. Lett. Arti. Cl Sci. Mat. Nat. 1938b. V. 97. Pt. 2. P. 813–818.

- [135] Laura E. *Sulle configurazioni rigide di quattro vortici elementari perpendicolari ad un piano* // Atti Ist. Veneto Sci. Lett. Arti. Cl Sci. Mat. Nat. 1938a. V. 97. Pt. 2. P. 535–540.
- [136] Laura E. *Sulle equazioni differenziali canoniche del moto di un sistema di vortici elementari, rettilinei e paralleli in un fluido incompressibile indefinito* // Atti della Reale Accad. 1905. V. 40. P. 296–312.
- [137] Laurent-Polz F. *Point vortices on a rotating sphere* // Reg. & Chaot. Dyn., 2005.
- [138] Laurent-Polz F. *Point vortices on the sphere: a case with opposite vortices* // Nonlinearity. 2002. V. 15. № 1. P. 143–172.
- [139] Laurent-Polz F. *Relative periodic orbits in point vortex systems* // Nonlinearity. 2004. V. 17. № 6. P. 1989–2013.
- [140] Laurent-Polz F., Montaldi J., Roberts M. *Stability of Relative Equilibria of Point Vortices on the Sphere* // DS/0402430. <http://front.math.ucdavis.edu/math.DS/0402430>.
- [141] Leoncini X., Kuznetsov L., Zaslavsky G. *Motion of three vortices near collapse* // Phys. Fluids. 2000. 12(8). P. 1911–1927.
- [142] Lewis D., Ratiu T. *Rotating n-gon/kn-gon vortex configurations* // J. Nonlinear Sci. 1996. V. 6. P. 385–414.
- [143] Lewis T. C. *Some cases of vortex motion* // Messenger of Math. 1879. 9. P. 93–95.
- [144] Lim C. C. *A combinatorial perturbation method and Arnold's whiskered tori in vortex dynamics*, Physica D, 1993, v. 64, p. 163–184.
- [145] Lim C. C. *Nonexistence of Lyapunov Functions and the Instability of the von Karman Vortex Streets* // Phys. Fluids. A. 1993. V. 5(9). P. 2229–2233.
- [146] Lim C. C., Montaldi J., Roberts M. R. *Relative equilibria of point vortices on the sphere* // Physica D. 2001. 148. P. 97–135.
- [147] Lim C. C., Sirovich L. *Nonlinear vortex trail dynamics* // Phys. Fluids. 1988. V. 31(5). P. 991–998.
- [148] Lin C. C. *On the motion of vortices in two dimensions. I, II* // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1941. V. 27. № 2. P. 570–577. (См. также Lin C. C. *On the motion of vortices in two dimensions*. Univ. Toronto Press, 1943.)
- [149] Luithardt H. H., Kadtke J. B., Pedrizzetti G. *Chaotic capture of vortices by a moving body. II. Bound pair model* // Chaos. 1994. 4(4). P. 681–691.
- [150] Marsden J. E., Weinstein A. *Reduction of symplectic manifolds with symmetry* // Rep. on Math. Phys. 1974. V. 5. № 5. P. 121–130.
- [151] Mayer A. M. *Floating magnets* // Nature. 1877/78. V. 17. № 442. P. 487.
- [152] Mayer A. M. *Floating magnets* // Nature. 1878. V. 18. P. 258–260; *Note on floating magnets* // The American journal of science and arts. Third series. XV. 1878. P. 477–478; *Floating magnets* // Ibid. XVI. 1878. P. 247–256.

- [153] Melander M. V., Zabusky N. J., Styczek A. S. *A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equation. Part I. Computational validation of hamiltonian elliptical representation* // J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 95–115.
- [154] Mertz G. T. *Stability of body-centered polygonal configurations of ideal vortices* // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 7. P. 1092–1095.
- [155] Meyer K., Schmidt D. *Bifurcation of relative equilibria in the  $N$ -body and Kirchhoff problems* // SIAM Journal on Math. Anal. 1988. V. 19. P. 1295–1313.
- [156] Meyer K., Schmidt D. *Bifurcation of relative equilibria in the 4- and 5-body problems* // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1988. V. 8. P. 215–225.
- [157] Montaldi J., Soulière A., Tokieda T. *Vortex dynamics of a Cylinder*, SIAM J. Appl. Dyn. Sys., 2003, № 3, p. 417–430.
- [158] Moore C. *Braids in Classical Gravity* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3675–3679.
- [159] Morton W. B. *On some permanent arrangements of parallel vortices and their points of relative rest* // Proc. of of the Royal Irish Academy. 1933. A. V. 11. P. 94–101.
- [160] Multon F. R. *The straight line solutions of the problem of  $N$  bodies* // Annals of Math. 1910. Ser. II. V. 10. P. 1–17.
- [161] Newton P. K. *The  $N$ -Vortex problem. Analytical Techniques*. Springer, 2001.
- [162] Novikov E. A. *Chaotic vortex-body interaction* // Phys. Lett. A. 1991. V. 152. № 8. P. 393–396.
- [163] O’Neil K. *Collapse of point vortex lattices*, Physica D, 1989, v. 37, p. 531–538.
- [164] O’Neil K. A. *On the Hamiltonian dynamics of vortex lattices* // J. Math. Phys. 1989. 30(6). P. 1373–1372.
- [165] O’Neil K. *Point vortices on a sphere. Stability of relative equilibria* // Trans. Am. Math. Soc. 1987. V. 302. P. 383–435.
- [166] O’Neil K. A. *Stationary configurations of point vortices* // Trans. AMS. 1987. 302(2). P. 383–425.
- [167] O’Neil K. *Symmetric configuration of vortices*, Phys. Lett., v. 124, № 9, p. 503–507.
- [168] Palmore J. I. *Bifurcation of stationary vortex configurations. II. Topology and integrability*, Physica D, 1983, v. 7, p. 324–329.
- [169] Palmore J. *Classifying relative equilibria, I, II* // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1973. V. 79. № 5. P. 904–908; 1975. V. 81. № 2. P. 489–491.

- [170] Palmore J. I. *Measure of degenerate relative equilibria*, I, Ann. of Math., 1976, v. 104, p. 421–429.
- [171] Palmore J. *Relative equilibria of vortices in two dimensions* // Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 1982. V. 79. P. 716–718.
- [172] Patrick G. *Relative equilibria in Hamiltonian systems: The dynamic interpretation of nonlinear stability on a reduced phase space* // J. Geom. Phys. 1992. V. 9. P. 111–119.
- [173] Pekarsky S., Marsden J. E. *Point vortices on a sphere: stability of relative equilibria* // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 5894–5907.
- [174] Pierrehumbert R. T., Widnall S. E. *The structure of organized vortices in a free shear layer* // J. Fluid Mech. 1981. V. 102. P. 301–313.
- [175] Polvani L. M., Dritschel D. G. *Wave and vortex dynamics on the surface of a sphere* // J. Fluid Mech. 1993. V. 255. P. 35–64.
- [176] Ramodanov S. M. *Motion of two circular cylinders in a perfect fluid*. Reg. & Chaot. Dyn. 2003. V. 8. №3. P. 313–318.
- [177] Roberts G. *A continuum of relative equilibria in the five-body problem* // Physica D. 1999. V. 127. P. 141–145.
- [178] Rott N. *Three-vortex motion with zero total circulation* // J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP). 1989. V. 40. P. 473–500. Addendum by H. Aref.
- [179] Routh E. J. *Some applications of conjugate functions* // Proc. Lond. Math. Soc. 1991. V. 12. №170/171. P. 73–89.
- [180] Sadetov S. T. *On the Regular Reduction of the  $n$ -Dimensional Problem of  $N + 1$  Bodies to Euler–Poincare Equations on the Lie Algebra  $sp(2N)$*  // Reg. & Chaot. Dyn. 2002. V. 7. №3. P. 337–350.
- [181] Saffman P. G., Szeto R. *Structure of a linear array of uniform vortices* // Stud. App. Math. 1981. V. 65. P. 223–248.
- [182] Simakov N. N. *Dynamics of two vortices in circular domain* // Reg. & Ch. Dynamics. 1998. V. 3. №4. P. 87–94.
- [183] Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D. *The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices* // Phys. of Fluids. 2002. V. 14. №3. P. 1214–1227.
- [184] Smale S. *Mathematical Problems for the Next Century* // Mathematical Intelligencer. 1998. V. 20. №2. P. 7–15.
- [185] Sokolovskiy M. A., Verron J. *Dynamics of triangular two-layer vortex structures with zero total intensity* // Reg. & Ch. Dyn. 2002. V. 7. №4. P. 435–472.
- [186] Sona L. *Configurazioni rigide di tre vortici allineati e condizioni di stabilità* // Atti Ist. Veneto Sci. Lett. Arti. Cl Sci. Mat. Nat. 1938. V. 98. Pt. 2. P. 11–26.

- [187] Sona L. *Sopra alcuna configurazioni rigide di filamenti vorticosi perpendicolari a un piano* // Atti Accad. Naz. Lincei Rend Cl Sci. Fis. Mat. Nat. 1938a. Ser. 6. V. 27. P. 80–85. P. 182–184.
- [188] Sona L. *Sulla stabilità delle configurazioni rigide di tre vortici* // Atti Ist. Veneto Sci. Lett. Arti. Cl Sci. Mat. Nat. 1940. V. 100. Pt. 2. P. 67–73.
- [189] Soulière A., Tokieda T. *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry* // J. Fluid Mech. 2002. V. 460. P. 83–92.
- [190] Stewart H.J. *Periodic properties of the semipermanent atmospheric pressure systems* // Q. Appl. Math. 1943. V. 1. P. 263–267.
- [191] Stieltjes T.J. *Sur certains polynômes qui vérifient une équation différentielle* // Acta Mathematica. 1985. V. 6–7. P. 321–326.
- [192] Stremmer M.A., Aref H. *Motion of three point vortices in a periodic parallelogram* // J. Fluid Mech. 1999. V. 392. P. 101–128.
- [193] Synge J.L. *On the motion of three vortices* // Can. J. Math. 1949. V. 1. P. 257–270.
- [194] Tavantzis J., Ting L. *The dynamics of three vortices revisited* // Phys. Fluids. 1988. V. 31. № 6. P. 1392–1409.
- [195] Thomson J.J. *A treatise on the motion of vortex rings* // London: Macmillan, 1883.
- [196] Tordella D. *Nonsteady stability of the flow around the circle in the Föppl problem* // Q. Appl. Math. LIII. 1995. 683.
- [197] Venturelli L. *Su una particolare configurazione rigida di quattro vortici rettilinei* // Atti Ist. Veneto Sci. Lett. Arti. Cl Sci. Mat. Nat. 1939. V. 98. Pt. 2. P. 3–54.
- [198] Wehner R. *Die italienische Literatur über die Bewegung isolierter Wirbel und isolierter Quellen in der Ebene* (dissertation). Leipzig: Frommhold & Wendler, 1939.
- [199] Weiss J.B., McWilliams J.C. *Nonergodicity of point vortices* // Phys. Fluids. A. 1991. V. 3(5). P. 835–844.
- [200] Zanetti L., Franze P. *The non-integrability of the restricted problem of two vortices in closed domain*. Physica D. 1994, v. 76, p. 99–109.
- [201] Zermelo E. *Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegung in einer Kugeloberfläche* // Leipzig, Zeitschr. für Math. und Phys. Bd. 47. 1902.
- [202] Ziglin S.L. Addendum to K. M. Khanin. *Quasi-periodic motions of vortex systems* // Physica D. 1982. V. 4. P. 261–269.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

# Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере<sup>1</sup>

### 1. Уравнения движения и первые интегралы системы вихрей на плоскости

Кратко остановимся на основных формах уравнений и первых интегралов динамики точечных вихрей на плоскости, отсылая за более полным изложением к основному тексту книги, где также приведены гидродинамические допущения, при которых эти уравнения справедливы.

Уравнения движения  $n$  точечных вихрей с декартовыми координатами  $(x_i, y_i)$  и интенсивностями  $\Gamma_i$  могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.1)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln M_{ij}, \quad M_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2, \quad \mathbf{r}_i = (x_i, y_i). \quad (1.2)$$

Здесь скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) инвариантны относительно группы движений плоскости  $E(2)$ , поэтому кроме гамильтониана они обладают еще тремя интегралами

$$Q = \sum_{i=1}^n \Gamma_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^n \Gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^n \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Совместно с А. А. Килиным, Нелинейная динамика, т. 2, 2005, №2, стр. 233–246. Англоязычный укороченный вариант опубликован в DCDS, Expanded Volume devoted to AIMS 5th International Conference on Dynamical System and Differential Equations (USA, Pomona, June 2004).

которые, однако, не являются инволютивными:

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad \{Q, I\} = 2P. \quad (1.5)$$

В дальнейшем вместо интеграла  $I$  удобнее использовать интеграл вида

$$D = \sum_{i < j}^n \Gamma_i \Gamma_j |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 = \left( \sum_{i=1}^n \Gamma_i \right) I - P^2 - Q^2. \quad (1.6)$$

Из этих трех интегралов можно образовать два инволютивных  $Q^2 + P^2$ ,  $I$  и, следовательно, согласно общей теории [4], можно понизить порядок на две степени свободы. В частности, задача трех вихрей вследствие этого сводится к одной степени свободы и является интегрируемой (Грёбли, Кирхгоф, Пуанкаре) [1], а задача четырех вихрей сводится к системе с двумя степенями свободы. Последняя задача, вообще говоря, не является интегрируемой [5].

Эффективное понижение порядка для системы четырех вихрей с интенсивностями одного знака, основанное на рассмотрении двух пар вихрей, для каждой из которых выбираются соответствующие переменные типа действие-угол, а общая система получается как возмущение двух соответствующих невозмущенных задач, было получено К. М. Ханиным в [3]. Исходя из процедуры описанного построения возмущающей функции, в работе [3] доказано (с использованием методов КАМ-теории) существование квазипериодических решений, причем в качестве малого параметра принимается величина, обратная расстоянию между двумя парами вихрей. Применение КАМ-теории и некоторых расширений теоремы Пуанкаре – Биркгофа к доказательству существования периодических и квазипериодических вихрей на плоскости (и полуплоскости) содержится в [27].

Для случая равных интенсивностей вихрей и для случаев двух одинаковых пар вихрей понижение порядка для четырех вихрей выполнено, соответственно, в работах [12, 13]. Обобщение этой конструкции на случай  $N$  вихрей содержится в работе [10]. Редуцированные уравнения используются для применения КАМ-теории к проблеме четырех вихрей в [21].

Понижение порядка на одну степень свободы с помощью трансляционных инвариантов  $P$  и  $Q$  выполнено Лимом [6] при помощи введения барисентрических координат Якоби (в данном случае — связанных с центром завихренности), имеющих хорошо известные аналоги в классической небесномеханической задаче  $n$  тел [2]. Отметим, что уже такая (частичная) редукция позволила применить для анализа задачи о движении точечных вихрей некоторые методы КАМ-теории [6].

В работе [7] для случая  $N$  произвольных вихрей была использована формально-алгебраическая схема понижения порядка на две степени свободы. Она основана на представлении уравнений движения системы точечных вихрей на плоскости во

«взаимных» переменных, в качестве которых выбраны квадраты расстояний между парами вихрей и ориентированные площади треугольников:

$$M_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad \Delta_{ijk} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \wedge (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i). \quad (1.7)$$

Взаимная коммутация таких переменных (кстати говоря, восходящих к Э. Лауре) приводит к некоторой алгебре Ли. При этом процедура понижения порядка (точнее говоря, последний канонический шаг этой процедуры) сводится к чисто алгебраической проблеме введения симплектических координат на орбитах соответствующих алгебр Ли [7].

## 2. Редукция на плоскости

Выполним для задачи  $N$  вихрей произвольной интенсивности понижение порядка на две степени свободы. Воспользуемся для этого аналогией с плоской задачей  $n$  тел в небесной механике.

Как известно, для задачи  $n$  тел сначала выполняется *исключение центра масс* [2]. В частности, для этого можно выбрать переменные Якоби

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, & \xi_3 &= \mathbf{r}_3 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, & \dots, \\ \xi_n &= \mathbf{r}_n - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_{n-1} \mathbf{r}_{n-1}}{m_1 + \dots + m_{n-1}}, \end{aligned}$$

которые определяют положение тел в системе центра масс ( $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$ ). Ясно, что аналогичная процедура в задаче  $n$  вихрей (вместо масс необходимо выбрать завихренности  $m_i \rightarrow \Gamma_i$ ) позволяет *исключить центр завихренности*, тем самым мы используем группу трансляций [6, 9]. При этом приведенная система инвариантна относительно вращений (группа  $SO(2)$ ) вокруг центра завихренности. В небесной механике редукция по оставшейся группе вращений известна как *исключение узла по Якоби* и может быть выполнена различными способами (см. [2, 20]).

Для вихревой динамики аналогичная редукция существенно отличается (в связи с тем, что уравнения движения имеют первый порядок по времени) и может быть выполнена при помощи перехода к полярным координатам в переменных Якоби ( $\xi_{ix} = \sqrt{2\rho_i} \cos \varphi_i$ ,  $\xi_{iy} = \sqrt{2\rho_i} \sin \varphi_i$ ) с последующим исключением угла общего поворота всей конфигурации вихрей.

**Предложение 1.** Система  $N$  произвольных вихрей на плоскости с ненулевой суммарной интенсивностью ( $\sum_{i=1}^N \Gamma_i \neq 0$ ) допускает редукцию на две степени свободы, при которой каноническими переменными

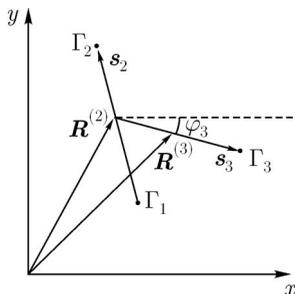


Рис. П1.1. Редуцированные переменные на плоскости

приведенной системы являются

$$q_i = \rho_{i+2} \frac{\sum_{k=1}^{i+1} \Gamma_k}{\sum_{k=1}^{i+2} \Gamma_k}, \quad \psi_i = \varphi_{i+2} - \varphi_2, \quad i = 1, \dots, N - 2, \quad (2.1)$$

где

$$\rho_i = \frac{1}{2} |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}^{(i-1)}|^2, \quad \varphi_i = \arctg \frac{y_i - R_y^{(i-1)}}{x_i - R_x^{(i-1)}}, \quad i = 2 \dots N, \quad (2.2)$$

$\mathbf{R}^{(i)} = \frac{\sum_{j=1}^i \Gamma_j \mathbf{r}_j}{\sum_{j=1}^i \Gamma_j}$  определяет центр завихренности  $i$  вихрей, а  $\mathbf{r}_i$  — ради-

ус-вектор  $i$ -го вихря (см. рис П1.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Вычислим сначала скобку Пуассона для переменных  $\rho_i$  и  $\varphi_j$

$$\{\rho_i, \varphi_j\} = \delta_{ij} \frac{\sum_{k=1}^i \Gamma_k}{\Gamma_i \sum_{k=1}^{i-1} \Gamma_k}, \quad i = 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Если числитель и знаменатель не обращается в нуль, нормируем переменные  $\rho_i$  и получаем, что переменные  $q_i, \psi_i$ , определенные по формулам (2.1), являются каноническими. Несложно показать, что если  $\sum_{i=1}^N \Gamma_i \neq 0$ , всегда можно выбрать разбиение вихрей так, что  $\sum_{k=1}^i \Gamma_k \neq 0, i = 1, \dots, N - 1$ .

Покажем теперь, что на совместной поверхности уровня интегралов  $Q, P$  и  $D$  (1.4), (1.6) гамильтониан (1.2) можно выразить через переменные (2.1). Действительно, квадраты взаимных расстояний  $M_{ij}$  можно выразить через векторы  $\mathbf{s}_i, i = 1 \dots N$ , которые соединяют вихрь с номером  $i$  с центром завихренности подсистемы  $i - 1$  вихря:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i - \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \Gamma_j \mathbf{r}_j}{\sum_{j=1}^{i-1} \Gamma_j}, \quad M_{ij} = \left| \mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j + \sum_{k=j}^{i-1} \frac{\Gamma_k \mathbf{s}_k}{\sum_{l=1}^k \Gamma_l} \right|^2, \quad i > j. \quad (2.4)$$

Согласно (2.2),  $\mathbf{s}_i = (\sqrt{2\rho_i} \cos \varphi_i, \sqrt{2\rho_i} \sin \varphi_i)$ , причем  $\rho_i$  и  $\varphi_i$  выражаются через переменные  $q_i$  и  $\psi_i$  и общий угол поворота всей системы вихрей вокруг общего центра завихренности  $\psi_0 = \varphi_2$  по формулам

$$\rho_2 = \left[ \frac{D}{2 \sum_{i=1}^N \Gamma_i} - \sum_{k=1}^{N-2} q_k \right] \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\Gamma_1 \Gamma_2}, \quad (2.5)$$

$$\rho_i = \frac{\sum_{k=1}^i \Gamma_k}{\Gamma_i \sum_{k=1}^{i-1} \Gamma_k} q_{i-2}, \quad \varphi_i = \psi_{i-2} + \psi_0, \quad i = 3, \dots, N.$$

Поскольку квадраты взаимных расстояний выражаются через всевозможные скалярные произведения  $(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = 2\sqrt{\rho_i \rho_j} \cos(\varphi_i - \varphi_j)$ , то они не зависят от угла  $\psi_0$ . Таким образом, квадраты взаимных расстояний, а следовательно, и гамильтониан системы, на совместном уровне интегралов системы выражаются через переменные (2.1). ■

Рассмотрим подробнее частный случай  $\sum_{i=1}^N \Gamma_i = 0$ , который не имеет аналога в небесной механике (в связи с положительностью масс тел  $m_i > 0$ ).

В этом случае говорят, что центр завихренности находится на бесконечности, и переменные (2.1) не определены (один из знаменателей обращается в нуль). Соответствующая редукция в этом случае описывается следующим образом.

**Предложение 2.** В случае  $\sum_{j=1}^N \Gamma_j = 0$  канонические переменные приведенной системы (соответствующие редукции на две степени свободы)  $\tilde{\rho}_i$ ,  $\tilde{\varphi}_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 2$  задаются соотношениями

$$\tilde{\rho}_i = \frac{\Gamma_i \sum_{k=1}^{i-1} \Gamma_k}{\sum_{k=1}^i \Gamma_k} \rho_{i+1}, \quad \tilde{\varphi}_i = \varphi_{i+1}, \quad i = 1, \dots, N - 2, \quad (2.6)$$

где  $\rho_i$  и  $\varphi_i$  заданы соотношениями (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как показано выше, скобка Пуассона переменных  $\rho_i$  и  $\varphi_i$  (2.2) определяется соотношением (2.3). В рассматриваемом случае выполняется соотношение  $\{\rho_N, \varphi_N\} = 0$ , и переменные  $\rho_N$  и  $\varphi_N$  являются интегралами движения. Они связаны со стандартными интегралами движения (1.4), (1.6) следующими соотношениями:

$$P = \Gamma_N \sqrt{2\rho_N} \cos \varphi_N, \quad Q = \Gamma_N \sqrt{2\rho_N} \sin \varphi_N, \quad D = -\Gamma_N^2 \rho_N. \quad (2.7)$$

Так же, как и в предыдущем предложении, квадраты взаимных расстояний  $M_{ij}$  выражаются через векторы  $\mathbf{s}_i = (\sqrt{2\rho_i} \cos \varphi_i, \sqrt{2\rho_i} \sin \varphi_i)$  по формуле (2.4). Таким образом, гамильтониан системы на совместном уровне интегралов системы будет зависеть от  $2(N - 2)$  переменных ( $\rho_i, \varphi_i$ ,  $i = 2, \dots, N - 1$ ) и значений двух интегралов  $\rho_N$  и  $\varphi_N$ . ■

Рассмотрим еще более частный (но не менее интересный) случай  $\sum_{j=1}^N \Gamma_j = 0$  и  $D = 0$ . Вследствие существования трех инволютивных интегралов (1.4) при этом возможно понижение порядка сразу на три степени свободы. Например, для задачи четырех вихрей при этих условиях получается частный случай интегрируемости [17, 18], а система пяти точечных вихрей сводится к двум степеням свободы. Действительно, справедливо следующее

**Предложение 3.** В случае  $\sum_{j=1}^N \Gamma_j = 0$  и  $D = 0$  система допускает редукцию на три степени свободы. Канонические переменные приведенной системы определяются соотношениями (2.1) при  $i = 1, \dots, N - 3$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как было показано в предыдущем предложении, в случае  $\sum_{j=1}^N \Gamma_j = 0$  замена переменных (2.2) понижает размерность системы на две степени свободы. Для редукции еще на одну степень свободы от оставшихся после редукции переменных  $\rho_k, \varphi_k, k = 2, \dots, N - 1$  необходимо перейти к переменным (2.1), определенным теперь для  $i = 1, \dots, N - 3$ . Повторяя рассуждения предложения 1, можно показать, что на совместном уровне первых интегралов гамильтониан системы выражается через переменные  $q_i, \psi_i, i = 1, \dots, N - 3$  и параметрически зависит от двух значений интегралов  $\rho_N$  и  $\varphi_N$ . ■

### 3. Уравнения движения и первые интегралы системы вихрей на сфере $\mathbb{S}^2$

Для  $n$  точечных вихрей на сфере  $\mathbb{S}^2$  гамильтоновы уравнения движения в сферических координатах  $(\theta_i, \varphi_i)$  могут быть записаны в виде [16]

$$\dot{\theta}_i = \{\theta_i, \mathcal{H}\}, \quad \dot{\varphi}_i = \{\varphi_i, \mathcal{H}\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

со скобкой Пуассона

$$\{\varphi_i, \cos \theta_k\} = \frac{\delta_{ik}}{R^2 \Gamma_i}, \quad (3.2)$$

где  $\Gamma_i$  — интенсивности вихрей, и гамильтониан

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < k}^n \Gamma_i \Gamma_k \ln(M_{ik}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < k}^n \Gamma_i \Gamma_k \ln\left(4R^2 \sin^2 \frac{\gamma_{ik}}{2}\right). \quad (3.3)$$

Здесь  $R$  — радиус сферы,  $M_{ij}$  — квадрат расстояния между  $i$ -м и  $j$ -м вихрями, измеряемого по хорде,  $\gamma_{ik}$  — угол между векторами, соединяющими центр сферы с точечными вихрями  $i$  и  $k$ ,

$$\cos \gamma_{ik} = \cos \theta_i \cos \theta_k + \sin \theta_i \sin \theta_k \cos(\varphi_i - \varphi_k).$$

Помимо гамильтониана уравнения (3.1) допускают еще три независимых неинволютивных интеграла

$$F_1 = R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, \quad F_2 = R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \quad F_3 = R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \cos \theta_i. \quad (3.4)$$

Вектор  $\mathbf{F}$  с компонентами  $(F_1, F_2, F_3) = \mathbf{F} = \sum \Gamma_i \mathbf{r}_i$  ( $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор вихрей) называется *моментом завихренности*, его компоненты коммутируют следующим образом:

$$\{F_i, F_j\} = \frac{1}{R} \varepsilon_{ijk} F_k. \quad (3.5)$$

Как и в плоском случае, можно редуцировать систему на две степени свободы, используя инволютивные интегралы, например  $F_3$  и  $\mathbf{F}^2$ .

Таким образом, в случае трех вихрей получим вполне интегрируемую систему (она была независимо указана и исследована Ньютоном, Кидамби, Борисовым и Лебедевым в 1998 г. в работах [14, 15, 19]). Задача четырех вихрей редуцируется к двум степеням свободы и в общем случае неинтегрируема (Д. А. Багрец и А. А. Багрец).

#### 4. Редукция на сфере

На сфере, в отличие от плоского случая, невозможно разделить симметрии на трансляции и вращения; тем не менее, предложенный выше алгоритм редукции (обобщающий редукцию Якоби) допускает обобщения. Так же, как и выше, будем последовательно рассматривать момент завихренности двух, трех,  $\dots$ ,  $n$  вихрей:

$$\mathbf{F}_2 = \Gamma_1 \mathbf{r}_1 + \Gamma_2 \mathbf{r}_2, \quad \dots, \quad \mathbf{F}_n = \Gamma_1 \mathbf{r}_1 + \dots + \Gamma_n \mathbf{r}_n = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$  — декартовы координаты вихрей на сфере, вложенной в  $\mathbb{R}^3$ . Квадраты моментов  $\mathbf{F}_k^2$ ,  $k = 2, \dots, n$ , обладают следующими (очевидными) свойствами:

1°. Все  $\mathbf{F}_k^2$  коммутируют между собой:

$$\{\mathbf{F}_k^2, \mathbf{F}_m^2\} = 0;$$

2°. Квадрат момента  $\mathbf{F}_k^2$  коммутирует с координатами всех вихрей с номерами  $1, 2, \dots, k$ :

$$\{\mathbf{F}_k^2, x_i\} = \{\mathbf{F}_k^2, y_i\} = \{\mathbf{F}_k^2, z_i\} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Таким образом, квадраты моментов  $F_2^2, \dots, F_{n-1}^2$  инвариантны относительно действия группы симметрий  $SO(3)$ , коммутируют между собой и их число равно половине размерности приведенной системы. С помощью свойства 2° этот набор несложно пополнить некоторыми относительными угловыми переменными приведенной системы.

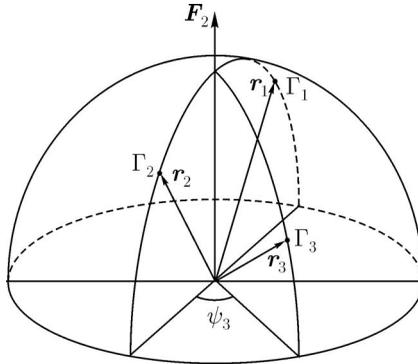


Рис. П1.2. Редуцированные переменные на сфере

**Предложение 4.** Система  $N$  вихрей на сфере в случае  $F_N = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{r}_i \neq 0$  допускает редукцию на две степени свободы с помощью канонических переменных  $\rho_i, \psi_i$ , задаваемых соотношениями

$$\rho_i = |\mathbf{F}_{i+1}|, \quad \operatorname{tg} \psi_i = \frac{\rho_i (\mathbf{F}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1} \times \mathbf{r}_{i+2})}{(\mathbf{r}_{i+1} \times \mathbf{F}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+2} \times \mathbf{F}_{i+1})}, \quad i = 1, \dots, N-2, \quad (4.1)$$

где  $\psi_i$  представляет собой угол между плоскостями  $(\mathbf{F}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+2})$  и  $(\mathbf{F}_{i+1}, \mathbf{r}_{i+1})$  (см. рис. П1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. С помощью прямых вычислений, используя соотношения (4.1), можно показать, что переменные  $\rho_i, \psi_i$  коммутируют следующим образом:

$$\{\rho_i, \rho_j\} = \{\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \{\rho_i, \psi_j\} = \frac{\delta_{ij}}{R}. \quad (4.2)$$

2. Покажем теперь, что на совместной поверхности уровня интегралов  $F_N$  гамильтониан (3.3) можно выразить через переменные (4.1). Так

как  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{F}_i$ ,  $i = 2, \dots, N$  связаны друг с другом линейным преобразованием

$$\mathbf{r}_i = \frac{1}{\Gamma_i}(\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1}), \quad i = 2, \dots, N,$$

квадраты взаимных расстояний между вихрями  $M_{ij}$  можно выразить через всевозможные скалярные произведения векторов  $\mathbf{F}_1 = \Gamma_1 \mathbf{r}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N$ . Таким образом, для доказательства предложения достаточно показать, что данные скалярные произведения на совместном уровне интеграла  $\mathbf{F}_N$  полностью определяются переменными (4.1).

Рассмотрим алгоритм построения векторов  $\mathbf{F}_i$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  по известным переменным (4.1) и значению интеграла  $\mathbf{F}_N$ . Угол  $\psi_{i-2}$ , по построению, является углом между плоскостями  $(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{r}_i)$  и  $(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})$  или, что то же самое, между плоскостями  $(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{F}_i)$  и  $(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{F}_{i-2})$ . Следовательно, можно записать следующее тождество

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-2} = \mathbf{F}_{i-1} \frac{(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{F}_{i-2})}{\mathbf{F}_{i-1}^2} + (n_1 \sin \psi_{i-2} + n_2 \cos \psi_{i-2}) \sqrt{\mathbf{F}_{i-2}^2 - \frac{(\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{F}_{i-2})^2}{\mathbf{F}_{i-1}^2}}, \\ n_1 = \frac{\mathbf{F}_i \times \mathbf{F}_{i-1}}{|\mathbf{F}_i \times \mathbf{F}_{i-1}|}, \quad n_2 = \frac{\mathbf{F}_{i-1} \times (\mathbf{F}_i \times \mathbf{F}_{i-1})}{|\mathbf{F}_{i-1} \times (\mathbf{F}_i \times \mathbf{F}_{i-1})|}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя определения  $\mathbf{F}_i$  и  $\rho_i$  (4.1), находим

$$(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_{i-1}) = \frac{1}{2}(\rho_{i-1}^2 + \rho_{i-2}^2 - \Gamma_i^2 R^2), \quad \mathbf{F}_i^2 = \rho_{i-1}^2. \quad (4.4)$$

Подставляя эти соотношения в (4.3), получим рекуррентное выражение для определения вектора  $\mathbf{F}_{i-2}$  через  $\mathbf{F}_{i-1}, \mathbf{F}_i$  и координаты  $\rho_i, \psi_i$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i-2} = \mathbf{F}_{i-1} \frac{\rho_{i-2}^2 + \rho_{i-3}^2 - \Gamma_{i-1}^2 R^2}{2\rho_{i-2}^2} + (n_1 \sin \psi_{i-2} + n_2 \cos \psi_{i-2}) \times \\ \times \sqrt{\rho_{i-3}^2 - \frac{(\rho_{i-2}^2 + \rho_{i-3}^2 - \Gamma_{i-1}^2 R^2)^2}{4\rho_{i-2}^2}}, \quad i = 3, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где введено обозначение  $\rho_0 = |\mathbf{F}_1| = \Gamma_1 R$ .

Используя (4.5), легко показать, что

$$\mathbf{F}_i = \alpha_i \mathbf{F}_N + \beta_i \mathbf{F}_{N-1} + \gamma_i \mathbf{F}_N \times \mathbf{F}_{N-1}, \quad i = 1, \dots, N - 2, \quad (4.6)$$

где коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  выражаются через координаты (4.1). Следовательно, все скалярные произведения  $(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j)$  выражаются через координаты (4.1) и величины  $(\mathbf{F}_N, \mathbf{F}_N), (\mathbf{F}_{N-1}, \mathbf{F}_{N-1})$  и  $(\mathbf{F}_N, \mathbf{F}_{N-1})$ . С помощью (4.4) мы можем выразить эти величины через координаты (4.1) и постоянные интегралов  $\mathbf{F}_N$ . Таким образом, скалярные произведения  $(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j)$  (а значит, и взаимные расстояния между вихрями) будут зависеть только от переменных (4.1). Следовательно, переход к переменным (4.1) приводит к редукции на две степени свободы. ■

Рассмотрим теперь частный случай понижения порядка на дополнительную степень свободы, вполне аналогичный случаю  $\sum_{j=1}^N \Gamma_j = 0, D_N = 0$  при движении вихрей по плоскости. Имеем

**Предложение 5.** В случае  $\mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{r}_i = 0$  система (3.1) допускает редукцию на три степени свободы. Канонические переменные приведенной системы определяются соотношением (4.1) при  $i = 1, \dots, N - 3$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для доказательства предложения, так же как и в предыдущем случае, покажем, что скалярные произведения  $(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j)$  зависят только от переменных  $\rho_i, \psi_i, i = 1, \dots, N - 3$ .

Аналогично предыдущему случаю, с помощью соотношения (4.5) векторы  $\mathbf{F}_i$  можно выразить через  $\mathbf{F}_{N-1}$  и  $\mathbf{F}_{N-2}$

$$\mathbf{F}_i = \tilde{\alpha}_i \mathbf{F}_{N-1} + \tilde{\beta}_i \mathbf{F}_{N-2} + \tilde{\gamma}_i \mathbf{F}_{N-1} \times \mathbf{F}_{N-2}, \quad i = 1, \dots, N - 3, \quad (4.7)$$

где коэффициенты  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_i$  зависят от координат  $\rho_i, \psi_i, i = 1, \dots, N - 3$ . Следовательно, скалярные произведения  $(\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j)$  выражаются через координаты  $\rho_i, \psi_i, i = 1, \dots, N - 3$  и величины  $(\mathbf{F}_{N-1}, \mathbf{F}_{N-1}), (\mathbf{F}_{N-2}, \mathbf{F}_{N-2})$  и  $(\mathbf{F}_{N-1}, \mathbf{F}_{N-2})$ . В рассматриваемом случае  $\mathbf{F}_{N-1} = -\Gamma_N \mathbf{r}_N$ , поэтому  $\rho_{N-2} = |\mathbf{F}_{N-1}| = R|\Gamma_N|$  является интегралом движения. Следовательно, используя (4.4), скалярные произведения  $(\mathbf{F}_{N-1}, \mathbf{F}_{N-1}), (\mathbf{F}_{N-2}, \mathbf{F}_{N-2})$  и  $(\mathbf{F}_{N-1}, \mathbf{F}_{N-2})$  можно выразить через координаты  $\rho_i, \psi_i, i = 1, \dots, N - 3$ . Таким образом, взаимные расстояния между вихрями задаются только переменными  $\rho_i, \psi_i, i = 1, \dots, N - 3$  и замена (4.1) приводит к редукции на три степени свободы. ■

Заметим, что при указанных условиях система четырех вихрей на сфере оказывается интегрируемой [1, 8].

## 5. Явная редукция системы четырех вихрей на плоскости и сфере

**Случай плоскости.** Укажем явный вид приведенной системы для случая четырех вихрей на плоскости. Гамильтониан выражается через взаимные расстояния по формуле (1.2), которые, в свою очередь, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= 2\rho_2, & M_{23} &= 2\rho_3 + 2\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right)^2 \rho_2 - \frac{4\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \sqrt{\rho_2\rho_3} \cos \psi_1, \\
 M_{13} &= 2\rho_3 + 2\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right)^2 \rho_2 + \frac{4\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \sqrt{\rho_2\rho_3} \cos \psi_1, \\
 M_{34} &= 2\rho_4 + 2\left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}\right)^2 \rho_3 - \frac{4(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \sqrt{\rho_3\rho_4} \cos(\psi_1 - \psi_2), \\
 M_{14} &= 2\rho_4 + 2\left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right)^2 \rho_2 + 2\left(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}\right)^2 \rho_3 + \frac{4\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \sqrt{\rho_2\rho_4} \cos \psi_2 + \\
 &+ \frac{4\Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \sqrt{\rho_3\rho_4} \cos(\psi_1 - \psi_2) + \frac{4\Gamma_2\Gamma_3}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)} \sqrt{\rho_2\rho_3} \cos \psi_1, \\
 M_{24} &= 2\rho_4 + 2\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right)^2 \rho_2 + 2\left(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}\right)^2 \rho_3 - \frac{4\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \sqrt{\rho_2\rho_4} \cos \psi_2 + \\
 &+ \frac{4\Gamma_3}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \sqrt{\rho_3\rho_4} \cos(\psi_1 - \psi_2) - \frac{4\Gamma_2\Gamma_3}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)} \sqrt{\rho_2\rho_3} \cos \psi_1,
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где  $\rho_i$  выражаются через канонические переменные  $q_1, q_2$  ( $\{q_i, \psi_j\} = \delta_{ij}$ ) и постоянную интеграла  $D$  по формулам

$$\begin{aligned}
 \rho_2 &= \left(\frac{1}{2} \frac{D}{\sum_{i=1}^4 \Gamma_i} - q_1 - q_2\right) \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_2}, & \rho_3 &= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{\Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2)} q_1, \\
 \rho_4 &= \frac{\sum_{i=1}^4 \Gamma_i}{\Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)} q_2.
 \end{aligned}$$

Геометрический смысл переменных поясняется на рис. П1.3.

Отметим, что указанные формулы справедливы не только в случае интенсивностей одного знака, подобно формулам из [3].

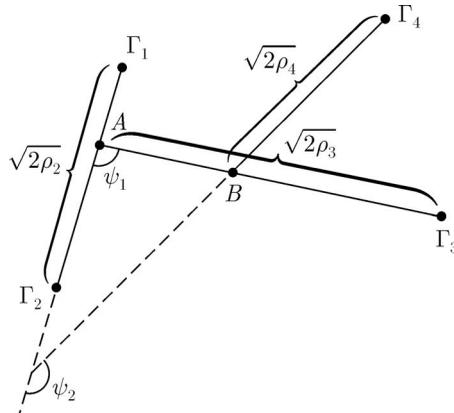


Рис. П1.3. Геометрический смысл переменных приведенной системы. Точки  $A$  и  $B$  — центры завихренности пары  $\Gamma_1, \Gamma_2$  и тройки вихрей  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  соответственно.

**Случай сферы.** Аналогично укажем выражения для взаимных расстояний четырех вихрей на сфере через канонические переменные приведенной системы  $(\{\rho_i, \psi_j\} = R^{-1}\delta_{ij}, i, j = 1, 2)$  и квадрат интеграла  $\mathbf{F}^2 = = \mathbf{F}_4^2 = c^2 = \text{const}$  (при произвольных интенсивностях вихрей):

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 R^2 - \rho_1^2}{\Gamma_1 \Gamma_2}, & M_{23} &= \frac{((\Gamma_2 + \Gamma_3)^2 - \Gamma_1^2) R^2 - \rho_2^2 + 2(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3)}{\Gamma_2 \Gamma_3}, \\
 M_{13} &= \frac{((\Gamma_1 + \Gamma_3)^2 - \Gamma_2^2 - \Gamma_3^2) R^2 + \rho_1^2 - 2(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3)}{\Gamma_1 \Gamma_3}, \\
 M_{14} &= 2R^2 + 2 \frac{(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3) - (\mathbf{F}_1, \mathbf{F})}{\Gamma_1 \Gamma_4}, \\
 M_{34} &= \frac{(\Gamma_3 + \Gamma_4)^2 R^2 - \rho_1^2 - c^2 + 2(\mathbf{F}_2, \mathbf{F})}{\Gamma_3 \Gamma_4}, \\
 M_{24} &= \frac{(2\Gamma_2 \Gamma_4 - \Gamma_3^2) R^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}) + 2(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}) - 2(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3)}{\Gamma_2 \Gamma_4},
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

где скалярные произведения выражаются по формулам

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = \frac{1}{2}(\rho_1^2 + \Gamma_1^2 R^2 - \Gamma_2^2 R^2), \quad (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3) = \frac{1}{2}(\rho_2^2 + \rho_1^2 - \Gamma_3^2 R^2),$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}) &= \frac{1}{2}(c^2 + \rho_2^2 - \Gamma_4^2 R^2), \\
(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}) &= \frac{(\mathbf{F}_3, \mathbf{F})(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)}{\rho_2^2} + \left(c^2 - \frac{(\mathbf{F}_2, \mathbf{F})^2}{\rho_2^2}\right) \cos \psi_2 \sqrt{\frac{\rho_1^2 \rho_2^2 - (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)^2}{\rho_2^2 c^2 - (\mathbf{F}_3, \mathbf{F})^2}}, \\
(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3) &= \frac{(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\rho_1^2} + \left(\rho_2^2 - \frac{(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)^2}{\rho_1^2}\right) \cos \psi_1 \sqrt{\frac{\rho_1^2 \Gamma_1^2 R^2 - (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 - (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)^2}}, \\
(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}) &= \frac{(\mathbf{F}_2, \mathbf{F})(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}{\rho_1^2} + \\
&+ \left((\mathbf{F}_3, \mathbf{F}) - \frac{(\mathbf{F}_2, \mathbf{F})(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)}{\rho_1^2}\right) \cos \psi_1 \sqrt{\frac{\rho_1^2 \Gamma_1^2 R^2 - (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 - (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)^2}} + \\
&+ \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\rho_1 \rho_2} \sqrt{(\rho_1^2 \Gamma_1^2 R^2 - (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)^2)(\rho_2^2 c^2 - (\mathbf{F}_3, \mathbf{F})^2)}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

## 6. Сечение Пуанкаре для системы четырех вихрей на плоскости и сфере

**Случай плоскости.** Полученные системы канонических редуцированных переменных могут быть применены для различных аналитических и численных исследований. Рассмотрим, например, несколько задач связанных с исследованием хаотического поведения четырех вихрей на плоскости и сфере.

Построим отображение Пуанкаре для приведенной системы четырех вихрей на плоскости. Выберем в качестве секущей плоскость  $\psi_1 = \text{const}$ . Пересечение изоэнергетической поверхности  $\mathcal{H}(q_1, \psi_1, q_2, \psi_2) = E = \text{const}$  с этой плоскостью представляет собой некоторую двумерную поверхность в пространстве  $q_1, q_2, \psi_2$  (вообще говоря, несвязную). На этой поверхности фазовый поток системы задает отображение Пуанкаре. Как правило, при этом поверхность имеет достаточно сложный вид, поэтому удобнее изображать отображение Пуанкаре на этой поверхности непосредственно в трехмерном пространстве, а не проецировать на какую-либо плоскость (рис. П1.4).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Представление отображения Пуанкаре на поверхности в пространстве позволяет избежать различных особенностей проецирования и не при-

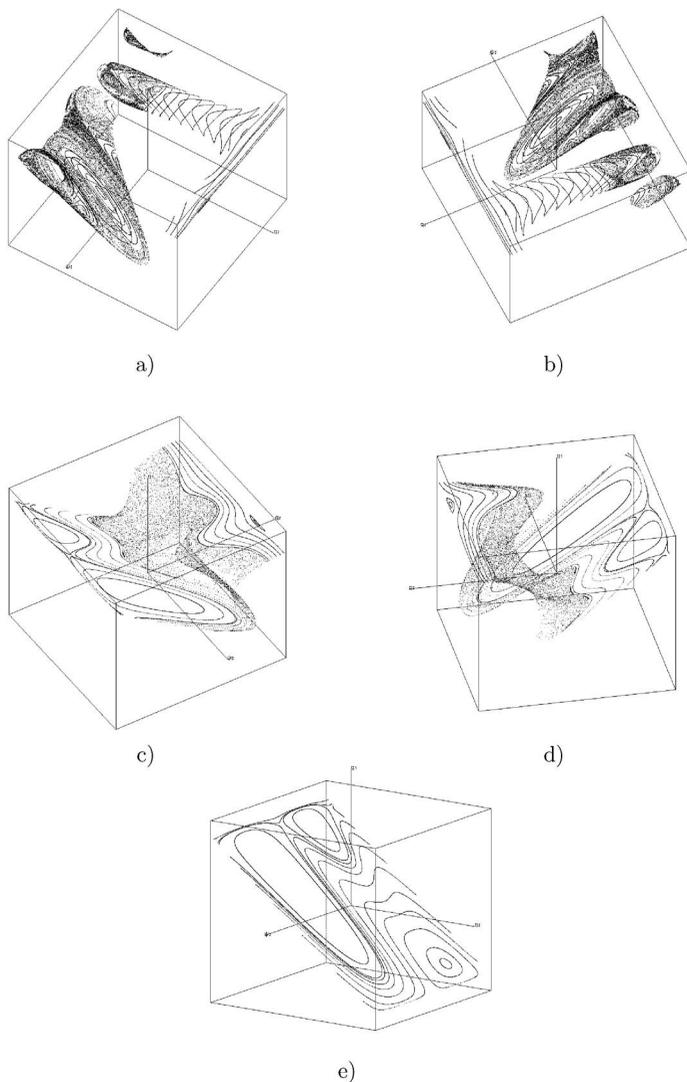


Рис. П1.4. Отображения Пуанкаре для задачи четырех вихрей на плоскости при  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -1$ ,  $\Gamma_4 = 4$ . В качестве сечения выбрана плоскость  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Рисункам а), б) соответствует уровень энергии  $E = -2$ ; рисункам с), д) — уровень  $E = -1.3$ ; рисунку е) — уровень  $E = -1$ .

водит к появлению несуществующих объектов, указанных в [12] (мы имеем в виду серповидные торы, существование которых можно объяснить особенностями проецирования).

Для обеспечения возвращаемости рассмотрим случай ограниченности траекторий приведенной системы. Как показано в [8], для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих требований:

- 1) все интенсивности имеют одинаковый знак;
- 2) все интенсивности, кроме одной, положительны (отрицательны) и

$$\sum_{i=1}^4 \Gamma_i < 0 \left( \sum_{i=1}^4 \Gamma_i > 0 \right).$$

Фазовые портреты для случая четырех одинаковых вихрей приведены ниже в п. 7 (см. также § 6 в основном тексте книги). Здесь мы подробнее рассмотрим второй случай компактного движения вихрей при  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = -1$ ,  $\Gamma_4 = 4$ . В качестве сечения выбрана плоскость  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Рисунок а), б) соответствует уровню энергии  $E = -2$ ; рисункам в), д) — уровень  $E = -1.3$ ; рисунку е) — уровень  $E = -1$ . Заметим, что в отличие от случая интенсивностей одного знака энергия в данном случае не ограничена ни сверху, ни снизу. Тем не менее, как показывают численные эксперименты, при увеличении энергии стохастический слой практически пропадает. Он является достаточно обширным при малых энергиях, что еще раз подтверждает численные и аналитические результаты о стохастичности и неинтегрируемости проблемы четырех вихрей. Детальное исследование структуры хаоса (возможное с помощью описанной процедуры редукции) и исследования сечений Пуанкаре, подобные, например, [22], в этой задаче пока не выполнено.

**Случай сферы.** Приведем сечения Пуанкаре для задачи четырех вихрей на сфере. Для случая сферы все траектории ограничены и условие возвращаемости заведомо выполняется, но мы ограничимся простейшим случаем равных интенсивностей.

Так же, как и для предыдущего случая, выберем в качестве секущей плоскость  $\psi_1 = \pi/2$ . На рисунке П1.5 приведены фазовые портреты в пространстве  $\rho_1, \rho_2, \psi_2$  для случая четырех одинаковых вихрей при  $D = 3.55$ . Рисунок а), б) соответствует уровню энергии  $E = 0.8$ ; рисункам в), д) — уровень  $E = 0.67$ ; рисунку е) — уровень  $E = 0.64$ .

Заметим, что при малых (близких к томсоновской конфигурации), а также при достаточно больших энергиях фазовый портрет системы практически регулярен (рис. П1.5а, б, е), в то время как при промежуточных

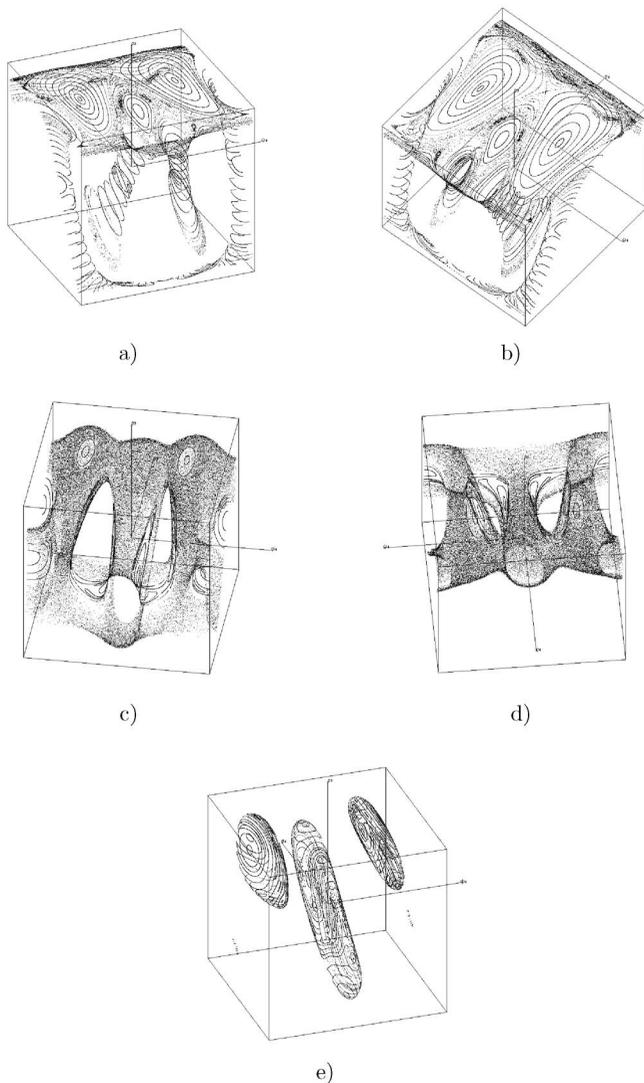


Рис. П1.5. Отображения Пуанкаре для задачи четырех вихрей равной интенсивности на сфере при  $D = 3.55$ . В качестве сечения выбрана плоскость  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Рисункам а), б) соответствует уровень энергии  $E = 0.8$ ; рисункам с), д) — уровень  $E = 0.67$ ; рисунку е) — уровень  $E = 0.64$ .

энергиях происходит почти полная хаотизация фазового потока системы (рис. П1.5с, d). Укажем также, что неинтегрируемость ограниченной задачи четырех вихрей на сфере была доказана в [11].

## 7. Переход к хаосу в задаче о четырех одинаковых вихрях на плоскости

Рассмотрим окрестность томсоновского решения, т. е. движения, при котором вихри находятся в вершинах квадрата и равномерно вращаются вокруг центра завихренности [25]. Очевидно, что для двухстепенной приведенной системы томсоновскому решению соответствует неподвижная точка, точнее, шесть идентичных точек, соответствующих различным зеркальным перестановкам вихрей в вершинах квадрата. Как показано в [24], согласно теореме Ляпунова [23] в окрестности этой неподвижной точки на каждом уровне энергии существует пара невырожденных периодических решений. Кроме того, одно решение (далее по тексту *симметричное*) совпадает с решением Горячева [26], когда вихри движутся в вершинах параллелограмма, а другое (*асимметричное*) не имеет такой простой геометрической интерпретации. Там же было показано, что оба периодических решения инвариантны относительно циклической перестановки вихрей, и в подходящей (вращающейся) системе координат все вихри движутся по одной кривой, т. е. эти решения соответствуют простым относительным хореографиям.

Проследим эволюцию данных решений при увеличении энергии. Для этого используем отображение Пуанкаре для приведенной системы четырех вихрей на плоскости при разных значениях энергии. Выберем в качестве секущей плоскость  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Как было сказано, удобнее изображать отображение Пуанкаре на этой поверхности непосредственно в трехмерном пространстве, а не проецировать на какую-либо плоскость (рис. П1.6). Заметим, что каждое из указанных выше периодических решений пересекает поверхность сечения в двух точках, которые отличаются знаком производной  $\psi_1$ .

При энергиях, близких к энергии томсоновской конфигурации, поверхность сечения изоморфна сфере. В подходящих канонических переменных ( $\{x, X\} = \{y, Y\} = 1$ ) гамильтониан вблизи неподвижной точки имеет вид (см. ниже приложение 2)

$$H = \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{1}{4\pi} \left( 3(x^2 + X^2) + 2\sqrt{2}(y^2 + Y^2) \right) + H_r, \quad (7.1)$$

где  $H_r$  начинается с членов третьего порядка. То есть система близка к интегрируемой (рис. П1.6а). Проследим далее эволюцию фазового портрета в зависимости от энергии.

При увеличении энергии параллельно происходят два процесса:

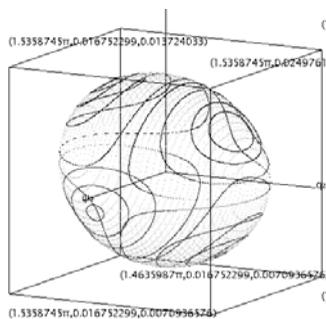
- 1) эволюция и различные бифуркации уровня энергии, а следовательно, и поверхности, на которой строится сечение Пуанкаре;
- 2) постепенная хаотизация фазового портрета (сечения Пуанкаре) на этой поверхности.

Исследование и классификация возможных видов и бифуркаций уровня энергии является топологической задачей и в этом приложении не проводится. Здесь мы более подробно остановимся на процессе хаотизации фазового портрета. Отметим, что существует *два дополняющих друг друга механизма хаотизации* фазового портрета:

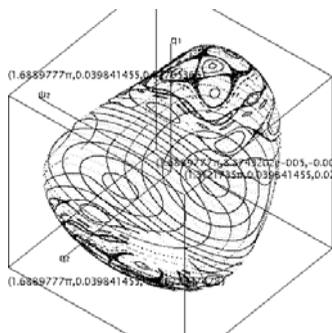
- *трансверсальное пересечение неустойчивых инвариантных многообразий — сепаратрис* (и возникающая при этом гомоклиническая структура отображения и подкова Смейла); данный механизм отвечает за образование хаотического слоя вблизи неустойчивых периодических решений;
- *каскад бифуркаций удвоения периода*. После прохождения каскада бифуркаций удвоения периода фазовый портрет характеризуется наличием траекторий со сколь угодно большим периодом. Хаос, обусловленный таким поведением, можно назвать локальным, так как он связан с конкретными периодическими решениями. Глобальная же хаотизация фазового портрета вблизи каскада связана с тем, что благодаря каскаду области регулярности «дробятся» на все более мелкие части, вокруг которых образуется стохастический слой по первому механизму хаотизации.

Рассмотрим теперь этапы хаотизации фазового портрета рассматриваемой задачи при уменьшении энергии более подробно.

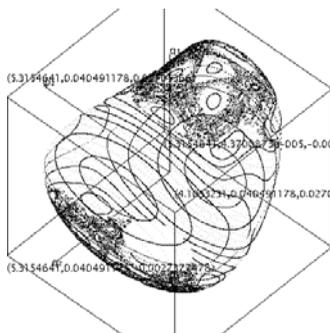
**Расщепление резонансных торов.** Как уже говорилось выше, при энергиях, близких к энергии томсоновской конфигурации, фазовый поток задается возмущением квадратичной части гамильтониана (7.1) и является практически интегрируемым. При этом фазовый портрет представляет собой два невырожденных периодических решения, окруженных инвариантными торами, которые заполнены двухчастотными квазипериодическими решениями. При увеличении энергии слагаемые третьего и более порядка в разложении гамильтониана вблизи томсоновского решения начинают играть все большую роль. В результате этого торы, собственные частоты



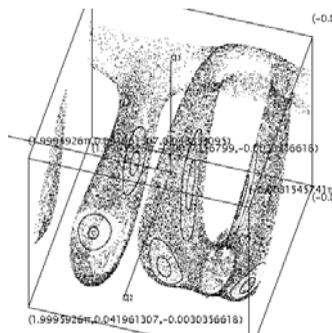
a)



b)



c)



d)

Рис. П1.6. Отображения Пуанкаре для задачи четырех одинаковых вихрей на плоскости ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_4 = 1$ ). В качестве сечения выбрана плоскость  $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ . Рисунку а) соответствует уровень энергии  $E = 1.215$ ; б) – уровень  $E = 1.251$ ; в) – уровень  $E = 1.252$ ; д) – уровень  $E = 1.263$ .

которых соизмеримы (так называемые резонансные торы), расщепляются, и образуются тонкие хаотические слои (см. рис. П1.6б). Затем при некоторых критических значениях энергии торы, разделяющие хаотические слои, разрушаются, а хаотические слои сливаются друг с другом (см. рис. П1.6с).

При этом сепаратрисы, соответствующие различным неподвижным точкам, трансверсально пересекают друг друга. Отметим, что при этом преимущественно хаотизируется окрестность асимметричного периодического решения, которое теряет устойчивость. Вокруг решения Горячева при этом остается достаточно большая область регулярности.

**Каскады бифуркаций удвоения периода.** При увеличении энергии остров регулярности вблизи асимметричного решения разрушается через каскад бифуркаций удвоения периода. Каскад представляет собой бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода (или кратных увеличений периода) при изменении параметра системы в конечных пределах. После прохождения каскада образуется достаточно однородный хаотический слой (рис. П1.6*d*). Отметим, что в данном случае каскаду предшествуют две бифуркации типа вилки, при которых «снимается» симметрия решения. Так, при первой бифуркации родившиеся устойчивые периодические решения уже не инвариантны относительно циклической перестановки всех вихрей. Однако если вихри разбить на пары, то внутри этих пар инвариантность сохраняется. Таким образом, в (вращающейся) подходящей системе координат вихри попарно движутся по двум замкнутым кривым (двусвязная хореография). При второй бифуркации типа вилки эта парная симметрия также разрушается, в результате каждый вихрь начинает двигаться по собственной кривой. При дальнейшем увеличении энергии от всех образовавшихся при бифуркациях периодических решений развиваются каскады удвоения периода. Соответствующая проекция дерева бифуркаций удвоения на плоскость  $(E, q_2)$  изображена на рисунке П1.7.

Таблица 1.2. Коэффициенты масштабного преобразования для дерева бифуркаций на рис. П1.7.

Номер бифуркации	Тип бифуркации	$E_n$	$\delta_n$
1	вилка	1.2599795534	
2	вилка	1.2618940012	
3	удвоение	1.2620315609	13.91721
4	удвоение	1.2620478367	8.45179
5	удвоение	1.2620496761	8.84747
6	удвоение	1.2620498875	8.71848

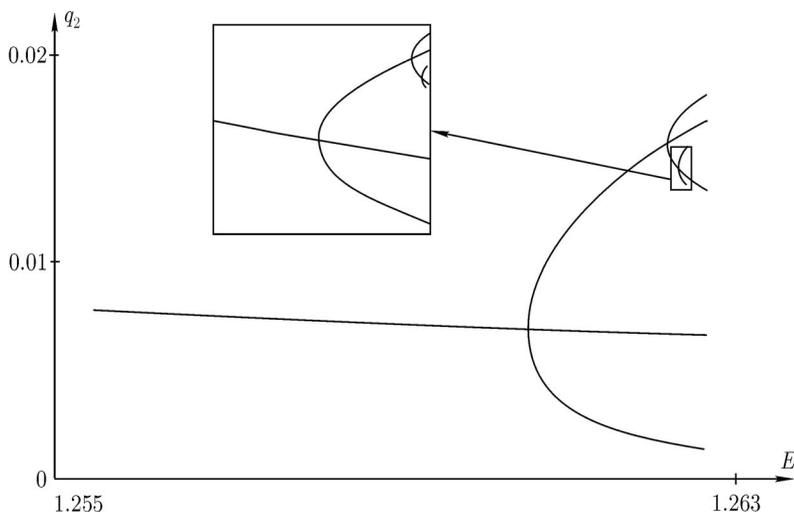


Рис. П1.7. Проекция дерева бифуркаций удвоения периода, начинающаяся с томсоновской конфигурации вихрей, на плоскость  $(E, q_2)$ .

Константы масштабного преобразования по энергии для первых шести бифуркаций приведены в таблице 1.2. Как видно из таблицы, значения коэффициентов масштабного преобразования сходятся к постоянной Фейгенбаума  $\delta = 8.721\dots$

После прохождения каскада бифуркаций удвоения периода область вблизи асимметричного периодического решения полностью хаотизируется. Однако вблизи решения Горячева при этом сохраняется регулярная область. Дальнейшее увеличение энергии приводит к хаотизации этой области и потере устойчивости решением Горячева через обратную бифуркацию удвоения периода (два неустойчивых периодических решения удвоенного периода сливаются с устойчивым). При еще большем увеличении энергии решение Горячева еще раз проходит через такую же бифуркацию (только в обратном направлении) и становится устойчивым. Последующее увеличение энергии снова приводит к потере устойчивости теперь уже через стандартную бифуркацию удвоения периода. Однако последующие бифуркации удвоения (при использованной точности вычислений) обнаружить не удастся, поэтому вопрос о хаотизации портрета вблизи решения Горячева через каскад бифуркаций удвоения остается открытым.

## Литература

- [1] Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques*, Springer. 2001.
- [2] Шарлье К. Л. *Небесная механика*, М., Наука, 1966, 627 с.
- [3] Khanin K. M. *Quasi-periodic motions of vortex systems*. Physica D. 1982, v. 4, p. 261-269.
- [4] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та. 1995.
- [5] Зиглин С. Л. *Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей*. ДАН СССР. 1979, т. 250, № 6, с. 1296–1300.
- [6] Lim C. C. *Graph theory and special class of symplectic transformations: the generalized Jacobi variables*. J. Math. Phys., 32(1), 1991, pp. 1–7.
- [7] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. *Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics — IV*. Reg. & Chaot. Dyn., 1999, v. 4, N1, pp. 23–50.
- [8] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд. дом. «Удмуртский университет», 1999, 464 с.
- [9] Lim C. C. *A combinatorial perturbation method and Arnold's whiskered tori in vortex dynamics*, Physica D, 1993, v. 64, p. 163–184.
- [10] Boatto S., Laskar J. *Point vortex cluster formation on the plane and on the sphere. An energy bifurcation condition*, Chaos, 2003, v. 13, № 3, p. 824–835.
- [11] Bagrets A. A., Bagrets D. A. *Nonintegrability of two problems in vortex dynamics*. Chaos. 1997, v. 7, № 3, p. 368–375.
- [12] Aref H., Pomphrey N. *Integrable and chaotic motions of four vortices. I. The case of identical vortices*. Proc. R. Soc. London. 1982, v. 380 A, p. 359–387.
- [13] Eckhardt B., Aref H. *Integrable and chaotic motion of four vortices. II. Collision dynamics of vortex pairs*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 1988, v. 326, p. 655–696.
- [14] Borisov A. V., Lebedev V. G. *Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere. II. General compact case*. Reg. & Ch. Dynamics. 1998, v. 3, № 2, p. 99–114.

- [15] Borisov A. V., Lebedev V. G. *Dynamics of three vortices on a Plane and a Sphere*. III. *General compact case*. Reg. & Ch. Dynamics. 1998, v. 3, № 4, p. 76–90.
- [16] Богомолов В. А. *Динамика завихренности на сфере*. Изв. АН. СССР Мех. жид. и газа. 1977, № 6, с. 57–65.
- [17] Козлов В. В. *Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике*. Успехи мат. наук. 1983, т. 38, № 1, с. 3–67.
- [18] Eckhardt B. *Integrable four vortex motion*. Phys. Fluids. 1988, v. 31(10), p. 2796–2801.
- [19] Kidambi R., Newton P.K. *Motion of three point vortices on a sphere*. Physica D. 1998, v. 116, p. 143–175.
- [20] Уинтнер А. *Аналитические основы небесной механики*. М.: Наука, 1967.
- [21] Celletti A., Falclini C. *A remark on the KAM theorem applied to a four-vortex problem*, J. Stat. Phys., 1988, v. 52, p. 471–477.
- [22] Simo C., Stuchi T. J., *Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem*. Physica D, 2000, Vol. 140, p. 1–32.
- [23] Зигель К., Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах* // В кн.: Мозер Ю. *КАМ-теория и проблемы устойчивости*. Ижевск: НИЦ РХД, 2001, с. 141–198. Пер. с англ. J. K. Moser *Lectures on Hamiltonian Systems*. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, v. 81, pp. 1–60.
- [24] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. *Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plane*. Reg. and Chaot. Dyn., 2004, v. 9, N. 2, pp. 101–111.
- [25] Thomson J. J. *The Corpuscular Theory of Matter*. London and Tonbridge. 1907.
- [26] Горячев Д. Н. *О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей*. Москва, Унив. тип. 1898.
- [27] Blackmore D., Champanerkar J. *Periodic and quasiperiodic motion of point vortices*, in *Vortex Dominated Flows, A volume celebrating Lu Ting's 80th birthday*, D. Blackmore, E. Krause, C. Tung (eds.), World Scientific, Singapore, 2005, p. 21–42.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

# Абсолютные и относительные хореографии в задаче о движении точечных вихрей на плоскости<sup>1</sup>

### 1. Уравнения движения и первые интегралы

Кратко остановимся на основных формах уравнений и первых интегралов динамики точечных вихрей на плоскости, отсылая за более полным изложением к основному тексту книги, где приведены также гидродинамические допущения, при которых эти уравнения справедливы.

Уравнения движения  $n$  точечных вихрей с декартовыми координатами  $(x_i, y_i)$  и интенсивностями  $\Gamma_i$  могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\Gamma_i \dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i}, \quad \Gamma_i \dot{y}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.1)$$

с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j}^n \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2, \quad \mathbf{r}_i = (x_i, y_i). \quad (1.2)$$

Здесь скобка Пуассона имеет вид

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) инвариантны относительно группы движений плоскости  $E(2)$ , поэтому кроме гамильтониана они обладают еще тремя интегралами

$$Q = \sum_{i=1}^n \Gamma_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^n \Gamma_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^n \Gamma_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup>Совместно с А. А. Килиным. Reg. & Chaot. Dyn., 2004, v. 9, № 2, p. 101–111. См. также: *New periodic solutions for three or four identical vortices on a plane and sphere*, DCDS, Expanded Volume devoted to AIMS 5th International Conference on Dynamical System and Differential Equations (USA, Pomona, June 2004).

которые, однако, не являются инволютивными

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad \{Q, I\} = 2P. \quad (1.5)$$

Из этих трех интегралов можно образовать два инволютивных  $Q^2 + P^2$ ,  $I$  и, следовательно, согласно общей теории [6], можно понизить порядок на две степени свободы. В частности, задача трех вихрей вследствие этого сводится к одной степени свободы и является интегрируемой (Грёбли, Кирхгоф, Пуанкаре) [1, 2, 5], а задача четырех вихрей сводится к системе с двумя степенями свободы. Последняя задача, вообще говоря, не является интегрируемой [7].

Эффективное понижение порядка для системы четырех вихрей с интенсивностями одного знака, основанное на рассмотрении двух пар вихрей, для каждой из которых выбираются соответствующие переменные типа действие-угол, а общая система получается как возмущение двух соответствующих невозмущенных задач, было получено К. М. Ханиным в [4]. Исходя из процедуры описанного построения возмущающей функции, в работе [4] доказано (используя методы КАМ-теории) существование квазипериодических решений, причем в качестве малого параметра принимается величина, обратная расстоянию между двумя парами вихрей.

Понижение порядка на одну степень свободы с помощью трансляционных инвариантов  $P$  и  $Q$  выполнено Лимом [8] при помощи введения барицентрических координат Якоби (в данном случае — связанных с центром завихренности), имеющими хорошо известные аналоги в классической небесномеханической задаче  $n$  тел [3]. Отметим, что уже такая (частичная) редукция позволила применить для анализа задачи о движении точечных вихрей некоторые методы КАМ-теории [8].

Оказывается, что для случая равных интенсивностей наиболее удобна одна из более формальных схем понижения порядка  $n$  вихрей на плоскости, которая была предложена в [9] (см. также [1, 10]). Она основана на представлении уравнений движения системы точечных вихрей на плоскости во «взаимных» переменных, в качестве которых выбраны квадраты расстояний между парами вихрей и ориентированные площади треугольников:

$$M_{ij} = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2, \quad \Delta_{ijk} = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k) \wedge (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i). \quad (1.6)$$

Взаимная коммутация таких переменных (кстати говоря, восходящих к Э. Лауре) приводит к некоторой алгебре Ли. При этом процедура понижения порядка (точнее говоря, последний канонический шаг этой процедуры) сводится к чисто алгебраической проблеме введения симплектических координат на орбитах соответствующих алгебр Ли.

## 2. Понижение порядка для трех и четырех вихрей равной интенсивности

Без ограничения общности положим  $\Gamma_i = \Gamma_j = 1$ ,  $P = Q = 0$ , тогда интеграл момента  $I$  (1.4) можно представить в форме

$$I = \frac{1}{n} \sum_{i < j}^n M_{ij}, \quad (2.1)$$

где  $n$  — число вихрей. Представляя координаты вихрей в комплексной форме  $z_k = x_k + iy_k$ , получим для них следующее представление:

$$z_k = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \sqrt{M_{kj}} e^{i\theta_{kj}}, \quad (2.2)$$

где  $\theta_{kj}$  — угол между вектором, направленным от  $j$ -го вихря к  $k$ -му, и положительным направлением оси  $Ox$ .

Прямым вычислением можно получить следующие утверждения, описывающие динамику приведенной системы вихрей.

**Предложение 1.** *Для трех вихрей равной интенсивности эволюция взаимных расстояний (при фиксированном значении  $I = \text{const}$ ) описывается гамильтоновой системой с одной степенью свободы, которая в канонических переменных  $(g, G)$  имеет вид*

$$\dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}, \quad \mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \ln M_{12} M_{13} M_{23}, \quad (2.3)$$

где  $M_{12} = 4 \left( \frac{I}{2} - G \right)$ ,  $M_{13} = 2G + \frac{I}{2} + 2\sqrt{3} \sqrt{G \left( \frac{I}{2} - G \right)} \cos g$ ,  $M_{23} = 2G + \frac{I}{2} - 2\sqrt{3} \sqrt{G \left( \frac{I}{2} - G \right)} \cos g$ .

**Предложение 2.** *Для четырех вихрей равной интенсивности эволюция взаимных расстояний описывается гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, которая в канонических переменных  $(g, G, h, H)$  имеет вид*

$$\dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}, \quad \dot{h} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H}, \quad \dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \ln M_{12} M_{13} M_{14} M_{23} M_{24} M_{34},$$

где

$$\begin{aligned} M_{12} &= I - G + 2\sqrt{(I - H)(H - G)} \cos h, \\ M_{34} &= I - G - 2\sqrt{(I - H)(H - G)} \cos h, \\ M_{13} &= I + G - H + 2\sqrt{(I - H)G} \cos(h + g), \\ M_{24} &= I + G - H - 2\sqrt{(I - H)G} \cos(h + g), \\ M_{14} &= H + 2\sqrt{(H - G)G} \cos g, \\ M_{23} &= H - 2\sqrt{(H - G)G} \cos g. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Используемые здесь канонические переменные имеют естественное геометрическое происхождение, связанное с представлением уравнений движения на алгебре Ли  $su(3)$  (см. § 6).

### 3. Абсолютное движение: квадратуры и геометрическая интерпретация

Согласно (2.2), при известных  $M_{ij}(t)$  для определения координат вихрей необходимо определить углы  $\theta_{ij}(t)$ . Ясно, что среди этих углов только один является независимым (выберем в качестве него  $\theta_{12}$ ), остальные получаются с помощью теоремы косинусов:

$$\theta_{ij} + \theta_{ik} = \arccos \left( \frac{M_{jk} - M_{ij} - M_{ik}}{2\sqrt{2M_{ij}M_{ik}}} \right), \quad i \neq j, k \neq i. \quad (3.1)$$

Эволюция угла  $\theta_{12}$  получается при помощи квадратуры [5]:

$$4\pi\dot{\theta}_{12} = \frac{1}{2}(M_{13}^{-1} + M_{23}^{-1}) + 2M_{12}^{-1} \quad (\text{для трех вихрей}), \quad (3.2)$$

$$4\pi\dot{\theta}_{12} = \frac{1}{2}(M_{13}^{-1} + M_{14}^{-1} + M_{23}^{-1} + M_{24}^{-1}) + 2M_{12}^{-1} \quad (\text{для четырех вихрей}).$$

Для периодических решений приведенной системы (2.3), (2.4) имеется любопытная геометрическая интерпретация абсолютного движения.

**Предложение 3.** Пусть  $\gamma(t)$  — периодическое решение (периода  $T$ ) приведенной системы, тогда

1°. Существует система координат, вращающаяся равномерно с некоторой угловой скоростью  $\Omega_a$  вокруг центра завихренности, в которой каждый вихрь движется по некоторой замкнутой кривой  $\xi_i(t)$ ;

2°. Частота вращения  $\Omega_a$  задается соотношением (с точностью до  $\frac{2\pi}{T} \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ):

$$\Omega_a = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_{12}(t) dt. \quad (3.3)$$

3°. Если частоты  $\Omega_a$  и  $\Omega_o = \frac{2\pi}{T}$  соизмеримы (т. е.  $\frac{\Omega_a}{\Omega_o} = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ), то вихри в неподвижной системе координат также описывают замкнутые кривые;

4°. Если какие-либо из кривых  $\xi_i(t)$  переводятся друг в друга поворотом вокруг центра завихренности на угол, соизмеримый с  $2\pi$ , то имеется (вращающаяся) система координат, в которой соответствующие вихри движутся по одной и той же кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В правой части (3.2) стоит периодическая функция периода  $T$ , разложим ее в сходящийся ряд Фурье

$$4\pi \dot{\theta}_{12} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a^{(n)} e^{i \frac{2\pi n}{T} t}. \quad (3.4)$$

Интегрируя (3.4) и учитывая (3.1), заключаем, что все углы  $\theta_{ij}$  имеют следующую зависимость от  $t$ :

$$\theta_{ij}(t) = \Omega_{ij} t + g_{ij}(t), \quad (3.5)$$

где  $\Omega_{ij} = a^{(0)} + \frac{2\pi}{T} \frac{q_{ij}}{p_{ij}}$ ,  $q_{ij}, p_{ij} \in \mathbb{Z}$ , а  $g_{ij}(t) = g_{ij}(t+T) - T$ -периодические функции времени.

Подставляя эту зависимость в (2.2), находим, что положение вихрей на плоскости задается следующим образом

$$z_k(t) = \frac{Q + iP}{\sum \Gamma_i} + u_k(t) e^{i\Omega t}, \quad u_k(t) = u_k(t + T_1) \in \mathbb{C}, \quad \Omega = a^{(0)}. \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что в системе координат, вращающейся вокруг центра завихренности с угловой скоростью  $\Omega$ , все вихри описывают аналитические замкнутые кривые, задаваемые функциями  $u_k(t) \in \mathbb{C}$ .

Доказательство 2°, 3°, 4° с помощью соотношений (3.4)–(3.6) очевидно. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 3 без изменений обобщается на случай произвольного числа вихрей  $n$ , при условии, что  $\gamma(t)$  периодическое решение приведенной системы с  $2n - 2$  степенями свободы для задачи  $n$  вихрей. (По вопросам приведения см., например, [1].)

#### 4. Аналитические хореографии

Покажем теперь, что в задаче четырех и трех вихрей могут существовать замечательные периодические решения, когда все вихри движутся друг за другом по одной и той же кривой; такие решения называются простыми (связными) хореографиями. Для того чтобы подчеркнуть различие между хореографиями в неподвижной и вращающейся системах координат, их называют, соответственно, абсолютными и относительными [11].

**Теорема 1 ([1]).** *Если в задаче трех вихрей равной интенсивности постоянные интегралы движения  $I, \mathcal{H}$  удовлетворяют неравенствам*

$$0 < 4\pi\mathcal{H} + 3 \ln I < \ln 2, \tag{4.1}$$

*то движение является простой относительной хореографией* (см. рис. П2.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие того, что приведенная система (2.3) для трех вихрей одностепенная, все  $M_{ij}(t)$  — периодические функции одного и того же периода  $T$ . Несложно показать, что при ограничениях (4.1) ориентация треугольника вихрей не меняется и существуют моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , такие, что  $M_{23}(t_1) = M_{13}(t_2)$ . (Если (4.1) не выполнено, то  $\forall t \exists k$  так, что  $M_{ij}(k) < M_{ik}(t)$  и  $M_{ij}(k) < M_{jk}(t)$ .) Кроме того, поскольку при фиксированных  $H, I$  все величины  $M_{ij}$  выражаются через одну из них (например  $M_{12}$ ), выполнены также соотношения

$$M_{13}(t_1) = M_{12}(t_2), \quad M_{12}(t_1) = M_{23}(t_2).$$

Вследствие инвариантности уравнений относительно циклической перестановки вихрей (следствие равенства интенсивностей) находим, что

$$t_1 - t_2 = \frac{T}{3}n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку уравнения эволюции  $M_{ij}$  первого порядка, заключаем, что

$$M_{12}(t) = M_{23} \left( t + \frac{T}{3} \right) = M_{13} \left( t + \frac{2T}{3} \right) = f(t)$$

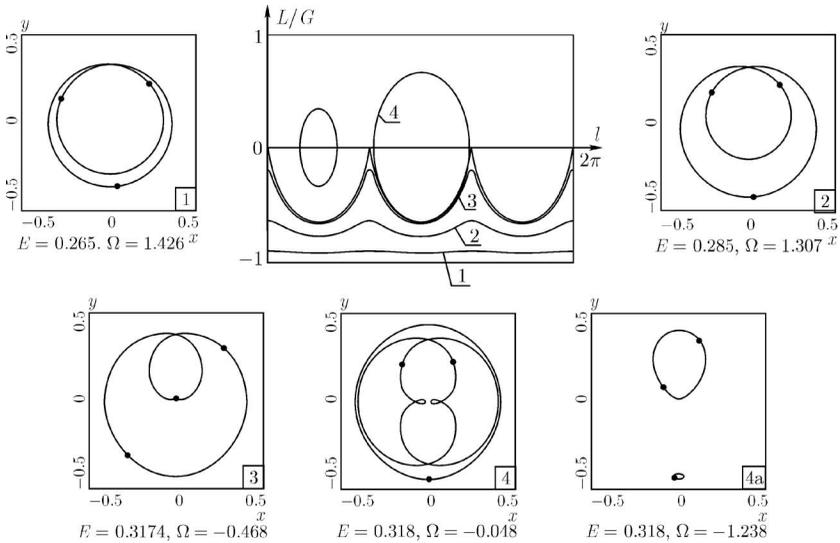


Рис. П2.1. Фазовый портрет приведенной системы в задаче трех вихрей и относительные хореографии, соответствующие различным фазовым траекториям на портрете. (Здесь  $I = 1/3$ .)

либо

$$M_{12}(t) = M_{23} \left( t + \frac{2T}{3} \right) = M_{13} \left( t + \frac{T}{3} \right) = f(t),$$

где  $f(t)$  — некоторая  $T$ -периодическая функция.

Подставляя в (2.2), получим

$$z_k(t) = u \left( t + \frac{k-1}{3}T \right) e^{i\Omega t}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где  $u(t)$  —  $T$ -периодическая комплекснозначная функция, определяющая одну и ту же кривую, по которой движутся вихри во вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$  системе координат. Фазовый портрет приведенной системы в задаче трех вихрей и соответствующие относительные хореографии приведены на рис. П2.1. ■

Для задачи четырех вихрей имеется исключительное решение, которое задается квадратурами, — решение Горячева, при этом вихри образуют па-

раллелограмм во все моменты времени [12]. Как и для задачи трех вихрей, несложно показать, что

**Теорема 2.** [1] *Если в задаче четырех вихрей равных интенсивностей вихри образуют центрально-симметричную конфигурацию (параллелограмм) и постоянные  $\mathcal{H}$ ,  $I$  удовлетворяют неравенству*

$$4 \ln 2 < 4\pi\mathcal{H} + \ln I < 2 \ln 2 + 3 \ln 3,$$

*то движение является простой относительной хореографией.*

Относительные хореографии в этом случае приведены на рис. П2.2.

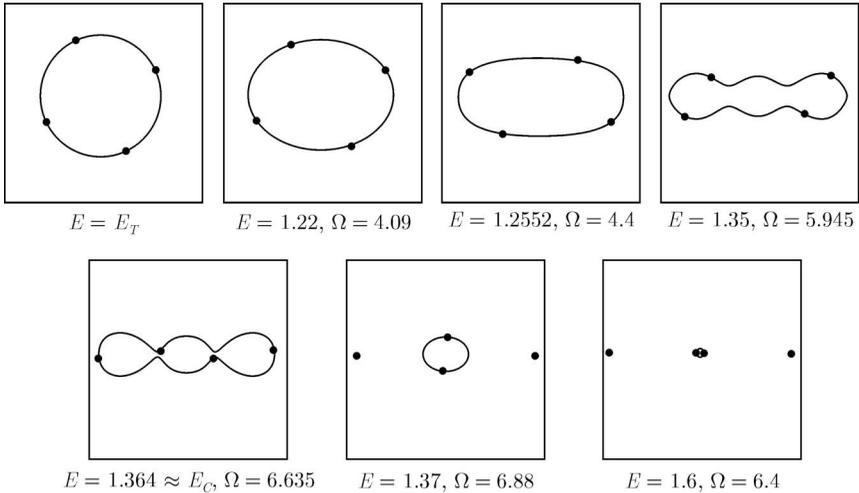


Рис. П2.2. Относительные хореографии в задаче четырех вихрей. ( $I = 1/8$ .)

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Физический смысл неравенств заключается в том, что при фиксированном  $I$  перестройка типа движения в задаче трех вихрей и для решения Горячева происходит при энергиях, соответствующих томсоновской и коллинеарной конфигурациям.

### 5. Новое периодическое решение в задаче четырех вихрей

Покажем теперь, что помимо только что указанной хореографии в задаче четырех вихрей имеется по крайней мере еще одна хореография (от-

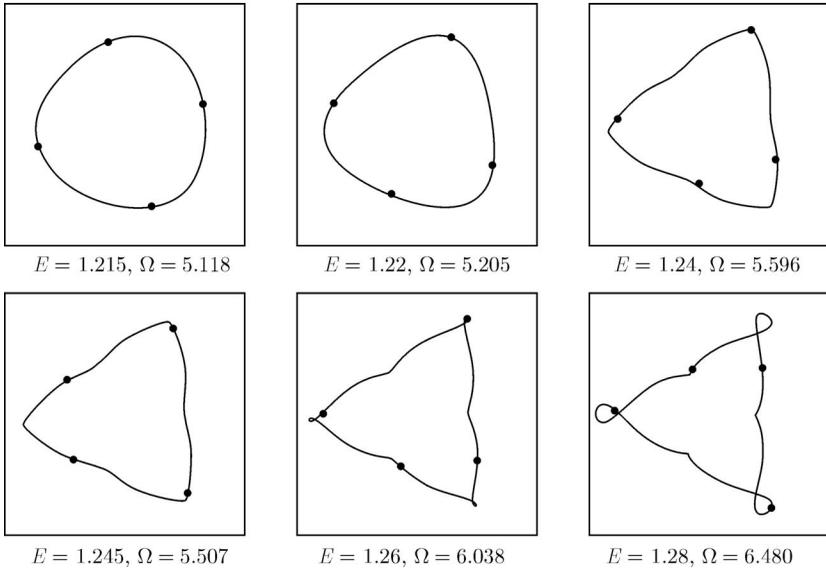


Рис. П2.3. Относительные хореографии, соответствующие новому периодическому решению в задаче трех тел. ( $I = 1/8$ .)

личная от решения Горячева). Рассмотрим окрестность томсоновского решения, т. е. движения, при котором вихри находятся в вершинах квадрата и равномерно вращаются вокруг центра завихренности [13]. Очевидно, что для двухстепенной приведенной системы (2.4) томсоновскому решению соответствует неподвижная точка, точнее, шесть точек, соответствующих различным зеркальным перестановкам вихрей в вершинах квадрата. Рассмотрим одну из них (остальные полностью идентичны) с координатами

$$G = 0, \quad H = \frac{1}{2}, \quad h = \frac{\pi}{2}.$$

Найдем нормальную форму гамильтониана приведенной системы (2.4) вблизи этой точки. Для этого сделаем каноническую замену переменных:

$$G = \frac{x^2 + X^2}{2}, \quad g = \operatorname{arctg} \frac{x}{X}, \quad H = \frac{1}{2} + 8^{-1/4}Y, \quad h = \frac{\pi}{2} + 8^{1/4}y;$$

разлагая в ряд с точностью до второго порядка, находим

$$\mathcal{H} = \frac{\ln 2}{\pi} + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_r, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{4\pi} (3(x^2 + X^2) + 2\sqrt{2}(y^2 + Y^2)),$$

где разложение функции  $\mathcal{H}_r$  начинается с членов третьего порядка. Таким образом, гамильтониан  $\mathcal{H}_2$  определяет интегрируемую систему с двумя несоизмеримыми частотами и на каждом уровне энергии  $\mathcal{H}_2 = h_2 = \text{const}$  имеет ровно два невырожденных периодических решения, определенных соотношениями

$$x = X = 0, \quad y^2 + Y^2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} h_2, \tag{5.2}$$

$$y = Y = 0, \quad x^2 + X^2 = \frac{4\pi}{3} h_2. \tag{5.3}$$

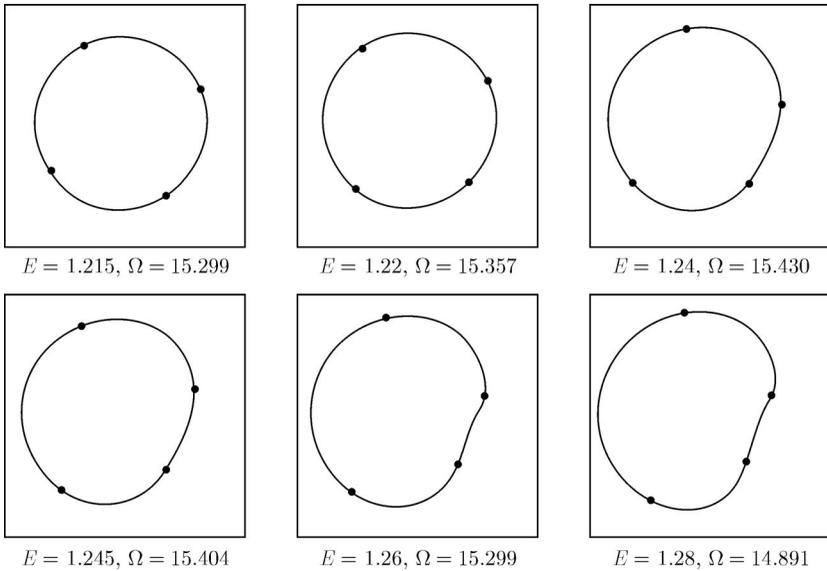


Рис. П2.4. Относительные хореографии, соответствующие новому периодическому решению в задаче трех тел в системе координат, отличной от используемой на рис. П2.3. ( $I = 1/8$ .)

Согласно теореме Ляпунова [14], эти решения сохраняются при возмущениях; следовательно, полная система (5.1) в окрестности неподвижной точки также на каждом уровне энергии имеет пару невырожденных периодических решений. Легко проверить, что одно решение, соответствующее (5.2), совпадает с решением Горячева, когда вихри движутся в вер-

шинах параллелограмма, второе же решение (5.3) не имеет такой простой геометрической интерпретации.

Вследствие того, что уравнения движения (1.1) инвариантны относительно циклической перестановки вихрей  $\sigma_c(z_1, z_2, z_3) = (z_3, z_1, z_2)$  и собственные числа гамильтониана  $\mathcal{H}_2$  различны, несложно показать, что оба найденных периодических решения также инвариантны относительно  $\sigma_c$ ; таким образом, согласно предложению 3, в подходящей системе координат все вихри движутся по одной кривой, т. е. оба решения соответствуют простым относительным хореографиям. На рисунке П2.3 приведены относительные хореографии, соответствующие новому периодическому решению приведенной системы (2.4).

## 6. Относительные и абсолютные хореографии

Вообще говоря, для каждого периодического решения (периода  $T$ ) приведенной системы (2.3), (2.4) можно указать счетное множество вращающихся систем координат, в которых вихри движутся по замкнутым кривым. Действительно, замена вида

$$\Omega'_a = \Omega_a + \frac{p}{q} \frac{2\pi}{T}, \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad (6.1)$$

не меняет свойства замкнутости траекторий в соответствующей вращающейся системе координат. Тем не менее, замена (6.1) при произвольных  $p, q$  не сохраняет свойство связности, т. е. в общем случае простая относительная хореография после перехода в систему координат, вращающуюся с частотой  $\Omega'_a$ , распадается на отдельные замкнутые кривые, по которым движутся вихри. Критерий сохранения связности следующий.

**Предложение 4.** Пусть периодическое решение (периода  $T$ ) приведенной системы соответствует связной относительной хореографии, с частотой вращения системы координат  $\Omega_a$ , а период движения вихрей по соответствующей общей кривой равен  $mT$ , тогда, если

$$mp = knq, \quad (6.2)$$

где  $n$  — число вихрей, а  $k \in \mathbb{Z}$  — произвольное целое число, преобразование (6.1) приводит к связной хореографии.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Абсолютные координаты вихрей рассматриваемого решения можно представить в форме

$$z_k(t) = u \left( t + \frac{k-1}{n} mT \right) e^{i\Omega_a t}, \quad (6.3)$$

где  $u(t) = u(t + mT)$  — периодическая (периода  $mT$ ) комплекснозначная функция.

Подставим в (6.3)  $\Omega_a$ , выраженную из соотношения (6.1):

$$z_k(t) = u\left(t + \frac{k-1}{n}mT\right) e^{-i\frac{2\pi p}{T}qt} e^{i\Omega'_a t} = u_k(t) e^{i\Omega'_a t}. \quad (6.4)$$

Если все вихри движутся по одной и той же кривой, то их координаты во вращающейся (с частотой  $\Omega'_a$ ) системе координат равны  $u_k(t)$  и удовлетворяют соотношению  $u_{k+1}(t) = u_k\left(t + \frac{mT}{n}\right)$ , откуда с учетом (6.4) получаем соотношение (6.2). ■

Соотношение (6.2) достаточное, но не необходимое условие сохранения связности. Если кривая, по которой движутся вихри, обладает дополнительными симметриями, то кроме  $p, q$ , удовлетворяющих условию (6.2), имеются дополнительные частоты вида (6.1), приводящие к связным хореографиям (см. ниже для решения Горячева).

Любопытно, что преобразование (6.1) позволяет «распутывать» некоторые хореографии; так, на рисунке П2.4 приведены хореографии, соответствующие периодическому решению (5.3), в системе координат, отличной от используемой на рисунке П2.3, их частоты вращения отличаются на величину

$$\Omega' - \Omega = \frac{4}{3} \frac{2\pi}{T}.$$

Как было показано выше (см. предложение 3), если для относительной хореографии период решения приведенной системы  $T$  соизмерим с периодом вращения системы координат  $T_a = \frac{2\pi}{\Omega_a}$ , то в неподвижной системе координат все вихри движутся по замкнутым (как правило, различным) кривым.

Рассмотрим подробнее вопрос существования абсолютных хореографий в задаче трех и четырех вихрей. Согласно сказанному выше, любая относительная хореография, соответствующая периодическому решению (периода  $T$ ) приведенной системы (см. (2.3), (2.4)) замыкается через время  $mT$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . При этом вихри за указанное время  $m$  раз проходят через одинаковое взаимное расположение. Соответствующие угловые скорости вращения систем координат, отвечающих этим хореографиям, обозначим  $\Omega_m^{(k)}$ .

Как было показано выше, все решения приведенной системы трех вихрей, при фиксированном  $D$  и  $E_T < E < E_C$  (где  $E_T$  и  $E_C$  — энергии соответствующие томсоновской и коллинеарной конфигурации), соответствуют

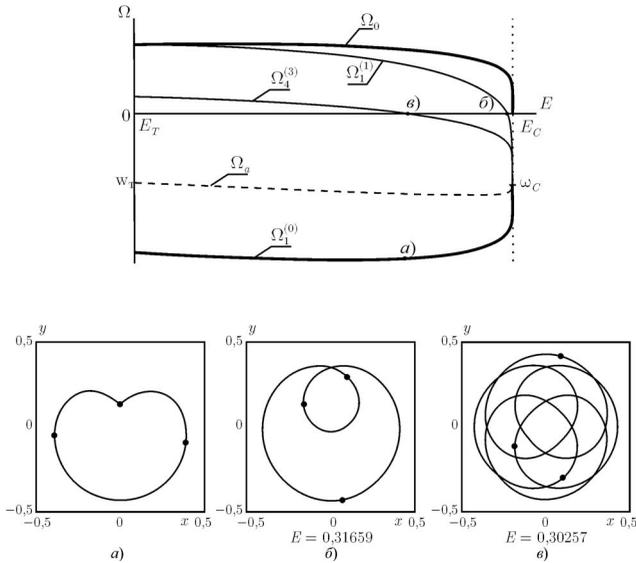


Рис. П2.5. На рисунке изображены графики  $\Omega_1^{(1)}$  и  $\Omega_4^{(3)}$  угловых скоростей вращения относительных хореографий в зависимости от энергии. Точкам пересечения этих графиков с осью  $Ox$  соответствуют абсолютные хореографии трех вихрей, изображенные внизу на рис. б) и в). Толстыми линиями на рисунке изображены базовая угловая скорость  $\Omega_1^{(0)}$ , соответствующая наиболее простой относительной хореографии, изображенной на рис. а), и частота периодического решения приведенной системы (2.3)  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . ( $I = 1/3$ .)

связным относительным хореографиям. Более того, имеется система координат, в которой хореография замыкается за (минимально возможное) время  $T$  (см. рис. П2.5), соответствующую угловую скорость обозначим  $\Omega_1^{(0)}$ , ее графики приведены на рисунке П2.5. Угловые скорости других относительных связанных хореографий теперь определяются соотношением вида

$$\Omega_m^{(k)}(E) = \Omega_1^{(0)}(E) + \frac{3k}{m}\Omega_0(E), \text{ где } m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}, \quad (6.5)$$

причем  $3k$  и  $m$  — взаимно простые числа, а  $\Omega_0(E) = \frac{2\pi}{T(E)}$ . При этом частоте  $\Omega_m^{(k)}$  отвечает хореография, замыкающаяся за время  $mT$ .

Очевидно, что абсолютные хореографии определяются решениями уравнения

$$\Omega_m^{(k)}(E) = 0, \tag{6.6}$$

где  $k, m$  фиксированы, а  $E$  — неизвестная. На рисунке П2.5 приведены графики некоторых частот  $\Omega_m^{(k)}(E)$  с отмеченными решениями уравнения (6.6) и приведены соответствующие абсолютные хореографии (это самые простые хореографии в системе трех вихрей). Вообще говоря, имеется счетное множество абсолютных хореографий с различными  $m, k$ .

Действительно, рассмотрим функцию

$$f_a(E) = \Omega_1^{(0)}(E) + a\Omega_0(E), \quad a \in \mathbb{R},$$

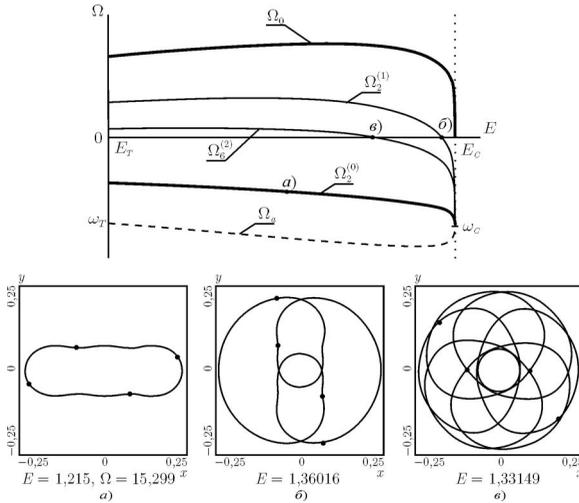


Рис. П2.6. На рисунке изображены графики  $\Omega_2^{(1)}$  и  $\Omega_6^{(2)}$  угловых скоростей вращения относительных хореографий в зависимости от энергии. Точкам пересечения этих графиков с осью  $Ox$  соответствуют абсолютные хореографии четырех вихрей, изображенные внизу на рис. б) и в). Толстыми линиями на рисунке изображены базовая угловая скорость  $\Omega_2^{(0)}$ , соответствующая наиболее простой относительной хореографии, изображенной на рис. а), и частота приведенной системы (2.4)  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . ( $I = 1/8$ )

для которой выполнено равенство  $f_a(E_C) = \omega_C < 0$  (см. рис. П2.5), и вследствие того, что  $\Omega_0(E) > 0$ , имеется некоторое число  $a_*$ , такое, что при  $a > a_*$  функция  $f_a(E)$  имеет по крайней мере один корень на отрезке  $[E_T, E_C]$ . Ясно, что на интервале  $[a_*, +\infty)$  имеется бесконечное число рациональных чисел вида  $a = \frac{3k}{m}$ , где  $3k$  и  $m$  взаимно просты. Пунктиром на рисунке П2.5 изображены кривая  $f_{a^*}(E)$  и угловая скорость вращения относительной хореографии  $\Omega_a$ , вычисляемая по формуле (3.3). Данная хореография является наиболее простой несвязной хореографией и отличается тем, что ее значения на концах интервала  $\Omega_a(E_T)$  и  $\Omega_a(E_C)$  равны угловым скоростям вращения томсоновской и коллинеарной хореографий.

Для решения Горячева в системе четырех вихрей аналогичные рассуждения несколько модифицируются. Прежде всего, можно показать, что простейшая связная хореография замыкается за время  $2T$ , а вихри в этом случае дважды проходят одно и то же взаимное расположение (то есть частотам  $\Omega_1^{(k)}$  отвечают несвязные хореографии). График зависимости одной из соответствующих угловых скоростей, которую обозначим  $\Omega_2^{(0)}$ , приведен на рисунке П2.6. В данном случае, вследствие симметрии кривой, соответствующей хореографии  $\Omega_2^{(0)}$ , комбинации частот, отвечающие связным хореографиям, задаются соотношением, отличным от (6.5):

$$\Omega_{2m}^{(k)}(E) = \Omega_2^{(0)}(E) + \frac{k}{m}\Omega_0(E), \text{ где } m - \text{нечетное, } k \in \mathbb{Z}, \quad (6.7)$$

причем  $k$  и  $m$  взаимно просты, и  $\Omega_0(E) = \frac{2\pi}{T(E)}$ , где  $T$  — период решения Горячева для приведенной системы (2.4). Эта хореография замыкается через время  $2mT$ .

Как и выше, уравнение

$$\Omega_{2m}^{(k)}(E) = 0$$

определяет абсолютные хореографии. Аналогично задаче трех вихрей можно показать, что имеется счетное множество абсолютных хореографий, отвечающих решению Горячева при различных числах  $m, k$ .

## 7. Устойчивость

В заключение обсудим устойчивость указанных периодических решений.

В силу интегрируемости задачи о движении трех вихрей все решения приведенной системы (2.3) — периодические и устойчивые. В то же

время легко показать, что любая (абсолютная или относительная) хореография в этой задаче обладает нейтральной устойчивостью по отношению к возмущениям положений вихрей в абсолютном пространстве.

В задаче четырех вихрей вследствие ее неинтегрируемости относительные хореографии могут быть (экспоненциально) неустойчивыми. В то же время если периодическое решение приведенной системы (2.4) устойчиво, то соответствующие хореографии также имеют нейтральную устойчивость в абсолютном пространстве. Численный анализ мультипликаторов периодических решений, соответствующих хореографиям на рисунке П2.6б, в, показывает, что они (экспоненциально) неустойчивы.

## Литература

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур*. В сб. под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского «Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей», ИКИ, 2003.
- [2] Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques*, Springer, 2001.
- [3] Шарлье К. Л. *Небесная механика*, М., Наука, 1966, 627 с.
- [4] Khanin K. M. *Quasi-periodic motions of vortex systems*. Physica D. 1982, v. 4, p. 261-269.
- [5] Мелешко В. В., Константинов М. Ю. *Динамика вихревых структур*. Киев, Наукова думка. 1993.
- [6] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та. 1995.
- [7] Зиглин С. Л. *Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей*. ДАН СССР. 1979, т. 250, № 6, с. 1296–1300.
- [8] Lim C. C. *Graph theory and special class of symplectic transformations: the generalized Jacobi variables*. J. Math. Phys., 32(1), 1991, pp. 1–7.
- [9] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. *Lie algebras in vortex dynamics and celestial mechanics — IV*. Reg. & Chaot. Dyn., 1999, v. 4, № 1, pp. 23–50.

- [10] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд. дом. «Удмуртский университет», 1999, 464 с.
- [11] Современные проблемы хаоса и нелинейности (сб. статей под ред. А. В. Борисова, А. А. Килина), ИКИ, 2002.
- [12] Горячев Д. Н. *О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей*. Москва, Унив. тип. 1898.
- [13] Thomson J. J. *The Corpuscular Theory of Matter*. London and Tonbridge. 1907.
- [14] Зигель К., Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах*. В кн. Мозер Ю. *КАМ-теория и проблемы устойчивости*. Ижевск: НИЦ РХД, 2001, с. 141–198. Пер. с англ. J. K. Moser *Lectures on Hamiltonian Systems*. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, v. 81, pp. 1–60.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

# Абсолютные хореографии точечных вихрей на сфере<sup>1</sup>

### 1. Уравнения движения и первые интегралы для вихрей на сфере

Для  $n$  точечных вихрей, двигающихся по сфере  $\mathbb{S}^2$ , со сферическими координатами  $(\theta_i, \varphi_i)$  и интенсивностями  $\Gamma_i$ , уравнения могут быть записаны в гамильтоновой форме [1, 2, 3]

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_i}, \quad \dot{\varphi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

где гамильтониан

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < k}^n \Gamma_i \Gamma_k \ln M_{ik}, \quad M_{ik} = 4R^2 \sin^2 \frac{\gamma_{ik}}{2}, \quad (1.2)$$

а скобка Пуассона определена соотношением  $\{\varphi_i, \cos \theta_k\} = \frac{\delta_{ik}}{R^2 \Gamma_i}$ . Здесь  $R$  — радиус сферы,  $M_{ik}$  — взаимное расстояние,  $\gamma_{ik}$  — угол между векторами, соединяющими центр сферы с точечными вихрями  $i$  и  $k$ ,

$$\cos \gamma_{ik} = \cos \theta_i \cos \theta_k + \sin \theta_i \sin \theta_k \cos(\varphi_i - \varphi_k).$$

Помимо гамильтониана, уравнения (1.1) имеют три независимых неинволютивных интеграла

$$F_1 = R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, \quad F_2 = R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, \quad F_3 = R \sum_{i=1}^n \Gamma_i \cos \theta_i, \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Совместно с К. Г. Трониным. Reg. & Chaot. Dyn., v. 11, № 1, 2006.

которые являются компонентами вектора  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = \sum \Gamma_i \mathbf{r}_i$ , где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-векторы вихрей. Вектор  $\mathbf{F}$  называют *моментом завихренности*.

В задачах вихревой динамики важное значение имеет момент системы вихрей  $D$ , который выражается через компоненты  $F_i$ :

$$D = \sum \Gamma_i \Gamma_j M_{ij} = \left( R \sum \Gamma_i \right)^2 - F_1^2 - F_2^2 - F_3^2. \quad (1.4)$$

В случае трех вихрей имеем полностью интегрируемую систему [2, 3]. Задача четырех вихрей в общем случае неинтегрируема [4].

## 2. Хореографии в случае трех и четырех вихрей на сфере

В работе [5] указан конструктивный алгоритм редукции системы (1.1) на две степени свободы с помощью интегралов (1.3). Таким образом, в задаче трех и четырех вихрей на сфере приведенная система имеет одну и две степени свободы соответственно. При этом каждому периодическому решению приведенной системы соответствует двухчастотное движение вихрей на сфере. Можно показать (по аналогии с плоским случаем [3, 6]), что эти движения обладают следующими свойствами

Если  $\gamma(t)$  — периодическое решение (периода  $T$ ) приведенной системы, то:

- 1°. Существует система координат, вращающаяся равномерно с некоторой угловой скоростью  $\Omega_a$  вокруг центра завихренности, в которой каждый вихрь движется по некоторой замкнутой кривой  $\xi_i(t)$ ;
- 2°. Если частота  $\Omega_a$  соизмерима с  $\Omega_o = \frac{2\pi}{T}$  (т. е.  $\frac{\Omega_a}{\Omega_o} = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ), то вихри в неподвижной системе координат также описывают замкнутые кривые;
- 3°. Если какие-либо из кривых  $\xi_i(t)$  переводятся друг в друга поворотом вокруг центра завихренности на угол, соизмеримый с  $2\pi$ , то имеется (вращающаяся) система координат, в которой соответствующие вихри движутся по одной и той же кривой.

Как показано в [3, 6] для случая плоскости, если все вихри имеют одинаковую интенсивность, то при некоторых ограничениях на значения интегралов энергии и момента существует вращающаяся система координат, в которой все вихри движутся по одной и той же кривой. Такое движение называется связной относительной хореографией [6]. Ниже с помощью

численных методов мы покажем, что это справедливо и в случае движения вихрей на сфере. Соответствующие скорости вращения системы координат обладают следующими свойствами:

1) существует счетное множество вращающихся систем координат, в которых вихри движутся по замкнутым кривым. Их скорости вращения связаны соотношением вида

$$\Omega_m^{(k)} = \Omega_\alpha^{(0)} + \frac{p}{q} \frac{2\pi}{T}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

где  $\Omega_\alpha^{(0)}$  — базовая частота вращения системы координат, в которой хореография замыкается за минимально возможное время  $\alpha T$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ ;

2) для сохранения связности хореографий значения  $p$  и  $q$  должны удовлетворять соотношению

$$mp = knq, \quad (2.2)$$

где  $m, n, k$  — некоторые целые числа;

3) при постоянном значении момента  $D$  частоты  $\Omega_m^{(k)}$  зависят от энергии системы  $E$ .

Можно показать, что все вышеуказанные свойства также справедливы для периодических решений приведенной системы с произвольным числом вихрей на сфере. Далее мы построим (численно) базовую частоту  $\Omega_\alpha^{(0)}$  для периодических решений приведенной системы в задачах трех и четырех вихрей на сфере и укажем абсолютные хореографии, т. е. движения, при которых вихри движутся по одной и той же кривой в неподвижной системе координат.

**Хореографии в случае трех вихрей.** При фиксированном  $D$  минимальной возможной энергией  $E_T$  обладает томсоновская конфигурация, когда все вихри располагаются на одной широте в вершинах правильного треугольника, другая критическая энергия  $E_C$  соответствует случаю, когда все вихри располагаются на одном вращающемся меридиане — в коллинеарной конфигурации [3].

Для случая трех вихрей на сфере, имеющих общую энергию  $E$ , если при постоянном значении момента  $D$  выполнено условие  $E_T < E < E_C$ , то имеется (вращающаяся) система координат, в которой все три вихря движутся по одной кривой. Пусть  $\Omega_1^{(0)}(E)$  — угловая скорость вращающейся системы, в которой относительная хореография замыкается за минимально возможное время  $T(E)$  и в которой она имеет самый простой вид, тогда другие частоты относительных хореографий определяется аналогично случаю

на плоскости:

$$\Omega_m^{(k)}(E) = \Omega_1^{(0)}(E) + \frac{3k}{m} \frac{2\pi}{T(E)}, \tag{2.3}$$

Абсолютные хореографии при этом задаются решениями уравнения

$$\Omega_m^{(k)}(E) = 0. \tag{2.4}$$

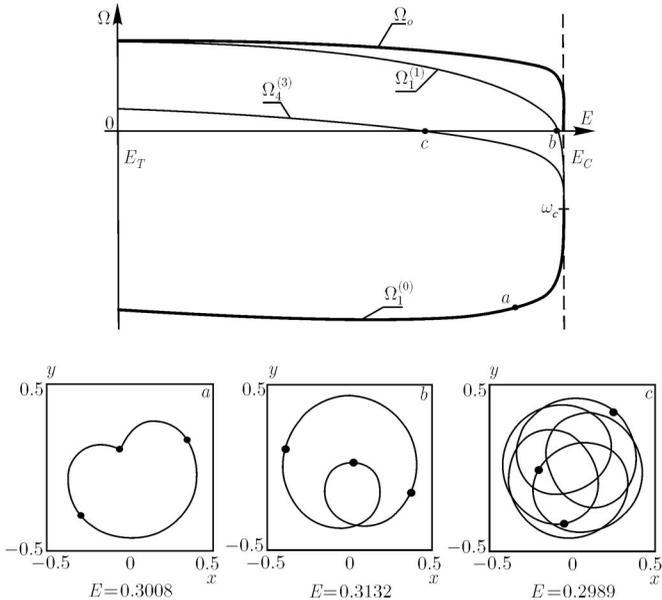


Рис. П3.1. Графики зависимости угловых скоростей вращения системы координат от энергии  $E$  для задачи трех вихрей на сфере. Точкам пересечения этих графиков с осью  $Ox$  соответствуют абсолютные хореографии трех вихрей, проекции которых на плоскость  $xy$  изображены ниже на рис.  $b$ ) и  $c$ ). Толстыми линиями на рисунке изображены угловая скорость  $\Omega_1^{(0)}$ , соответствующая наиболее простой относительной хореографии, изображенной на рис.  $a$ ) (при  $E = 0.3008$ ),  $\Omega_o = \frac{2\pi}{T}$  — частота периодического решения приведенной системы. (Здесь  $D = 1$ ,  $E_T = 0.2623$ ,  $E_C = = 0.3140$ .)

На рисунке П3.1 приведены зависимости от энергии  $E$  некоторых частот  $\Omega_m^{(k)}$  относительных хореографий с отмеченными решениями (2.4). Там

же приведен характерный вид наиболее простой относительной хореографии (скорость соответствующей системы координат  $\Omega_1^{(0)}$ ).

**Обобщение решений и хореографий в задаче четырех вихрей.** Как было показано в [6], в задаче четырех вихрей на плоскости в окрестности томсоновского решения существует два невырожденных периодических решения приведенной системы. Одно из них соответствует решению Горячева [7], когда вихри в каждый момент времени движутся в вершинах параллелограмма, будем называть его *симметричным*; другое решение не имеет такой простой геометрической интерпретации, его назовем *асимметричным*. Оба решения определяют связанные относительные (и абсолютные) хореографии. В случае четырех вихрей на сфере также имеется пара аналогичных решений и им также соответствуют связанные хореографии. Одно из этих решений (симметричное) описывает движение, при котором вихри располагаются симметрично относительно прямой, проходящей через диаметр сферы, и может быть исследовано аналитически. Второе (асимметричное) решение допускает лишь численный анализ.

Рассмотрим сначала симметричный случай. Угловые скорости систем координат, соответствующих относительным хореографиям в этом случае определяются аналогично задаче четырех вихрей на плоскости:

$$\Omega_{2m}^{(k)}(E) = \Omega_2^{(0)}(E) + \frac{k}{m}\Omega_o(E), \quad m - \text{нечетное}, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

где  $\Omega_2^{(0)}$  — частота, соответствующая наиболее простой связанной хореографии, которая замыкается за время  $2T$  и при которой вихри дважды проходят одно и то же взаимное расположение.

Для второго решения наиболее простая связанная хореография соответствует движению вихрей по одной замкнутой кривой, проекция которой на плоскость изображена на рисунке П3.2d. При этом за время  $T$  конфигурация вихрей повторяется один раз; соответственно, частоту этой хореографии обозначим через  $\Omega_1^{(0)}$ . Угловые скорости других относительных связанных хореографий определяются соотношением

$$\Omega_m^{(k)} = \Omega_1^{(0)} + \frac{4k}{m}\Omega_o, \quad m - \text{нечетное}, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Если в (2.6) перед  $k$  вместо 4 стоит множитель 2, то хореография становится несвязной и состоит из двух кривых, вдоль каждой из которых движутся два вихря.

На рисунке П3.2 приведены угловые скорости систем координат для относительных хореографий в зависимости от энергии  $E$  для симметричного

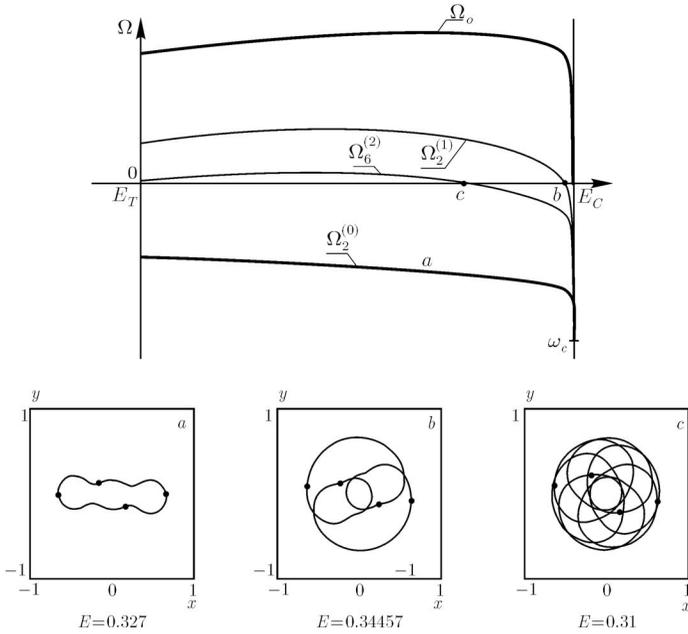


Рис. П3.2. Графики угловых скоростей вращения системы координат для относительных хореографий четырех вихрей в зависимости от энергии  $E$  для симметричного решения. Точками  $b$  и  $c$  обозначены абсолютные хореографии, проекции которых на плоскость  $xy$  изображены на рис. П3.3*b, c*. Толстыми линиями изображены базовая угловая скорость  $\Omega_2^{(0)}$ , соответствующая наиболее простой относительной хореографии, проекция которой на плоскость  $xy$  изображена на рис. *a*, и  $\Omega_o = \frac{2\pi}{T}$  — частота периодического решения приведенной системы. (Здесь и для следующего рисунка  $D = 8$ , при этом  $E_T = 0.2206$ ,  $E_C = 0.3508$ .)

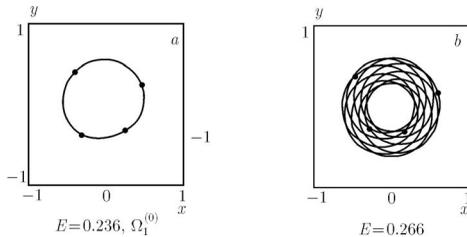


Рис. П3.3. *a* — хореография для асимметричного решения в системе координат с угловой скоростью  $\Omega_1^{(0)}$  при  $E = 0.236$ , *b* — абсолютная хореография асимметричного решения при  $E = 0.266$ .

решения. Как и в случае движения вихрей на плоскости,  $\Omega_m^{(k)}$  могут быть получены во всем интервале энергий  $E_T < E < E_C$ . Для построения полных зависимостей  $\Omega_m^{(k)}(E)$  асимметричного решения требуется более высокая точность численных методов, а также модификация основных алгоритмов. Для этого решения ограничимся лишь некоторыми хореографиями, вид которых приведен на рисунках ПЗ.3а, б.

### 3. Хореографии $n$ одинаковых вихрей

Пока не существует общего метода классификации всех возможных хореографий произвольного числа вихрей не только на сфере, но и на плоскости. К. Симо в небесномеханической задаче  $n$  тел произвел обширные компьютерные исследования и обнаружил различные классы симметричных и несимметричных хореографий для достаточно больших  $n$ . Его результаты представлены в виде анимации на сайте <http://www.maia.ub.es/dsg/index.html> (см. также [8]). Вследствие того, что имеются не только абсолютные, но и относительные и многосвязные (когда  $m$  вихрей движутся по  $k$  замкнутому кривым,  $m, k \in \mathbb{N}$ ), а также сопутствующие (сателлитные) хореографии, задача классификации в общем случае представляется очень обширной.

На сфере можно указать ряд весьма любопытных абсолютных многосвязных хореографий, допускающих различные дискретные симметрии, отсутствующие в случае плоскости. Они тесно связаны со статическими конфигурациями вихрей на сфере [2, 3, 9, 10]. Наиболее простые из этих конфигураций образованы платоновыми телами и полигональными конфигурациями, в вершины которых помещены вихри одинаковой интенсивности. Более подробное обсуждение симметричных статических конфигураций содержится в § 8.

Здесь только отметим, что симметричными статическими и стационарными конфигурациями не исчерпывается всё множество возможных конфигураций. Для случая плоскости известно [13, 14, 15], что при  $n \geq 8$  существуют стационарные конфигурации, не обладающие ни одной симметрией. Такие конфигурации существуют, видимо, и для сферы, хотя соответствующее исследование, насколько нам известно, не проводилось.

Укажем здесь несколько простых путей получения абсолютных хореографий на сфере, основанных на использовании статических конфигураций суперпозиций нескольких многоугольников, а также платоновых тел. Как правило, эти хореографии являются многосвязными.

Первый способ, указанный в [16], связан с расщеплением указанных конфигураций, когда все вихри, например, находящиеся в вершинах плато-

нова тела, расщепляются на  $l \in \mathbb{N}$  равных (для всех вершин) вихрей, где  $l$  равно числу граней многогранника, сходящихся в соответствующей вершине. Для случая тетраэдра мы имеем четыре вершины и три грани. Таким образом, получается хореография из 12 одинаковых вихрей, каждые 3 из которых вращаются вблизи 4-х вершин тетраэдра (рис. ПЗ.4а). Интересно, что при изменении энергии получаются хореографии, при которых либо 2 вихря вращаются по замкнутой кривой около вершин октаэдра (рис. ПЗ.4б), либо по одному вихрю, вращающемуся вблизи вершин восемнадцатигранника (рис. ПЗ.4с). Таким образом имеются многосвязные хореографии, связанные с возмущениями вблизи платоновых тел.

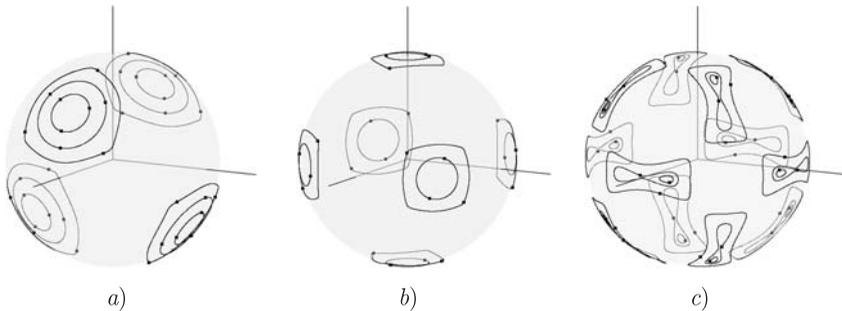


Рис. ПЗ.4. Хореографии 12 одинаковых вихрей на сфере, получающиеся расщеплением тетраэдрической конфигурации при различных значениях энергии и момента. Цифрами обозначено число вихрей, вращающихся вокруг одной из вершин образующихся правильных многогранников. (Пунктиром показаны траектории на задней стороне сферы.)

Наиболее интересной хореографией, обсуждаемой в связи с указанным методом расщепления, является решение, называемое *бакиболом*, в котором 60 вихрей движутся вблизи вершин правильного икосаэдра (имеющего 12 вершин), по замкнутым кривым, содержащим по 5 вихрей (рис. ПЗ.5а). Другая хореография из 60 вихрей, также называемая бакиболом, образуется, когда около вершин додекаэдра (имеющего 20 вершин) движутся по одной кривой три одинаковых вихря (т.к.  $60 = 12 \times 5 = 20 \times 3$ ). Напомним, что бакибол, или бакминстерфуллерен (обозначаемый  $C_{60}$ ), является очень симметричной молекулой, в которой 60 атомов углерода размещены аналогично ячейкам футбольного мяча.

За открытие бакибола Смелли, Кёрлу и Крото в 1996 году была присуждена Нобелевская премия по химии. Это связано с необычной устойчи-

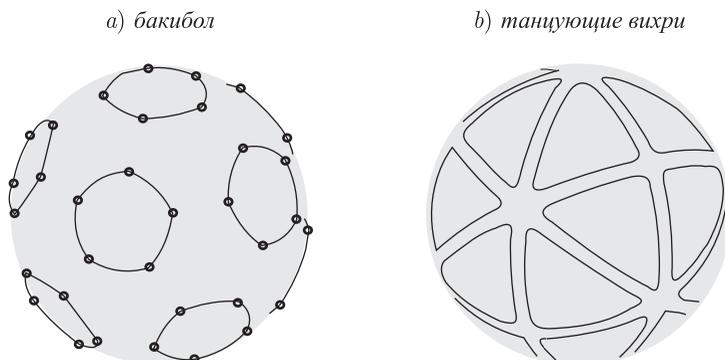


Рис. П3.5

востью этой молекулы, тесно связанной с ее симметрией. Интересно, что в теории межатомного взаимодействия с логарифмическим потенциалом (аналогичным гамильтониану вихревой динамики) различные хореографии, возникающие из статических конфигураций платоновых тел, объясняют явление кластеризации. Действительно, атомы в молекуле разбиваются на группы вблизи вершин соответствующих многогранников.

Методом расщепления можно получить также класс любопытных решений, названных Т. Токиедой *танцующими вихрями* [17]. Эти периодические решения также имеют вид хореографий, и получаются, например, методом расщепления из платоновых тел. При этом, однако, каждая вершина расщепляется на  $n$  вихрей интенсивности  $\Gamma$  и на  $n$  вихрей интенсивности  $-\Gamma$  (т. е. на вихревые пары). Указанные движения действительно очень привлекательны. Отметим даже сходство терминологии (*хореографии*, *танцующие вихри*), зародившейся в небесной механике и вихревой динамике и используемой для описания аналогичных движений. Точнее, танцующие вихри являются лишь частным случаем хореографий. Танцующие вихри, получающиеся при расщеплении вершин тетраэдра, приведены на рис. П3.5b.

Хореографии типа танцующих вихрей можно получить, если каждую вершину правильного  $n$ -угольника с четным числом вершин, расположенную на экваторе, расщепить на пару одинаковых вихрей с противоположными знаками. Для случая  $n = 2$  и  $n = 6$  танцующие вихри, получающиеся таким образом, приведены на рисунке П3.6.

Укажем еще одну любопытную хореографию, указанную в [16] и названную *твистором*. Ее можно получить из двух одинаковых правильных  $n$ -угольников, равноотстоящих от экватора и повернутых друг относительно

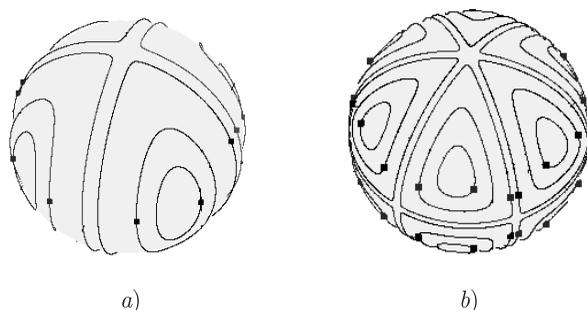


Рис. ПЗ.6. Танцующие вихри для случая  $n = 2$  (a) и  $n = 6$  (b).

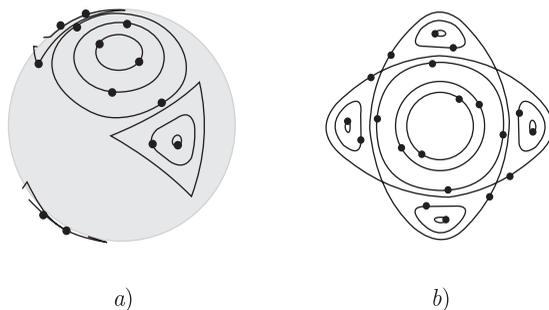


Рис. ПЗ.7. Твисторные решения для случая  $n = 2$  при различных энергиях: (a) — вид сбоку, (b) — вид сверху.

друга. Все вихри при этом имеют одинаковую интенсивность. В указанном периодическом решении вихри, принадлежащие одному многоугольнику, вращаются в одном направлении, а другому — в противоположном. Для случая  $n = 2$  эти твисторные решения приведены на рисунке ПЗ.7 для различных значений энергии. Приведенные примеры не исчерпывают список различных классов танцующих вихрей (см. например [17]), который без труда может быть значительно расширен. В этом отношении интересна также работа [18].

Аналитические и численные исследования указанных классов периодических решений (существование, устойчивость, бифуркации и пр.) частично выполнены в работах [19, 20, 21], хотя полный анализ далек от завершения.

## Литература

- [1] Богомолов В. А. *Динамика завихренности на сфере*, Изв. АН СССР, Мех. жидк. и газа, 1977, № 6, с. 57–65.
- [2] Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques*. Springer, 2001.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур* // В кн.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева, М. А. Соколовского. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [4] Bagrets A. A., Bagrets D. A. *Nonintegrability of two problems in vortex dynamics* // *Chaos*. 1997. V. 7. № 3. P. 368–375.
- [5] A. V. Borisov, A. A. Kilin, I. S. Mamaev. *Reduction and Chaotic Behaviour of Point Vortices on a Plane and a Sphere*. Accepted for publication in the expanded volume of DCDS-B, devoted to the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, Pomona, June 2004.
- [6] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. *Absolute and Relative Choreographies in the Problem of Point Vortices Moving on a Plane*, *Reg. & Chaot. Dyn.*, 2004, V. 9, № 2, p. 101–112.
- [7] Горячев Д. Н. *О некоторых случаях движения прямолинейных параллельных вихрей*. Москва: Унив. тип., 1898.
- [8] Chenciner A., Gerver J., Montgomery R., Simo C. *Simple Choreographic Motions of N bodies: A Preliminary Study* // Springer. 2002. in *Geometry, Mechanics, and Dynamics*. volume dedicated to J. Marsden, P. 287–308.
- [9] Borisov A. V., Pavlov A. E. *Dynamics and Statics of vortices on a Plane and a Sphere. I* // *Reg. & Ch. Dynamics*. 1998. V. 3. № 1. P. 28–39.
- [10] Boatto S., Laskar J. *Point vortex cluster formation in the plane and on the sphere. An energy bifurcation condition* // *Chaos*. 2003. V. 13. № 3. P. 824–835.
- [11] Lim C. C., Montaldi J., Roberts M. R. *Relative equilibria of point vortices on the sphere* // *Physica D*. 2001. 148. P. 97–135.
- [12] Montaldi J., Soulière A., Tokieda T. *Vortex dynamics on a cylinder* // *SIAM J. Applied Dynamics Systems* 2003. V. 2. № 3. P.417–430.
- [13] Glass K. *Equilibrium configurations for a system of N particles in the plane* // *Phys. Lett*. 1997. A. V. 235. P. 591–596.
- [14] Aref H., Vainchtein D. L. *Point vortices exhibit asymmetric equilibria* // *Nature*. 1998. V. 392. 23 April. P. 769–770.
- [15] Aref H., Newton P. K., Stremmler M., Tokieda T., Vainchtein D. L. *Vortex Crystals* // *TAM Reports* 2002.  
[http://www.tam.uiuc.edu/publications/tam\\_reports/2002/1008.pdf](http://www.tam.uiuc.edu/publications/tam_reports/2002/1008.pdf).

- [16] Soulière A., Tokieda T. *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry* // J. Fluid Mech. 2002. V. 460. P. 83–92.
- [17] Tokieda T. *Tourbillions dansants*, C. R. Acad. Sci. Paris, 2001, T. 333, Ser. I, p. 943–946.
- [18] Khushalani B. *The Families of Periodic Orbits Bifurcating from the Fixed Equilibria in a 48-Dimensional Systems*, Reg. & Chaot. Dyn., 2004, V. 9, № 2, p. 189–198.
- [19] Laurent-Polz F. *Point vortices on the sphere: a case with opposite vortices* // Nonlinearity. 2002. V. 15. № 1. P. 143–172.
- [20] Laurent-Polz F. *Relative periodic orbits in point vortex systems* // Nonlinearity. 2004. V. 17. № 6. P. 1989–2013.
- [21] Laurent-Polz F., Montaldi J., Roberts M. *Stability of Relative Equilibria of Point Vortices on the Sphere* // DS/0402430. <http://front.math.ucdavis.edu/math.DS/0402430>.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

# Взаимодействие двух вихревых колец на сфере (аналог задачи Горячева–Арефа)

### 1. Движение $2n$ вихрей на плоскости [1]

Рассмотрим систему  $2n$  точечных вихрей, состоящую из двух групп по  $n$  вихрей, каждая из которых (в начальный момент) расположена в вершинах концентрических правильных многоугольников, которые традиционно называются кольцами. Эти группы вихрей имеют, соответственно, интенсивности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Обозначая координаты первой группы через комплексные числа  $z_1, \dots, z_n$ , а второй — через  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ , уравнения движения  $2n$  вихрей можно записать в форме

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{\beta \neq \alpha}^n \frac{\Gamma_1}{z_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta=1}^n \frac{\Gamma_2}{z_\alpha - \zeta_\beta} \right), \\ \dot{\bar{\zeta}}_\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{\beta=1}^n \frac{\Gamma_1}{\zeta_\alpha - z_\beta} + \sum_{\beta \neq \alpha}^n \frac{\Gamma_2}{\zeta_\alpha - \zeta_\beta} \right),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Учитывая начальное расположение вихрей, решение уравнений (1.1) будем искать в виде

$$z_\alpha(t) = z(t)e^{2\pi i(\alpha-1)t/n}, \quad \zeta_\alpha(t) = \zeta(t)e^{2\pi i(\alpha-1)t/n}, \quad \alpha = 1, \dots, n,\tag{1.2}$$

т. е. расположение вихрей, симметричное относительно неподвижного центра в начальный момент, остается таковым в течение всего процесса движения. Используя тождества

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{1 - \gamma e^{2\pi i(\alpha-1)/n}} = \frac{n}{1 - \gamma^n}, \quad \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{1 - e^{2\pi i(\alpha-1)/n}} = \frac{n-1}{2},\tag{1.3}$$

из уравнений (1.1) получим систему двух уравнений для определения функций  $z$  и  $\zeta$ :

$$\dot{\bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{\Gamma_1(n-1)}{2z} + \frac{\Gamma_2 n z^{n-1}}{z^n - \zeta^n} \right), \quad \dot{\bar{\zeta}} = \frac{1}{2\pi i} \left( \frac{\Gamma_2(n-1)}{2\zeta} + \frac{\Gamma_1 n \zeta^{n-1}}{\zeta^n - z^n} \right). \quad (1.4)$$

Несложно показать [1], что уравнения (1.4) могут быть представлены в гамильтоновой форме

$$\Gamma_1 \dot{\bar{z}} = \frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial z}, \quad \Gamma_2 \dot{\bar{\zeta}} = \frac{1}{i} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (1.5)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\pi} \log \left\{ \left[ (z\bar{z})^{\Gamma_1} (\zeta\bar{\zeta})^{\Gamma_2} \right]^{(n-1)/2} \left[ (z^n - \zeta^n)(\bar{z}^n - \bar{\zeta}^n) \right]^{\Gamma_1 \Gamma_2} \right\}. \quad (1.6)$$

Кроме гамильтониана (или величины  $h = \exp(2\pi H)$ ) система (1.5), (1.6) обладает интегралом момента

$$I = \Gamma_1 |z|^2 + \Gamma_2 |\zeta|^2, \quad (1.7)$$

и поэтому является интегрируемой по Лиувиллю. Детальное исследование системы (1.5), (1.6) (включающее рассмотрение топологии, редукции и устойчивости) в зависимости от отношения  $\Gamma_1/\Gamma_2$  выполнено в [2]. Для важного случая  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  достаточно полное исследование выполнено в [1, 3].

**Комментарий.** Общая система (1.1) (с добавлением центрального вихря, не изменяющего свойств интегрируемости) была рассмотрена Д. Н. Горячевым, который также подробно рассмотрел случай  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ , а интенсивность центрального вихря  $\varkappa$  ненулевая,  $\varkappa \neq 0$ . Д. Н. Горячев указал соотношения на параметры  $\varkappa$  и  $\lambda^2 = -\Gamma_1/\Gamma_2$ , при которых решения описываются явными квадратурами, рассмотрев более подробно случай движения по логарифмической спирали. Случай  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ ,  $\varkappa = 0$  изучался Т. Хавелоком в работе [4], в которой найдено решение, соответствующее равномерному вращению вихрей по окружностям с постоянными радиусами. Такое решение обобщает задачу о дорожке Кармана на случай конечного числа вихревых пар, расположенных по окружностям (двойко альтернированные кольца, по терминологии Хавелока). Случай  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  рассматривался В. Грёбли [5] и А. Гринхиллом [6], указавшими решение, для которого  $\zeta = \bar{z}$ , т. е. обладающее  $n$  осями симметрии. Как уже указывалось, наиболее полной работой, посвященной системе Горячева – Арефа (1.1), является [2].

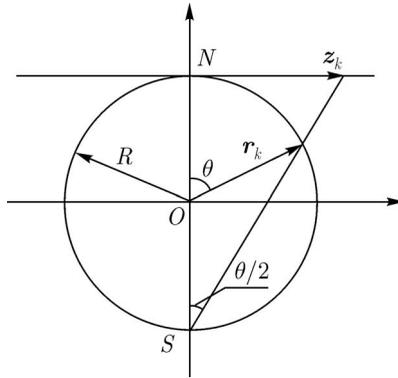


Рис. П4.1

## 2. Движение $2n$ вихрей на сфере

Рассмотрим систему  $2n$  точечных вихрей на сфере радиуса  $R$ . Выполним стереографическую проекцию сферы на плоскость и представим координаты вихрей в комплексной форме  $z_k = x_k + iy_k$ ,  $i = 1, \dots, N$  (рис. П4.1). Тогда уравнения движения (произвольной системы  $N$  точечных вихрей с интенсивностями  $\Gamma_l$ ) можно представить в форме

$$\dot{\bar{z}}_k = \frac{(1 + \lambda|z_k|^2)^2}{2\pi i} \left( \sum_{l \neq k}^N \Gamma_l \frac{1}{z_k - z_l} - \left( \sum_{l \neq k}^N \Gamma_l \right) \frac{\lambda \bar{z}_k}{1 + \lambda|z_k|^2} \right), \quad \lambda = (2R)^2. \tag{2.1}$$

Эти уравнения записываются в гамильтоновой форме

$$\dot{\bar{z}}_k = \{ \bar{z}_k, H \} = \frac{2(1 + \lambda|z_k|^2)^2}{i\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial z_k},$$

$$H = \frac{1}{4\pi} \left( \sum_{k < l} \Gamma_k \Gamma_l \ln |z_k - z_l|^2 - \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left( \sum_{l \neq k} \Gamma_l \right) \ln(1 + \lambda|z_k|^2) \right).$$

Скобки Пуассона задаются соотношениями  $\{ \bar{z}_k, z_l \} = \frac{2\delta_{kl}}{i\Gamma_k} (1 + \lambda|z_k|^2)^2$ .

Разобьем (аналогично предыдущему пункту)  $2n$  вихрей на группы по  $n$  вихрей, имеющих, соответственно, интенсивности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , тогда система (2.1) допускает частное центрально-симметричное решение, при котором

каждая из групп вихрей образует во все моменты времени правильные многоугольники (кольца) с одной и той же осью симметрии. Мы снова будем искать его в виде (1.2). Подставляя (1.2) в (2.1) и используя (1.3), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}} &= \frac{(1 + \lambda|z|^2)^2}{2\pi i} \left( \frac{(n-1)\Gamma_1}{2z} + \frac{n\Gamma_2 z^{n-1}}{z^n - \zeta^n} - (n(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \Gamma_1) \frac{\lambda\bar{z}}{1 + \lambda|z|^2} \right), \\ \dot{\zeta} &= \frac{(1 + \lambda|\zeta|^2)^2}{2\pi i} \left( \frac{(n-1)\Gamma_2}{2\zeta} + \frac{n\Gamma_1 \zeta^{n-1}}{\zeta^n - z^n} - (n(\Gamma_1 + \Gamma_2) - \Gamma_2) \frac{\lambda\bar{\zeta}}{1 + \lambda|\zeta|^2} \right).\end{aligned}\quad (2.2)$$

Система (2.2) является гамильтоновой (1.5) с гамильтонианом

$$\begin{aligned}H &= \frac{n-1}{2} (\Gamma_1^2 \ln z\bar{z} + \Gamma_2^2 \ln \zeta\bar{\zeta} - (\Gamma - \Gamma_1)\Gamma_1 \ln(1 + \lambda z\bar{z}) - \\ &- (\Gamma - \Gamma_2)\Gamma_2 \ln(1 + \lambda \zeta\bar{\zeta}) + \Gamma_1\Gamma_2 \ln(z^n - \zeta^n)(\bar{z}^n - \bar{\zeta}^n)), \quad \Gamma = n(\Gamma_1 + \Gamma_2).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Скобки Пуассона задаются соотношениями  $\{\bar{z}, z\} = \frac{2(1 + \lambda|z|^2)^2}{i\Gamma_1}$ ,  $\{\bar{\zeta}, \zeta\} = \frac{2(1 + \lambda|\zeta|^2)^2}{i\Gamma_2}$ .

Помимо гамильтониана (2.3) уравнения допускают интеграл момента, соответствующий вращательной симметрии относительно общей оси колец. Он имеет вид

$$I = \frac{\Gamma_1}{1 + \lambda|z|^2} + \frac{\Gamma_2}{1 + \lambda|\zeta|^2} = \text{const.} \quad (2.4)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Решения (1.2) на сфере были впервые указаны в [7] из общих симметричных соображений. В [7] приведен также вид фазового портрета в одном из частных случаев.

**Приведение к системе с одной степенью свободы.** Используя инвариантность уравнений (2.2) относительно группы вращений  $SO(2)$ , явно выполним редукцию к системе с одной степенью свободы. Выполним замену переменных

$$\varphi = \arg z - \arg \zeta, \quad \psi = \arg z + \arg \zeta, \quad X = \frac{\Gamma_1}{1 + \lambda|z|^2} - \frac{\Gamma_2}{1 + \lambda|\zeta|^2}, \quad Y = I, \quad (2.5)$$

где  $I$  — интеграл (2.4). Скобки Пуассона для новых переменных имеют вид

$$\{X, \varphi\} = \{Y, \psi\} = 4\lambda, \quad \{X, Y\} = \{\varphi, \psi\} = 0. \quad (2.6)$$

Выразим гамильтониан через новые переменные:

$$4\pi H = \frac{n-1}{2} (\Gamma_1^2 \ln u(1-u) + \Gamma_2^2 \ln v(1-v)) + \\ + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left( v^n (1-u)^n + u^n (1-v)^n - 2(uv(1-u)(1-v))^{n/2} \cos n\varphi \right), \\ u = \frac{I+X}{2\Gamma_1} = \frac{1}{1+\lambda|z|^2}, \quad v = \frac{I-X}{2\Gamma_2} = \frac{1}{1+\lambda|\zeta|^2}. \quad (2.7)$$

Таким образом,  $\psi$  — циклическая переменная, и на поверхности уровня  $I = \text{const}$  получаем искомую систему с одной степенью свободы для переменных:

$$\dot{X} = 4\lambda \frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = -4\lambda \frac{\partial H}{\partial X}. \quad (2.8)$$

**Твисторы и танцующие вихри.** Имеется два частных случая, когда все (неособые) решения системы (2.2) являются периодическими, а именно

$$1) \Gamma_1 = \Gamma_2, \quad I = \Gamma_1, \quad 2) \Gamma_1 = -\Gamma_2, \quad I = 0. \quad (2.9)$$

Как несложно показать, в обоих случаях имеется дополнительный интеграл

$$\psi = \arg z + \arg \zeta = \text{const}.$$

В первом случае вихревые кольца равноотстоят от экватора и движутся в противоположных направлениях. При этом возможны два режима движения: в первом все вихри одного и того же кольца движутся по одной и той же кривой («вблизи полюса»), во втором — каждый вихрь движется по своей траектории («вблизи вершин косой призмы», см. ниже рис. П4.10). Это — простейшие твисторы [9].

Во втором случае оба кольца находятся на одной и той же широте, и вихри описывают одинаковые овалы с центрами на экваторе, разновидность так называемых *танцующих вихрей* [9], см. рис. П4.11. Более подробно эти случаи рассмотрены ниже для простейших колец, состоящих из двух вихрей.

Интересной особенностью этих случаев является также то, что решение можно выписать в виде явных квадратур. Так для случая  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$

( $n$  — произвольное) получаем

$$\dot{X} = -\frac{2\lambda n}{\pi} \frac{(1 - X^2)^n \sin n\varphi}{(1 - X)^{2n} + (1 + X)^{2n} - 2(1 - X^2)^n \cos n\varphi}.$$

Выразим из этого соотношения  $\cos n\varphi$  и подставим в уравнение для гамильтониана (2.7); из полученного уравнения находим, что  $X(t)$  может быть получено обращением следующего интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \pm \frac{\lambda n}{\pi h} (t - t_0),$$

$$P(x) = -\left(h - (1 - x^2)^{n-1} ((1 + x)^n + (1 - x)^n)^2\right) \times$$

$$\times \left(h - (1 - x^2)^{n-1} ((1 + x)^n - (1 - x)^n)^2\right), \quad (2.10)$$

где постоянная  $h$  связана со значением гамильтониана (2.7) соотношением

$$4\pi H + 2(2n - 1) \ln 2 = \ln h.$$

В случае  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$  гамильтониан (2.7) и уравнения (2.8) еще более упрощаются; действительно, несложно получить

$$4\pi H = \ln 2 - \ln X(2 - X) - \ln(1 - \cos n\varphi),$$

$$\dot{X} = -\frac{\lambda}{\pi} n \operatorname{ctg} \frac{n\varphi}{2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{2(1 - X)}{X(2 - X)}.$$

Эти уравнения легко интегрируются, и для траектории получаем следующие уравнения

$$X = 1 \pm \left(1 - \frac{h}{1 - \cos n\varphi}\right)^{1/2}.$$

Закон движения по траектории определяется выражениями

$$X(t) = 1 + \sqrt{\frac{2 - h}{2}} \sin \tau, \quad \tau = \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{\lambda n}{\pi} (t - t_0), \quad (2.11)$$

где  $\ln h = \ln 2 - 4\pi H$ .

Следовательно, для простейшего случая танцующих вихрей [9] решение может быть выражено через элементарные функции. Этот результат

дополняет результаты работ [7], где существование подобных решений доказывается с помощью теории, основанной на анализе дискретных групп симметрии. Помимо указанных выше, известно большое количество других частных решений в движении вихрей на сфере для случая, при котором все интенсивности по модулю равны (и в частности, более сложные танцующие вихри, см. [9]). Интересно было бы выяснить, для каких еще решений можно выполнить явное интегрирование в квадратурах.

В случае плоскости при  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  аналогичное решение также может быть получено в квадратурах; замечательное по своей простоте, оно было указано Д. Н. Горячевым [3].

В общем случае (произвольные  $\Gamma_i$ ) траектории приведенной системы на плоскости  $X, \varphi$  совпадают с линиями уровня гамильтониана (2.7). Таким образом, фазовый портрет приведенной системы (2.8) полностью определяется видом двумерной поверхности  $z = H(X, \varphi)$ , который, как известно, определяется критическими точками и сингулярностями функции (2.7). Рассмотрим подробнее критические точки (2.7), которым в исходной системе (2.1) соответствуют относительные равновесия вихрей, т. е. «твердотельные» конфигурации, равномерно вращающиеся вокруг неподвижного центра (стационарные конфигурации).

**Относительные равновесия.** Несложно показать, что угол  $\varphi$ , соответствующий критическим точкам (2.7) (и, следовательно, относительным равновесиям), определяется уравнением

$$\sin n\varphi = 0,$$

т. е.  $\varphi = 0 \pmod{\frac{2\pi}{n}}$ , либо  $\varphi = \frac{\pi}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}}$ . Используя терминологию, предложенную в [1], конфигурации первого типа ( $\varphi = 0$ ) будем называть симметричными (symmetrical), а второго типа ( $\varphi = \frac{\pi}{n}$ ) — альтернированными (alternate). Подставляя эти значения  $\varphi$  в (2.7), находим, что относительные равновесия системы (2.1) определяются критическими точками функций

$$4\pi H_{\pm} = \frac{n-1}{2} (\Gamma_1^2 \ln u(1-u) + \Gamma_2^2 \ln v(1-v)) + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left( v^{n/2}(1-u)^{n/2} \mp u^{n/2}(1-v)^{n/2} \right)^2, \quad (2.12)$$

где верхний знак соответствует симметричным, а нижний — альтернированным конфигурациям. (Как мы видим, в отличие от случая плоскости [2], уравнение, определяющее относительные равновесия на сфере при нечетном  $n$ , не является полиномиальным.)

Рассмотрим подробно два важных случая, соответствующих частным решениям в задаче четырех вихрей на сфере. Выполним качественный анализ динамики в этих случаях. Используя приводимый ниже алгоритм, можно выполнить качественный анализ системы (2.2) при любых фиксированных значениях  $\Gamma_1, \Gamma_2, n$ .

$n = 2, \Gamma_1 = \Gamma_2 = 1 (I \neq 1)$ . В этом случае система (2.2) описывает центрально-симметричное решение в задаче четырех одинаковых вихрей на сфере, первоначально указанное и исследованное в книге [8] (см. также основной текст книги). Предложенные в [8] переменные хотя и позволяют выполнить редукцию к системе с одной степенью свободы, но недостаточно удобны для качественного анализа системы.

Согласно (2.7), функция  $H$  —  $\pi$ -периодическая, поэтому можно ограничиться рассмотрением  $\varphi$  в интервале  $[0, \pi)$ , в то же время  $u < 0$  при  $X < -I$ , а  $v < 0$  при  $X > I$ , поэтому физические значения  $X$  заключены в интервале  $(-I, I)$ . При этом возможные значения константы интеграла (2.4) определены неравенствами  $0 \leq I \leq 2$ .

С помощью (2.12) находим, что относительные равновесия определяются корнями некоторых полиномов. Для симметричных решений это

$$X(2X^4 - 3(2-d)X^2 + d^2) = 0,$$

для альтернированных —

$$X(X^2 + d)(3X^4 - 2(5-3d)X^2 - d(2-3d)) = 0,$$

где  $d = I(2-I) \in [0, 1]$ . Исключая нефизические решения этих уравнений, находим неподвижные точки системы (2.8).

*Симметричные:*

$$\varphi_s = 0 \bmod \pi, \quad X_s = \frac{1}{2} \left( 3(2-d) - \sqrt{d^2 + 36(1-d)} \right)^{1/2}, \quad (2.13)$$

это решение соответствует конфигурации вихрей, при которой они располагаются на одном меридиане, вращающемся с постоянной угловой скоростью.

*Альтернированные:*

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2} \bmod \pi, \quad X_a^{(1)} = 0, \quad X_a^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 5 - 3d - \sqrt{25 - 24d} \right)^{1/2}, \quad (2.14)$$

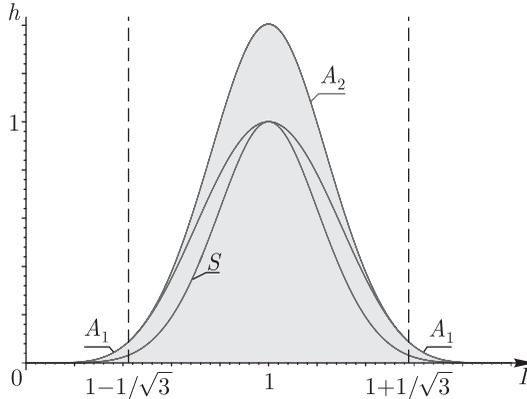


Рис. П4.2. Бифуркационная диаграмма системы для  $n = 2, \Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ . Серым цветом отмечена область возможных (физических) значений интегралов  $I, h$ . Кривые  $A_1, A_2$  соответствуют альтернированным относительным равновесиям, а  $S$  — симметричному равновесию.

причем  $X_a^{(2)}$  определено лишь при  $I \in \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$ . Заметим, что точка  $(\varphi_a, X_a^{(1)})$  соответствует расположению вихрей в вершинах квадрата, равномерно вращающегося вокруг оси, перпендикулярной его плоскости, а точка  $(\varphi_a, X_a^{(2)})$  соответствует расположению вихрей в вершинах неправильного тетраэдра, вращающегося вокруг оси, проходящей через центр двух противоположных ребер.

Подставляя эти решения в гамильтониан (2.7), построим бифуркационную диаграмму (диаграмму энергии-момента). В данном случае ее удобно изобразить на плоскости значений интегралов  $I$  и  $h = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi H}{64}$  (см. рис. П4.2). Критическим точкам (2.13), (2.14) на этой плоскости соответствуют бифуркационные кривые, которые обозначим соответственно  $S, A_1, A_2$ . Возможные (физические) значения интегралов  $I, h$  на рисунке П4.1 отмечены серым цветом, при пересечении кривых  $A_1, A_2, S$  происходит перестройка траекторий приведенной системы (2.8) и, соответственно, перестройка инвариантных многообразий (двумерных торов) исходной системы (2.2). Кривые  $A_1, S$  определены при всех значениях  $I \in [0, 2]$ , кривая  $A_2$  определена на отрезке  $I \in \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$  и в граничных точках отрезка касается кривой  $A_1$ .

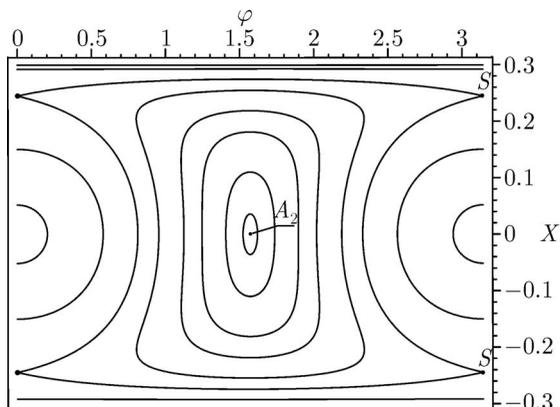


Рис. П4.3. Характерный вид фазового портрета приведенной системы при  $n = 2$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$  и  $I \in D_1$  ( $I = 0.3$ ).

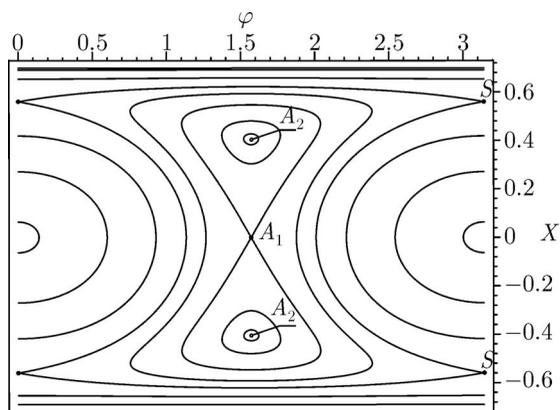


Рис. П4.4. Характерный вид фазового портрета приведенной системы при  $n = 2$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2$  и  $I \in D_2$  ( $I = 0.7$ ).

Таким образом, в зависимости от значения интеграла  $I$  имеется два качественно различных типа фазовых портретов системы (2.8), соответствующих областям  $I \in \left(0, 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 2\right) = D_1$  и  $I \in$

$\in \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \setminus \{0\} = D_2$ . Они приведены на рисунках П4.3, П4.4.

При этом симметричное решение всегда неустойчиво,  $A_2$  — устойчиво,  $A_1$  — неустойчиво при  $I \in D_2$  и устойчиво при  $I \in D_1$  (в данном случае устойчивость рассматривается лишь по отношению к центрально-симметричным возмущениям положений вихрей). Заметим также, что при всех значениях  $I$  гамильтониан (2.7) имеет две сингулярности в точках  $\varphi = 0 \bmod \pi$ ,  $X = 0$ , которые также определяют вид фазового портрета (рис. П4.3, П4.4).

$n = 2$ ,  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$  ( $I \neq 0$ ). Эту ситуацию рассмотрим по аналогии с предыдущим случаем. Можно сказать, что в этом случае система (2.2) описывает центрально-симметричное взаимодействие двух вихревых пар на сфере.

Как и выше, гамильтониан (2.7) —  $\pi$ -периодическая функция, следовательно, ограничимся интервалом  $\varphi \in [0, \pi)$ , а из условия положительной определенности функций  $u, v, 1 - u, 1 - v$  находим  $|I| \leq X \leq 2 - |I|$ . При этом возможные значения интеграла  $I \in [-1, 1]$ .

Относительные равновесия в данном случае определяются корнями следующих уравнений. Для симметричных:

$$I^2 \tilde{X}(\tilde{X}^2 - I^2 - 1) = 0,$$

для альтернированных:

$$\tilde{X}(\tilde{X}^2 - 1 - I^2)(\tilde{X}^4 - 2(1 + I^2)\tilde{X}^2 + 1 - 6I^2 + I^4) = 0,$$

где  $\tilde{X} = X - 1 \in (|I| - 1, 1 - |I|)$ . После исключения нефизических решений для относительных равновесий получаем следующие решения.

*Симметричные:*

$$\varphi_s = 0 \bmod \pi, \quad X_s = 1,$$

это решение соответствует расположению вихрей в вершинах прямоугольника, который вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости и проходящей через середины противоположных сторон (соединяющих вихри с одинаковыми по знаку интенсивностями). Подобное решение отсутствует в плоском случае.

*Альтернированные:*

$$\varphi_a = \frac{\pi}{2} \bmod \pi, \quad X_a^{(1)} = 1, \quad X_a^{(2)} = 1 + \sqrt{1 + I^2 - 2\sqrt{2}|I|},$$

последнее решение определено при  $I \in [-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1]$ . Точка  $(\varphi_a, X_a^{(1)})$  соответствует расположению пар вихрей, одинаковых по знаку на одной и той же широте по разные стороны от экватора, эта конфигурация вращается вокруг оси, перпендикулярной экватору (подобное решение также отсутствует в плоском случае), точка  $(\varphi_a, X_a^{(2)})$  — это аналог плоского решения, при котором вихри одинаковой циркуляции вращаются на одинаковых параллелях, при увеличении  $|I|$  до значения  $\sqrt{2} - 1$  это решение сливается с решением  $(\varphi_a, X_a^{(1)})$ .

Как и выше, подставляя найденные координаты относительных равновесий в (2.12), построим бифуркационную диаграмму для этого случая, которую удобно изобразить на плоскости интегралов  $I, h = e^{8\pi H}$  (см. рис. П4.5). Кривые  $S, A_1$ , соответствующие критическим точкам  $(\varphi_s, X_s)$  и  $(\varphi_a, X_a^{(1)})$ , также определены при произвольном  $I \in [-1, 1], I \neq 0$ , в то время как кривая  $A_2$ , соответствующая  $\varphi_a, X_a^{(2)}$ , определена на множестве  $[-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1] \setminus \{0\}$ . При  $I \neq 0$  также возможны два типа фазовых портретов редуцированной системы (2.8), они приведены на рисунках П4.6, П4.7.

В отличие от предыдущего случая, симметричное решение в данном случае устойчиво при всех  $I \neq 0$ , решение  $A_1$  всегда неустойчиво, а  $A_2$  устойчиво при  $I \in (-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + 1)$  и неустойчиво в противном случае. (Как и выше, имеется в виду устойчивость по отношению к центрально-симметричным возмущениям.) В отличие от предыдущего случая, гамильтониан (2.7) не имеет особенностей в области определения  $X, \varphi$ .

Приведем также фазовые портреты приведенной системы и вид траекторий вихрей при  $n = 2$  для исключительных случаев, указанных выше (2.9) (рис. П4.8). Как было уже отмечено, неподвижные точки приведенной системы (2.8) в этом случае определяют статические конфигурации вихрей. При  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  имеется две статических конфигурации: для одной вихри располагаются в вершинах правильного тетраэдра, а для другой вихри образуют квадрат на большом круге сферы. Траектории вблизи решений  $A_2$  соответствуют движению вихрей по замкнутым кривым вблизи вершин тетраэдра, а траекториям вблизи сингулярностей (точки  $\varphi = 0 \pmod{\pi}, X = 0$  на рис. П4.8) соответствуют движения пар вихрей в противоположных направлениях по замкнутым траекториям вблизи полюсов (рис. П4.10). При  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  имеется лишь одна статическая конфигурация — это квадрат на экваторе сферы. Все вихри двигаются по одинаковым кривым вокруг его вершин, причем во время движения они остаются на одной и той же параллели (рис. П4.11). Соответствующие квадратуры указаны выше (2.10), (2.11).

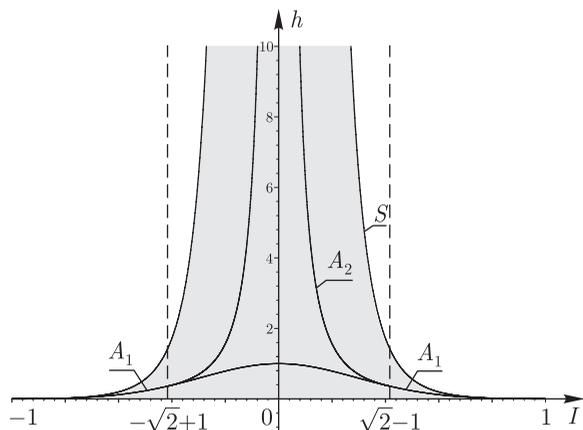


Рис. П4.5. Бифуркационная диаграмма системы при  $n = 2$ ,  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$ . Серым цветом отмечена область возможных значений интегралов  $I, h$ . Кривые  $A_1, A_2$  соответствуют альтернированным относительным равновесиям, а  $S$  — симметричному равновесию.

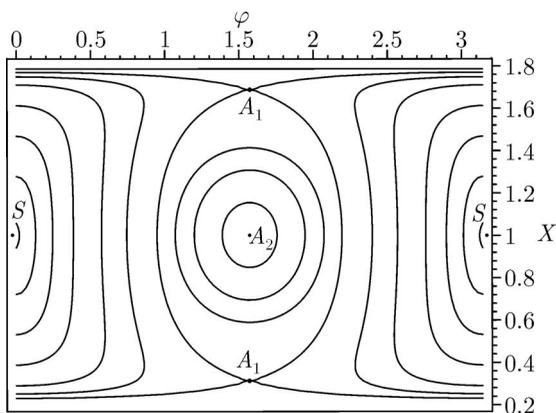


Рис. П4.6. Характерный вид фазового портрета приведенной системы при  $n = 2$ ,  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$  и  $I \in (-\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1) \setminus \{0\}$  ( $I = 0.2$ ).

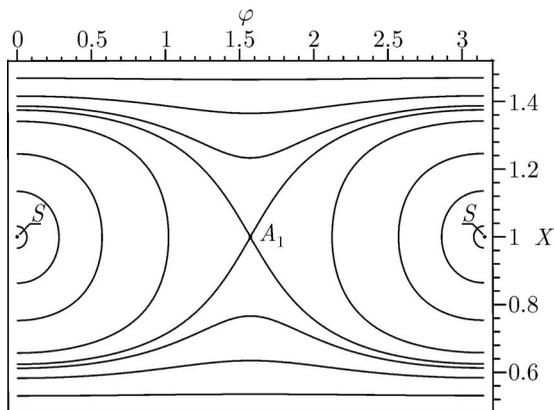


Рис. П4.7. Характерный вид фазового портрета приведенной системы при  $n = 2$ ,  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$  и  $I \in (-1, -\sqrt{2} + 1) \cup (\sqrt{2} - 1, 1)$  ( $I = 0.5$ ).

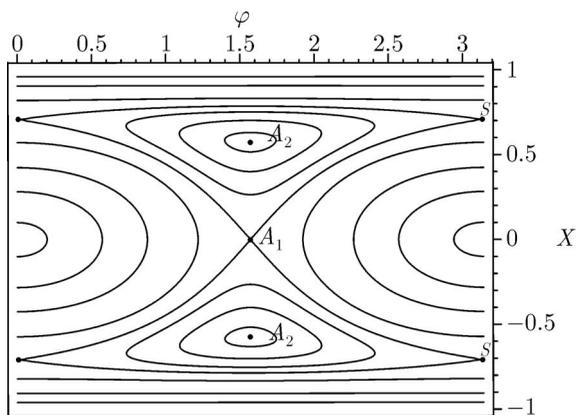


Рис. П4.8. Фазовый портрет приведенной системы при  $n = 2$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$  и исключительном значении  $I = 1$ .

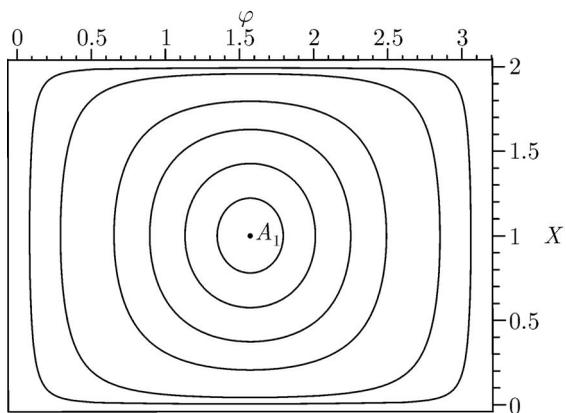


Рис. П4.9. Фазовый портрет приведенной системы при  $n = 2$ ,  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 1$  и исключительном значении  $I = 0$ .

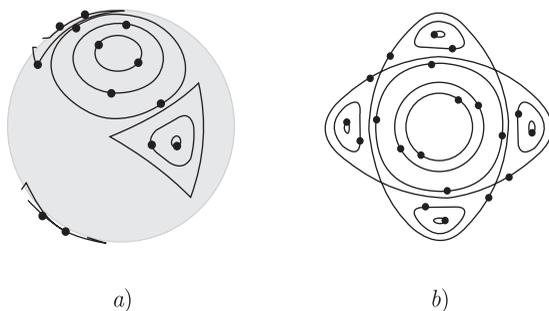
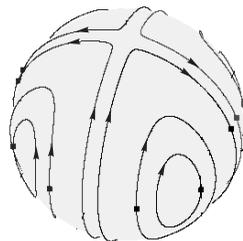


Рис. П4.10. Характерный вид траекторий вихрей в случае  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ,  $I = \Gamma_1$ . а) — общий вид, б) — вид сверху. (Кривые одного и того же размера соответствуют одному и тому же решению приведенной системы (2.8).)

Рис. П4.11. Характерный вид траекторий вихрей при  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ ,  $I = 0$ .



## Литература

- [1] Aref H. *Point vortex motions with a center of symmetry*, Phys. Fluids, 1982, v. 25, № 12, p. 2183–2187.
- [2] Koiller J., Pinto de Carvalho S., Rodrigues da Silva R., Goncalves de Oliveira C. *On Aref's vortex motion with a symmetry center*, Physica D, 1985, v. 16, p. 27–61.
- [3] Горячев Д. Н. *О некоторых случаях движения прямолинейных вихрей*, Университ. типография, 1898.
- [4] Havelock T. H. *The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation*, Phil. Mag., Ser. 7, 1931, v. 11, № 70, p. 617–633.
- [5] Gröbli W. *Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden*, Viertel. d. Naturforsch. Gesellsch. Zürich., 1877, v. 22, S. 37–81, 129–165.
- [6] Greenhill A. G. *Plane vortex motion*, Quart. J. Pure Appl. Math., 1877/78, v. 15, № 58, p. 10–27.
- [7] Laurant-Polz F. *Relative periodic orbits in point vortex systems*, Nonlinearity, 2004, v. 17, p. 1989–2013.
- [8] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*, Ред. журнала РХД, 1998.
- [9] Soulière A., Tokieda T. *Periodic motions of vortices on surfaces with symmetry*, J. Fluid Mech., 2002, v. 460, p. 83–92.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

# Проблема Кельвина и ее решение

Здесь мы приведем в описательной форме известные результаты по устойчивости простейших стационарных (статических) конфигураций точечных вихрей на плоскости — правильных многоугольников. Мы также попытаемся указать именно на первоначальные работы, в которых были получены те или иные результаты. Это связано с тем, что многие из них были получены независимо различными авторами, различными методами. Часть ссылок, имеющаяся в современной литературе, неточна и не дает представление о реальной истории в этой области исследований. При изложении мы во многом будем следовать работам [22, 27].

### 1. Гипотезы Кельвина и опыты Майера

Задача об устойчивости правильных вихревых многоугольников является наиболее ранней проблемой вихревой динамики. Она была поставлена лордом Кельвином (1878) и состоит в определении устойчивости стационарного вращения системы  $n$  одинаковых точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного  $n$ -угольника (полигона). Интерес к этой задаче в наше время возникает в связи с исследованием вихрей в жидком гелии и электронных колонн в физике плазмы. Кельвин поставил вопрос об устойчивости отчасти в связи с его вихревой теорией атома и первым обратил внимание на аналогию этой проблемы с проблемой устойчивости равновесия одинаковых плавающих магнитов, находящихся во внешнем магнитном поле. В серии экспериментов Майер [1, 2, 3] использовал намагниченные иглы, которые он втыкал в пробки и погружал в воду так, чтобы северные полюса всех этих магнитов были направлены вверх. Затем он приближал к этой системе сверху сильный магнит южным полюсом вниз и наблюдал равновесные конфигурации. Результаты опытов показали, что при  $n \leq 5$  магнетики располагаются в вершинах правильного  $n$ -угольника, при  $n \geq 6$  — такой многоугольник неустойчив и возникают другие структуры. Кельвин высоко оценил экспериментальные результаты Майера, хотя

до этого он был интуитивно убежден, что случай  $n = 6$  также является устойчивым. Кельвин объяснил это расхождение неполной аналогией вихрей с магнитами, которая в опыте Майера плохо контролировалась. (Возможно также, что расхождение с теоретическими результатами объясняется дестабилизирующим влиянием границы емкости, в которую наливалась вода.)

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует иметь в виду, что аналогия стационарных конфигураций вихрей со статическими конфигурациями магнитов вообще является очень приближенной. В книге [4] Дж. Дж. Томсон приводит равновесные (устойчивые) конфигурации в опытах Майера (для обоснования своих атомических воззрений), считая, что закон притяжения между магнитами подобен ньютоновскому. Видимо, в экспериментах считалось, что при правильном распределении намагниченности вдоль иголок можно достигнуть различных потенциалов. Экспериментальные выводы Майера следует считать чисто качественными. Отметим также, что качественно структура конфигураций (как устойчивых, так и неустойчивых), видимо, слабо зависит от потенциала.

## 2. Результаты Томсона, Мортон и Хавелока. Линейный анализ

Аналитический расчет собственных значений для полигональных конфигураций имеется в хорошо доступной литературе [5, 6], поэтому здесь мы его не приводим. Отметим, что первым формулы для собственных значений в случаях  $n = 3, 4, 5, 6, 7$  нашел Дж. Дж. Томсон (первооткрыватель электрона), кстати получивший за свои исследования премию Адамса в 1883 г. [7]. Тем не менее, если для случая  $n \leq 6$  он сделал правильный вывод о линейной устойчивости, недостаточное количество удерживаемых значащих цифр привело его к неправильному выводу об экспоненциальной неустойчивости случая  $n = 7$ . Экспоненциальную неустойчивость  $n \geq 8$  он не доказывал, но считал очевидной (она была строго доказана Т. Хавелоком).

Ошибки Томсона исправил У. М. Мортон (1935) [8] (для  $n = 5, 6, 7$ ), Хавелок дал правильное решение в общем случае ( $n \geq 2$ ).

Несмотря на неточности работы Томсона, вращающиеся многоугольники называют также томсоновскими (хотя это название можно связывать и с лордом Кельвином, который также являлся В. Томсоном).

Оказывается, что линейный анализ является достаточным для заключения о действительной (нелинейной) устойчивости в случае  $n \leq 6$ , для  $n = 7$  он недостаточен и необходимо исследовать нелинейные члены.

### 3. Экспериментальные результаты

Опыты Майера стали совершенствоваться вскоре после их проведения. Р. Вуд [9] в 1887 г. исследовал поведение стальных велосипедных шариков, плавающих в плоской чашке со ртутью, расположенной над полюсом магнита. Его методику усовершенствовал Л. Дир [10] в 1909 г. В этих экспериментах случаи  $n = 6, 7$  также оказались неустойчивыми.

В XX веке более точные эксперименты [11, 12], давшие возможность наблюдать движение прямолинейных вихрей во вращающейся камере с жидким гелием, позволили делать вывод об устойчивости  $n = 6$ . Случай  $n = 7$  снова оставался неустойчивым.

Интересны еще более современные опыты [14, 13], проведенные с электронными колоннами, заключенными в ловушку Малмберга – Пеннинга. Эта ловушка использует статические магнитные и электрические поля, чтобы удерживать электроны. В [13] электронная структура захватывалась и измерялись соответствующие времена. Если обозначить через  $T_R$  время одного оборота многоугольника вокруг оси, а через  $T_L$  — время существования конфигурации, то измерения показывают, что  $T_L \sim 1000T_R$  для  $n < 7$ ,  $T_L \sim 300T_R$  для  $n = 7$  и  $T_L \sim T_R$  для  $n = 8, 9, 10$ .

### 4. Нелинейный анализ

Следует заметить, что томсоновские конфигурации при всех  $n$  заведомо неустойчивы по Ляпунову. Если в начальный момент времени возмутить правильный  $n$ -угольник так, чтобы он стал другого размера, то он будет вращаться с другой угловой скоростью и со временем повернут относительно первоначального на угол, который растет со временем. Этому соответствует нулевое двукратное собственное значение и жорданова клетка  $2 \times 2$  матрицы линеаризованной системы. Поэтому устойчивость томсоновской конфигурации следует понимать в смысле устойчивости по Раусу (т. е. при наличии циклических координат).

При  $n = 7$ , как показал Т. Хавелок, нулевое собственное значение становится четырехкратным и для анализа устойчивости необходимо исследовать нелинейные члены. Видимо, первыми работами, в которых проводился нелинейный анализ, были работы Л. Г. Хазина [15, 16], хотя они и оказались ошибочными.

В работе Л. Г. Куракина [17] было показано, что случай  $n \leq 6$  устойчив не только в линейной, но и в нелинейной постановке. В работе Г. Т. Мерца [18] на основе термодинамического принципа свободной энергии была

обоснована нелинейная устойчивость  $n = 7$ . Однако этого анализа недостаточно. Недостаточен также анализ [19, 20]. Полное решение задачи об устойчивости вращения семиугольника имеется в [21]. Оно было получено с применением развитой авторами [21, 22] общей теории стационарных движений динамических систем, обладающих группой симметрий. Любопытно отметить некоторую формальность этого результата, который связан с самим фундаментальным смыслом устойчивости. Дело в том, что доказанная нелинейная устойчивость для  $n = 7$  является очень «хрупкой». Она сразу разрушается, например, круговой границей [23] (которая реально и присутствует в экспериментах), а также кривизной поверхности (например, сферы), по которой движутся вихри [24].

Таким образом, на сегодняшний день проблема Кельвина полностью решена.

В заключение отметим, что устойчивость полигональных конфигураций вихрей в рамках геострофической модели (т. е. вихрей Бесселя) изучена в работах [25, 26].

## Литература

- [1] Mayer A. M. *Experiments with floating magnets* // The American journal of science and arts. Third series. 1878. XV. P. 276–277; Nature. 1878. 17. P. 487–488.
- [2] Mayer A. M. *Note on floating magnets* // The American journal of science and arts. Third series. 1878. XV. P. 477–478.
- [3] Mayer A. M. *Floating magnets*. Ibid. XVI. 1878. P. 247–256.
- [4] Томсон Дж. Дж. *Электричество и материя*. Москва-Ижевск: НИЦ РХД, 2004. 264 с.
- [5] Сэффмэн Ф. Дж. *Динамика вихрей*. М.: Научный мир, 2000. 376 с.
- [6] Aref H. *On the equilibrium and stability of a row of point vortices* // J. Fluid Mech. 1995. 290. P. 167–181.
- [7] Thomson J. J. *On the Motion of Vortex Rings*. London: Macmillan, 1883. P. 94–108.
- [8] Morton W. V. *Vortex polygons* // Proc. R. Irish Acad. 1935. 42. P. 21–29.
- [9] Wood R. W. *Equilibrium-figures formed by floating magnets* // Philos. Mag. Ser. 1898. 5. 46. № 278. P. 162–164.
- [10] Derr L. *A photographic study of Mayer's floating magnets* // Proc. American Acad. 1909. 44. P. 525–528.
- [11] Yarmchuk E., Gordon M. and Packard R. *Observation of stationary vortex array in rotating superfluid helium* // Phys. Rev. Lett. 1979. 43. P. 214.

- [12] Yarmchuk E. and Packard R. *Photographic studies of quantized vortex lines* // J. Low Temp. Phys. 1982. 46. P. 479.
- [13] Durkin D. and Fajans J. *Experiments on two-dimensional vortex patterns* // Physics of fluids. 2000. 12. P. 289.
- [14] Fine K., Cass A., Flynn W. and Dryscoll C. *Relaxation of 2D Turbulence to Vortex Crystal* // Phys. Rev. Lett. 1995. 75. P. 3277.
- [15] Хазин Л. Г. *Правильные многоугольники из точечных вихрей и резонансная неустойчивость стационарных состояний* // ДАН. 1976. Т. 230. № 4. С. 799–802.
- [16] Хазин Л. Г. *Устойчивость положения равновесия гамильтоновых систем при кратных частотах*. В сб.: *Н. Е. Кочин и развитие механики*. М.: Наука. 1984. С. 174–185.
- [17] Куракин Л. Г. *Об устойчивости правильного вихревого  $n$ -угольника* // ДАН. 1994. Т. 335. № 6. С. 729–731.
- [18] Mertz G. T. *Stability of body-centered polygonal configurations of ideal vortices* // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 7. P. 1092–1095.
- [19] Cabral H. E. and Schmidt D. S. *Spectral stability of relative equilibria in the problem of  $N + 1$  vortices* // SIAM J. Math. Anal. 1999. 31. P. 231–250.
- [20] Schmidt D. S. *The stability of the Thomson Heptagon*. Представлена в Труды конференции АСА2002, г. Волос, Греция.
- [21] Куракин Л. Г., Юдович В. И. *О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника* // ДАН. 2002. Т. 384. № 4. С. 476–482.
- [22] Kurakin L. G., Yudovich v. I. *The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon* // Chaos. 2002. V. 12. № 3. P. 574–595.
- [23] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. *Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области*. В кн.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под редакцией А. В. Борисова, И. С. Мамаева и М. А. Соколовского. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 704 с.
- [24] Borisov A. V., Kilin A. A. *Stability of Thomson's configurations of vortices on a sphere* // Reg. & Ch. Dyn. 2000. V. 5. № 2.
- [25] Morikawa G., Swenson E. *Interacting motion of rectilinear geostrophic vortices* // Phys. Fluids. 1971. V. 14. P. 1058–1073.
- [26] Bauer L., Morikawa G. K. *Stability of rectilinear geostrophic vortices in stationary equilibrium*, Phys. of Fluids, 1976, v. 19, № 7, p. 929–942.
- [27] Куракин Л. Г., Юдович В. И. *Устойчивость стационарного вращения правильного вихревого многоугольника*, в сб. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей*, Институт компьютерных исследований, 2003, с. 238–302.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

# Взаимодействие вихрей Кирхгофа и точечных вихрей в идеальной жидкости

### 1. Введение

Простейший пример плоского вихревого движения идеальной жидкости, отличный от модели точечных вихрей, был указан Кирхгофом [2]. Он показал, что вихревое пятно в форме эллипса с полуосями  $a$ ,  $b$ , которое имеет внутри равномерную завихренность  $\omega$ , равномерно вращается вокруг своего центра с угловой скоростью  $\Omega = \frac{\omega\lambda}{(1+\lambda)^2}$ ,  $\lambda = \frac{a}{b}$ . При этом частицы жидкости внутри пятна совершают абсолютное движение с удвоенной угловой скоростью  $2\Omega$  (Ламб, 1932). Лордом Кельвином (1880) и Ловом (1893) было показано, что вихрь Кирхгофа является нейтрально устойчивым тогда и только тогда, когда  $\frac{a}{b} < 3$ .

В 1899 году С. А. Чаплыгин обобщил решение Кирхгофа, добавив в безграничную жидкость, окружающую эллиптический вихрь, равномерную фоновую завихренность (это так называемое простое сдвиговое течение Куэтта (Cuette)). Он получил, что вихрь будет вращаться с переменной угловой скоростью и менять свои очертания (пульсировать) по некоторому закону, который Чаплыгин указал, интегрируя систему двух нелинейных дифференциальных уравнений. Он также подробно исследовал поведение давления в жидкости в зависимости от времени.

Киды (Kida) (1981) [13] и Неу (Neu) (1984) [14] разными способами обобщили решение Чаплыгина, не зная о его работе [6]. (Работы Чаплыгина по многим областям механики плохо известны на Западе; в недавнем историческом обзоре [23] обсуждаются забытые работы Чаплыгина по двумерным вихревым структурам.) Суперпозиция решений Киды и Неу указана в книге [16], приведем здесь это решение более подробно.

Пусть задано внешнее поле скоростей, которое в пространстве с координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  можно представить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \quad (1.1)$$
$$\mathbf{u}_1 = (\gamma_1 x, -\gamma_2 y, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 0, \gamma_3 z), \quad \mathbf{u}_3 = (-\gamma_4 y, \gamma_4 x, 0),$$

при этом из условия несжимаемости получим  $\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0$ . Отметим, что  $u_1$  соответствует полю однородной деформации (которое приближенно индуцируется одним точечным вихрем на большом расстоянии [8, 7]), поле  $u_2$  соответствует растяжению вдоль оси  $z$ , поле  $u_3$  — равномерно-му фоновому вращению. Положим, что в начальный момент завихренность всюду внутри эллиптического цилиндра  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  равна  $\omega_0$ , а вне цилиндра — равна нулю; предполагается, что эллиптическое пятно является сечением цилиндра плоскостью  $z = 0$ . В этом случае эволюция угла поворота пятна  $\theta$  и отношения его полуосей  $\lambda = \frac{a}{b}$  описывается неавтономной гамильтоновой системой вида

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad H(\lambda, \theta) = \ln \frac{(1 + \lambda)^2}{\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\omega(t)} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \sin 2\theta, \quad (1.2)$$

где  $\tau = \omega(t) \left( \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \right) t$  и  $\omega(t) = \omega_0 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)t}$ ,  $\omega_0$  — начальная завихренность в вихре Кирхгофа. При  $\gamma_1 = \gamma_2$  система (1.2) является автономной и интегрируется в квадратурах, ее качественный анализ имеется в [13, 14, 8, 7]. Решение Чаплыгина получается при  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 \neq 0$ ,  $\gamma_3 = 0$ ; решение Киды — при  $\gamma_3 = 0$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$ ; решение Неу — при  $\gamma_4 = 0$ .

Если коэффициенты  $\gamma_i$  в (1.1) являются функциями времени (например, периодическими), то (при  $\gamma_1 = \gamma_2$ ) получается гамильтонова система с полутора степенями свободы с периодическим возмущением. С точки зрения расщепления сепаратрис и возникновения стохастичности она была исследована в [9, 15]. Задача адвекции пассивной частицы жидкости для решения Киды рассмотрена в [22]; исследование сечения Пуанкаре приводит к заключению, что адвекция является хаотической, т. е. имеется лагранжева турбулентность. Устойчивость эллиптического вихря для решения Киды (однородной деформации) изучена в [21].

Наконец, укажем, что в работе [24] получено обобщенное решение Кирхгофа, представляющее собой семейство вложенных софокусных эллиптических вихрей с соответствующим распределением завихренности. В ней также получены условия устойчивости системы из двух софокусных эллиптических вихрей, обобщающие условия Кельвина — Лова.

## 2. Моментная модель взаимодействия вихрей Кирхгофа (динамики вихревых пятен)

Моментная модель второго порядка [4] является следующим по сложности приближением к описанию динамики гидродинамической завихрен-

ности, по сравнению с моделью точечных вихрей. В рамках этой модели рассматриваются эллиптические пятна с заданной величиной завихренности, движущиеся в двумерной идеальной несжимаемой жидкости. Эта теория была предложена Меландером, Забуски и Стычком (МЗС-, или MZS-модель) в работе [4] (см. также [3]); в рамках этой теории в работе [11] анализируется движение двух вихрей Кирхгофа при наличии центральной симметрии. Взаимодействие двух вихревых пятен в отсутствии симметрии рассматривается в [10], где та же моментная модель, описывающая слияние вихрей, сравнивается с псевдоспектральной моделью (в которой решаются уравнения Эйлера со слабой диссипацией).

В основу моментной теории второго порядка, описывающей взаимодействие вихрей Кирхгофа, положены два основных предположения:

- 1) в процессе эволюции расстояние между вихрями существенно превышает размер вихрей, поэтому вихри сохраняют эллиптическую форму;
- 2) в разложении гамильтониана можно пренебречь моментами выше второго порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ. Моментом вихревого пятна  $\alpha$  порядка  $n + m$  относительно его центра завихренности называется величина

$$J_{n,m}^\alpha = \int_{S_\alpha} (x - x_0^\alpha)^n (y - y_0^\alpha)^m dx dy,$$

где  $x_0^\alpha = S_\alpha^{-1} \int_{S_\alpha} x dx$ ,  $y_0^\alpha = S_\alpha^{-1} \int_{S_\alpha} y dy$  — координаты центра завихренности пятна. Моменты второго порядка эллиптического пятна выражаются через отношение осей  $\lambda_\alpha = \frac{a_\alpha}{b_\alpha}$  и угол поворота большой оси  $\varphi_\alpha$  (см. рис. П6.1) по формулам [3]

$$J_{2,0}^\alpha = \frac{S_\alpha^2}{4\pi\lambda_\alpha} (\lambda_\alpha^2 + (1 - \lambda_\alpha^2) \sin^2 \varphi_\alpha), \quad J_{0,2}^\alpha = \frac{S_\alpha^2}{4\pi\lambda_\alpha} (\lambda_\alpha^2 + (1 - \lambda_\alpha^2) \cos^2 \varphi_\alpha),$$

$$J_{1,1}^\alpha = -\frac{S_\alpha^2}{4\pi\lambda_\alpha} (\lambda_\alpha^2 + (1 - \lambda_\alpha^2) \sin^2 2\varphi_\alpha),$$

Более подробно см. [3].

При этих допущениях уравнения движения эллиптических вихрей могут быть представлены в гамильтоновом виде с нелинейной скобкой Пуассона [4]

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \{x_k, H\}, \quad \dot{y}_k = \{y_k, H\}, \quad \dot{\varphi}_k = \{\varphi_k, H\}, \quad \dot{\lambda}_k = \{\lambda_k, H\}, \\ \{x_i, y_j\} &= \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ij}, \quad \{\varphi_i, \lambda_j\} = \frac{8\pi}{\Gamma_i S_i} \frac{\lambda_i^2}{1 - \lambda_i^2} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

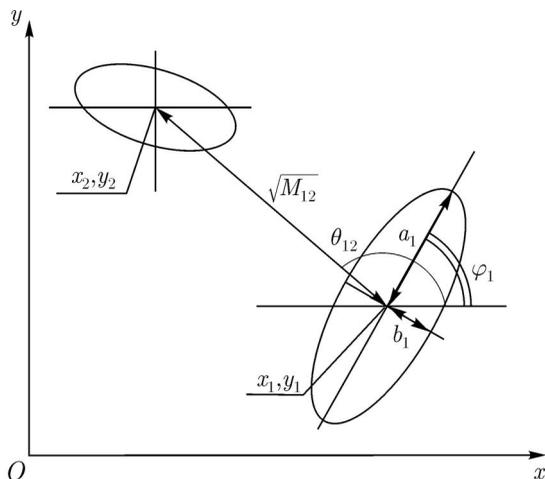


Рис. Пб.1

и гамильтонианом

$$\begin{aligned}
 H &= H_1 + H_2 + H_3, \\
 H_1 &= -\frac{1}{8\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \ln \frac{(1 + \lambda_k)^2}{4\lambda_k}, \quad H_2 = -\frac{1}{8\pi} \sum_{k,p}^{N'} \Gamma_k \Gamma_p \ln M_{kp}, \\
 H_3 &= -\frac{1}{32\pi^2} \sum_{k,p}^{N'} \frac{\Gamma_k \Gamma_p}{M_{kp}} \left( S_p \frac{1 - \lambda_p^2}{\lambda_p} \cos(2(\theta_{kp} - \varphi_p)) + \right. \\
 &\quad \left. + S_k \frac{1 - \lambda_k^2}{\lambda_k} \cos(2(\theta_{kp} - \varphi_k)) \right), \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

где  $\Gamma_k, S_k$  – суммарная интенсивность и площадь эллиптического вихря с номером  $k$ ;  $M_{kp} = (x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2$  – квадрат расстояния между центрами завихренности  $k$ -го и  $p$ -го вихрей,  $\varphi_k$  – угол наклона  $k$ -го эллипса к оси  $x$ ;  $\theta_{kp}$  – угол между осью  $x$  и прямой, соединяющей центры  $k$ -го и  $p$ -го эллипсов (см. рис. Пб.1).

Вследствие теоремы Кельвина о сохранении циркуляции в идеальной среде [17, 18], сохраняются площади каждого эллипса  $S_k = \text{const}$ , которые таким образом являются параметрами рассматриваемой модели.

Составляющие гамильтониана имеют следующий физический смысл:

$H_1$  — описывает действие эллиптического вихря на себя;

$H_2$  — описывает взаимодействие эквивалентных точечных вихрей;

$H_3$  — описывает взаимодействие вихрей, обусловленное учетом моментов второго порядка.

Помимо гамильтониана  $H$ , уравнения (2.1) обладают *некоммутативным* набором первых интегралов

$$Q = \sum_k^N \Gamma_k x_k, \quad P = \sum_k^N \Gamma_k y_k, \quad I = \sum_k^N \Gamma_k \left[ x_k^2 + y_k^2 + \frac{S_k}{4\pi} \frac{1 + \lambda_k^2}{\lambda_k} \right], \quad (2.3)$$

выражающих трансляционную и вращательную инвариантность системы в абсолютном пространстве.

Интегралы  $Q, P, I$  коммутируют следующим образом:

$$\{Q, P\} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i, \quad \{P, I\} = -2Q, \quad \{Q, I\} = 2P, \quad (2.4)$$

их не хватает для интегрируемости даже системы двух вихрей Кирхгофа (система с четырьмя степенями свободы); далее мы редуцируем эту систему к двум степеням свободы. Однако задача о динамике одного вихря Кирхгофа и точечного вихря (система с тремя степенями свободы) является интегрируемой.

В работах Д. Дритчела и Б. Леграса [19, 20] предложена несколько более общая модель взаимодействия эллиптических вихревых пятен. В некотором смысле она является промежуточной между МЗС-моделью и точным описанием, задаваемым методом контурной динамики (в методе контурной динамики эллиптичность пятна уже не сохраняется, а при выводе модели [19, 20] отбрасывается как раз поле скоростей, ответственное за неэллиптическую часть взаимодействия). Однако эта модель является более сложной, и во многих случаях достаточно пользоваться МЗС-моделью.

### 3. Взаимодействие вихря Кирхгофа с $N$ точечными вихрями. Интегрируемый случай при $N = 1$

Обозначим координаты центра эллиптического вихря  $(x_0, y_0)$ , а точечных вихрей  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ; уравнения, описывающие динамику этой

системы, также записываются в гамильтоновой форме со скобкой Пуассона и гамильтонианом вида

$$\begin{aligned} \{x_i, y_i\} &= \Gamma_i^{-1} \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N, \quad \{\varphi, \lambda\} = \frac{8\pi}{\Gamma_0 S} \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}, \\ H &= H_1 + H_2 + H_3, \\ H_1 &= -\frac{1}{8\pi} \Gamma_0^2 \ln \frac{(1 + \lambda)^2}{4\lambda}, \quad H_2 = -\frac{1}{8\pi} \sum'_{k,p=0}^N \Gamma_k \Gamma_p \ln M_{kp}, \\ H_3 &= -\frac{\Gamma_0 S}{16\pi^2} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{M_{k0}} \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} \cos 2(\theta_k - \varphi), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\Gamma_0$  — интенсивность вихря Кирхгофа с отношением полюсов  $\lambda$  и углом  $\varphi$ , определяющим его ориентацию (см. рис. П6.1), а также площадью  $S$ ,  $\theta_k$  — угол между осью  $x$  и прямой, соединяющей центр вихря Кирхгофа с  $k$ -м точечным вихрем,  $M_{kp} = (x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2$ . В дальнейшем, без потери общности, будем полагать, что интенсивность вихря Кирхгофа положительна,  $\Gamma_0 > 0$ .

Интегралы движения, соответствующие группе движений плоскости  $E(2)$ , задаются соотношениями (2.3), в которых необходимо положить  $S_0 = S$ ,  $S_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ; их коммутационные соотношения аналогичны (2.4). Как следствие существования интегралов, получаем [12]:

**Предложение.** Система взаимодействующих вихрей Кирхгофа и одного точечного вихря ( $N = 1$ ) вполне интегрируема.

Это было впервые показано в работе [12] и несколько позже независимо установлено в [5]. Мы здесь приведем геометрический анализ движения вихрей, уточняющий результаты [12].

Для явного интегрирования и качественного анализа выполним приведение к одной степени свободы; рассмотрим новые (относительные) переменные

$$\psi = 2(\theta - \varphi), \quad \rho = \frac{1}{2}c \left( \lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad z = M_{10} = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2, \quad (3.2)$$

где  $c = \frac{\Gamma_0 S}{8\pi}$ . Переменные (3.2) коммутируют с интегралами (2.3), т. е. являются инвариантами группы движений плоскости  $E(2)$ , и замкнуты относительно скобки Пуассона

$$\{\psi, \rho\} = 1, \quad \{\psi, z\} = -4(\Gamma_0^{-1} + \Gamma_1^{-1}), \quad \{\rho, z\} = 0. \quad (3.3)$$

Пуассонова структура (3.3) обладает линейной функцией Казимира

$$D = \Gamma_0 z + 4(1 + \alpha)\rho, \quad \alpha = \Gamma_0^{-1}\Gamma_1. \quad (3.4)$$

Исключая  $z$  с помощью (3.4), получим с точностью до постоянных слагаемых гамильтониан приведенной системы (с одной степенью свободы):

$$H_{\mp} = \frac{\Gamma_0^2}{8\pi} \left( -\ln(c + \rho) - 2\alpha \ln(D - 4(1 + \alpha)\rho) \mp 8\alpha \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{D - 4(1 + \alpha)\rho} \cos \psi \right), \quad (3.5)$$

причем, согласно (3.3), переменные  $\psi, \rho$  канонические.

Различные знаки в гамильтониане (3.5) возникли вследствие неоднозначности обратной замены (3.2) для  $\rho(\lambda)$ , которая имеет вид

$$\lambda = \begin{cases} \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - c^2}}{c}, & 0 < \lambda \leq 1, \\ \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - c^2}}{c}, & \lambda > 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

(верхний знак в (3.5) соответствует случаю  $\lambda < 1$ ).

Аналогично выполняется редукция (на две степени свободы) при произвольном  $N$ . Новые переменные приведенной системы можно выбрать следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_k &= 2(\theta_k - \varphi), \quad \rho = \frac{1}{2}c(\lambda + \lambda^{-1}), \\ M_{ik} &= (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2, \quad i = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

**Качественный анализ относительного движения при  $N = 1$ .** Согласно (3.2), область изменения переменных  $\psi, \rho$  определяется неравенствами

$$\rho \geq c, \quad 0 \leq \psi < 4\pi.$$

Причем согласно (3.6) каждой точке этой полуполосы соответствует пара возможных взаимных расположений эллиптического и точечного вихря, соответствующих  $\lambda < 1$  и  $1 < \lambda$  (см. рис. П6.2).

Можно показать, что соотношение

$$\rho = c, \quad \text{т. е. } \lambda = 1,$$

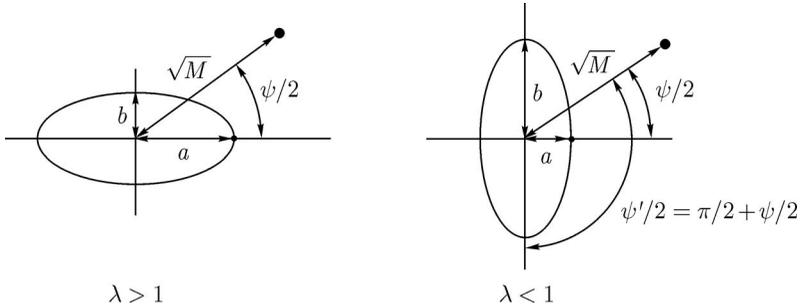


Рис. Пб.2. Взаимное расположение эллиптического и точечного вихрей по отношению к некоторой выделенной точке на контуре эллиптического вихря в случае  $\lambda < 1$  и  $\lambda > 1$ .

соответствует ситуации, когда эллиптический вихрь становится круговым (так называемый вихрь Рэнкина).

Траектории приведенной системы задаются линиями уровня гамильтониана (3.5), следовательно, траектории системы в областях  $\lambda < 1$  и  $\lambda > 1$  получаются при помощи замены

$$\psi \rightarrow \psi + \pi, \quad \rho \rightarrow \rho.$$

Кроме того, гамильтониан (3.5)  $2\pi$ -периодичен по  $\psi$ . Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением линий уровня гамильтониана  $H_-$  в полуполосе

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad c \leq \rho.$$

Выполняя нормировку переменной  $\rho$  и интеграла (3.4)

$$\rho = c\tilde{y}, \quad D = 4c|1 + \alpha|\tilde{D} \tag{3.7}$$

и исключая в (3.5) «несущественные» константы, находим, что траектории системы определяются линиями уровня функции

$$\tilde{H}_- = \begin{cases} -\ln(1 + \tilde{y}) - 2\alpha \ln(\tilde{D} - \tilde{y}) - \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \frac{\sqrt{\tilde{y}^2 - 1}}{\tilde{D} - \tilde{y}} \cos \psi, & 1 + \alpha > 0, \\ -\ln(1 + \tilde{y}) - 2\alpha \ln(\tilde{D} + \tilde{y}) - \frac{2\alpha}{|1 + \alpha|} \frac{\sqrt{\tilde{y}^2 - 1}}{\tilde{D} + \tilde{y}} \cos \psi, & 1 + \alpha < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Согласно [4], уравнения, описывающие динамику вихря Кирхгофа, взаимодействующего с точечным вихрем, справедливы лишь на достаточно большом удалении от вихря Кирхгофа. Не указывая точно область применимости получающихся результатов, определим область, занятую вихрем Кирхгофа. В соответствии с (3.4), (3.7), область, заполненная эллиптическим вихрем, на плоскости  $\psi, \tilde{y}$  определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{D} - \tilde{y} &\leq \frac{2}{1 + \alpha} (\tilde{y} - \sqrt{\tilde{y}^2 - 1} \cos \psi), \quad 1 + \alpha > 0, \\ \tilde{D} + \tilde{y} &\leq \frac{2}{|1 + \alpha|} (\tilde{y} - \sqrt{\tilde{y}^2 - 1} \cos \psi), \quad 1 + \alpha < 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

На рисунках, приводимых ниже, область, занятая вихрем Кирхгофа, заштрихована.

**Устойчивость кругового вихря.** Как было сказано выше (см. п. 1), согласно критерию Кирхгофа–Лова одиночный круговой вихрь (вихрь Рэнкина) является устойчивым. Покажем, что в присутствии точечных вихрей вихрь Рэнкина теряет устойчивость.

Сделаем каноническую замену переменных

$$\tilde{y} = 1 + \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad \psi = \arctg \frac{u}{v}. \quad (3.10)$$

Тогда гамильтониан (3.8) вблизи  $\tilde{y} = 1$  запишется в виде

$$\tilde{H} = \begin{cases} \text{const} - \frac{2\sqrt{2}\alpha}{(1 + \alpha)(\tilde{D} - 1)} v - \frac{1}{2} \frac{\tilde{D} - 1 - 4\alpha}{\tilde{D} - 1} (u^2 + v^2) + \dots, & 1 + \alpha > 0; \\ \text{const} + \frac{2\sqrt{2}\alpha}{(1 + \alpha)(\tilde{D} + 1)} v - \frac{1}{2} \frac{\tilde{D} + 1 + 4\alpha}{\tilde{D} + 1} (u^2 + v^2) + \dots, & 1 + \alpha < 0. \end{cases}$$

Таким образом, после отождествления (3.10) мы получаем, что начало координат  $u = v = 0$  не является неподвижной точкой, т. е. круговой вихрь в присутствии точечного вихря локально неустойчив по отношению к эллиптическим деформациям.

Опишем качественно строение фазового портрета на плоскости  $\psi, \tilde{y}$  при различных значениях параметров  $\alpha, \tilde{D}$ . Из (3.4) и (3.8) следует, что в зависимости от знака величины  $(1 + \alpha)$  меняется фазовое пространство приведенной системы и соответствующие фазовые портреты. Рассмотрим отдельно каждый случай.

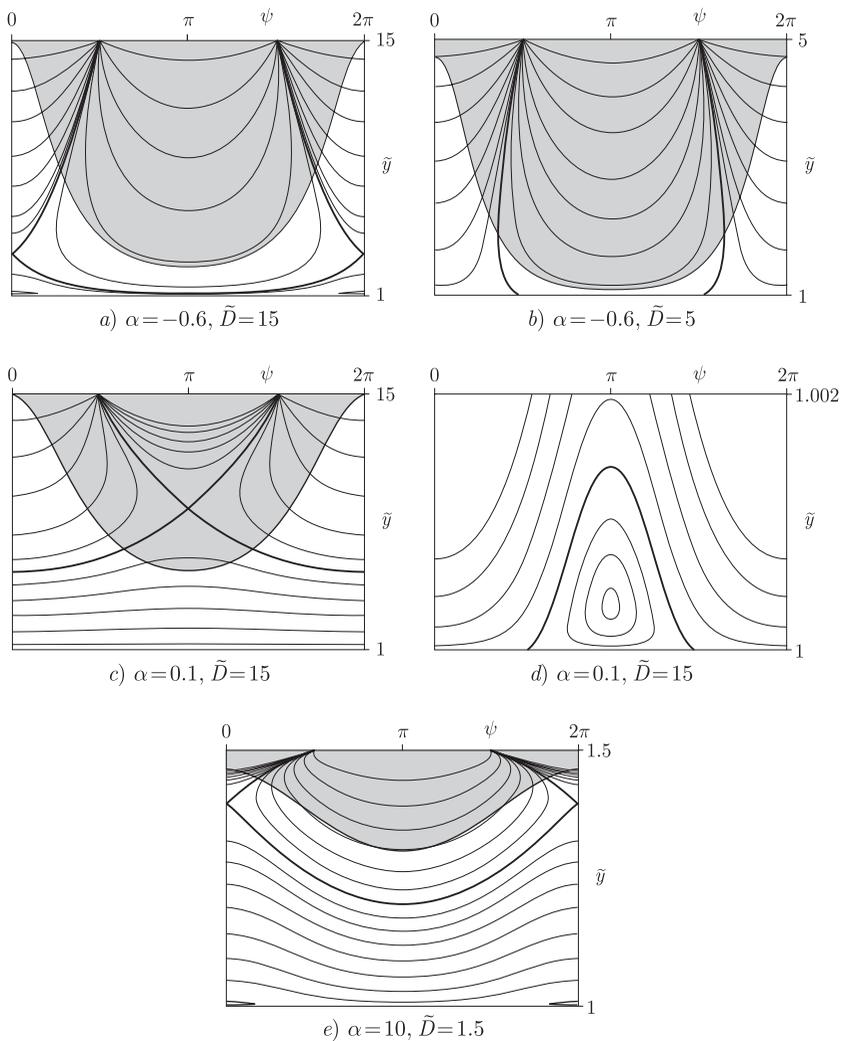


Рис. Пб.3. Фазовые портреты при  $1 + \alpha > 0$  (серым цветом отмечена область, занятая вихрем Кирхгофа). Рисунок *d* – увеличение рисунка *c*) вблизи нижнего отрезка.

**Случай  $1 + \alpha > 0$**  (рис. Пб.3). В этом случае фазовым пространством является прямоугольник на плоскости  $\psi, \tilde{y}$ :

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad 1 \leq \tilde{y} < \tilde{D}. \quad (3.11)$$

Противоположные стороны этого прямоугольника,  $\psi = 0$  и  $\psi = 2\pi$ , отождествляются. Отрезку  $\tilde{y} = 1$  соответствует случай кругового вихря, а  $\tilde{y} = \tilde{D}$  — случай, когда точечный вихрь находится в центре эллиптического. В обоих случаях теряет смысл определение угла  $\psi$  (т. е. это — особенность типа начала координат в полярных координатах). В этом случае фазовое пространство может быть отождествлено с двумерной сферой.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Явный вид отождествления для сферы  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ , вложенной в  $\mathbb{R}^3$ , можно задать, например, следующим образом:

$$\xi_3 = \frac{2\tilde{y} - \tilde{D} - 1}{\tilde{D} - 1}, \quad \xi_1 = \sqrt{1 - \xi_3^2} \cos \psi, \quad \xi_2 = \sqrt{1 - \xi_3^2} \sin \psi. \quad (3.12)$$

Характерный вид фазовых портретов приведен на рисунке Пб.3, при этом выделяются три различных области параметров. Он полностью определяется критическими точками функции Гамильтона (3.8), которые, как следует из (3.8), располагаются на прямых  $\psi = 0$ ,  $\psi = \pi$ . Это соответствует тому, что точечный вихрь располагается на продолжении главных осей эллиптического вихря Кирхгофа.

На каждой прямой  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$  (в невырожденном случае) может быть либо 0, либо 2 критические точки функции (3.8).

В области (3.11) может быть либо 2, либо 0 (невырожденных) критических точек функции (3.8), не лежащих на прямых  $\tilde{y} = 1$ ,  $\tilde{y} = \tilde{D}$ . Обе критические точки лежат либо на прямой  $x = 0$ , либо на прямой  $x = \pi$ . Критическая точка, ближайшая к отрезку  $\tilde{y}$ , всегда соответствует устойчивой неподвижной точке приведенной системы.

В рамках рассматриваемой модели можно сформулировать критерий глобальной устойчивости вихря Кирхгофа при  $1 + \alpha > 0$ :

*если функция Гамильтона имеет критические точки в области (3.11), то вихрь Рэнкина глобально устойчив.*

Действительно, как видно из рисунка Пб.3, в этом случае всегда имеется инвариантная кривая, ограничивающая величину деформации вихря Кирхгофа и препятствующая его слиянию с точечным вихрем.

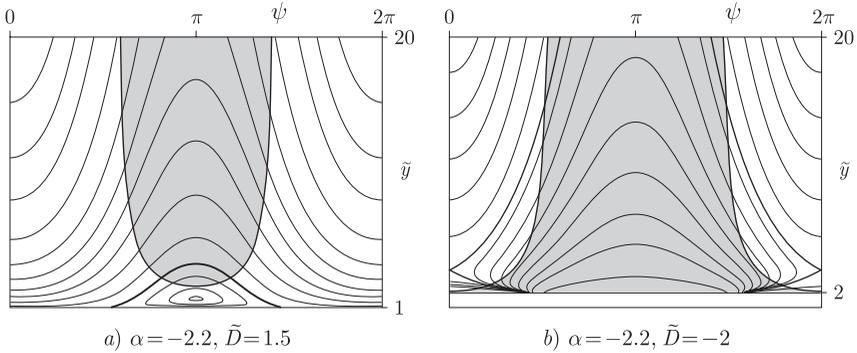


Рис. Пб.4. Фазовые портреты при  $1 + \alpha < 0$  (серым цветом закрашена область, занятая вихрем Кирхгофа).

**Случай  $1 + \alpha < 0$**  (рис. Пб.4). В этом случае область движений на плоскости  $\psi, \tilde{y}$  некомпактна:

$$0 \leq \psi < 2\pi, \quad \tilde{y} \geq \max(1, -\tilde{D}) = \tilde{y}_0.$$

Выполняя (каноническую) замену координат

$$\tilde{y} = \tilde{y}_0 + \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad \psi = \arctg \frac{u}{v},$$

получаем, что фазовым пространством является плоскость  $(u, v)$ , а прямой  $\tilde{y} = \tilde{y}_0$  соответствует начало координат. Как и выше, оно является неустойчивой неподвижной точкой портрета (рис. Пб.4а, б). Строение фазового портрета (вид области, занятой вихрем Кирхгофа) зависит от знака  $\tilde{D}$ .

При  $\tilde{D} > 0$  на прямой  $\psi = \pi$  имеется устойчивое периодическое решение (рис. Пб.4а). При  $\tilde{D} < 0$  имеется неустойчивое периодическое решение при  $\psi = 0$  (рис. Пб.4б).

**Случай  $1 + \alpha = 0$  (вихревая пара).** Замена (3.7) в этом случае не определена, поэтому выполним нормировку

$$\rho = c\tilde{y}, \quad D = 4c\tilde{D} = \Gamma_0 M_{10} = \text{const.} \tag{3.13}$$

Таким образом, в этом случае расстояние между вихрями остается постоянным ( $M_{10} = \text{const}$ ), а меняются лишь взаимное расположение вихрей

и положение полюсов ( $\psi, \tilde{y}$ ). Переменные  $\psi, \tilde{y}$  определены в полуполосе

$$0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 1 < \tilde{y}.$$

В этом случае траектории определяются линиями уровня гамильтониана  $H_-$  в (3.5), который после исключения постоянных можно записать в виде

$$\tilde{H}_- = -\ln(1 + \tilde{y}) + \frac{2}{\tilde{D}} \sqrt{\tilde{y}^2 - 1} \cos \psi. \quad (3.14)$$

Область, занятая эллиптическим вихрем на плоскости переменных, определяется неравенством

$$\tilde{D} \geq 2(\tilde{y} - \sqrt{\tilde{y}^2 - 1} \cos \psi). \quad (3.15)$$

Отсюда следует, что при  $\tilde{D} < 0$  вся плоскость ( $\psi, \tilde{y}$ ) занята эллиптическим вихрем, поэтому будем полагать  $\tilde{D} > 0$ .

При  $\tilde{D} < \tilde{D}_* = \sqrt{22 + 10\sqrt{5}}$  на фазовом портрете отсутствуют периодические решения (рис. Пб.5а).

При  $\tilde{D} > \tilde{D}_*$  на портрете появляются два периодических решения на оси  $\psi = 0$ , одно из них устойчивое, а другое — нет (рис. Пб.5б, в)

#### 4. Взаимодействие двух вихрей Кирхгофа

**Приведение к системе с двумя степенями свободы.** Динамика двух вихрей Кирхгофа описывается гамильтонианом (2.2), который можно представить в форме

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 + H_3, \\ H_1 &= -\frac{\Gamma_1^2}{8\pi} \ln \frac{(1 + \lambda_1)^2}{4\lambda_1} - \frac{\Gamma_2^2}{8\pi} \ln \frac{(1 + \lambda_2)^2}{4\lambda_2}, \\ H_2 &= -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \ln M, \\ H_3 &= -\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{16\pi^2 M} \left( \frac{S_1(1 - \lambda_1^2)}{\lambda_1} \cos 2(\theta - \varphi_1) - \frac{S_2(1 - \lambda_2^2)}{\lambda_2} \cos 2(\theta - \varphi_2) \right), \\ M &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \quad \theta = \theta_{12} = \pi + \theta_{21} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

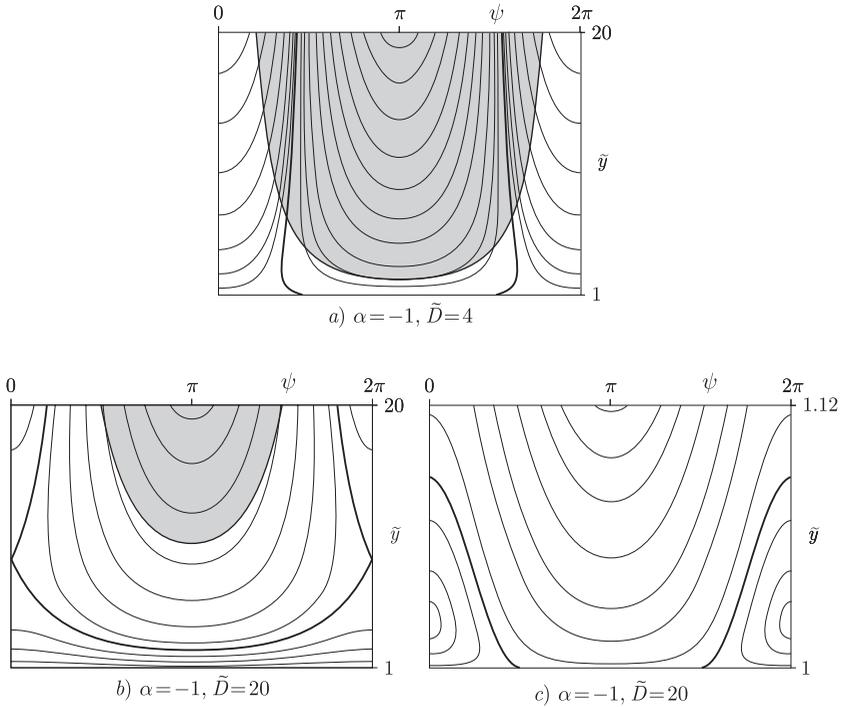


Рис. Пб.5. Фазовый портрет при  $1 + \alpha = 0$  (серым цветом закрашена область, занятая вихрем Кирхгофа). Рисунок *c* — увеличение рисунка *b* вблизи нижнего отрезка.

Частное решение системы (4.1), при котором  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  и вихри во время движения образуют центрально-симметричную конфигурацию, указано и исследовано в [11]. В этой работе указаны условия слияния двух вихревых пятен, которые, как оказывается, в рамках моментной модели эквивалентны условиям коллапса двух вихрей Кирхгофа, при котором их центры совпадают через конечное время.

Рассмотрим систему относительных переменных

$$\psi_i = 2(\theta - \varphi_i), \quad \rho_i = \frac{c_i}{2} \left( \lambda_i + \frac{1}{\lambda_i} \right), \quad c_i = \frac{\Gamma_i S_i}{8\pi} = \text{const}, \quad i = 1, 2; \quad (4.2)$$

$$z = \frac{1}{4}M.$$

Эти переменные коммутируют с интегралами (2.3), замкнуты относительно скобки Пуассона (2.1), их коммутационные соотношения имеют вид

$$\{\psi_i, \rho_i\} = \delta_{ij}, \{\psi_i, z\} = -(\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1}), \{\rho_i, z\} = 0, i, j = 1, 2. \quad (4.3)$$

Пуассонова структура (4.3) обладает линейной функцией Казимира (интегралом движения)

$$D = z + (\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1})(\rho_1 + \rho_2). \quad (4.4)$$

Как следует из (4.3), (4.4), в случае вихревой пары ( $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ ) расстояние между центрами вихрей сохраняется.

Исключая  $z$  с помощью интеграла (4.4) и выражая гамильтониан (4.1) через переменные  $\psi_i, \rho_i$ , получим гамильтониан приведенной канонической системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} H = & -\frac{\Gamma_1^2}{8\pi} \ln(c_1 + \rho_1) - \frac{\Gamma_2^2}{8\pi} \ln(c_2 + \rho_2) - \\ & - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi} \ln(D - (\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1})(\rho_1 + \rho_2)) - \\ & - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi(D - (\Gamma_1^{-1} + \Gamma_2^{-1})(\rho_1 + \rho_2))} \left( \pm \frac{\sqrt{\rho_1^2 - c_1^2}}{\Gamma_1} \cos \psi_1 \mp \frac{\sqrt{\rho_2^2 - c_2^2}}{\Gamma_2} \cos \psi_2 \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где верхний знак соответствует условию  $\lambda_i > 1$ , а нижний  $0 < \lambda_i \leq 1$ , см. (3.6).

**Абсолютное движение.** Укажем уравнения, определяющие положения центров  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  и ориентацию  $\varphi_1, \varphi_2$  двух вихрей Кирхгофа в неподвижном пространстве, если их относительное расположение, определяемое системой (4.5), считается известным:  $\rho_i = \rho_i(t)$ ,  $\psi_i = \psi(t)$ ,  $i = 1, 2$ . Непосредственными вычислениями можно показать, что углы наклона (больших) главных полуосей эллипса определяются квадратурами

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\Gamma_i c_i}{S_i} \frac{\rho_i + \sqrt{\rho_i^2 - c_i^2}}{(\rho_i + c_i + \sqrt{\rho_i^2 - c_i^2})^2} - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2\pi \Gamma_i M} \frac{(\rho_i + \sqrt{\rho_i^2 - c_i^2}) \rho_i \cos \psi_i}{\rho_i^2 - c_i^2 + \rho_i \sqrt{\rho_i^2 - c_i^2}}. \quad (4.6)$$

Если  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ , то положение центров вихрей может быть найдено из системы линейных уравнений с коэффициентами, явно зависящими от

времени:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{Q + \Gamma_2 \Delta x}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad x_2 = \frac{Q - \Gamma_1 \Delta x}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad y_1 = \frac{P + \Gamma_2 \Delta y}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad y_2 = \frac{P - \Gamma_1 \Delta y}{\Gamma_1 + \Gamma_2}; \\
 \Delta \dot{x} &= -\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\pi^2 M^2} \left( \frac{\pi M}{2} \Delta y + \frac{S_1 \sqrt{\rho_1^2 - c_1^2}}{4c_1} (\Delta x \sin \psi_1 + \Delta y \cos \psi_1) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{S_2 \sqrt{\rho_2^2 - c_2^2}}{4c_2} (\Delta x \sin \psi_2 + \Delta y \cos \psi_2) \right); \\
 \Delta \dot{y} &= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{\pi^2 M^2} \left( \frac{\pi M}{2} \Delta x + \frac{S_1 \sqrt{\rho_1^2 - c_1^2}}{4c_1} (\Delta x \cos \psi_1 - \Delta y \sin \psi_1) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{S_2 \sqrt{\rho_2^2 - c_2^2}}{4c_2} (\Delta x \cos \psi_2 - \Delta y \sin \psi_2) \right),
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

где  $\Delta x = x_1 - x_2$ ,  $\Delta y = y_1 - y_2$ ,  $Q, P$  — интегралы (2.3).

**Интегрируемый случай при  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ .** В случае вихревой пары  $\Gamma_1 = -\Gamma_2$  гамильтониан (4.5) распадается на два независимых гамильтониана

$$H = H_1(\psi_1, \rho_1) + H_2(\psi_2, \rho_2),$$

так что система интегрируется методом разделения переменных. Таким образом, получаем новый нетривиальный интегрируемый случай в динамике вихрей. Этот случай интегрируемости впервые был указан нами в обзоре [1]. Как следует из уравнений (4.7), при этом

$$x_1 - x_2 = \text{const}, \quad y_1 - y_2 = \text{const},$$

и, следовательно,  $\theta = \text{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{const}$ . Таким образом, отрезок, соединяющий центры вихрей, сохраняет свою длину и ориентацию во время движения (см. рис. Пб.1).

**Сечение Пуанкаре и интегрируемость.** В общем случае система (4.5) является неинтегрируемой (предположение об этом было высказано в [4]). Об этом свидетельствуют хаотические траектории, построенные при  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  с помощью сечения Пуанкаре (рис. Пб.6). Следует отметить, что для взаимодействия вихрей Кирхгофа существует мало возвращающихся траекторий, что обуславливает сложность численного анализа. На рисунке Пб.7 приведены построенные численно сепаратрисы гиперболической

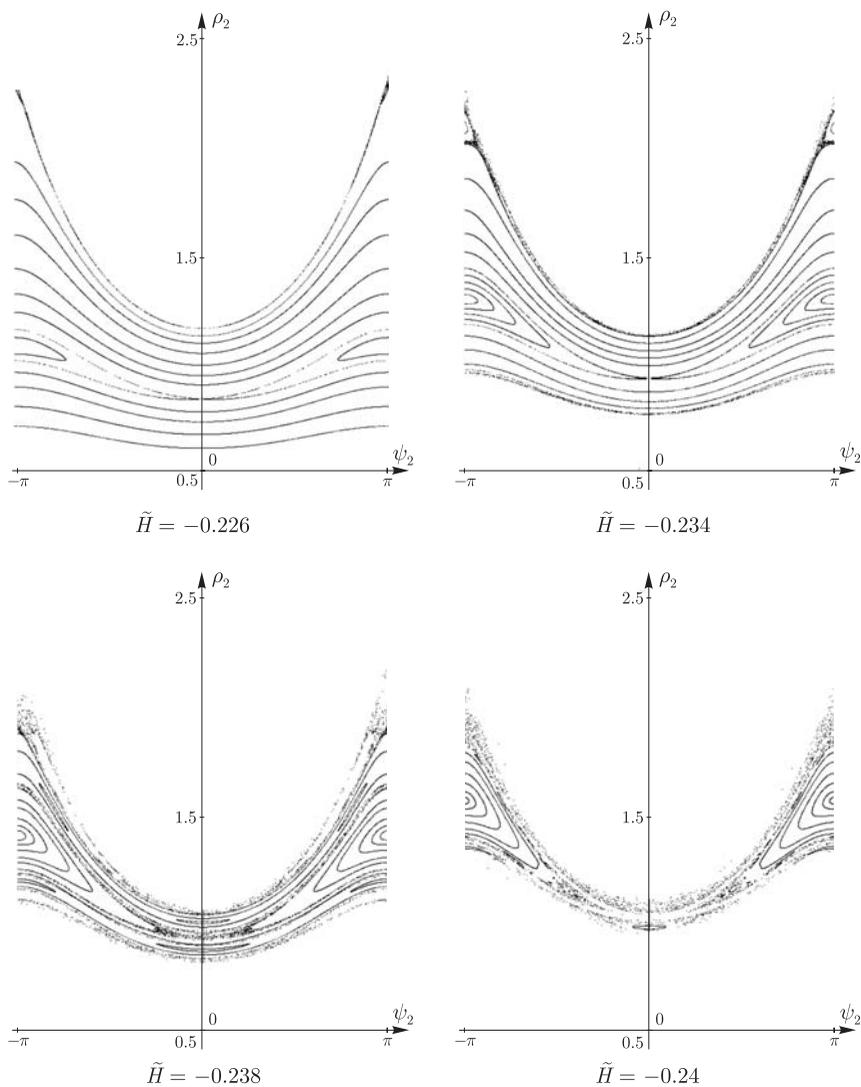


Рис. П6.6. Отображение Пуанкаре для приведенной системы (4.5) в задаче двух эллиптических вихрей. Выбрано сечение плоскостью  $\psi_1 = 0$  при следующих значениях параметров:  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ ,  $S_1 = S_2 = 0.3$  и  $D = 22$ .

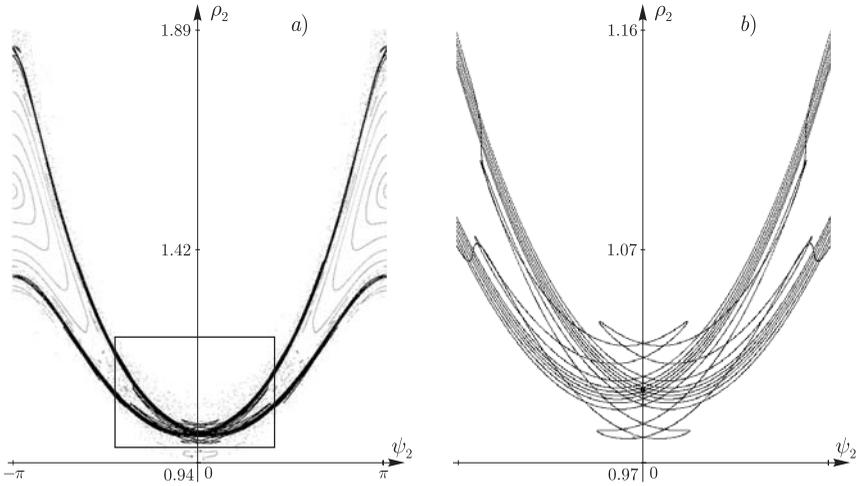


Рис. Пб.7. Сепаратрисы для последнего фазового портрета, приведенного на рис. Пб.6 ( $\tilde{H} = -0.24$ ). Рисунок b — это увеличение центральной части рисунка a.

неподвижной точки отображения Пуанкаре. Их трансверсальное пересечение (устанавливаемое с помощью компьютерного анализа) свидетельствует о неинтегрируемости задачи о движении вихрей Кирхгофа. Аналитически неинтегрируемость в задаче двух вихрей Кирхгофа в рамках моментной модели второго порядка пока не доказана.

## Литература

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур* // В кн.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под редакцией А. В. Борисова, И. С. Мамаева и М. А. Соколовского. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 704 стр.
- [2] Кирхгоф Г. *Механика. Лекции по математической физике*. М.: АН СССР, 1962. Пер. с нем. Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik*, Leipzig. 1874.
- [3] Сэффмэн Ф. Дж. *Динамика вихрей*. М.: Научный мир. 2000. Пер. с англ. Saffman P. G. *Vortex Dynamics*. Camb. Univ. Press, 1992.

- [4] Melander M. V., Zabusky N. J., Styczek A. S. *A moment model for vortex interactions of two-dimensional Euler equation. Part I. Computational validation of Hamiltonian elliptical representation* // J. Fluid. Mech. 1986. V. 167. P. 95–115.
- [5] Riccardi G., Piva R. *The interaction of an elliptical path with a point vortex* // Fluid Dyn. Res. 2000. V. 27. P. 269–289.
- [6] Чаплыгин С. А. *О пульсирующем цилиндрическом вихре*. Собрание сочинений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 138–154.
- [7] Dhanak M. R., Marshall M. P. *Motion of an elliptical vortex under applied periodic strain* // Phys. Fluids, A. 1993. V. 5(5). P. 1224–1230.
- [8] Riccardi G., Piva R. *Motion of an elliptical vortex under rotating strain: condition for asymmetric merging* // Fluid Dyn. Res. 1998. V. 23. P. 63–88.
- [9] Ide K., Wiggins S. *The dynamics of elliptically shaped regions of uniform vorticity in time-periodic, linear external velocity fields* // Fluid Dyn. Res. 1995. V. 15. P. 205–235.
- [10] Melander M. V., Zabusky N. J., McWilliams J. C. *Asymmetric vortex merger in two dimensions: which vortex is «victorious»?* // Phys. Fluids. 1987. V. 30(9). P. 2610–2612.
- [11] Melander M. V., Zabusky N. J., McWilliams J. C. *Symmetric vortex merger in two dimensions: causes and conditions* // J. Fluid Mech. 1988. V. 195. P. 303–340.
- [12] Lebedev V. G. *A qualitative analysis of a joint dynamics of Kirchhoff and a point vortices* // Reg. & Chaot. Dyn. 1999. V. 4. № 3. P. 70–81.
- [13] Kida S. *Motion of an elliptical vortex in a uniform shear flow* // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3517–3520.
- [14] Neu J. *The dynamics of columnar vortex in an imposed strain* // Phys. Fluids. 1984. V. 27(10). P. 2397–2402.
- [15] Bertozzi A. L. *Heteroclinic orbits and chaotic dynamics in planar fluid flows* // SIAM J. Math. Anal. 1988. V. 19(6). P. 1271–1294.
- [16] Newton P. K. *The N-Vortex problem. Analytical Techniques*. Springer, 2001.
- [17] Вилля А. *Теория вихрей*. М.-Л.: ОНТИ, 1936. Пер. с фр. Villat H. *Leçons sur la théorie des tourbillons*. Gauthier-Villars, 1930.

- [18] Ламб Г. *Гидродинамика*. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. Пер. с англ. Lamb H. *Hydrodynamics*. Ed. 6-th., N. Y., Dover publ., 1945.
- [19] Legras B., Dritschel D. *The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics*, I, *The basic state* // Phys. Fluids, A. 1991. V. 3(5). P. 845–854.
- [20] Dritschel D., Legras B. *The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics*, II, *Disturbance equations* // Phys. Fluids, A. 1991. V. 3(5). P. 855–869.
- [21] Dritschel D. G. *The stability of elliptical vortices in an external straining flow*, J. Fluid Mech., 1990, v. 210, p. 223–261.
- [22] Polvani L. M., Wisdom J. *Chaotic Lagrangian trajectories around an elliptical vortex path embedded in a constant and uniform background shear flow*, Phys. Fluids, A, 1990, v. 2(2), p. 123–126.
- [23] Meleshko V. V., van Heijst G. J. I. *On Chaplygin's investigations of two-dimensional vortex structures in an inviscid fluid*, J. Fluid Mech., 1994, v. 272, p. 157–182.
- [24] Polvani L. M., Flierl G. R. *Generalized Kirchhoff vortices*, Phys. Fluids, 1986, V. 29(8), p. 2376–2379.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 7

# Динамика кругового цилиндра, взаимодействующего с точечными вихрями<sup>1</sup>

### 1. Введение

В этом приложении мы рассмотрим задачу о плоскопараллельном движении твердого тела, взаимодействующего с системой точечных вихрей. Укажем сначала на частные случаи этой проблемы, восходящие к классической гидродинамике. Они в основном описаны в книгах [4, 7, 10].

Динамика точечных вихрей (или параллельных вихревых нитей) впервые систематически изучалась Кирхгофом [6], который получил гамильтонову форму уравнения движения и указал возможные первые интегралы. Их оказалось достаточно для полной интегрируемости задачи двух и трех вихрей (явное интегрирование задачи трех вихрей было впервые выполнено В. Грёбли).

Классиками также рассматривались задачи о взаимодействии точечных вихрей с неподвижными твердыми телами при условии выполнения на их границах идеальных условий непротекания. В частности, Гринхиллом [13] была подробно изучена задача о движении двух вихрей внутри круговой области, Т. Хавелок [14] изучал условия устойчивости полигональных стационарных конфигураций вне круговой области. Отметим также исследование Фёпфля относительно обтекания твердого тела при малых числах Рейнольдса, которые сводятся к задаче об устойчивости положения равновесия пары вихрей, помещенных вместе с круговым цилиндром в равномерно набегающий поток жидкости.

Вместе с тем, задача о совместном движении твердого тела и вихрей в безграничном объеме идеальной жидкости тоже является не менее важной

---

<sup>1</sup>Совместно с С. М. Рамодановым. Русскоязычный вариант (с изменениями) статьи *Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices*, DCDS-B, 2005, v. 5, № 1, p. 35–50.

в классической гидродинамики. Действительно, как следует из феноменологических теорий Прандтля [8] и Жуковского, при движении твердого тела в жидкости вследствие отрыва пограничного слоя образуются присоединенные вихри, которые и обуславливают подъемную силу, наблюдаемую при различных аэро- и гидродинамических экспериментах.

Указанная задача в рамках модели идеальной жидкости и выполнении идеальных условий непротекания на границе тело–жидкость также может быть описана методами гамильтоновой механики. В работе [15] рассмотрено взаимодействие кругового цилиндра с единственным точечным вихрем. Для случая нулевого радиуса цилиндра получена приведенная система, которая представляет собой уравнения Гамильтона с одной степенью свободы. Различные формы уравнений движения, описывающие плоское взаимодействие твердого кругового цилиндра и вихрей в идеальной жидкости для плоского случая были недавно и почти одновременно получены в работах [16, 17, 18]. Интегрируемость уравнений движения кругового цилиндра, взаимодействующего с одним точечным вихрем была указана в [11].

Здесь мы дадим качественный анализ этого интегрируемого случая, укажем новый частный случай интегрируемости, а также выполним понижение порядка для простейшей хаотической системы, описывающей движение цилиндра, взаимодействующего с двумя точечными вихрями.

В дальнейшем повсюду в качестве твердого тела мы будем понимать плоскую круговую область, как и в работах [11]. Отметим, что уже в случае эллиптической области уравнения существенно усложняются, эта задача подробнее исследована ниже (см. приложение 8).

## 2. Уравнения движения и их гамильтонова форма

Уравнения движения цилиндра и вихрей относительно неподвижной на плоскости системы координат  $Oxy$  могут быть представлены в следующей форме [16]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= -\mathbf{v} + \text{grad } \tilde{\varphi}_i|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i}, \quad \dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{v}, \\ a\dot{v}_1 &= \lambda v_2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{y}_i - \dot{y}_i), \quad a\dot{v}_2 = -\lambda v_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\dot{x}_i - \dot{x}_i), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{r}_c$  — радиус-вектор центра цилиндра относительно (неподвижного) центра координат  $O$ ,  $\mathbf{v}$  — скорость цилиндра,  $\mathbf{r}_i$  — векторы, соединяющие центр цилиндра с  $i$ -м вихрем, а  $\tilde{\mathbf{r}}_i = \frac{R^2}{\tilde{r}_i} \mathbf{r}_i$  их инверсные образы (см. рис. П7.1).

Здесь  $R$  — радиус цилиндра, постоянный коэффициент  $a$  включает присоединенную массу цилиндра;  $\lambda$ ,  $\lambda_i$  связаны с циркуляциями цилиндра и вихря по формулам  $\lambda = \frac{\Gamma}{2\pi}$ ,  $\lambda_i = \frac{\Gamma_i}{2\pi}$ . Плотность жидкости полагаем равной  $2\pi$ .

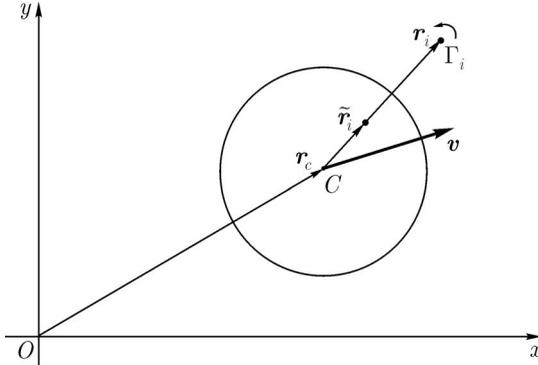


Рис. П7.1

Функция  $\tilde{\varphi}_i(\mathbf{r})$  представляет собой потенциал течения  $\varphi_i(\mathbf{r})$  идеальной жидкости с исключенной особенностью в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ . Потенциал течения вне цилиндра можно представить в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{R^2}{r^2}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \operatorname{arctg} \left( \frac{y - \tilde{y}_i}{x - \tilde{x}_i} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{y - y_i}{x - x_i} \right) \right). \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) выводятся при помощи теоремы об изменении импульса в объеме жидкости внутри контура, охватывающего вихри и цилиндр с учетом предположения о том, что жидкость на бесконечности покоится [16, 18].

Таким образом, задача о движении цилиндра и вихрей в идеальной несжимаемой жидкости сводится к исследованию конечномерной системы дифференциальных уравнений. Несложно показать, что уравнение (2.1) сохраняют стандартную инвариантную меру, т. е. дивергенция правой части (2.1) равна нулю.

Покажем теперь, что (как в классической задаче о движении  $n$  вихрей [6]) система (2.1) также может быть записана в гамильтоновой форме.

**Предложение 1.** Уравнение движения (2.1) можно представить в виде

$$\dot{\zeta}_i = \{\zeta_i, H\} = \sum_k \{\zeta_i, \zeta_k\} \frac{\partial H}{\partial \zeta_k}, \quad (2.3)$$

где  $\zeta_i$  — координаты фазового вектора системы (2.1)  $\zeta = (x_c, y_c, v_1, v_2, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ , а  $H$  — гамильтониан. Причем кососимметрический структурный тензор пуассоновой структуры с компонентами  $J_{ij}(\zeta) = \{\zeta_i, \zeta_j\}$  удовлетворяет тождеству Якоби:

$$\sum_l \left( J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial \zeta_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial \zeta^l} + J_{jl} \frac{\partial J^{ki}}{\partial \zeta^l} \right) = 0 \quad \forall i, j, k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Непосредственным вычислением можно показать, что уравнения движения (2.1) обладают интегралом, подобным интегралу энергии в классической задаче  $n$  вихрей [6]:

$$H = \frac{1}{2} a v^2 + \frac{1}{2} \sum_i \left( \lambda_i^2 \ln(r_i^2 - R^2) - \lambda_i \lambda \ln r_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \ln \frac{R^4 - 2R^2(r_i, r_j) + r_i^2 r_j^2}{|r_i - r_j|^2}. \quad (2.4)$$

Выбрав  $H$  в качестве гамильтониана, подберем кососимметрический тензор  $J_{ij}$  таким образом, чтобы уравнения движения (2.3) совпадали с системой (2.1). Ненулевые компоненты тензора имеют вид

$$\begin{aligned} \{v_1, x_i\} &= \frac{1}{a} \frac{r_i^4 - R^2(x_i^2 - y_i^2)}{r_i^4}, & \{v_1, y_i\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_i y_i}{r_i^4}, \\ \{v_2, x_i\} &= -\frac{1}{a} \frac{2R^2 x_i y_i}{r_i^4}, & \{v_2, y_i\} &= \frac{1}{a} \frac{r_i^4 + R^2(x_i^2 - y_i^2)}{r_i^4}, \\ \{v_1, v_2\} &= \frac{\lambda}{a^2} - \sum_i \frac{\lambda_i}{a^2} \frac{r_i^4 - R^4}{r_i^4}, & \{x_i, y_i\} &= -\frac{1}{\lambda_i}, \\ \{x_c, v_1\} &= \{y_c, v_2\} = a^{-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Непосредственным вычислением проверяется, что скобка (2.5) удовлетворяет тождеству Якоби. ■

Пуассонова структура (2.5) является невырожденной, и, согласно теореме Дарбу, ее можно записать в каноническом виде  $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ . Однако для наших целей этого не требуется.

Задача о гамильтоновости уравнений (2.1), (2.2) в частном случае  $\lambda = -\sum \lambda_i$  независимо изучалась в работе [18] (в этой работе также обсуждаются вопросы устойчивости положения равновесия пары вихрей за цилиндром при поступательном движении твердого тела). В работе [20] показано, что скобка (2.5) эквивалентна указанной в работе [18] при замене переменных вида

$$L_1 = av_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(\tilde{y}_i - y_i), \quad L_2 = av_2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i(\tilde{x}_i - x_i),$$

скобка Пуассона при этом упрощается

$$\begin{aligned} \{x_c, L_1\} &= \{y_c, L_2\} = 1, & \{L_1, L_2\} &= \lambda, \\ \{x_i, y_i\} &= -\lambda_i^{-1}, & i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

(остальные скобки равны нулю).

Гамильтоновость этих уравнений, не очевидная *a priori* и не происходящая из лагранжева формализма, важна для применения хорошо развитой гамильтоновой теории возмущений (в частности — КАМ-теории), методов качественного анализа и пр. Она позволяет также поставить вопрос об интегрируемости системы по теореме Лиувилля и использовать ее геометрическое обобщение, предложенное Арнольдом [1].

### 3. Задача адвекции

Исследование динамики окружающей жидкости при известном движении цилиндра  $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c(t)$  и вихрей  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , составляет задачу адвекции. Как было сказано выше, поле скоростей жидкости имеет потенциал (2.2), следовательно, уравнения движения выделенной частицы жидкости в системе координат, связанной с цилиндром, имеют вид

$$\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v} + \text{grad } \varphi(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)}, \quad \mathbf{r} = (x, y). \quad (3.1)$$

Ясно, что система (3.1) гамильтонова с канонической скобкой Пуассона  $\{x, y\} = 1$  и функцией Гамильтона, явно зависящей от времени (она

соответствует функции тока для потенциала (2.2)),

$$H_a(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{R^2}{r^2} - 1 \right) (v_1(t)y - v_2(t)x) + \frac{1}{2} \lambda \ln r^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i (\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)|^2 - \ln |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_i(t)|^2). \quad (3.2)$$

#### 4. Симметрия и интегралы движения

Уравнения движения (2.1) инвариантны относительно группы движений плоскости  $E(2)$ , следовательно, согласно теореме Нетер для гамильтоновых систем, имеется три интеграла движения.

Первые два интеграла (отвечающие трансляциям) находятся без труда:

$$Q = av_2 + \lambda x_c - \sum \lambda_i (\tilde{x}_i - x_i), \quad P = av_1 - \lambda y_c + \sum \lambda_i (\tilde{y}_i - y_i). \quad (4.1)$$

Интегралы  $Q, P$ , с одной стороны, обобщают интегралы классического импульса системы, а с другой стороны – так называемые интегралы центра завихренности системы вихрей [6, 7]. При  $\lambda \neq 0$  выбором начала координат можно добиться, чтобы  $Q = P = 0$ . Начало отсчета в этом случае также можно интерпретировать как *центр завихренности*.

Третий интеграл, связанный с инвариантностью относительно поворотов, имеет вид

$$I = a(v_1 y_c - v_2 x_c) - \frac{1}{2} \lambda r_c^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{R^2}{r_i^2} - 1 \right) (r_i, r_c). \quad (4.2)$$

В работе [11] дополнительный интеграл был указан для укороченной системы (2.1), из которой исключены уравнения для центра цилиндра; он имеет вид

$$F = a^2 \mathbf{v}^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( 2a \left( 1 - \frac{R^2}{r_i^2} \right) (x_i v_2 - y_i v_1) + (\lambda_i - \lambda) r_i^2 + \lambda_i \frac{R^4}{r_i^2} \right) + \\ + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (r_i, r_j) \left( 1 - \frac{R^2}{r_i^2} \right) \left( 1 - \frac{R^2}{r_j^2} \right). \quad (4.3)$$

Для интегралов  $F$  и  $I, P, Q$  выполнено простое алгебраическое соотношение

$$F = 2\lambda I + P^2 + Q^2 + 2R^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Гамильтоново векторное поле, соответствующее интегралу (4.2), имеет вид

$$\mathbf{X}_I = \{\zeta, I\} = (y_c, -x_c, v_2, -v_1, y_1, -x_1, \dots, y_n, -x_n). \quad (4.4)$$

Скобка Пуассона интегралов  $Q, P, I$  отличается от скобки Ли–Пуассона, задаваемой алгеброй  $e(2)$ , на константу — коцикл [1] и имеет вид

$$\{Q, P\} = \lambda, \quad \{I, Q\} = P, \quad \{I, P\} = -Q. \quad (4.5)$$

Таким образом, при  $\lambda \neq 0$  система (2.1) допускает редукцию на две степени свободы, а в случае  $\lambda = 0$  и  $P = Q = 0$  — на три степени свободы.

**Следствие 1.** *Задача о цилиндре и одном вихре интегрируема по Лиувиллю.*

**Следствие 2.** *Если  $\lambda = 0$  и  $P = Q = 0$ , то задача о цилиндре и двух вихрях интегрируема по Лиувиллю.*

## 5. Комплексная форма уравнений движения и скобка Дирака

В работе [11] использовалась укороченная система, в которой из (2.1) исключено уравнение  $\dot{r}_c = v$ , это соответствует редукции по симметрии на одну степень свободы по интегралам  $Q, P$  (4.1). Эту же редукцию при  $\lambda \neq 0$  можно выполнить и другим способом, непосредственно ограничивая систему на поверхность уровня интегралов (4.1). Для этого запишем уравнения движения при  $\lambda \neq 0$  в системе координат, начало которой находится в центре завихренности (т. е.  $P = Q = 0$ ), и с помощью (4.1) исключим  $v_1, v_2$ . Получим уравнения первого порядка для движения системы вихрей и цилиндра, которые удобно представить в комплексной форме:

$$\begin{aligned} a\dot{z}_c &= av = -i\lambda z_c + i \sum_{j=1}^n \lambda_j (\tilde{z}_j - z_j), \\ \dot{z}_k &= -\bar{v} + \frac{R^2 v}{z_k^2} + i \frac{\lambda}{z_k} - i\lambda_k \frac{1}{z_k - \tilde{z}_k} + \sum_{j \neq k}^n \lambda_j \left( \frac{1}{z_k - z_j} - \frac{1}{z_k - \tilde{z}_j} \right), \quad (5.1) \\ \tilde{z}_k &= \frac{R^2}{\bar{z}_k}, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

где комплексные переменные  $z_c = x_c + iy_c$ ,  $z_k = x_k + iy_k$  определяют положение центра цилиндра и вихрей, а  $v = v_1 + iv_2$  — скорость цилиндра.

Очевидно также, что система (5.1) гамильтонова, ее гамильтониан совпадает с функцией (2.4), в которой необходимо заменить скорость цилиндра с помощью первого из уравнений (5.1)

$$H = \frac{1}{2a} \left( \lambda x_c - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\tilde{x}_i - x_i) \right)^2 + \frac{1}{2a} \left( \lambda y_c - \sum_{i=1}^n \lambda_i (\tilde{y}_i - y_i) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \left( \lambda_i^2 \ln(\mathbf{r}_i^2 - R^2) - \lambda_i \lambda \ln \mathbf{r}_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j \ln \frac{R^4 - 2R^2(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_i^2 \mathbf{r}_j^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}. \quad (5.2)$$

Скобка Пуассона системы (5.1) получается при помощи редукции Дирака [12] на многообразии  $Q = P = 0$  и имеет вид

$$\{x_c, y_c\} = \frac{1}{\lambda}, \quad \{x_i, y_i\} = -\frac{1}{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

То есть при  $\lambda \neq 0$  цилиндр можно рассматривать как некоторый сложный специфический вихрь, а уравнения (5.1) описывают динамику  $(n + 1)$  вихрей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Скобка Дирака  $\{\cdot; \cdot\}_D$  на некотором подмногообразии  $\mathcal{N}_c$ , заданном как совместная поверхность уровня функций  $f_i(\zeta) = c_i$ ,  $c_i = \text{const}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , определяется формулой

$$\{g, h\}_D = \{g, h\} + \sum_{ij} \{g, f_i\} c_{ij} \{h, f_j\},$$

где  $\|c_{ij}\| = \|\{f_i, f_j\}\|^{-1}$ , а  $\{\cdot, \cdot\}$  — исходная скобка Пуассона. В нашем случае это соотношение принимает вид

$$\{g, h\}_D = \{g, h\} - \frac{1}{\lambda} (\{g, Q\}\{h, P\} - \{g, P\}\{h, Q\}),$$

где  $\{\cdot, \cdot\}$  — первоначальная скобка (2.5).

Система (5.1) инвариантна относительно поворотов вокруг начала координат (центра завихренности) и, следовательно, допускает дополнительный интеграл, который имеет вид

$$I = \lambda r_c^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i r_i^2. \quad (5.4)$$

Он получается из интеграла (4.2) после исключения  $v_1, v_2$  с помощью интегралов (4.1).

В качестве простых следствий укажем некоторые свойства движения, которые аналогичны приведенным в работе [19].

**Предложение 2.** *Если интенсивности вихрей имеют один и тот же знак и  $\lambda\lambda_i < 0$ , то траектории цилиндра и вихря расположены в ограниченной области на плоскости.*

**Предложение 3.** *Если  $\lambda \neq 0$  и относительное движение всех вихрей ограничено (т. е.  $\forall i |\mathbf{r}_i(t)|$  ограничены), то абсолютное движение цилиндра также ограничено.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Интересно отметить, что при  $n = 1$ ,  $\lambda \neq 0$  верно более сильное утверждение: абсолютное движение цилиндра ограничено тогда и только тогда, когда ограничено относительное движение вихря. Как показывают численные эксперименты, уже в случае  $n = 2$  это утверждение неверно: на рисунке П7.2 показаны траектории центра цилиндра и вихрей при  $\lambda_1 = -\lambda_2$ ,  $|\lambda| < |\lambda_1|$ . Вихри, как и следовало ожидать, уходят на бесконечность по параллельным прямым, цилиндр при этом движется по кривой, близкой к окружности.

## 6. Движение цилиндра и одного вихря

**Интегрируемость уравнений движения. Редукция к одной степени свободы.** Рассмотрим случай  $n = 1$ , т. е. совместное движение вихря и цилиндра. Обозначим  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} = (x_1, y_1)$ . Первые интегралы системы (4.1), (4.2) позволяют проинтегрировать систему в квадратурах. Используя их, можно понизить порядок системы до одной степени свободы. Эта редукция близка приведению по Раусу, но проводится в алгебраической форме. Выполним ее в явном виде.

В качестве переменных приведенной системы следует выбрать интегралы поля симметрий  $\mathbf{X}_I$  (4.4) (см., например, [2]). Например,

$$p_1 = a(x_1 v_1 + y_1 v_2), \quad p_2 = a(x_1 v_2 - y_1 v_1), \quad \rho = x_1^2 + y_1^2. \quad (6.1)$$

Скобки Пуассона между этими переменными следующие:

$$\begin{aligned} \{p_1, p_2\} &= (\lambda - \lambda_1)\rho + \frac{1}{\lambda_1}(p_1^2 + (p_2 - \lambda_1 R^2)^2), \\ \{p_1, \rho\} &= 2\rho + \frac{2}{\lambda_1}(p_2 - \lambda_1 R^2), \quad \{p_2, \rho\} = -2\frac{p_1}{\lambda_1}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

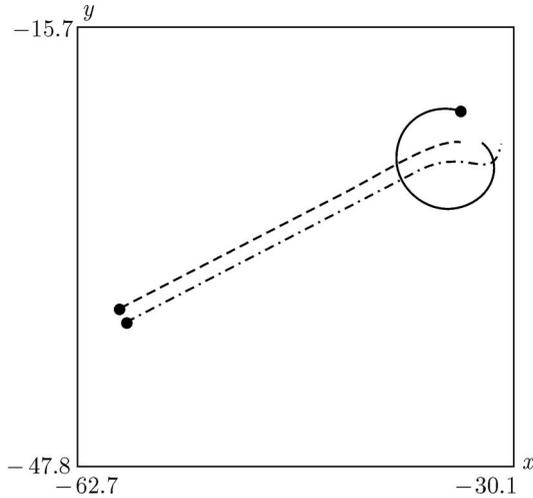


Рис. П7.2. Пример абсолютного движения цилиндра (сплошная линия) и пары вихрей ( $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ );  $a = 20$ ,  $\Gamma = 8$ ,  $\Gamma_1 = 10$ ,  $R = 1$ ,  $F = 2$ ; начальные данные (в связанной с цилиндром системе координат):  $v_1(0) = 0$ ,  $v_2(0) = 0$ ,  $x_1(0) = -3$ ,  $y_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 3$ ,  $y_2(0) = 0$ .

В новых переменных (6.1) первые интегралы (2.4), (4.3) примут вид

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2a\rho} + \frac{1}{2}\lambda_1^2 \ln(\rho - R^2) - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda \ln \rho, \quad (6.3)$$

$$F = \frac{p_1^2 + p_2^2}{\rho} + 2\lambda_1 \left(1 - \frac{R^2}{\rho}\right) p_2 + \lambda_1^2 \left(\rho + \frac{R^4}{\rho}\right) - \lambda\lambda_1\rho. \quad (6.4)$$

Пуассонова структура (6.2) является вырожденной, ее ранг равен двум, и поэтому соответствующая приведенная система имеет одну степень свободы. Для ее явного получения необходимо исключить одну переменную из набора  $(p_1, p_2, \rho)$ , используя интеграл (6.4), являющийся функцией Казимира структуры (6.2).

В традиционном подходе [1] требуется на двумерной поверхности уровня функции Казимира (симплектическом листе) ввести канонические переменные ( $\{q, p\} = 1$ ), представляя приведенную систему в обычной форме

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Мы же используем параметризацию симплектического листа переменными, которые учитывают его геометрию, но не являются каноническими. Такой подход позволяет получить достаточно наглядные фазовые портреты. Можно построить достаточно простую систему канонических переменных, используя уравнения движения в форме (5.1).

**Общие свойства движения.** Приведенная система (6.2) описывает взаимное движение цилиндра и вихря; прежде чем выполнить ее полный качественный анализ, укажем некоторые свойства абсолютного движения, которые следуют из возможности такого приведения и анализа квадратур абсолютного движения.

**Предложение 4.** *Абсолютное движение цилиндра ограничено, кроме, возможно, двух случаев:*

- 1)  $\lambda = \lambda_1$ ;
- 2)  $\lambda = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (1) соответствует случаю, когда циркуляция жидкости вокруг цилиндра равна нулю, а условие (2) — случаю, когда равна нулю циркуляция по замкнутому контуру, охватывающему вихрь и цилиндр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Предположим противное:  $\lambda \neq \lambda_1$  и  $\lambda \neq 0$ , но движение цилиндра не является ограниченным. Тогда, согласно предложениям 2 и 3,  $\rho$  — неограниченная функция времени и  $\lambda\lambda_1 > 0$ . Разделив (6.4) на  $\rho$ , получим

$$\left(\lambda_1 + \frac{p_2}{\rho} - \frac{\lambda_1 R^2}{\rho}\right)^2 + \frac{p_1^2}{\rho^2} - \left(\lambda\lambda_1 - \frac{2\lambda_1^2 R^2 - F}{\rho}\right) = 0. \quad (6.5)$$

Отсюда заключаем, что  $\frac{p_1}{\rho}$  и  $\frac{p_2}{\rho}$  ограничены и, более того,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[ \left(\lambda_1 + \frac{p_2}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{p_1}{\rho}\right)^2 \right] = \lambda\lambda_1.$$

Параметризуем соотношение (6.5) при больших значениях  $\rho$ , используя некоторую угловую переменную  $\beta$ , находим

$$\frac{p_1}{\rho} = \sqrt{\lambda\lambda_1} \sin \beta + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \frac{p_2}{\rho} = -\lambda_1 + \sqrt{\lambda\lambda_1} \cos \beta + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Подставив эти выражения в (6.3), получим

$$H = \frac{\rho}{2a}k + \frac{\lambda_1}{2} \ln \frac{(\rho - R^2)^{\lambda_1}}{\rho^\lambda} + O(1).$$

Второе слагаемое в правой части имеет порядок  $O(\ln \rho)$ , коэффициент  $k$  отделен от нуля  $k = (\lambda_1 - \sqrt{\lambda_1 \lambda})^2 + 2\lambda_1(\sqrt{\lambda_1 \lambda} - \sqrt{\lambda_1 \lambda} \cos \beta) > k_1 = \text{const} > 0$ . Такое асимптотическое поведение противоречит условию сохранения интеграла  $H$ , следовательно  $\rho$  ограничено. Предложение доказано. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При  $\lambda = \lambda_1$  или  $\lambda = 0$ , как легко видеть, всегда существует неограниченная траектория; таким образом, доказанное предположение представляет собой критерий ограниченности абсолютного движения. Аналогичный критерий, видимо, справедлив для задачи взаимодействия цилиндра с произвольными числом вихрей. Но это пока не доказано.

Приведем еще одно любопытное утверждение, позволяющее дать красивую геометро-динамическую интерпретацию абсолютного движения и выполнить его классификацию.

**Теорема.** Пусть  $\lambda \neq 0$ . Тогда для всякого периодического решения приведенной системы (6.1) существует такая система координат, равномерно вращающаяся вокруг центра завихренности, в которой все вихри и центр цилиндра движутся по замкнутым кривым.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Из уравнений (5.1) находим

$$y_c x_1 - x_c y_1 = \frac{p_1}{\lambda}, \quad y_c y_1 + x_c x_1 = -\frac{p_2}{\lambda} + \frac{\lambda_1}{\lambda}(R^2 - \rho). \quad (6.6)$$

По условию, правые части этой линейной системы есть периодические функции с периодом  $T$ . Отсюда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — некоторые  $T$ -периодические функции. Подставляя найденные выражения в (5.1), получим

$$a\dot{x}_c = \lambda y_c - y_c G_2 + x_c G_1, \quad a\dot{y}_c = -\lambda x_c + y_c G_1 + x_c G_2, \quad (6.8)$$

где  $G_1$  и  $G_2$  — также  $T$ -периодические функции. Пусть  $\mathbf{A}$  — матрица правой части системы (6.8). Несложно убедиться, что матрица  $\mathbf{A}$  коммутирует со

своим интегралом  $\mathbf{A} \cdot \int_0^t \mathbf{A} dt = \int_0^t \mathbf{A} dt \cdot \mathbf{A}$ , поэтому (см., например, [5]) фундаментальная матрица  $\mathbf{X}$  системы (6.8) имеет вид

$$\mathbf{X} = e^{\int_0^t \mathbf{A} dt}.$$

Представим матрицу  $\mathbf{A}$  в виде суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 & \lambda - \langle G_2 \rangle \\ -\lambda + \langle G_2 \rangle & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} G_1 & -G_2 + \langle G_2 \rangle \\ G_2 - \langle G_2 \rangle & G_1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что  $\langle G_1 \rangle = 0$ , ибо в противном случае решения системы (6.8) были бы неограниченны, что противоречит предложению 3. В силу того, что матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  коммутируют, можем записать

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\lambda - \langle G_2 \rangle}{a} t & \sin \frac{\lambda - \langle G_2 \rangle}{a} t \\ -\sin \frac{\lambda - \langle G_2 \rangle}{a} t & \cos \frac{\lambda - \langle G_2 \rangle}{a} t \end{pmatrix} \cdot \mathbf{G}.$$

Здесь  $\mathbf{G}$  —  $T$ -периодическая матрица. Таким образом, во вращающейся со скоростью  $(\lambda - \langle G_2 \rangle)/a$  системе координат с центром в центре завихренности цилиндр движется вдоль некоторой замкнутой кривой. Покажем, что вихрь в этой системе координат также движется по замкнутой кривой. Пусть  $x^*, y^*$  — координаты вихря в абсолютном пространстве, тогда  $x^* = x_c + x_1$ ,  $y^* = y_c + y_1$ . Из (6.7) находим

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = (\mathbf{\Phi} + \mathbf{E}) \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\lambda - \langle G_2 \rangle}{a} t & \sin \frac{\lambda - \langle G_2 \rangle}{a} t \\ -\sin \frac{\lambda - \langle G_2 \rangle}{a} t & \cos \frac{\lambda - \langle G_2 \rangle}{a} t \end{pmatrix} (\mathbf{\Phi} + \mathbf{E}) \mathbf{G} \begin{pmatrix} x_c(0) \\ y_c(0) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{E}$  — единичная матрица, матрица  $(\mathbf{\Phi} + \mathbf{E})\mathbf{G}$  является  $T$ -периодической. ■

На рисунках П7.3а и П7.3б показано одно и то же движение цилиндра и вихря в неподвижной и вращающейся системе координат, начало которой расположено в центре завихренности. Траектория центра цилиндра изображена сплошной линией, а вихря — пунктиром. Центр находится в точке  $O$ .

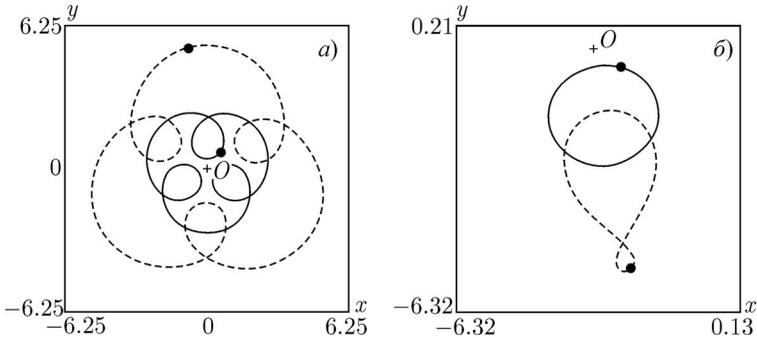


Рис. П7.3. *а*) Пример абсолютного движения цилиндра (сплошная линия) и вихря, когда частоты движения соизмеримы.  $a = 6$ ,  $\Gamma = -3$ ,  $\Gamma_1 = 1$ ,  $R = 1$ ,  $F = 2$ ; начальные данные (в связанной с цилиндром системе координат):  $v_1(0) = 0.24$ ,  $v_2(0) = 0$ ,  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1.31$ . *б*) Так выглядят траектории цилиндра и вихря, приведенные на рисунке *а*, во вращающейся с угловой скоростью 0.029 системе координат, начало которой находится в центре завихренности (символ + на рисунке).

Рассматриваемое движение цилиндра и вихря получено при следующих значениях физических параметров:  $a = 6$ ,  $\Gamma = -3$ ,  $\Gamma_1 = 1$ ,  $R = 1$ ,  $F = 2$ ; начальные данные (в связанной с цилиндром системе координат) суть  $v_1(0) = 0.24$ ,  $v_2(0) = 0$ ,  $x_1(0) = 0$ ,  $y_1(0) = 1.31$ .

**Качественный анализ приведенной системы.** Структура симплектического листа пуассоновой структуры (6.2) (т. е. фазового пространства приведенной системы), задаваемого соотношением (6.4), определяется величиной  $\lambda\lambda_1$ . Симплектический лист компактен, если  $\lambda\lambda_1 < 0$ , и некомпактен, если  $\lambda\lambda_1 > 0$  или  $\lambda = 0$ . Рассмотрим эти случаи по отдельности.

**1. Компактный случай ( $\lambda\lambda_1 < 0$ ).** Из (6.4) находим

$$(\lambda_1\rho + p_2 - \lambda_1 R^2)^2 + p_1^2 + \left(\sqrt{-\lambda\lambda_1}\rho + K\right)^2 = K^2, \quad K = \frac{2\lambda_1^2 R^2 - F}{2\sqrt{-\lambda\lambda_1}}. \tag{6.9}$$

Симплектический лист диффеоморфен двумерной сфере. Движение возможно, если величина интеграла  $F$  удовлетворяет условию  $F \geq 2\lambda_1 R^2(\lambda_1 - \lambda)$ . Из условия компактности, в частности, следует, что  $\rho$  — ограниченная величина, т. е. цилиндр и вихрь не могут разойтись на сколь угодно большое расстояние. При этом, в силу предложения 3, движение цилиндра в абсолютном пространстве также оказывается ограниченным.

На листе введем координаты  $\varphi$  и  $\psi$  по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_1 \rho + p_2 - \lambda_1 R^2 &= K \cos \varphi \cos \psi, & p_1 &= K \sin \varphi \cos \psi, \\ \rho \sqrt{-\lambda \lambda_1} + K &= K \sin \psi, & \psi &\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \varphi \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Область определения переменной  $\psi$  при заданном  $K = \text{const}$  определяется очевидным соотношением  $\rho = \frac{K(\sin \psi - 1)}{\sqrt{-\lambda \lambda_1}} > R^2$ .

Для поиска стационарных решений приведенной системы запишем явно дифференциальные уравнения для  $p_1$ ,  $p_2$  и  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 = \{p_1, H\} &= \frac{\lambda_1 R^4 \lambda a \rho - 2R^2 \lambda_1 \lambda a \rho^2 - \lambda_1^2 a \rho^3 + \lambda_1^2 R^2 a \rho^2 + \lambda_1 \lambda a \rho^3}{\rho^2 a(-\rho + R^2)} + \\ &+ \frac{(-R^4 \lambda_1 \rho + \lambda a \rho^2 + R^6 \lambda_1 - \lambda_1 R^2 \rho^2 - \lambda R^2 a \rho + \lambda R^2 \rho^2 - \lambda_1 a \rho^2 + \lambda_1 \rho^3 - \lambda \rho^3) p_2}{\rho^2 a(-\rho + R^2)} + \\ &+ \frac{(\rho^2 - R^4) p_2^2 + (\rho^2 - 2R^2 \rho + R^4) p_1^2}{\rho^2 a(-\rho + R^2)}, \\ \dot{p}_2 = \{p_2, H\} &= \frac{(\lambda \rho^3 - \lambda_1 \rho^3 + \lambda R^2 a \rho - R^6 \lambda_1 + \lambda_1 a \rho^2 - \lambda a \rho^2 - \lambda R^2 \rho^2 + \lambda_1 R^2 \rho^2 + R^4 \lambda_1 \rho) p_1}{\rho^2 a(-\rho + R^2)} + \\ &+ \frac{(-2R^2 \rho + 2R^4) p_2 p_1}{\rho^2 a(-\rho + R^2)}, \\ \dot{\rho} = \{\rho, H\} &= \frac{(-2\rho + 2R^2) p_1}{a \rho}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Из последнего уравнения находим  $p_1 = 0$ , при этом правая часть второго уравнения также обращается в ноль. Следовательно, на фазовом портрете все стационарные точки лежат на прямых  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm \pi$ . Для нахождения  $p_2$  и  $\rho$  имеем два уравнения второй степени относительно  $p_2$ : следует приравнять к нулю правую часть первого уравнения системы (6.11), а также воспользоваться соотношением (6.9). Количество стационарных решений изменяется в зависимости от  $F$ .

Система (6.11) инвариантна при замене  $(p_1, p_2, \rho, t, \lambda, \lambda_1) \rightarrow (-p_1, -p_2, \rho, -t, -\lambda, -\lambda_1)$ . Такой замене, согласно (6.10), отвечает замена  $(\varphi, \psi, \lambda, \lambda_1) \rightarrow (\varphi + \pi, \psi, -\lambda, -\lambda_1)$ . Следовательно, при изменении знака интенсивности вихря и циркуляции фазовые траектории смещаются на величину  $\pi$  вдоль оси  $\varphi$ . Таким образом, при изучении поведения фазовых траекторий можно ограничиться случаем  $\lambda < 0$ ,  $\lambda_1 > 0$ .

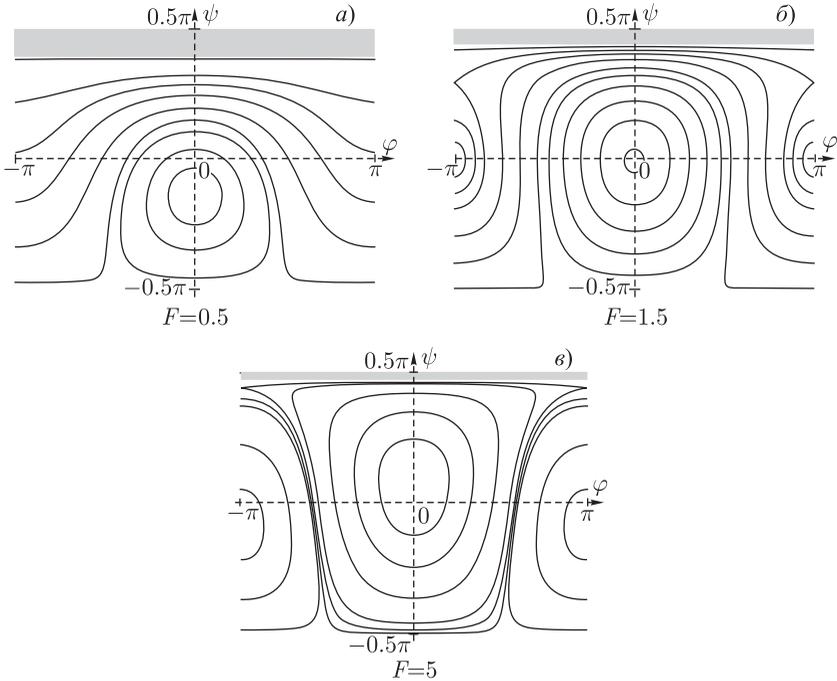


Рис. П7.4. Фазовые портреты приведенной системы в компактном случае ( $\lambda\lambda_1 < 0$ ):  $a = 20$ ,  $\Gamma = -1$ ,  $\Gamma_1 = 0.5$ ,  $R = 1$ .

Фазовые портреты при различных  $F$  (остальные параметры фиксированы:  $a = 20$ ,  $\Gamma = -1$ ,  $\Gamma_1 = 0.5$ ,  $R = 1$ ) изображены на рисунках П7.4а, П7.4б и П7.4в. Серым указана нефизическая область, где  $\rho \leq R^2$ .

Траектории приведенной системы — линии уровня интеграла энергии (6.3) на поверхности (6.4). Эти линии являются замкнутыми, следовательно, движения приведенной системы — периодические.

Стационарным точкам отвечает движение, при котором вихрь и цилиндр равномерно движутся по концентрическим окружностям. Например, неподвижной эллиптической точке на рисунке П7.4 соответствует такое движение, при котором вихрь и цилиндр находятся по разные стороны от центра завихренности (рис. П7.5). С увеличением  $F$  появляются еще две неподвижные точки; каждой из этих точек соответствует движение, при котором вихрь и цилиндр находятся по одну сторону от центра завихренности (рис. П7.6).

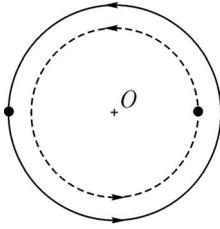


Рис. П7.5

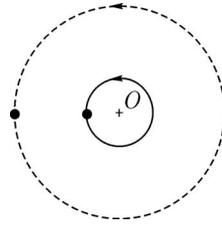


Рис. П7.6

**2. Некомпактный случай** ( $\lambda\lambda_1 > 0$ ). Из (6.5):

$$(\lambda_1\rho + p_2 - \lambda_1 R^2)^2 + p_1^2 - \left(\sqrt{\lambda\lambda_1}\rho - K\right)^2 = -K^2, \quad K = \frac{2\lambda_1^2 R^2 - F}{2\sqrt{\lambda\lambda_1}}. \quad (6.12)$$

Симплектический лист диффеоморфен двуполостному гиперboloиду. Движение возможно, если величина интеграла  $F$  удовлетворяет условию  $F > 2\lambda_1 R^2(\lambda_1 - \lambda)$ . Симплектический лист допускает параметризацию

$$\begin{aligned} \lambda_1\rho + p_2 - \lambda_1 R^2 &= K \operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \psi, & p_1 &= K \operatorname{sh} \varphi, \\ \rho\sqrt{\lambda\lambda_1} - K &= -K \operatorname{ch} \psi \operatorname{ch} \varphi, \end{aligned} \quad (6.13)$$

Проводя те же рассуждения, что и при рассмотрении компактного случая, можно показать, что, без ограничения общности, допустимо считать, например, что  $\lambda > 0$  и  $\lambda_1 > 0$ . Используя (6.11) и (6.13), легко показать, что все неподвижные точки лежат на оси  $\varphi = 0$ . Интересно отметить, что в отличие от компактного случая тип фазового портрета не меняется при изменении величины  $F$ , а зависит лишь от соотношения между  $\lambda$  и  $\lambda_1$ . Типичные фазовые портреты приведены на рисунках П7.7а ( $\lambda = \lambda_1$ ), П7.7б ( $\lambda < \lambda_1$ ) и П7.7в ( $\lambda > \lambda_1$ ).

Все фазовые траектории замкнуты, т. е. решения приведенной системы — периодические функции времени. Исключение составляет лишь случай  $\lambda = \lambda_1$  (рис. П7.7а); как было доказано выше (предложение 4), это единственный случай, когда абсолютное движение цилиндра может быть неограниченным.

**3. Некомпактный случай** ( $\lambda = 0$ ). В системе (2.1) уравнения, описывающие относительное движение вихря, отделяются. Действительно, из соотношений (4.1) следует, что

$$av_1 = -\lambda_1 y_1 f(x_1, y_1) + c_1, \quad av_2 = \lambda_1 x_1 f(x_1, y_1) + c_2,$$

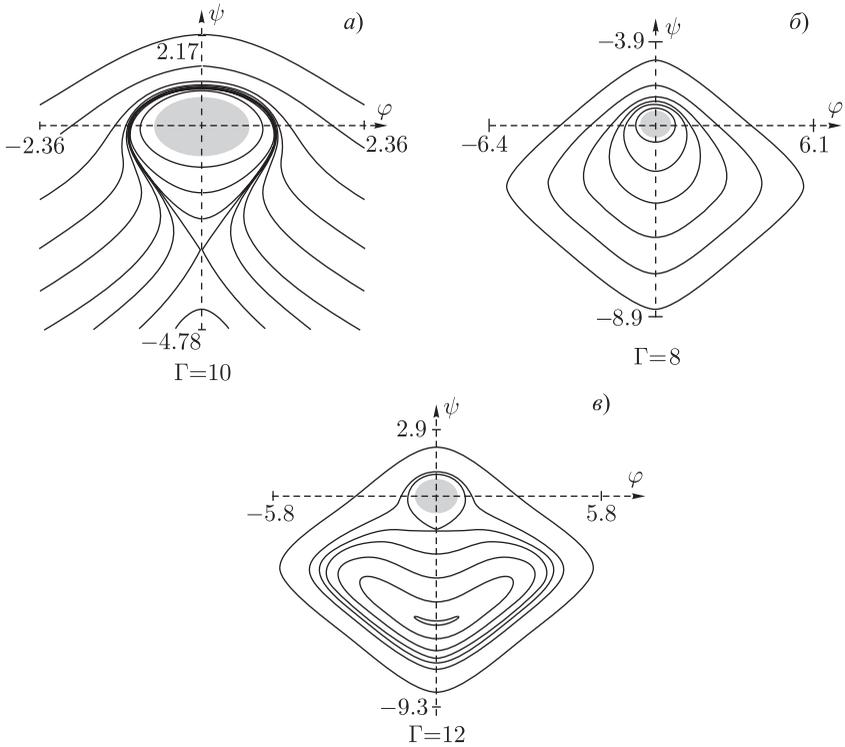


Рис. П7.7. Фазовые портреты приведенной системы в некомпактном случае ( $\lambda\lambda_1 > 0$ ):  $F = 25$ ,  $a = 20$ ,  $\Gamma_1 = 10$ ,  $R = 1$ .

где  $f(x_1, y_1) = -1 + R^2/(x_1^2 + y_1^2)$ ,  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные. Подставив эти выражения в первое уравнение системы (2.1), получим замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно  $x_1, y_1$ . Траектории этой системы — линии уровня интеграла энергии (6.3). Линии уровня замкнуты, следовательно,  $x_1$  и  $y_1$  — периодические функции времени. Движение центра цилиндра описывается формулами

$$x = \frac{1}{a} (-\lambda_1 \langle y_1 f(x_1, y_1) \rangle + c_1) t + g_1(t),$$

$$y = \frac{1}{a} (\lambda_1 \langle x_1 f(x_1, y_1) \rangle + c_2) t + g_2(t),$$

где  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  — периодические функции. Таким образом, в некоторой поступательно движущейся системе координат цилиндр и вихрь движутся по замкнутым кривым.

## 7. Случай двух вихрей

Рассмотрим случай  $n = 2$ , т. е. совместное движение цилиндра и двух вихрей. Будем действовать, как и в случае  $n = 1$ : воспользовавшись интегралом (4.3), понизим порядок системы до двух степеней свободы. Как и прежде, в качестве переменных приведенной системы выберем величины, инвариантные при вращении вокруг центра цилиндра:

$$p_1 = a(x_1v_1 + y_1v_2), \quad p_2 = a(x_1v_2 - y_1v_1), \quad p_3 = x_1x_2 + y_1y_2, \\ p_4 = x_1y_2 - x_2y_1, \quad r_1 = x_1^2 + y_1^2, \quad r_2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Скобки Пуассона между этими переменными следующие:

$$\{p_1, p_2\} = \frac{(p_2^2 + p_1^2)r_2^2 - 2\lambda_1 R^2 p_2 r_2^2 + (R^4 - r_1^2)\lambda_1^2 r_2^2 + r_1^2 \lambda_1 \lambda_2 r_2^2 + r_1^2 \lambda_1 \lambda_2 (R^4 - r_2^2)}{\lambda_1 r_1 r_2^2},$$

$$\{p_1, p_3\} = \frac{r_2^2(p_3 p_2 - p_4 p_1) + \lambda_1(-R^2 - r_1)r_2^2 p_3 + 2R^2 p_4^2 r_1 - R^2 r_1^2 r_2 + r_1^2 r_2^2}{\lambda_1 r_1 r_2^2},$$

$$\{p_1, p_4\} = \frac{r_2^2(p_1 p_3 + p_2 p_4) - \lambda_1 p_4(2R^2 p_3 r_1 + (R^2 - r_1)r_2^2)}{\lambda_1 r_1 r_2^2},$$

$$\{p_1, r_1\} = \frac{2p_2 - 2(R^2 - r_1)\lambda_1}{\lambda_1}, \quad \{p_1, r_2\} = -\frac{2p_3(R^2 - r_2)}{r_2},$$

$$\{p_2, p_3\} = \frac{-r_2^2(p_1 p_3 + p_2 p_4) - \lambda_1 p_4(2R^2 p_3 r_1 - (R^2 + r_1)r_2^2)}{\lambda_1 r_1 r_2^2},$$

$$\{p_2, p_4\} = \frac{r_2^2(p_3 p_2 - p_4 p_1) + \lambda_1(-R^2 + r_1)r_2^2 p_3 - 2R^2 p_4^2 r_1 + R^2 r_1^2 r_2 + r_1^2 r_2^2}{\lambda_1 r_1 r_2^2},$$

$$\{p_2, r_1\} = -\frac{2p_1}{\lambda_1}, \quad \{p_2, r_2\} = -\frac{2p_4(R^2 - r_2)}{r_2}, \quad \{p_3, p_4\} = \frac{\lambda_2 r_2 - \lambda_1 r_1}{\lambda_2 \lambda_1},$$

$$\{p_3, r_1\} = \frac{2p_4}{\lambda_1}, \quad \{p_3, r_2\} = -\frac{2p_4}{\lambda_2},$$

$$\{p_4, r_1\} = -\frac{2p_3}{\lambda_1}, \quad \{p_4, r_2\} = \frac{2p_3}{\lambda_2}, \quad \{r_1, r_2\} = 0.$$

Эта пуассонова структура является вырожденной, ее ранг равен четырем. Первый интеграл (4.3) и очевидное соотношение  $p_3^2 + p_4^2 = r_1 r_2$  являются ее функциями Казимира. Для интегрируемости приведенной системы необходим еще один первый интеграл.

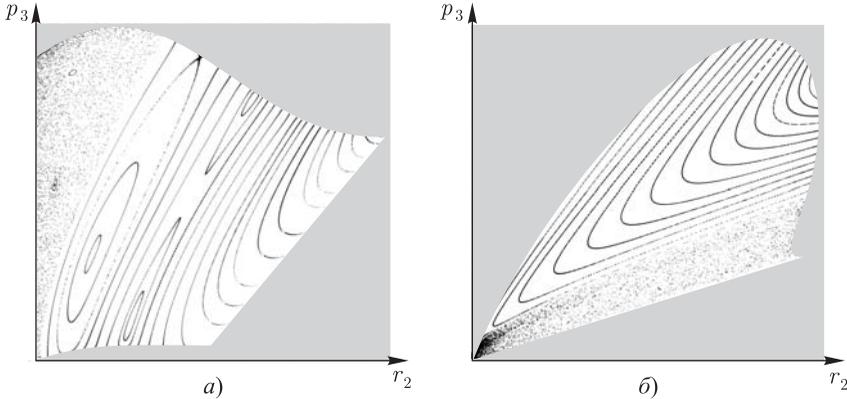


Рис. П7.8. Сечения Пуанкаре в задаче о цилиндре и двух вихрях: а)  $H = 7$ ,  $F = 5$ ,  $a = 9$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 8$ ,  $R = 1$ ,  $p_4 = -5$ ; б)  $H = 10$ ,  $F = 60$ ,  $a = 4$ ,  $\Gamma = 2$ ,  $\Gamma_1 = -1$ ,  $\Gamma_2 = 10$ ,  $R = 1$ ,  $p_4 = 0$ .

Для численного исследования системы построим сечение Пуанкаре приведенной системы. Для этого на трехмерной совместной поверхности уровня первых интегралов (2.4), (4.3) и упомянутого выше геометрического соотношения введем локальные координаты  $r_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ . В качестве секущей переменной в рассматриваемом случае выбираем  $p_4 = \text{const}$ . Стохастическое поведение, иллюстрируемое сечениями Пуанкаре, приведенными на рис. П7.8а и П7.8б, показывает, что дополнительного интеграла в общем случае не существует.

## 8. Заключение

Уравнения движения, получаемые без использования лагранжева формализма (т. е. вариационных принципов), далеко не всегда гамильтоновы, даже при условии, что они обладают интегралом типа энергии. Примером могут служить уравнения неголономной механики, для которых существуют динамические эффекты, препятствующие существованию пуассоновой структуры [3]. Как следствие гамильтоновости, динамика системы (2.1) име-

ет характерные особенности поведения: в частности, при любых значениях параметров система не имеет аттракторов (например, странных), но обладает семействами инвариантных торов (связанных с КАМ-теорией), разделенными системами стохастических слоев. В этой работе мы лишь вкратце остановились на хаотических движениях в задаче о цилиндре и двух вихрях. Интересно было бы изучить различные регулярные и хаотические решения более подробно.

## Литература

- [1] Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. М.: Наука. 1991.
- [2] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Ижевск, РХД. 1999.
- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Странные аттракторы в динамике кельтских камней*, УФН, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [4] Вилля А. *Теория вихрей*. ОНТИ, М.-Л. 1936, пер. с фр. Villat H. *Leçons sur la théorie des tourbillions*. Gauthier-Villars. 1930.
- [5] Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967.
- [6] Кирхгоф Г. *Механика. Лекции по математической физике*. М.: АН СССР, 1962. Пер. с нем. Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik*. Mechanik, Leipzig. 1874.
- [7] Ламб Г. *Гидродинамика*. ОГИЗ, Гостехиздат. 1947. Пер. с англ. Lamb H. *Hydrodynamics*, Ed. 6-th., N. Y., Dover publ. 1945.
- [8] Прандтль Л. *Гидроаэромеханика*. Ижевск: НИЦ «РХД», 2000.
- [9] Рамоданов С. М. *Движение двух круговых цилиндров в идеальной жидкости* (см. в сб. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под. ред. А. В. Борисова, И. С. Мамаева и М. А. Соколовского. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, с. 327–335).
- [10] Сэффмэн Ф. Дж. *Динамика вихрей*. М.: Научный мир, 2000, пер. с англ. Saffman P. G. *Vortex Dynamics*. Camb. Univ. Press. 1992.

- [11] Borisov A. V., Mamaev I. S. *An integrability of the problem of motion of cylinder and vortex in the ideal fluid*, Reg. & Chaot. Dyn. 2003, v. 8, p. 163–166.
- [12] Dirac P. A. M. *Generalized Hamiltonian Dynamics*. Canadian Journal of Math., v. 2, №2, 1950, p. 129–148. (См. также Борисов А.В., Мамаев И.С. *Скобки Дирака в геометрии и механике*, прил. к сб. Дирак П. А. М. *Лекции по теоретической физике*. Москва–Ижевск: РХД, 2001.)
- [13] Greenhill A. G. *Plane vortex motion*. Quart. J. Pure Appl. Math. 1877/78, v. 15, № 58, p. 10–27.
- [14] Havelock T.H. *The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation*. Phil. Mc. 1931, Ser. 7, v. 11, № 70, p. 617–633.
- [15] Koiller J. *Note on coupled motions of vortices and rigid bodies*. Phys. Lett. A, 1987, v. 120, № 8, p. 391–395.
- [16] Ramodanov S. M. *Motion of a Circular Cylinder and a Vortex in an Ideal Fluid*. Reg. & Chaot. Dyn.. 2001, v. 6, № 1, p. 33–38.
- [17] Ramodanov S. M. *Motion of a Circular Cylinder and  $N$  Point Vortices in a Perfect Fluid*. Reg. & Chaot. Dyn. 2002, v. 7, № 3, p. 291–298.
- [18] Shashikanth B.N., Marsden J.E., Burdick J.W., Kelly S.D. *The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with  $N$  point vortices*, Phys. of Fluids. 2002, v. 14, p. 1214–1227.
- [19] Synge J.L. *On the motion of three vortices*. Can. J. Math. 1949, v. 1, p. 257–270.
- [20] Shashikanth B. N. *Poisson brackets for the dynamically interacting system of a 2D rigid cylinder and  $N$  point vortices: the case of arbitrary smooth cylinder shapes*, Reg. & Chaot. Dyn., 2005, v. 10, № 1, p. 1–14.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 8

# Взаимодействие вихрей с цилиндрическим телом<sup>1</sup>

### 1. Обтекание подвижного контура

В этом приложении обсуждаются только плоские задачи гидродинамики. Рассмотрим произвольное двумерное твердое тело (контур) с границей  $C$ , взаимодействующее с  $n$  точечными вихрями в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Предполагается, что жидкость покоится на бесконечности, а на границе тела выполняются стандартные условия непротекания.

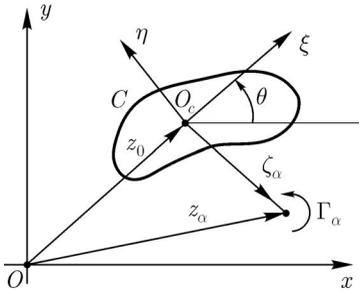


Рис. П8.1

Выберем неподвижную систему координат  $Oxy$ , а с телом свяжем другую ортогональную систему  $O_c\xi\eta$  (рис. П8.1). Будем использовать комплексное представление координат в обеих системах  $z = x + iy$  и  $\zeta = \xi + i\eta$  соответственно. Контур, ограничивающий цилиндр, обозначим  $C$ ; его положение на плоскости параметризуется координатами  $z_0 = x_0 + iy_0$  начала подвижной системы  $O_c$  и углом поворота  $\theta$  подвижных осей, пусть  $z_\alpha, \alpha = 1, \dots, n$  определяют координаты точечных вихрей.

Как известно, поле скоростей жидкости в этом случае характеризуется (неоднозначным) потенциалом  $\varphi(z)$  либо функцией тока  $\psi(z)$ , так что скорость жидкости в точке  $z$  равна

$$v^f(z) = v_x^f + iv_y^f = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

<sup>1</sup>Совместно с С. М. Рамодановым.

Вследствие условий Коши–Римана функции  $\varphi$  и  $\psi$  определяются друг через друга при помощи квадратур. Иногда удобнее использовать комплексный потенциал течения  $w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ , при этом скорость жидкости  $\bar{v}^f = \frac{\partial w}{\partial z}$  (здесь и далее черта над буквой обозначает комплексное сопряжение).

При наличии точечных вихрей функция тока определяется уравнением

$$\Delta\psi(z) = \sum_{\alpha}^n \Gamma_{\alpha} \delta(z - z_{\alpha}),$$

где  $z_{\alpha}$ ,  $\Gamma_{\alpha}$  — координаты и интенсивности вихрей,  $\delta(z - z_{\alpha}) = \delta(x - x_{\alpha})\delta(y - y_{\alpha})$  — дельта-функция Дирака. Граничные условия, соответствующие условию непротекания на контуре и нулевой скорости на бесконечности, записываются в форме

$$\psi|_C = v_x y - v_y x + \frac{\omega}{2} ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2), \quad \psi(\infty) = 0,$$

где  $v_x = \dot{x}_0$ ,  $v_y = \dot{y}_0$ ,  $\omega = \dot{\theta}$  — линейная и угловая скорость контура. Кроме того, необходимо задать циркуляцию скорости вокруг цилиндра

$$\oint_C (v^f, dl) = \oint_C d\varphi = \oint_C \frac{\partial\psi}{\partial n} dl = \Gamma_c = \text{const},$$

где  $dl$  — элемент длины контура. Как известно (см., например, [8]), функция тока может быть представлена в виде разложения

$$\psi(z) = v_x \psi_x(z) + v_y \psi_y(z) + \omega \psi_{\omega}(z) + \Gamma^* \psi_0(z) + \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \psi_{\alpha}^v(z), \quad (1.1)$$

где все слагаемые, кроме  $\psi_{\alpha}$ , — гармонические функции без особенностей вне контура  $C$ , стремящиеся к нулю на бесконечности и удовлетворяющие условиям

$$\psi_x|_C = -y, \quad \psi_y|_C = x, \quad \psi_{\omega}|_C = \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2}, \quad \psi_0|_C = \text{const}.$$

При этом циркуляции вокруг цилиндра

$$\oint_C d\varphi_x = \oint_C d\varphi_y = \oint_C d\varphi_{\omega} = 0, \quad \oint_C d\varphi_0 = \Gamma^* = \Gamma_c - \sum \Gamma_{\alpha}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Такой выбор циркуляции  $\Gamma^*$  объясняется тем, что удобно явно исключить из общей циркуляции вокруг цилиндра циркуляции инверсных образов вихрей.

Все функции  $\psi_\alpha^v$  могут быть выражены через единственную функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta G(z, z_0) = \delta(z - z_0), \quad G(z, z_0)|_{z \in C} = \text{const}, \quad (1.2)$$

так что  $\psi_\alpha^v(z) = \Gamma_\alpha G(z, z_\alpha)$ .

Покажем теперь, что все оставшиеся функции, входящие в (1.1), также могут быть найдены посредством квадратур с помощью функции  $G(z, z_0)$ . Укажем некоторые свойства рассматриваемых функций.

1°. Функция  $\psi_\alpha^v(z)$  может быть записана в форме

$$\psi_\alpha^v(z) = -\frac{\Gamma_\alpha}{2\pi} \ln |z - z_\alpha| + \psi_\alpha^r(z),$$

где  $\psi_\alpha^r(z)$  — регулярная в точке  $z = z_\alpha$  часть функции  $\psi_\alpha^v$ , т. е. гармоническая всюду вне  $C$  функция, принимающая на контуре значения  $\psi_\alpha^r|_C = \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi} \ln |z - z_\alpha|$  и  $\psi_\alpha^r(\infty) = 0$ . Следовательно, при  $z_\alpha \rightarrow \infty$  получаем, что  $\psi_\alpha^r(z) \rightarrow \psi_0(z)$ , т. е. описывает чисто циркуляционное слагаемое в функции (1.1).

2°. Напомним известное представление решения задачи Дирихле (т. е.  $\Delta \Phi(z) = 0$ ,  $\Phi|_C = f(z)$ ) с помощью функции Грина (1.2) [7]:

$$\Phi(z) = \oint_C f(\tilde{z}) \frac{\partial G}{\partial n}(\tilde{z}, z) d\tilde{l}.$$

Как следствие, получаем

$$\psi_x(z_\alpha) + i\psi_y(z_\alpha) = \Gamma_\alpha^{-1} i \oint_C z \frac{\partial \psi_\alpha^v}{\partial n} dl, \quad \psi_\omega = \Gamma_\alpha^{-1} \oint_C \frac{|z - z_0|^2}{2} \frac{\partial \psi_\alpha^v}{\partial n} dl. \quad (1.3)$$

Таким образом, для полного решения задачи обтекания необходимо найти функцию  $G(z, z_0)$ . Как известно, эта функция легко находится, если известно конформное отображение внешности контура  $C$  на внешность единичной окружности  $z' = \mathcal{F}(z)$ . В этом случае функция Грина представляется в форме

$$G(z, z_0) = \text{Im} \left( \frac{1}{2\pi i} \ln (\mathcal{F}(z) - \mathcal{F}(z_0)) - \ln \left( \mathcal{F}(z) - \frac{1}{\overline{\mathcal{F}(z_0)}} \right) \right).$$

Разлагая обратное отображение  $z = \mathcal{F}^{-1}(z')$  в ряд Лорана, получаем [8]

$$\mathcal{F}^{-1}(z') = kz' + z_0 + \frac{k_1}{z'} + \frac{k_2}{z'^2} + \dots, \tag{1.4}$$

где  $k$  — вещественное положительное число. Комплексное число  $z_0 = x_0 + iy_0$  определяет на плоскости точку, которая неподвижна относительно контура, она называется *конформным центром контура* и определяется интегралом

$$z_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} z \frac{dz'}{z'}.$$

Как известно [8], конформный центр контура совпадает с точкой приложения подъемной силы Жуковского.

## 2. Уравнения движения контура

Чтобы записать уравнения движения контура, вычислим силу и момент, действующие на контур со стороны жидкости.

Как было показано в [4], сила давления, действующая на контур в присутствии точечных вихрей, может быть записана в виде

$$f = f_x + if_y = \frac{d}{dt} \oint_C iz \frac{\partial \psi}{\partial n} dl - i \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} v_{\alpha},$$

где  $v_{\alpha} = \dot{z}_{\alpha}$  — скорость соответствующего точечного вихря, а  $\psi$  — функция тока (1.1).

Таким образом, сила линейно зависит от слагаемых в разложении функции тока (1.1). Выделим следующие слагаемые, определяющие силу давления: во-первых, вклад, определяемый кинетической частью (1.1), который, согласно Кирхгофу, определяется кинетической энергией жидкости при  $\Gamma^* = 0, \Gamma_{\alpha} = 0$  и сводится к эффекту присоединенных масс:

$$\frac{d}{dt} \int iz \frac{\partial}{\partial n} (v_x \psi_x + v_y \psi_y + \omega \psi_0) dl = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_0^f}{\partial v_x} + i \frac{\partial T_0^f}{\partial v_y} \right),$$

где

$$\begin{aligned} T_0^f &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus C} (v_x^2 + v_y^2) |_{\Gamma^*=0, \Gamma_{\alpha}=0} dx dy = -\frac{1}{2} \oint_C \varphi d\psi |_{\Gamma^*=\Gamma_{\alpha}=0} = \\ &= \frac{1}{2} (a_{11} v_x^2 + a_{22} v_y^2 + 2a_{12} v_x v_y + b\omega^2 + 2c_1 v_x \omega + 2c_2 v_y \omega). \end{aligned}$$

$a_{ij}$ ,  $b$ ,  $c_i$  — присоединенные массы и моменты жидкости (которые зависят от угла поворота  $\theta$ ).

Во-вторых, имеется подъемная сила, определяемая чисто циркуляционным обтеканием тела (т.е.  $\Gamma^* \neq 0$ ,  $\Gamma_\alpha = 0$ ,  $v_x = v_y = \omega = 0$ ). Согласно теореме Седова [8], в этом случае на контур действует добавочная сила Жуковского  $i\Gamma^* \frac{dz_0}{dt}$ , приложенная в конформном центре контура.

И последний вклад, определяемый присутствием вихря, равен

$$f_\alpha = \frac{d}{dt} \oint iz \frac{\partial \psi_\alpha^v}{\partial n} dl - i\Gamma_\alpha v_\alpha.$$

Входящий сюда интеграл легко находится с помощью свойства  $2^\circ$  (см. выше). Получаем

$$f_\alpha = \frac{d}{dt} \Gamma_\alpha (\psi_x(z_\alpha) + i\psi_y(z_\alpha) + iz_\alpha).$$

Таким образом, в неподвижной системе координат движение конформного центра описывается уравнением

$$m \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\partial T_0^f}{\partial v_x} - i \frac{\partial T_0^f}{\partial v_y} + \sum_\alpha \Gamma_\alpha \left( \frac{\partial \psi(z_\alpha)}{\partial v_x} + i \frac{\partial \psi(z_\alpha)}{\partial v_y} + iz_\alpha \right) \right) + i\Gamma^* \frac{dz_0}{dt}. \quad (2.1)$$

Момент относительно точки с координатами  $z_0 = x_0 + iy_0$ , действующий со стороны жидкости на тело, может быть записан в форме [4]

$$M_O = \frac{d}{dt} \left[ \int_C \frac{|z-z_0|^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\substack{\Gamma^*=0 \\ \Gamma_\alpha=0}} dl + \sum_\alpha \int_C \frac{|z-z_\alpha|^2}{2} \frac{\partial \psi^v}{\partial n} dl \right] - \sum_\alpha \text{Im}(\bar{z} - \bar{z}_\alpha) f_\alpha.$$

Используя аналогичные рассуждения, получаем, что момент относительно конформного центра контура равен

$$M = \frac{d}{dt} \left( -\frac{\partial T_0^f}{\partial \omega} + \sum_\alpha \Gamma_\alpha \left( \frac{\partial \psi}{\partial \omega} + \frac{1}{2} |z_\alpha|^2 \right) \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial T^b}{\partial \omega}, \quad (2.2)$$

где  $T^b$  — кинетическая энергия тела без учета жидкости.

Запишем теперь уравнения движения в подвижной системе координат  $O_c \xi \eta$ . В этом случае присоединенные массы являются заданными постоянными, определяемыми геометрией тела. Функция тока в подвижных

осях представляется в форме

$$\tilde{\psi}(\zeta) = u(\psi_u(\zeta) - \eta) + v(\psi_v(\zeta) + \xi) + \omega \left( \psi_\omega(\zeta) + \frac{1}{2} |\zeta|^2 \right) + \Gamma^* \psi_0(\zeta) + \sum \Gamma_\alpha \psi_\alpha^v(\zeta), \quad (2.3)$$

где  $u, v$  – проекции скорости на подвижные оси, поэтому

$$\psi_u = \psi_x \cos \theta + \psi_y \sin \theta, \quad \psi_v = -\psi_x \sin \theta + \psi_y \cos \theta,$$

а остальные функции не преобразуются. Поле скоростей жидкости в подвижной системе координат определяется соотношениями  $\tilde{v}^f = \left( \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \eta}, -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} \right)$ .

Определим функции

$$\tilde{\psi}_\alpha(\zeta) = \tilde{\psi}(\zeta) + \frac{\Gamma_\alpha}{2\pi} \ln |\zeta - \zeta_\alpha|, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

т. е. в каждой  $\tilde{\psi}_\alpha(\zeta)$  исключена особенность в точке, где находится  $\alpha$ -й вихрь. Тогда скорости точечных вихрей в подвижной системе координат

$$\dot{\zeta}_\alpha = \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha}{\partial \eta} - i \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha}{\partial \xi} \Big|_{\zeta = \zeta_\alpha}.$$

Поместим начало подвижной системы координат в конформном центре контура и перепишем уравнения движения тела в подвижных осях; переходя к векторным обозначениям, окончательно получим

**Теорема 1.** *Уравнения движения твердого тела и вихрей могут быть записаны в форме Кирхгофа в следующем виде*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} - \sum \Gamma_\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha(\zeta_\alpha)}{\partial \mathbf{V}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} - \sum \Gamma_\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha(\zeta_\alpha)}{\partial \mathbf{V}} \right) = \Gamma^* \mathbf{k} \times \mathbf{V},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega} - \sum \Gamma_\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha(\zeta_\alpha)}{\partial \omega} \right) \mathbf{k} + \mathbf{V} \times \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} - \sum \Gamma_\alpha \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha(\zeta_\alpha)}{\partial \mathbf{V}} \right) = 0,$$

$$\dot{\zeta}_\alpha = 2i \frac{\partial \psi_\alpha(\zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta = \zeta_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

$$\dot{x}_0 = u \cos \theta - v \sin \theta, \quad \dot{y}_0 = u \sin \theta + v \cos \theta, \quad \dot{\theta} = \omega,$$

$$\mathbf{V} = (u, v, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1), \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k}\omega,$$

(2.5)

где  $x_0, y_0$  – координаты конформного центра контура в неподвижной системе координат,  $\theta$  – угол, задающий положение подвижной системы координат относительно неподвижной,  $T$  – кинетическая энергия системы «тело+жидкость» в отсутствие циркуляции ( $\Gamma^* = \Gamma_\alpha = 0$ ).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В общем случае геометрически несимметричного тела кинетическая энергия не является диагональной. Если  $O_c$  не является конформным центром, в правой части первых трех уравнений (2.5) добавляются линейные по  $\mathbf{V}$ ,  $\omega$  слагаемые, пропорциональные  $\Gamma^*$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В частных случаях уравнения (2.5) были получены в работах [1, 2, 3, 4]. Отметим, что особо исследовался случай кругового цилиндра [1, 2, 4]. В работе [5] было показано, что задача о взаимодействии кругового цилиндра с единственным вихрем является интегрируемой.

### 3. Пуассонова структура и интегралы движения

Запишем уравнения (2.5) в форме, близкой к стандартной лагранжевой. Примем в качестве аналога функции Лагранжа

$$L = T - \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_{\alpha} \left( (\psi_u(\zeta_{\alpha}) - \eta_{\alpha})u + (\psi_v(\zeta_{\alpha}) + \xi_{\alpha})v + \left( \psi_{\omega}(\zeta_{\alpha}) - \frac{1}{2}|\zeta_{\alpha}|^2 \right) \omega \right) - \\ - \Gamma^* \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_{\alpha} \psi_0(\zeta_{\alpha}) - \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_{\alpha}^2 \ln \frac{|\mathcal{F}'(\zeta_{\alpha})|}{1 - |\mathcal{F}(\zeta_{\alpha})|^2} - \\ - \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta}^n \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln \frac{|\mathcal{F}(\zeta_{\alpha}) - \mathcal{F}(\zeta_{\beta})|}{|1 - \mathcal{F}(\zeta_{\alpha})\mathcal{F}(\zeta_{\beta})|}, \quad (3.1)$$

где  $\mathcal{F}(\zeta)$  — конформное отображение внешности контура на внешность единичной окружности (в подвижной системе координат). Тогда уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \Gamma^* \mathbf{k} \times \mathbf{V}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \omega} \right) \mathbf{k} + \mathbf{V} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = 0, \quad (3.2) \\ \Gamma_{\alpha} \dot{\zeta}_{\alpha} = 2i \frac{\partial L}{\partial \zeta_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Произведя аналог преобразования Лежандра для системы (3.1), (3.2), получим

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{V}} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} - \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \frac{\partial \tilde{\psi}(\zeta_{\alpha})}{\partial \mathbf{V}}, \quad M = \frac{\partial L}{\partial \omega} = \frac{\partial T}{\partial \omega} - \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \frac{\partial \tilde{\psi}(\zeta_{\alpha})}{\partial \omega}, \\ H = (\mathbf{P}, \mathbf{V}) + M\omega - L|_{\mathbf{V}, \omega \rightarrow \mathbf{P}, M}; \quad \mathbf{P} = (P_u, P_v, 0). \quad (3.3)$$

Для построения функции Гамильтона введем следующие обозначения:  $\mathbf{W} = (u, v, \omega)$ ,  $\boldsymbol{\pi} = (P_u, P_v, M)$ . Предположим, что кинетическая энергия системы в отсутствие циркуляции является однородной функцией  $u, v, \omega$ , то есть

$$T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{W}, \mathbf{W}),$$

где матрица  $\mathbf{A}$  содержит присоединенные массы и присоединенные моменты. Гамильтониан (3.3) теперь принимает вид

$$H = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\pi} + \mathbf{b}), \boldsymbol{\pi} + \mathbf{b}) + \Gamma^* \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_{\alpha} \psi_0(\zeta_{\alpha}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha=1}^n \Gamma_{\alpha}^2 \ln \frac{|\mathcal{F}'(\zeta_{\alpha})|}{1 - |\mathcal{F}(\zeta_{\alpha})|^2} + \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha \neq \beta}^n \Gamma_{\alpha} \Gamma_{\beta} \ln \frac{|\mathcal{F}(\zeta_{\alpha}) - \mathcal{F}(\zeta_{\beta})|}{|1 - \mathcal{F}(\zeta_{\alpha})\mathcal{F}(\zeta_{\beta})|}, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{b} = \left( \sum \Gamma_{\alpha}(\psi_u(\zeta_{\alpha}) - \eta_{\alpha}), \sum \Gamma_{\alpha}(\psi_v(\zeta_{\alpha}) + \zeta_{\alpha}), \sum \Gamma_{\alpha}(\psi_{\omega}(\zeta_{\alpha}) - \frac{1}{2}|\zeta_{\alpha}|^2) \right)$ . Теперь уравнения движения можно представить в гамильтоновой форме.

**Теорема 2.** *Уравнения движения цилиндрического тела и точечных вихрей могут быть представлены в гамильтоновой форме следующим образом:*

$$\begin{aligned} \dot{P}_u &= \{P_u, H\}, & \dot{P}_v &= \{P_v, H\}, & \dot{M} &= \{M, H\}, \\ \dot{\xi}_i &= \{\xi_i, H\}, & \dot{\eta}_i &= \{\eta_i, H\}, \\ \dot{x}_0 &= \{x_0, H\}, & \dot{y}_0 &= \{y_0, H\}, & \dot{\theta} &= \{\theta, H\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где гамильтониан задается выражением (3.4), а скобки Пуассона определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \{P_u, P_v\} &= -\Gamma^*, & \{M, P_u\} &= -P_v, & \{M, P_v\} &= P_u, \\ \{\xi_i, \eta_i\} &= \Gamma_i^{-1}, & \{x_0, P_u\} &= \cos \theta, & \{x_0, P_v\} &= -\sin \theta, \\ \{y_0, P_u\} &= \sin \theta, & \{y_0, P_v\} &= \cos \theta, & \{\theta, M\} &= 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ранг пуассоновой структуры (3.6) равен  $n + 3$ , т. е. она является невырожденной. Вследствие того, что уравнения движения инвариантны относительно вращений и трансляций плоскости, всегда имеется три первых

интеграла, линейных по скоростям:

$$\begin{aligned} P_x &= P_u \cos \theta - P_v \sin \theta + \Gamma^* y_0, & P_y &= P_u \sin \theta + P_v \cos \theta - \Gamma^* x_0, \\ M_\Omega &= P_x y_0 - P_y x_0 - M. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Они коммутируют следующим образом:

$$\{P_x, P_y\} = \Gamma^*, \quad \{P_x, M_\Omega\} = P_y, \quad \{P_y, M_\Omega\} = -P_x. \quad (3.8)$$

Используя интегралы (3.7), можно построить интеграл  $F$ , не зависящий от  $x_0, y_0, \theta$ :

$$F = \frac{1}{2}(P_u^2 + P_v^2) - M = \text{const}. \quad (3.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Перечислим частные случаи системы (3.5), (3.6). Случай  $\Gamma_i = 0$  для любого  $i$ , но  $\Gamma^* \neq 0$ , рассматривался еще С. А. Чаплыгиным [6]. Случай кругового цилиндра при  $\sum \Gamma_i = 0, \Gamma^* = 0, i$  произвольно, рассматривался в [2]. Для произвольных  $\sum \Gamma_i$  и  $\Gamma^*$  уравнения движения кругового цилиндра были получены в [4]. И наконец, случай  $\Gamma^* = \sum \Gamma_i$  и  $\sum \Gamma_i$  произвольно, а тело имеет произвольную форму, рассматривался в [3].

#### 4. Взаимодействие эллиптического цилиндра с точечным вихрем

Для нахождения функции тока  $\tilde{\psi}(\zeta)$  конформно отобразим внешность эллипса на внешность круга единичного радиуса  $\zeta' = \mathcal{F}(\zeta)$ , рассматриваемого на комплексной плоскости  $\zeta' = \xi' + i\eta'$ :

$$\zeta = \mathcal{F}^{-1}(\zeta') = \frac{a+b}{2}\zeta' + \frac{a-b}{2}\frac{1}{\zeta'},$$

где  $a, b$  — полуоси эллипса. Используя классические формулы для круговой области, получим функцию тока (2.3) в форме

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\zeta) &= u(\psi_u(\zeta) - \eta) + v(\psi_v + \xi) + \\ &+ \omega \left( \psi_\omega(\zeta) - \frac{1}{2}|\zeta|^2 \right) - \frac{\Gamma^*}{4\pi} \ln |\mathcal{F}(\zeta)| + \frac{\Gamma_1}{4\pi} \ln \left| \mathcal{F}(\zeta) - \frac{1}{\mathcal{F}(\bar{\zeta}_1)} \right|, \end{aligned}$$

где  $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$  — координаты точечного вихря. При этом

$$\psi_u = -b \frac{\eta'}{\xi'^2 + \eta'^2}, \quad \psi_v = -a \frac{\xi'}{\xi'^2 + \eta'^2}, \quad \psi_\omega = \frac{b^2 - \omega^2}{4} \frac{\xi'^2 - \eta'^2}{(\xi'^2 + \eta'^2)^2}.$$

Подставляя эти выражения в (3.4), (3.5), для компонент обобщенного импульса  $P = (P_u, P_v, M)$  и координат вихря  $(\xi_1, \eta_1)$  получим замкнутую систему уравнений. Эта система имеет интеграл энергии и интеграл  $F$  (3.9). На уровне интеграла (3.9) получается гамильтонова система с двумя степенями свободы. На рисунке П8.2 в трехмерном пространстве  $(P_u, P_v, M)$  показано отображение Пуанкаре. Его проекция на плоскость (с положительными и отрицательными пересечениями) показана на рисунке П8.3.

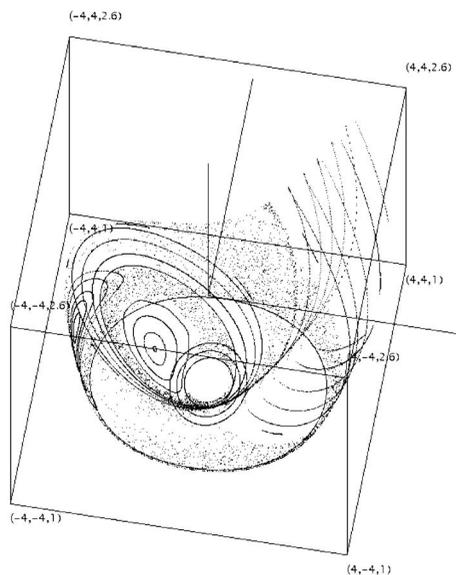


Рис. П8.2

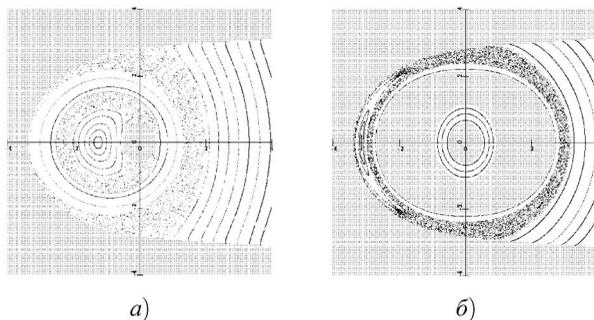


Рис. П8.3

Как видно, например, в случае  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$  имеются зоны хаотического поведения, что свидетельствует о неинтегрируемости системы (в отличие от кругового случая  $a = b$  [5], являющегося интегрируемым). Интересно исследовать зависимость интегрируемости и хаотических свойств системы по отношению к параметру  $\frac{a}{b}$ .

### Литература

- [1] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. *Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices*, Discrete and Contin. Dyn. Syst. B., 2005, v. 5, № 1, p. 35–50.
- [2] Shashikanth B. N., Marsden J. E., Burdick J. W., Kelly S. D. *The Hamiltonian structure of a 2D rigid circular cylinder interacting dynamically with N point vortices*, Phys. of Fluids, 2002, v. 14, p. 1214–1227.
- [3] Shashikanth B. N. *Poisson brackets for the dynamically interacting system of a 2D rigid cylinder and N point vortices: the case of arbitrary smooth cylinder shapes*, Reg. & Chaot. Dyn., 2005, v. 10, № 1, p. 1–14.
- [4] Ramodanov S. M. *Motion of a circular cylinder and N point vortices in a perfect fluid*, Reg. & Chaot. Dyn., 2002, v. 7, № 3, p. 291–298.
- [5] Borisov A. V., Mamaev I. S. *An integrability of the problem of motion of cylinder and vortex in the ideal fluid*, Reg. & Chaot. Dyn., 2003, v. 8, № 2, p. 163–166.
- [6] Чаплыгин С. А. *О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло*, Полн. собр. соч., т. 3, Изв. АН СССР, 1933, с. 133–150.
- [7] Курант Р., Гильберт Э. *Методы математической физики*, т. 2, М.-Л.: ГТТИ, 1945.
- [8] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидромеханика*. ГИТТЛ. 1955. Т. 1.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 9

# К вопросу о движении вихреисточников по плоскости

### 1. Введение

В классической гидродинамике идеальной жидкости равно, как и в геофизической гидродинамике, для описания многих эффектов используется модель точечных вихрей, восходящая к Г. Гельмгольцу и Г. Кирхгофу. Укажем обзоры [6, 10], где собраны различные задачи, в которых используется эта модель. Не так широко известна более общая постановка задачи, в которой описывается движение в жидкости более сложных особенностей, сочетающих в себе вихревые свойства, а также свойства источников и стоков. Эта модель иногда является более предпочтительной для целей гидрометеорологии и впервые была предложена знаменитым русским гидродинамиком и космологом А. А. Фридманом и его ученицей П. Я. Полубариновой (известная так же как Полубаринова-Кочина (13.04.1899-3.07.1999)). В работе [1] исследовано также движение двух источников-стоков и изучены общие интегралы уравнений движения.

Уравнения движения источников-стоков в гамильтоновой форме обсуждаются в работе А. А. Богомолова [2], выполненной независимо от [1]. При этом основные закономерности движения источников и стоков (в дальнейшем мы будем называть их просто источниками) применяются для моделирования тепловой конвекции в плоском горизонтальном слое жидкости, например, периодических конвективных ячеек. В работе [1] проинтегрирован случай двух стоков; при этом указано, что случай  $N \geq 3$  так же, как и для уравнений движения  $N$  точечных вихрей и  $N$  точечных масс в небесной механике, связан с принципиальными трудностями.

Среди работ, посвященных динамике источников, отметим также [8, 9], в которых исследуется хаотическая адвекция жидкости в поле пульсирующих источников, а также различные примеры из молекулярной биологии. В работе [11] рассматривается задача о движении вихреисточника, взаимодействующего с круговым цилиндром и находящегося в пульсирующем

плоскопараллельном потоке. В [11] также приведены уравнения движения системы вихреисточников (называемых в этой работе экранируемыми твисторами), аналогичных бесселевым вихрям, рассматриваемых в теории сверхпроводимости, намагниченной плазмы и геострофического приближения. В этой работе указаны явные квадратуры для случая взаимодействия двух твисторов. Структура и неустойчивость реальных вихреисточников обсуждается в [12].

## 2. Уравнения движения вихреисточников

Как известно [4], динамика точечных вихрей на плоскости (вихревых нитей) в идеальной несжимаемой жидкости описывается (гамильтоновой) системой уравнений первого порядка

$$\dot{z}_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \neq k}^n \frac{i\Gamma_k}{z_k - z_l}, \quad (2.1)$$

где  $z_k = x_k + iy_k$  — координаты вихрей в комплексной форме, а  $\Gamma_k$  — их интенсивности. При этом скорость жидкости  $v = v_x + iv_y$  в некоторой точке плоскости определяется выражением

$$\bar{v}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{i\Gamma_k}{z - z_k(t)}, \quad (2.2)$$

так что вблизи фиксированного вихря  $z_k$  скорость представляется в виде ряда

$$\bar{v}(z) = \frac{i\Gamma_k/2\pi}{z - z_k} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s (z - z_k)^s. \quad (2.3)$$

Таким образом, динамика точечных вихрей — это динамика особенностей поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости специального вида (2.3). В вышеупомянутой работе А. А. Фридмана и П. Я. Полубариновой [1] рассматривается динамика особенностей более общего вида (которые сохраняются при движении жидкости), когда разложение скорости вблизи особенности определяется рядом Лорана

$$\bar{v}(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{(z - z_k)^s} + \sum_{s=0}^{\infty} a_s (z - z_0)^s, \quad (2.4)$$

где  $a_s, b_s$  — комплексные числа, причем не все  $b_s$  равны нулю.

Для определения скорости особенности используется следующий принцип [1]:

пусть  $K$  — кольцо вблизи особенности с внутренним радиусом  $l_1$  и внешним  $l_2$  (см. рис. П9.1); если жидкость, ограниченная кольцом  $K$ , в рассматриваемый момент затвердеет (но без перераспределения окружающего поля скоростей), то получившийся поплавок приобретет поступательную скорость  $v_0$  и угловую скорость  $\omega_0$ . При стремлении радиусов  $l_1, l_2$  к нулю получим соответствующие скорости особенности.

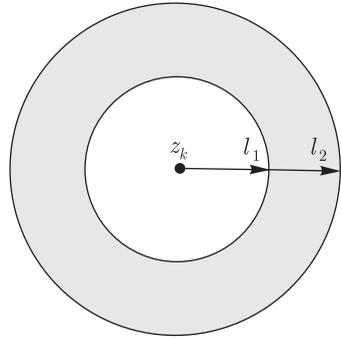


Рис. П9.1

Используя (2.4), с помощью закона сохранения импульса и момента импульса можно получить следующие соотношения:

$$v_0(l_1, l_2) = a_0, \quad \omega_0(l_1, l_2) = -\frac{2 \operatorname{Im} b_1}{l_1^2 + l_2^2},$$

следовательно, в пределе получим

$$v = a_0, \quad \omega = \begin{cases} \infty, & \text{если } \operatorname{Im} b_1 \neq 0, \\ 0, & \text{если } \operatorname{Im} b_1 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, поступательная скорость перемещения особенности (в комплексной форме) совпадает со свободным членом разложения скорости течения в ряд Лорана, а угловая скорость не обращается в нуль только в том случае, если  $\operatorname{Im} b_1 \neq 0$ , что соответствует обычному точечному вихрю в жидкости, для которого выполнено  $\omega = \infty$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Из приведенных рассуждений следует, что при построении моделей динамики особенностей высокого порядка (диполей, квадруполей и т. п.) для определения их угловой скорости необходимо применять дополнительные физические соображения (типа существования наименьших допустимых размеров, внутри которых течение не имеет особенностей и т. п.).

Простейшими особенностями (которые к тому же являются изотропными, то есть их угловая скорость не влияет на поступательную) являются следующие особенности первого порядка (то есть  $b_i = 0, i > 2$ ):

1. вихрь ( $\operatorname{Im} b_1 \neq 0, \operatorname{Re} b_1 = 0$ );

2. источник ( $\text{Im } b_1 = 0, \text{Re } b_1 \neq 0$ );
3. вихреисточник ( $\text{Im } b_1 \neq 0, \text{Re } b_1 \neq 0$ ).

Уравнения движения вихреисточников представляются в виде

$$\frac{d\bar{z}_k}{dt} = \sum_{k \neq l}^n \frac{A_l}{z_k - z_l}, \quad A_l = \frac{K_l + i\Gamma_l}{2\pi}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

где  $K_l$  и  $\Gamma_l$  — интенсивности источника и вихря, соответственно. Частными случаями системы (2.5) являются уравнения движения вихрей [4] и источников [1, 2]. Уравнения (2.5) могут быть записаны в вещественной форме [11]

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} + \frac{1}{K_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, & \dot{y}_k &= -\frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} + \frac{1}{K_k} \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \\ H &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln r_{ij}, & \Phi &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} K_i K_j \ln r_{ij}, \\ r_{ij} &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, для описания движения вихреисточников необходимо задание двух дескриптивных функций: гамильтониана  $H$  и градиентного потенциала  $\Phi$ . Уравнения (2.6) могут быть переписаны в форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial y_k} + \frac{1}{K_k} \frac{\partial \Phi^*}{\partial y_k}, & \dot{y}_k &= -\frac{1}{\Gamma_k} \frac{\partial H}{\partial x_k} - \frac{1}{K_k} \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_k}, \\ \Phi^* &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} K_i K_j \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система (2.7) является гамильтоновой, когда все  $\Gamma_i$  (или все  $K_i$ )  $i = 1, \dots, n$  равны нулю, т.е. для движения либо вихрей, либо источников. Система (2.7), и следовательно система (2.5), гамильтонова в более общем случае при условии пропорциональности интенсивностей  $\mu \Gamma_k = K_k$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . В качестве гамильтониана может быть выбрана функция

$$\mathcal{H} = H + \frac{1}{\mu} \Phi^*.$$

При  $\mu \rightarrow 0$  получаем систему обычных вихрей, а при  $\mu \rightarrow \infty$  — систему обычных источников.

### 3. Инвариантность уравнений движения, интегралы и гамильтоновость

При произвольных комплексных интенсивностях  $A_k$  уравнения (2.5) инвариантны относительно группы движений плоскости  $E(2)$ . Инвариантность относительно трансляций приводит к существованию двух линейных интегралов, которые в комплексной форме могут быть записаны в виде

$$Z = \sum_{k=1}^n A_k \bar{z}_k = \text{const.} \tag{3.1}$$

Для случая обычных вихрей и источников получаются известные интегралы центра завихренности и центра дивергенции [1, 2]:

$$\begin{aligned} (\text{для вихрей}) \quad Q_v &= \sum \Gamma_k x_k = \text{const}, & P_v &= \sum \Gamma_k y_k = \text{const}, \\ (\text{для источников}) \quad Q_s &= \sum K_k x_k = \text{const}, & P_s &= \sum K_k y_k = \text{const}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В общем случае точка  $Z$  (3.1) определяет *центр интенсивностей*. Ясно, что если  $\sum A_k \neq 0$ , то выбором начала системы координат можно добиться, чтобы  $Z = 0$ .

В отличие от вихревой динамики наличие вращательной симметрии, которой соответствует поле симметрий вида  $\hat{u} = \sum_{k=1}^n \left( x_k \frac{\partial}{\partial x_k} - y_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right)$ , в общем случае не приводит к существованию дополнительного интеграла. В этом случае выполняется лишь дифференциальное соотношение вида

$$\sum_k A_k z_k \dot{\bar{z}}_k = \sum_{k,l} A_k A_l. \tag{3.3}$$

Для вихрей из этого соотношения получается известный интеграл момента

$$I_v = \sum_{k=1}^n \Gamma_k (x_k^2 + y_k^2) = \text{const},$$

а для источников получаются соотношения

$$\sum K_k (\dot{x}_k y_k - x_k \dot{y}_k) = 0, \quad \sum K_k (\dot{x}_k x_k + y_k \dot{y}_k) = \sum_{k < l} K_k K_l.$$

Таким образом, для источников имеется неавтономный (т. е. явно содержащий время) интеграл

$$I_s = \sum K_k(x_k^2 + y_k^2) - 2 \left( \sum_{k < l} K_k K_l \right) t = \text{const.} \quad (3.4)$$

Этот интеграл обобщается также на случай пропорциональности интенсивностей  $K_l = \mu \Gamma_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ ,  $\mu = \text{const.}$  Ясно, что в случае  $\sum_{k, l} K_k K_l = 0$  для источников получаем обычный автономный интеграл. В общем случае вихреисточников соотношение (3.3) не задает даже неавтономного интеграла.

Несложно показать, что дивергенция правой части уравнений (2.5) обращается в нуль; следовательно, справедливо

**Предложение 1.** *Уравнения движения вихреисточников сохраняют стандартную (то есть обладающую постоянной плотностью) инвариантную меру.*

Как это было сказано выше, в частных случаях вихрей и источников уравнения (2.5) допускают еще один дополнительный интеграл  $H$  и, кроме того, могут быть записаны в гамильтоновой форме:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\}, \quad \dot{y}_i = \{y_i, H\}.$$

Для вихрей это представление хорошо известно, гамильтониан и скобка Пуассона имеют вид

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln |z_i - z_j|^2, \quad \{x_i, y_j\} = \Gamma_i^{-1} \delta_{ij}. \quad (3.5)$$

Для источников аналогичное представление указано в работе [2]:

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{k < l} K_k K_l \arctg \frac{y_k - y_l}{x_k - x_l}, \quad \{x_i, y_j\} = K_k^{-1} \delta_{ij}. \quad (3.6)$$

Интеграл (3.6) был ранее указан в работе [1]. Как и в случае вихрей, интегралы движения (3.2) и (3.4) неинволютивны, а коммутируют следующим образом:

$$\{Q_s, P_s\} = \sum_i K_i, \quad \{I_s, Q_s\} = -2P_s, \quad \{I_s, P_s\} = 2Q_s. \quad (3.7)$$

Из соотношений (3.4) и (3.7) на основании теоремы Лиувилля можно сделать следующее заключение.

**Предложение 2.** Если в задаче о движении трех источников  $\sum_i K_i = 0$  либо  $\sum_{i,j} K_i K_j = 0$ , то в этих случаях система вполне интегрируема.

Действительно, если  $\sum_i K_i = 0$ , то имеется три инволютивных интеграла, например,  $Q_s, P_s, H$ , а если  $\sum_{i,j} K_i K_j = 0$ , то такими интегралами являются  $I_s, Q_s^2 + P_s^2, H$ .

Кроме того, для случая четырех источников получаем

**Предложение 3.** Пусть в задаче четырех источников  $\sum_i K_i = \sum_{i,j} K_i K_j = 0$ , тогда на инвариантном многообразии, определяемом соотношением  $Q_s = P_s = 0$ , система (2.5) вполне интегрируема.

Действительно, в этом случае имеются три автономных независимых интеграла  $Q_s, P_s, I_s$ , которые находятся в инволюции на указанном многообразии. Отметим, что для интегрируемости в задаче четырех вихрей достаточно потребовать  $Q_s = P_s = 0, \sum \Gamma_i = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для более общего случая  $K_k = \mu \Gamma_k, k = 1, \dots, n, \mu = \text{const}$  предложения 2, 3 допускают естественное обобщение. Это следует из того, что неавтономный интеграл (3.4) и коммутационные соотношения (3.7) также обобщаются.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для общего случая вихреисточников можно ввести комплексную функцию

$$\mathcal{H} = \sum A_k A_l \ln(z_k - z_l),$$

удовлетворяющую соотношениям [1]:

$$A_k \frac{d\bar{z}_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_k}, \quad \bar{A}_k \frac{dz_k}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_k}.$$

#### 4. Движение двух вихреисточников

Задача двух вихреисточников интегрируема в квадратурах, а ее частные случаи хорошо известны.

**1) Два вихря [5].** Если  $\Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0$ , то оба вихря движутся по концентрическим окружностям вокруг общего центра завихренности с координатами  $\frac{\Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}$ , оставаясь с ним на одной прямой, и угловая скорость вращения равна  $\omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi d^2}$ , где  $d$  – взаимное расстояние.

Если  $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$ , то вихри движутся поступательно, перпендикулярно прямой, соединяющей их, со скоростью  $v = \frac{\Gamma_1}{2\pi d}$ .

**2) Два источника** [1, 2]. Если  $K_1 + K_2 \neq 0$ , источники движутся по одной прямой, неподвижной в пространстве, приближаясь к центру интенсивности с координатами  $\frac{K_1 z_1 + K_2 z_2}{K_1 + K_2}$ , а квадрат их взаимного расстояния изменяется по закону  $d^2 = d_0^2 + 2(K_1 + K_2)t$ .

Если  $K_1 + K_2 = 0$ , то источники движутся поступательно вдоль неподвижной прямой с сохранением взаимного расстояния, и их скорость равна  $v = \frac{K_1}{2\pi d}$ .

**3) Два произвольных вихреисточника** [11]. Уравнения движения в этом случае имеют вид

$$\dot{z}_1 = \frac{A_2}{z_1 - z_2}, \quad \dot{z}_2 = \frac{A_1}{z_1 - z_2}. \quad (4.1)$$

Пусть  $A_1 + A_2 \neq 0$ , без ограничения общности положим, что центр интенсивностей (3.1) находится в начале координат, то есть

$$\bar{A}_1 z_1 + \bar{A}_2 z_2 = 0.$$

Выражая отсюда координаты каждой частицы и переходя к полярным координатам  $z_i = \rho_i e^{i\varphi_i}$ ,  $i = 1, 2$ , получим

$$\rho_k \dot{\rho}_k = a_k, \quad \rho_k^2 \dot{\varphi}_k = -b_k, \quad k = 1, 2,$$

где  $a_k + ib_k = (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)^{-1} |A_l|^2$ ,  $k \neq l$ . Решая эти уравнения, находим закон движения:

$$r_i^2 = C_i^{(0)} + 2a_i t, \quad \varphi_i = \varphi_i^{(0)} - \frac{b_i}{2a_i} \ln(C_i^{(0)} + 2a_i t), \quad (4.2)$$

где  $\varphi_i^{(0)}$ ,  $C_i^{(0)}$  — постоянные интегрирования. Таким образом, уравнения (4.1) интегрируемы в квадратурах.

*При этом траектории вихреисточников представляют собой спирали с бесконечным числом витков вокруг общего центра интенсивностей.*

Если  $A_1 + A_2 = 0$ , то, полагая  $Z = \bar{A}_1 z_1 + \bar{A}_2 z_2$ , находим, что

$$z_2 = z_1 - Z/\bar{A}_1, \quad \dot{z}_1 = -\frac{|A_1|^2}{Z} = \text{const},$$

следовательно вихреисточники движутся с постоянной скоростью по параллельным прямым, расположенным теперь под некоторым углом  $\alpha$  ( $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Gamma_1}{K_1}$ ) к отрезку, соединяющему их.

Любопытно, что уравнения (4.1) обладают также интегралом типа энергии, который является некоторой суперпозицией интегралов (3.5) и (3.6):

$$H = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{4\pi} \ln |z_1 - z_2|^2 + \frac{(K_1 + K_2)}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \quad (4.3)$$

Как известно, наличие трех интегралов в четырехмерной системе (в данном случае это интегралы  $X = \operatorname{Re}(\bar{A}_1 z_1 + \bar{A}_2 z_2)$ ,  $Y = \operatorname{Im}(\bar{A}_1 z_1 + \bar{A}_2 z_2)$  и  $H$ ) приводит к тому, что такая система может быть представлена в гамильтоновой форме [3]. Если в качестве гамильтониана выбрать функцию  $H$  (4.3), то соответствующая скобка Пуассона задается соотношением

$$\{f, g\} dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = \varkappa df \wedge dg \wedge dX \wedge dY, \quad (4.4)$$

$$\varkappa = \left( (K_1 + K_2)^2 + (\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 \right)^{-1}.$$

В явном виде находим

$$\{x_i, y_i\} = \varkappa(K_j^2 + \Gamma_j^2), \quad \{x_i, y_j\} = -\varkappa(K_i K_j + \Gamma_i \Gamma_j), \quad (4.5)$$

$$\{x_i, x_j\} = \{y_i, y_j\} = \varkappa(K_i \Gamma_j - K_j \Gamma_i), \quad i \neq j.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вообще говоря, система (4.1) может быть представлена в гамильтоновой форме тремя различными способами, но при этом получаются непостоянные скобки Пуассона.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Любопытно, что гамильтоновость в рассматриваемом случае не препятствует слиянию вихреисточников (при  $a_i < 0$ ) за конечное время.

## 5. Система трех источников

**Понижение порядка.** Хорошо известно, что система трех вихрей на плоскости интегрируема (по Лиувиллю), при этом ее фазовое пространство в компактном случае расслоено на двумерные торы, заполненные квазипериодическими движениями. В этом случае для исследования можно использовать методы качественного анализа гамильтоновых систем (геометрическая интерпретация, построение бифуркационных диаграмм и пр. — см. [6, 7], где имеется подробная библиография).

Задача о движении трех источников, вообще говоря, не является интегрируемой в квадратурах (по Лиувиллю), покажем, что, тем не менее, ее

поведение является регулярным. В этом случае имеем гамильтонову систему со скобкой Пуассона  $\{x_i, y_j\} = K_i^{-1} \delta_{ij}$  и гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{i < j}^3 K_i K_j \theta_{ij}, \quad \theta_{ij} = \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}. \quad (5.1)$$

Как и в общем случае, уравнения движения этой системы инвариантны относительно группы  $E(2)$  (группа движений плоскости). Согласно общей теории понижения порядка [3], для инвариантов группы симметрии получается замкнутая система. В нашем случае (как и в динамике вихрей) в качестве инвариантов удобно выбрать взаимные расстояния между источниками  $M_i = |z_j - z_k|^2$ ,  $i \neq j \neq k \neq i$ . Получим

$$\dot{M}_k = 2 \left( \sum_l K_l \right) + K_k (M_k (M_i^{-1} + M_j^{-1}) - M_i M_j^{-1} - M_j M_i^{-1}). \quad (5.2)$$

Отметим, что такая редукция на инварианты группы симметрий в данном случае отличается от традиционной гамильтоновой редукции. Это связано с тем, что система (5.1) не допускает автономного интеграла, и (гамильтоново) векторное поле вращений  $\hat{u}$  связано с неавтономным интегралом (3.4), который линеен по времени.

В гамильтоновой форме возможна редукция лишь на одну степень свободы (по интегралам (3.1)). При этом взаимные расстояния  $M_i$  необходимо дополнить одним из углов  $\Theta = \theta_{12}$ ; гамильтониан приведенной системы и скобку Пуассона можно представить в форме:

$$H = \left( \sum_{i < j} K_i K_j \right) \Theta - K_2 K_3 \arccos \left( \frac{M_3 + M_1 - M_2}{2\sqrt{M_1 M_3}} \right) + \\ + K_1 K_2 \arccos \left( \frac{M_3 + M_2 - M_1}{2\sqrt{M_2 M_3}} \right),$$

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} K_k^{-1} \Delta, \quad \{M_3, \Theta\} = 2(K_1^{-1} + K_2^{-1}),$$

$$\{M_2, \Theta\} = K_2^{-1} M_3^{-1} (M_3 + M_1 - M_2),$$

$$\{M_1, \Theta\} = K_1^{-1} M_3^{-1} (M_3 + M_2 - M_1),$$

где  $\Delta = \text{Im}(z_1 - z_3)(\bar{z}_2 - \bar{z}_3) - \text{удвоенная ориентированная площадь треугольника, образованного источниками, которую можно выразить через взаимные расстояния с помощью формулы Герона:$

$$4\Delta^2 = 2(M_1 M_2 + M_2 M_3 + M_3 M_1) - M_1^2 - M_2^2 - M_3^2. \quad (5.3)$$

Описывающее эволюцию  $\Theta$  уравнение

$$\dot{\Theta} = K_3 \frac{\Delta(M_1 - M_2)}{M_1 M_2 M_3}, \tag{5.4}$$

полностью определяет абсолютную динамику источников (оставшиеся углы  $\theta_{23}, \theta_{13}$  находятся с помощью теоремы косинусов). Таким образом, гамильтонова редукция в данном случае является простым ограничением на уровень интегралов (3.1).

Рассмотрим уравнения (5.2) подробнее. С помощью прямых вычислений несложно показать, что система (5.2) также обладает неавтономным интегралом

$$\sum_{i < j} K_i K_j M_k - 2 \left( \sum K_k \right) \left( \sum_{i < j} K_i K_j \right) t = \text{const} \tag{5.5}$$

и сохраняет инвариантную меру с плотностью

$$\rho = (2\Delta)^{-1} = (2M_1 M_2 + 2M_2 M_3 + 2M_3 M_1 - M_1^2 - M_2^2 - M_3^2)^{-1/2}.$$

Вследствие однородности уравнения (5.2) также допускают однопараметрическую группу симметрий  $M_i \rightarrow M_i, t \rightarrow \lambda t$ , что позволяет еще понизить порядок при помощи замены переменных и времени следующего вида (так называемая процедура проективизации):

$$M_1 = xM_3, \quad M_2 = yM_3, \quad dt = M_3 xy d\tau.$$

Получим

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{d\tau} = x((K_1 - K_3)y^2 - K_3x^2 + (K_1 + 2K_2 + 2K_3)xy - \\ &\quad - (K_1 - K_3)x - (2K_1 + 2K_2 + K_3)y + K_1), \\ y' &= \frac{dy}{d\tau} = y((K_2 - K_3)x^2 - K_3y^2 + (2K_1 + K_2 + 2K_3)xy - \\ &\quad - (2K_1 + 2K_2 + K_3)x - (K_2 - K_3)y + K_2). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Таким образом, качественный анализ приведенной системы сводится к исследованию системы на плоскости (5.6). Вследствие этого динамика системы (5.1) является регулярной, хотя не обладает полным набором глобальных интегралов.

**Гомотетические конфигурации.** В вихревой динамике важную роль при качественном анализе системы играли стационарные конфигурации, которым соответствовали неподвижные точки приведенной системы. Аналогичную роль в динамике источников играют *гомотетические конфигурации* (эта терминология заимствована из небесной механики), то есть конфигурации, остающиеся подобными во все моменты времени. Это условие можно представить в форме

$$(M_i M_j^{-1})' = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.7)$$

Другими словами, этим конфигурациям соответствуют неподвижные точки системы (5.6).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Легко видеть, что у системы (5.2), вследствие наличия интеграла (5.5), нет неподвижных точек.

Справедливо следующее простое

**Предложение 4.** *Единственно возможными гомотетическими конфигурациями в системе трех источников являются:*

- 1) *равносторонняя конфигурация, когда источники образуют равносторонний треугольник:  $M_1 = M_2 = M_3$ ; вихри движутся вдоль неподвижных прямых, пересекающихся в центре интенсивности, и выполнено равенство*

$$\dot{M}_i = 2 \sum_l K_l;$$

- 2) *коллинеарные конфигурации, когда вихри лежат на одной неподвижной прямой:  $M_1 = z^2 M_3$ ,  $M_2 = (1 - z)^2 M_3$ , где  $z$  является корнем уравнения третьей степени*

$$p(z) = (K_1 + K_2)z^3 - (2K_1 + K_2)z^2 - (K_2 + 2K_3)z + K_2 + K_3 = 0, \quad (5.8)$$

*при этом*

$$\dot{M}_3 = 2 \frac{(K_1 + K_2)z(z - 1) - K_3}{z(z - 1)} = \text{const.}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Согласно (5.7), гомотетические конфигурации являются неподвижными точками системы (5.6), причем случаи  $x = 0$  либо  $y = 0$  соответствуют особенностям исходной системы, когда одно из расстояний обращается в нуль, и в данном случае должны быть исключены из рассмотрения.

Остальные неподвижные точки находятся следующим образом. Заметим, что уравнение  $K_3 \frac{x'}{x} + (K_1 - K_3) \frac{y'}{y} = 0$  содержит переменную  $y$  линейно; разрешая это уравнение относительно  $y$  и подставляя  $x' = 0$ , после сокращений получим уравнение, определяющее гомотетическую конфигурацию:

$$(x - 1)((K_1 + K_2)^2 x^3 - (4K_1^2 + 3K_2^2 + 6K_1K_2 + 4K_1K_3 + 4K_2K_3)x^2 + (3K_2^2 + 4K_3^2 + 4K_1K_3 + 4K_1K_2 + 6K_2K_3)x - (K_2 + K_3)^2) = 0. \quad (5.9)$$

Отсюда находим одно решение  $x = 1$ , которому, как легко проверить, соответствует  $y = 1$ , то есть это решение соответствует равносторонней конфигурации. Оставшееся, кубическое по  $x$ , уравнение (5.9) после подстановки  $x = z^2$  может быть представлено в виде

$$p(z)p(-z) = 0,$$

где  $p(z)$  — полином (5.8). Подставляя найденное для  $x$  решение в уравнение для  $y$ , получим  $y = (1 \pm z)^2$ , то есть это решение соответствует коллинеарной конфигурации (с различным упорядочением источников).

С помощью уравнения (5.4) находим, что в обоих случаях  $\dot{\Theta} = 0$ , (либо вследствие  $M_1 = M_2$ , либо  $\Delta = 0$ ), то есть источники движутся вдоль прямых, неподвижных в пространстве. Скорости эволюции квадратов расстояний получим непосредственно из уравнений (5.2) после подстановки найденных решений. ■

**Геометрическая интерпретация и качественный анализ.** Известно, что в динамике трех вихрей возможен полный качественный анализ как движения для приведенной системы, так и абсолютного движения [7]. При этом удобным инструментом исследования является проекция фазового потока на плоскость интеграла момента в пространстве взаимных расстояний  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Покажем, что в случае трех источников аналогичная проекция также существует; соответствующая плоская система допускает полный качественный анализ и полностью описывает как относительную, так и абсолютную динамику источников.

Запишем неавтономный интеграл (5.5) системы в форме

$$D - 2 \left( \sum K_i \right) \left( \sum K_i^{-1} \right) t = \text{const}, \quad D = \sum K_i^{-1} M_i, \quad (5.10)$$

и выполним проективизацию и замену времени по формулам

$$x_i = \frac{M_i}{D}, \quad d\tau = \frac{dt}{D}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Можно получить уравнения движения для проективных переменных в виде

$$x'_k = 2 \sum K_i + K_k(x_k(x_i^{-1} + x_j^{-1}) + x_i^{-1}x_j - x_j^{-1}x_i) - 2 \left( \sum K_i \right) \left( \sum K_i^{-1} \right) x_k, \quad k \neq i \neq j \neq k, \quad (5.11)$$

причем очевидно, что траектории системы (5.11), соответствующие траекториям исходной системы, расположены на инвариантном многообразии

$$\sum_{i=1}^3 K_i^{-1} x_i = 1, \quad (5.12)$$

задающем плоскость в трехмерном пространстве  $x_1, x_2, x_3$ .

Кроме того, вследствие соотношения Герона (5.3) и условий  $M_i > 0$ , область возможных движений заключена внутри одной половины конуса, определенного неравенством

$$2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \geq 0. \quad (5.13)$$

Таким образом, граница области возможных движений на плоскости (5.12), определяемая неравенством (5.13), представляет собой кривую второго порядка одного из трех типов:

- 1) эллипс (если  $(\sum K_i)/(K_1K_2K_3) > 0$ );
- 2) гипербола (если  $(\sum K_i)/(K_1K_2K_3) < 0$ );
- 3) парабола (если  $\sum K_i = 0$ ).

Между траекториями системы (5.11) в рассматриваемой области и траекториями приведенной системы (5.2) трех источников имеется взаимно-однозначное соответствие. Тем самым мы построили проекцию фазового потока системы трех источников, полностью идентичную аналогичной проекции в динамике вихрей (с точностью до замены  $K_i \rightarrow \Gamma_i$ ) [6, 7].

Рассмотрим теперь подробнее строение фазового портрета в первом случае, когда граница области возможных движений — эллипс (см. рис. П9.2, П9.3), этот случай по аналогии с динамикой вихрей будем называть *компактным*; очевидно, что при этом все соотношения  $M_i/M_j$  остаются ограниченными во все моменты времени. Второй (*некомпактный*) случай может быть исследован аналогично; однако последний, третий, случай (наряду со случаем  $\sum K_i^{-1} = 0$ ) требует отдельного рассмотрения, поскольку, согласно (5.10), при этом имеется автономный интеграл.

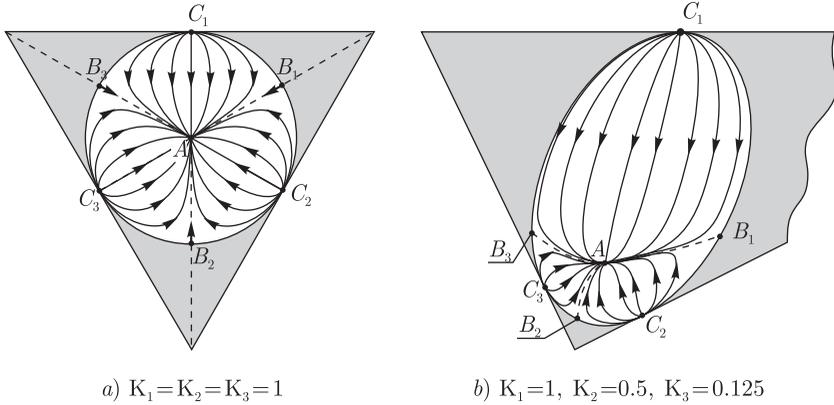


Рис. П9.2. Траектории системы (5.11) на плоскости (5.12) в компактном случае при условии  $1^\circ$ .

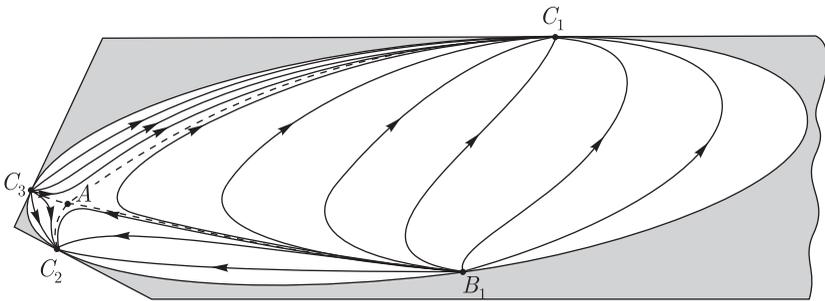


Рис. П9.3. Траектории системы (5.11) на плоскости (5.12) в компактном случае при условии  $2^\circ$  ( $K_1 = 1, K_2 = 0.5, K_3 = 0.125$ ).

Строение фазового потока системы на плоскости (5.12) полностью определяется своими особенностями, неподвижными точками и сепаратрисами, соединяющими неподвижные точки. С помощью предложения 4 можно показать, что рассматриваемая система на плоскости имеет либо четыре неподвижных точки, которые обозначим  $A, B_1, B_2, B_3$  (рис. П9.2), либо две —  $A, B_1$  (рис. П9.3). Точка  $A$  соответствует равносторонней гомотетической конфигурации и расположена внутри области (эллипса); точки  $B_1, B_2, B_3$  лежат на границе области и определяют коллинеарные гомотетические конфигурации (т.к. ясно, что для них  $\Delta = 0$ ). Кроме того, система (5.11) имеет (в рассматриваемой области) три особенности  $C_1, C_2, C_3$ , которые

расположены на границе (5.13) в точках касания плоскостей  $x_i = 0$ ; они соответствуют ситуации, когда пара источников сливается.

Как и в динамике вихрей, в компактном случае выделяются два подслучая, в которых портреты качественно отличаются:

- 1°. Все интенсивности одного знака;
- 2°. Две интенсивности положительны (отрицательны), а третья отрицательна (положительна), при этом  $K_1 + K_2 + K_3 < 0 (> 0)$ .

В случае 1°, как видно на рисунке П9.2, коллинеарные конфигурации являются седлами, а равносторонняя конфигурация является узлом (при  $K_i < 0$  — сток, а при  $K_i > 0$  — источник), в который входят все три сепаратрисы коллинеарных точек. Если  $K_i < 0$ , все траектории, выходя из особенностей  $C_1, C_2, C_3$  и не покидая области, ограниченной сепаратрисами коллинеарных точек  $B_1, B_2, B_3$ , сливаются в неподвижной точке  $A$ . (При  $K_i > 0$  необходимо обратить направление движения по этим же траекториям.)

В случае 2° единственная неподвижная точка  $B_1$  (соответствующая коллинеарной конфигурации) при  $K_i < 0$  является источником; равносторонней конфигурации теперь соответствует седло, три сепаратрисы которого соединяются с особенностями  $C_1, C_2, C_3$ , а четвертая — с неподвижной точкой  $B_1$ . Характерный фазовый портрет приведен на рисунке П9.3.

## 6. Гомотетические конфигурации для $n$ источников

Как уже отмечалось выше, в динамике  $n$  точечных вихрей важную роль играют простейшие периодические решения — стационарные конфигурации, когда вихри, не меняя взаимного расположения, равномерно вращаются вокруг общего центра завихренности. Оказывается, что и в динамике  $n$  точечных источников имеются аналогичные решения, только при этом точки движутся вдоль неподвижных прямых линий, проходящих через центр дивергенции источников, причем их конфигурация остается подобной во все моменты времени. Эти конфигурации мы называем *гомотетическими*.

Покажем, что справедливо следующее

**Предложение 5.** *Стационарные конфигурации динамики  $n$  точечных вихрей и гомотетические конфигурации динамики  $n$  точечных источников находятся во взаимно-однозначном соответствии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Действительно, для всякой стационарной конфигурации вихрей в системе координат с началом в центре завихренности координаты вихрей имеют вид

$$z_k(t) = \zeta_k e^{i\Omega t}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где  $\Omega$  — постоянная угловая скорость вращения конфигурации, а постоянные комплексные числа  $\zeta_k$  удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$-2\pi\Omega\bar{\zeta}_k = \sum_{l \neq k}^n \frac{\Gamma_l}{\zeta_k - \zeta_l}, \quad k = 1 \dots n, \tag{6.1}$$

где  $\Gamma_l$  — интенсивности вихрей  $\left( A_l = \frac{i\Gamma_l}{2\pi} \right)$ .

Для случая источников  $\left( A_l = \frac{K_l}{2\pi} \right)$  аналогично находим частные решения, задающие гомотетические конфигурации в виде

$$z_k = \sqrt{c - 2\Omega t} \zeta_k, \quad k = 1 \dots n,$$

где  $\zeta_k$  — комплексные числа, удовлетворяющие системе (6.1), в которой необходимо произвести замену  $\Gamma_l \rightarrow K_l$ . ■

Отметим, что решение системы алгебраических уравнений (6.1) не известно, и задача отыскания гомотетических конфигураций источников тоже не может быть полностью разрешена. Различные частные результаты, относящиеся к стационарным конфигурациям вихревой динамике, собраны в [7].

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В небесной механике гомотетические конфигурации являются частным случаем более широкого класса гомографических конфигураций, когда точки во все моменты времени образуют подобные конфигурации, которые вращаются вокруг общего центра масс. В динамике источников подобных конфигураций, отличных от гомотетических, по-видимому, не существует. Вопрос о существовании подобных конфигураций в случае вихреисточников, насколько нам известно, не рассматривался.

## 7. Вихреисточники на сфере

Рассмотрим возможное обобщение уравнений движения вихреисточников (и других особенностей в потоке жидкости) на случай сферы. Для

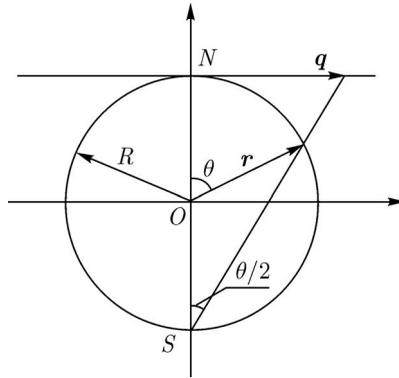


Рис. П9.4.

этого выполним стереографическую проекцию сферы на плоскость и запишем уравнения движения вихрей на сфере [6] в комплексной форме.

При стереографической проекции из южного полюса на плоскость, проходящую через северный полюс (см. рис. П9.4), декартовы координаты точки на сфере выражаются формулами

$$x = \frac{\xi}{1 + \lambda(\xi^2 + \eta^2)}, \quad y = \frac{\eta}{1 + \lambda(\xi^2 + \eta^2)}, \quad z = R \frac{1 - \lambda(\xi^2 + \eta^2)}{1 + \lambda(\xi^2 + \eta^2)}, \quad (7.1)$$

где  $\lambda = (2R)^{-2}$  — кривизна. Используя комплексные координаты вихрей  $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , на рассматриваемой плоскости, уравнения движения вихрей на сфере можно представить в форме

$$\dot{\zeta}_k = \frac{(1 + \lambda|\zeta_k|^2)^2}{2\pi} \left( \sum_{l \neq k}^n \frac{i\Gamma_l}{\zeta_k - \zeta_l} - \left( \sum_{l \neq k}^n i\Gamma_l \right) \frac{\lambda \bar{\zeta}_k}{(1 + \lambda|\zeta_k|^2)} \right). \quad (7.2)$$

Определяемая вихрями скорость жидкости в каждой точке сферы имеет вид, аналогичный (7.2):

$$\dot{\zeta} = \frac{(1 + \lambda|\zeta_k|^2)^2}{2\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{i\Gamma_l}{\zeta - \zeta_l} - \left( \sum_{l=1}^n i\Gamma_l \right) \frac{\lambda \bar{\zeta}}{(1 + \lambda|\zeta_k|^2)} \right). \quad (7.3)$$

Несложно показать, что дивергенция этого поля скоростей равна нулю, а завихренность постоянна в каждой точке сферы  $\zeta \neq \zeta_k$  и равна

$$\omega = \frac{1}{4\pi R^2} \sum_{k=1}^n \Gamma_k. \quad (7.4)$$

По аналогии с плоским случаем заменим теперь интенсивности  $i\Gamma_k$  комплексными числами  $A_k = K_k + i\Gamma_k$ ; получим уравнения, описывающие движения особенностей, которые можно интерпретировать как вихреисточники на сфере:

$$\dot{\zeta}_k = \frac{(1 + \lambda|\zeta_k|^2)^2}{2\pi} \left( \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\zeta_k - \zeta_l} - \left( \sum_{l \neq k} A_l \right) \frac{\lambda \bar{\zeta}_k}{(1 + \lambda|\zeta_k|^2)} \right). \quad (7.5)$$

В отличие от плоского случая, порождаемое особенностями (7.5) поле скоростей (которое вычисляется по формуле (7.3) с заменой  $i\Gamma_l \rightarrow A_l$ ) помимо вихреисточников, расположенных в точках  $\zeta_k$ , имеет в каждой точке сферы  $\zeta \neq \zeta_k$  ненулевую завихренность (7.4) и дивергенцию, которая равна

$$\kappa = -\frac{1}{4\pi R^2} \sum_{l=1}^n K_l. \quad (7.6)$$

Ясно, что подобные поправки в уравнении движения жидкости на сфере определяются компактностью сферы, и если где-то возникает (точечный) источник или вихрь, то одновременно где-то должен возникнуть либо точечный сток, либо возможно (равномерное) распределение стоков по поверхности сферы. Уравнения (7.5) пока совершенно не изучены. На сегодняшний день неизвестно даже, имеют ли они хотя бы один первый интеграл и являются ли гамильтоновыми.

## Литература

- [1] Фридман А. А., Полубаринова П. Я. *О перемещающихся особенностях плоского движения несжимаемой жидкости*. Геофизический сборник, 1928, с. 9–23.
- [2] Богомолов В. А. *Движение идеальной жидкости постоянной плотности при наличии стоков*. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976, № 4, с. 21–27.

- [3] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике*. Москва–Ижевск: НИЦ РХД, 1999.
- [4] Кирхгоф Г. *Механика. Лекции по математической физике*. М.: АН СССР, 1962. Пер. с нем. Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik*. Leipzig: Mechanik, 1874.
- [5] Helmholtz H. *Über Integrale hydrodinamischen Gleichungen welche den Wirbelbewegungen entsprechen*. J. Rein. Angew. Math., 1858, v. 55, S. 25–55, см. также русский перевод с комментариями С. А. Чаплыгина в книге: Гельмгольц Г. *Основы вихревой теории*. — Москва–Ижевск: ИКИ, 2002.
- [6] Newton P. K. *The N-Vortex problem: Analytical Techniques*, Springer, 2001.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Математические методы динамики вихревых структур // Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей / ред. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, М. А. Соколовский: Сб. работ. — Москва–Ижевск: ИКИ, 2003, с. 17–178.*
- [8] Jones S. W., Aref H. *Chaotic advection in pulsed source-sink systems*. Phys. Fluids, 1988, v. 31(3), p. 469–485.
- [9] Stremmer M., Haselton F. R., Aref H. *Designing for chaos: applications of chaotic advection at the microscale*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 2004, v. 362, p. 1019–1036.
- [10] Гряник В. М. *Теоретические модели динамики локализованных квази-геострофических вихрей в атмосфере и океане. Исследования вихревой динамики и энергетики атмосферы и проблемы климата*, Л.: Гидрометеоиздат., 1990, с. 31–60.
- [11] Novikov A. E., Novikov E. A. *Vortex-sink dynamics*, Phys. Rev. E54, 1996, p. 3681–3686.
- [12] Noguchi T., Yukimoto S., Kimura R., Niino H. *Structure and instability of a sink vortex*, Proc. PSFVIP-4, 2003, Chamonix, France.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 10

# Неинтегрируемость системы взаимодействующих частиц с потенциалом Дайсона<sup>1</sup>

1. Пусть динамика системы  $n$  взаимодействующих частиц равной массы описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum y_i^2 + \sum_{i < j} V(x_i - x_j). \quad (1)$$

Здесь  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — координаты,  $y_1, y_2, \dots, y_n$  — импульсы частиц,  $V$  — потенциальная энергия взаимодействия. Мы будем, следуя Дайсону [7], рассматривать случай, когда

$$V(z) = \ln |\sin z|. \quad (2)$$

Системы с таким потенциалом изучались в работе [7] в связи с анализом статистических свойств уровней энергии одномерного классического кулоновского газа. Аналогично ситуации, отмеченной Калоджеро для системы точечных вихрей на плоскости [5], положения равновесия системы (1), (2) определяют стационарные коллинеарные конфигурации на сфере (точечные вихри располагаются в экваториальной плоскости, равномерно вращающейся вокруг некоторой оси, также лежащей в этой плоскости).

Поскольку функция  $V$   $2\pi$ -периодична (она даже  $\pi$ -периодическая), то можно считать, что частицы движутся по окружности. Система с гамильтонианом (1) всегда допускает два интеграла:

$$H, F = \sum y_i.$$

---

<sup>1</sup>Совместно с В. В. Козловым. Доклады РАН, 1999, т. 366, № 1, с. 30–31.

Отысканию условий на потенциал  $V$ , при котором рассматриваемая система вполне интегрируема (допускает набор из  $n$  независимых интегралов, полиномиальных по импульсам  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ), посвящено большое число работ (см. обзоры в [3, 5]). Если  $V$  — непостоянная аналитическая периодическая функция без сингулярностей, то при  $n \geq 3$  система с гамильтонианом (1) не может быть вполне интегрируемой [2, 4]. Потенциал Дайсона (2) имеет вещественную логарифмическую особенность. Задача об интегрируемости этой системы обсуждалась в работе [6].

Как отметил Дайсон, система с потенциалом (2) допускает семейство равновесий

$$x_j^0 = x_0 + \frac{\pi j}{n}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Частоты малых колебаний, вычисленные в [9],

$$\omega_s^2 = 2s(n-s), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Равенство  $\omega_n = 0$  связано с неизолированностью равновесий (3).

**2.** Рассмотрим простейший нетривиальный случай, когда  $n = 3$ . С помощью интеграла момента  $F$  можно понизить число степеней свободы на единицу. Для этого перейдем к неинерциальной барицентрической системе отсчета с помощью канонического преобразования  $x, y \mapsto q, p$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= p_1 + p_3, & y_2 &= -p_1 + p_2 + p_3, & y_3 &= -p_2 + p_3, \\ q_1 &= x_1 - x_2, & q_2 &= x_2 - x_3, & q_3 &= x_1 + x_2 + x_3. \end{aligned}$$

С учетом равенства  $p_3 = 0$  и четности потенциала гамильтониан редуцированной системы имеет вид

$$p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V(q_1) + V(q_2) + V(q_1 + q_2). \quad (5)$$

Согласно (4), эта система имеет устойчивое равновесие  $q_1 = q_2 = \frac{\pi}{3}$  с равными частотами малых колебаний  $\omega_1 = \omega_2 = 2$ . Вычитая из потенциала  $\ln \frac{\sqrt{3}}{2}$ , можно считать, что в состоянии равновесия полная энергия равна нулю.

Естественно ожидать, что при малых положительных значениях полной энергии  $h$  система с потенциалом (2) будет демонстрировать интегрируемое поведение. Ситуация здесь точно такая же, как и в известной системе Хенона–Хейлеса ([9], см. также [3]). Применяя метод нормальных форм с учетом резонанса  $\omega_1 = \omega_2$ , можно найти квазиинтеграл, который очень медленно меняется со временем в окрестности положения равновесия (для системы Хенона–Хейлеса такую функцию вычислил Густавсон [8]).

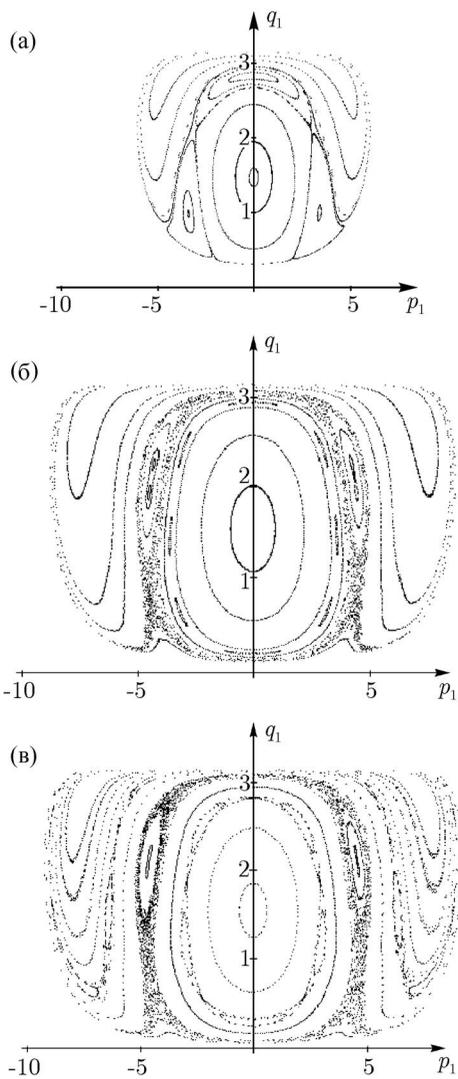


Рис. П10.1. Сечение Пуанкаре для энергии: а)  $H = 10$ , б)  $H = 20$ , в)  $H = 22$ .

3. Численные расчеты подтверждают это предположение. На рисунке 1а показано почти интегрируемое поведение системы при  $H = 10$ . Для больших  $H$  система хаотизируется в окрестности сепаратрис. При этом формальные ряды, определяющие квазиинтеграл, расходятся, и для больших  $H$  он не аппроксимирует поведение системы. Рисунки 1б, 1в соответствуют значениям энергии  $H = 20$  и  $H = 22$ , при которых начинается реальная стохастизация системы.

4. К задаче об интегрируемости системы взаимодействующих частиц с потенциалом Дайсона можно подойти с более простой точки зрения, считая канонические координаты  $x$  и  $y$  и время  $t$  комплексными переменными. Будем разыскивать первые интегралы в виде полиномов по импульсам с однозначными аналитическими коэффициентами (см. [2]). Ввиду логарифмической особенности потенциалов энергия  $H$  ветвится в комплексном фазовом пространстве, а функция  $F$ , конечно, будет однозначной.

Оказывается, интеграл момента  $F$  — единственный полиномиальный интеграл с однозначными коэффициентами в системе Дайсона. Это утверждение доказывается с помощью результатов работы [1].

Действительно, пусть  $F_j = y_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , — полный набор независимых интегралов в задаче о движении частиц по окружности без взаимодействия. Вычислим производные этих функций в силу гамильтоновой системы с гамильтонианом (1), (2):

$$\dot{F}_j = \sum_{k=1}^n \operatorname{ctg}(x_j - x_k), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (6)$$

Подставим теперь в правую часть этих равенств какое-нибудь решение «свободной» системы, например

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n}, \quad x_n = t.$$

Тогда правые части (6) будут мероморфными функциями на плоскости комплексного времени, причем  $n - 1$  точек  $t = \frac{\pi}{n}, \dots, t = \frac{(n-1)\pi}{n}$  будут простыми полюсами. Вычисляя вычеты в этих точках для функции  $(\dot{F})_t$ , нетрудно заметить, что они (как векторы  $\mathbb{C}^n$ ) линейно-независимы. Следовательно, согласно [1], рассматриваемая система может иметь только один однозначный полиномиальный первый интеграл.

## Литература

- [1] Козлов В. В. *Ветвление решений и полиномиальные интегралы уравнений динамики*. ПММ. 1998, т. 62, № 1, с. 3–11.
- [2] Козлов В. В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*. Ижевск: Изд-во Удм. ун-та. 1995.
- [3] Мозер Ю. *Лекции о гамильтоновых системах*. М.: Мир. 1973.
- [4] Переломов А. М. *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*. М.: Наука. 1990.
- [5] Calogero F. *Integrable many-body problems*. In: Lect. NATO Advanced Study Institute on Nonlinear Equations in Physics and Mathematics. Istanbul. 1977, p. 3–253.
- [6] Calogero F., Perelomov A. M. *Properties of certain matrices related to the equilibrium configuration of the one-dimensional many-body problems with the pair potentials  $v_1(x) = -\log|\sin x|$  and  $v_2(x) = 1/\sin^2 x$* . Commun. Math. Phys. 1978, v. 59, p. 109–2116.
- [7] Dyson F. J. *Statistical theory of the energy levels of complex systems*. I, II, III. J. Math. Phys. 1962, v. 3, № 1, p. 140–2156; p. 157–2165; p. 166–2175.
- [8] Gustavson F. *On the constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point*. Astron. J. 1966, v. 71, p. 670–2686.
- [9] Hénon M., Heiles C. *The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments*. Astron. J. 1964, v. 69, p. 73–279.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 11

# Динамика двух круговых цилиндров, взаимодействующих в идеальной жидкости<sup>1</sup>

### 1. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о плоскопараллельном движении пары круговых цилиндров в бесконечном объеме идеальной несжимаемой жидкости. Предполагается, что жидкость совершает безвихревое движение (т. е. циркуляция по замкнутому контуру, охватывающему оба цилиндра, равна нулю) и поκειται на бесконечности. Тем не менее, в общем случае циркуляции по контурам, охватывающим по отдельности каждый из цилиндров, неизменны, равны по величине и противоположны по знаку.

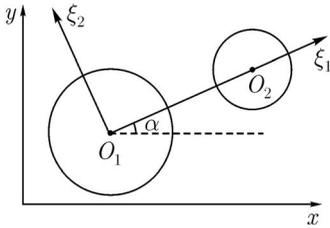


Рис. П11.1

Пусть координаты центров цилиндров в неподвижной декартовой системе координат на плоскости равны  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Свяжем с цилиндрами подвижную декартову систему координат  $O_1\xi_1\xi_2$ , где  $O_1$  — центр одного из цилиндров и ось  $O_1\xi_1$  всегда проходит через центр другого цилиндра  $O_2$  (рис. П11.1). Пусть  $(u_1, u_2)$  и  $(u_3, u_4)$  — координаты абсолютных скоростей точек  $O_1$  и  $O_2$  в подвижных осях. Положение подвижной системы координат относительно неподвижной определяется углом  $\alpha$  между осями  $x$  и  $\xi_1$ . Справедливы следующие (кинематические) соотношения:

координаты абсолютных скоростей точек  $O_1$  и  $O_2$  в подвижных осях. Положение подвижной системы координат относительно неподвижной определяется углом  $\alpha$  между осями  $x$  и  $\xi_1$ . Справедливы следующие (кинематические) соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha, & \dot{y}_1 &= u_1 \sin \alpha + u_2 \cos \alpha, \\ \dot{x}_2 &= u_3 \cos \alpha - u_4 \sin \alpha, & \dot{y}_2 &= u_3 \sin \alpha + u_4 \cos \alpha, \\ \dot{\alpha} &= \omega, & s\omega &= u_4 - u_2, & \dot{s} &= u_3 - u_1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>Совместно с С. М. Рамодановым, *Dynamic of two interacting cylinders in perfect fluid*, DCDS, v. 15, 2006.

Здесь  $\omega$  — угловая скорость вращения подвижной системы координат;  $s = |O_1O_2|$  — расстояние между центрами цилиндров. Пусть  $R_1, R_2$  — радиусы цилиндров, а  $m_1, m_2$  — их массы, кроме того положим плотность жидкости равной единице,  $\rho_f = 1$ .

Для вывода уравнений движения воспользуемся принципом Гамильтона об экстремальности действия для системы «тело+жидкость»

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T_{b+f} dt = 0,$$

где  $T_{b+f}$  — суммарная кинетическая энергия твердого тела и жидкости, выраженная через обобщенные координаты и скорости системы.

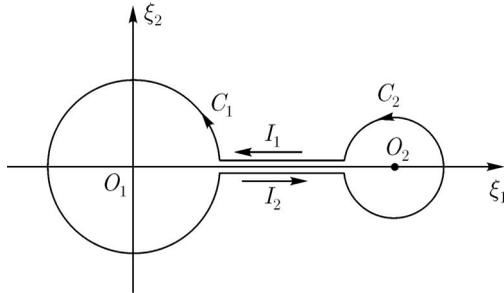


Рис. П11.2

Как известно [5, § 139], в данном случае сохраняется аналогия с динамической системой с конечным числом степеней свободы, если к координатам цилиндров  $(x_i, y_i)$  добавить еще одну обобщенную координату  $\chi$  — объем жидкости, протекающей через разрез, соединяющий цилиндры, так что обобщенная скорость  $\dot{\chi}$  задает расход через разрез (рис. П11.2). При этом предполагается, что разрез движется с цилиндрами. Как показано в [5, § 140],  $T_{b+f}$  — однородная квадратичная функция скоростей цилиндров и расхода  $\dot{\chi}$ , и переменная  $\chi$  — циклическая, причем

$$\frac{\partial T_{b+f}}{\partial \dot{\chi}} = \rho \Gamma = \text{const}, \tag{1.2}$$

где  $\rho$  — плотность жидкости (которую мы полагаем равной единице), а  $\Gamma$  — циркуляция по контуру, охватывающему один цилиндр (в нашем случае мы полагаем  $C_1$ ). Выполняя понижение порядка по циклической координате и исключая  $\dot{\chi}$  с помощью уравнения (1.2), получим функцию Рауса,

зависящую от координат и скоростей цилиндра и циркуляции  $\Gamma$ , в форме  $\mathcal{R} = T_{b+f} - \rho\Gamma\dot{\chi} = T_c - \Gamma^2\kappa(s) - \Gamma(\beta_1(s)u_1 + \beta_2(s)u_2) - \Gamma\gamma(s)\omega - \Gamma\delta(s)\dot{s}$ , где  $\beta_i(s)$  — расход жидкости через разрез, соединяющий цилиндры при условии, что  $u_i = 1$ ,  $u_j = \omega = \dot{s} = 0$ ,  $j \neq i$ ,  $\gamma(s)$  — аналогичный расход при условии  $\omega = 1$ ,  $u_i = \dot{s} = 0$ , и аналогично  $\delta(s)$  — расход при  $u_1 = u_2 = \omega = 0$ ,  $\dot{s} = 1$ , слагаемое  $\Gamma^2\kappa(s)$  представляет собой вклад в кинетическую энергию жидкости от чисто циркуляционного обтекания цилиндров. Функции  $T_c$  и  $\Gamma^2\kappa(s)$  являются составляющими кинетической энергии  $T_{b+f}$ , выраженной через координаты и скорости цилиндров, и циркуляцию  $\Gamma$  (но не через  $\dot{\chi}$ ). Снова используя [5], получим

$$T_{b+f} = T_c + \Gamma^2\kappa(s), \quad (1.3)$$

$$T_c = \frac{1}{2}(a_1(s)u_1^2 + a_2(s)u_2^2 + a_3(s)\omega^2 + a_4(s)\dot{s}^2) + b_1(s)u_2\omega + b_2(s)u_1\dot{s}.$$

Отметим, что  $T_{b+f}$  не содержит перекрестных членов по скоростям и циркуляции  $\Gamma$ .

Уравнения движения представляются в форме уравнений Пуанкаре [6] на группе  $E(2) \otimes \mathbb{R}^1$ , являющейся прямым произведением группы движений плоскости и одномерной абелевой группы,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} - \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} + \omega \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} + u_1 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь в качестве позиционных переменных взяты координаты на группе  $(x_1, x_2, \alpha, s)$ , так что  $(u_1, u_2, \omega, \dot{s})$  — компоненты скоростей в базисе соответствующих левоинвариантных векторных полей. Механический смысл уравнений (1.4) состоит в более удобной записи обычных уравнений Лагранжа, когда вместо обычных обобщенных координат используются квазикоординаты. Уравнения (1.4) для случая  $\Gamma = 0$  получены в работе [7].

Соотношения (1.1) совместно с (1.4) определяют полный набор уравнений движения. Функция Рауса рассматриваемой системы может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \frac{1}{2} (a_1(s)u_1^2 + a_2(s)u_2^2 + a_3(s)\omega^2 + a_4(s)\dot{s}^2) + \\ + b_1(s)u_2\omega + b_2(s)u_1\dot{s} - \Gamma^2\kappa(s) - \Gamma\beta(s)u_2 - \Gamma\gamma(s)\omega, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $\kappa$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  являются функциями от  $s$  (их подробное вычисление имеется в дополнении).

## 2. Первые интегралы и интегрируемость. Отображение Пуанкаре

Энергия системы, определенная уравнением (1.3), сохраняется. Кроме того, сохраняются также проекции полного импульса системы на неподвижные оси:

$$p_x = \cos \alpha \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} - \sin \alpha \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} = \text{const}, \quad p_y = \sin \alpha \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} + \cos \alpha \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} = \text{const}.$$

Как несложно показать, уравнения движения для переменных  $u_1, u_2, \omega, s, \dot{s}$  отделяются и образуют приведенную систему с двумя интегралами: энергией (1.3) и квадратом импульса

$$p^2 = \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial u_2} \right)^2.$$

На поверхности уровня этих интегралов для приведенной системы можно численно построить отображение Пуанкаре, выбирая секущую плоскость в виде  $s = \text{const}$ . Как показывают численные эксперименты, в общем случае система (1.5) демонстрирует хаотическое поведение и, следовательно, является неинтегрируемой (см. рис. П11.3). Заметим, что численные расчеты в данном случае необходимо выполнять при достаточно малых радиусах цилиндров, так как в стохастическом слое находятся траектории, для которых цилиндры очень сильно сближаются, и необходимо регуляризовать уравнения движения. В то же время регуляризация из-за сложного вида коэффициентов (см. дополнение) трудновыполнима.

## 3. Ограниченные задачи

Рассмотрим различные ограниченные постановки задач для системы (1.5), для которых цилиндры движутся вдоль неподвижной прямой, содержащей их центры. Существование подобных решений возможно лишь при условии  $\Gamma = 0$  (при этом отсутствует подъемная сила, действующая перпендикулярно рассматриваемой прямой). Функция Рауса (1.5) в этом случае совпадает с кинетической энергией системы «тело+жидкость», которую для краткости обозначим  $T$ .

Рассматриваемые ниже задачи вполне аналогичны соответствующим задачам, возникающим при описании взаимодействия двух сфер (шаров) в идеальной жидкости, которые рассматривались еще классиками. Карл Бьёркнес (1876 г.) в работе [4] изучал гидродинамическое взаимодействие

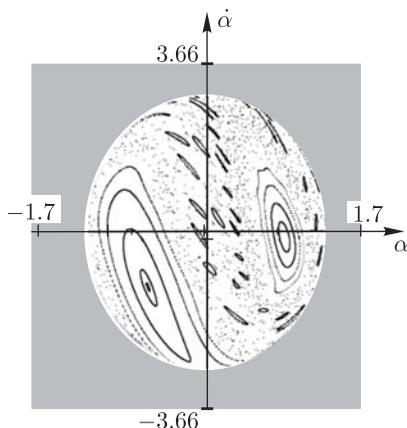


Рис. П11.3. Характерный вид сечения Пуанкаре приведенной системы при достаточно малых радиусах цилиндров. Значения параметров:  $m_1 = 1.113$ ,  $m_2 = 1$ ,  $R_1 = R_2 = 0.01$ ,  $\Gamma = 2$ ,  $T_{b+f} = 20$ ,  $p^2 = 64$ .

пульсирующих и осциллирующих шариков, погруженных в беспредельный объем несжимаемой жидкости. Н. Е. Жуковский [1] (1895 г.) видоизменил постановку задачи, предположив, что колебательное движение жидкости, оказывающей воздействие на пульсирующий и осциллирующий шарик, вызывается не движениями других шариков, а совершается по определенному и заданному закону. Некоторые экспериментальные результаты о взаимодействии осциллирующих шариков в жидкости были описаны Вильгельмом Бьёркнесом (сыном Карла Бьёркнеса) в книге [3] (1906 г.). В ней также рассмотрены вопросы, связанные с электромагнитной аналогией.

Вопросы о силах взаимодействия двух шаров в идеальной жидкости, массы которых бесконечно малы по сравнению с расстоянием, обсуждаются Г. Кирхгофом в его «Лекциях по математической физике» [10]. Он замечает, «что сила, с которой один шар действует на другой, не зависит от скорости последнего и что силы, с которыми шары взаимодействуют, вообще, не являются равными и противоположными. Это имеет место только тогда, когда скорости обоих шаров равны по величине и одинаковы или противоположны по направлению». Кирхгоф также поставил задачу о движении одного шара вблизи плоской стенки и задачу о взаимодействии двух шаров, когда один из них совершает малые колебания.

Наконец, Г. Ламб в своем известном трактате [5] наиболее полно и строго рассмотрел несколько вопросов относительно взаимодействия двух сфер,

постоянно расположенных вдоль одной прямой. Его результаты получены в приближении, что расстояние между центрами сфер достаточно велико. Далее мы сравним некоторые результаты Ламба с рассматриваемой нами задачей о взаимодействии двух цилиндров, уравнения которой получены в точной (а не в приближенной, как у Ламба) форме.

1. Пусть один цилиндр закреплен (в начале координат). В этом случае, полагая в (1.5)  $u_1 = u_2 = \omega = 0$ , получим систему с одной степенью свободы:

$$T = \frac{1}{2} a_4(s) \dot{s}^2. \quad (3.1)$$

(Характерный вид  $a_4(s)$  приведен на рис. П11.4.) Очевидно, что кинетическая энергия (3.1) сохраняется, т. е.  $T = h = \text{const}$ . Получим уравнения траектории на фазовой плоскости  $(s, \dot{s})$ :

$$\dot{s} = \pm \sqrt{\frac{2h}{a_4(s)}}, \quad h = \text{const}.$$

Характерный вид этих кривых определяется функцией  $a_4(s)$  (см. рис. П11.4).

Таким образом, подвижный цилиндр при приближении к неподвижному цилиндру будет двигаться с монотонно убывающей скоростью, достигая соударения за конечное время. При движении в противоположном направлении скорость возрастает и в пределе равна

$$\dot{s}_\infty = \sqrt{\frac{2T_0}{m_2 + \pi R_2^2}}.$$

Подобный эффект увеличения скорости (другими словами, эффект отталкивания) был отмечен Ламбом в задаче о движении сферы в полупространстве, заполненном идеальной жидкостью. В частности, при движении в направлении от плоскости, ограничивающей полупространство, ускорение сферы положительно.

2. Предположим теперь, что оба цилиндра могут свободно перемещаться вдоль фиксированной прямой; функция Лагранжа представляется в форме

$$T = \frac{1}{2} (a_1(s)u^2 + a_4(s)\dot{s}^2) + b_2(s)\dot{s}u, \quad (3.2)$$

где  $u = u_1$  — скорость первого цилиндра, а характерный вид коэффициентов приведен на рисунке П11.4. Записывая уравнения движения (1.4)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial u} \right) = 0, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = 0,$$

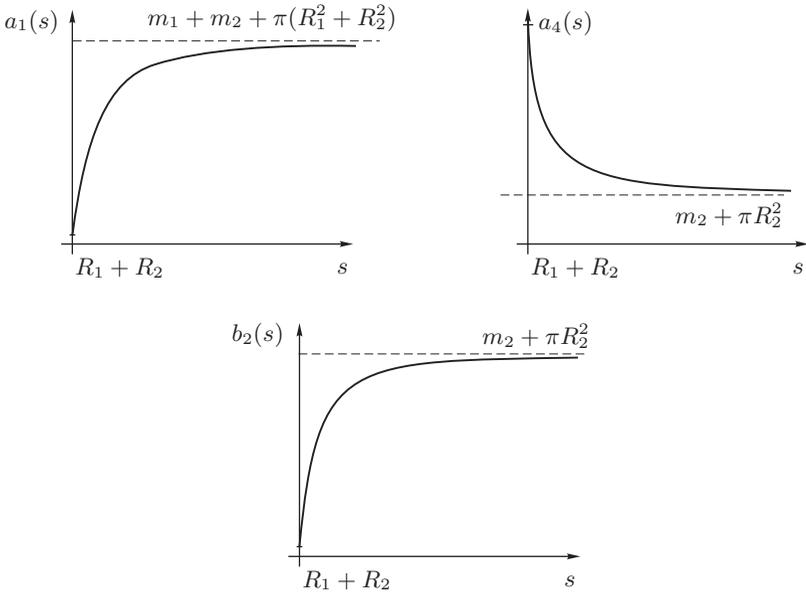


Рис. П11.4. Характерный вид зависимостей коэффициентов от расстояния при  $R_2 = 3R_1$  и  $m_1 = 2m_2$ .

находим первые интегралы  $T = h = \text{const}$  и  $P = a_1(s)u + b_2(s)\dot{s} = c = \text{const}$ . С помощью этих интегралов получим

$$\dot{s}^2 = \frac{2ha_1(s) - c^2}{a_1(s)a_4(s) - b_2^2(s)} = V(s), \quad (3.3)$$

где знаменатель всюду положителен вследствие того, что квадратичная форма (3.2) положительно определена.

Функция  $V(s)$  определяет поведение траекторий на фазовой плоскости  $(s, \dot{s})$ . Вследствие монотонности  $a_1(s)$  функция  $V(s)$  имеет не более одного нуля на интервале  $s \in [R_1 + R_2, \infty)$ . Кроме того, если  $V(s_0) = 0$ , то  $V'(s_0) = \frac{2ha_1'(s_0)}{a_1 a_4 - b_2^2} > 0$ . Таким образом, если  $V(s)$  не обращается в нуль, то в зависимости от начальных условий цилиндры либо движутся навстречу друг другу до столкновения, либо движутся друг от друга, а их взаимная

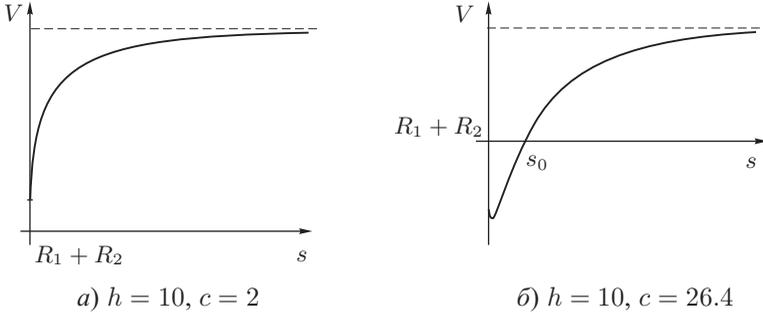


Рис. П11.5. Квадрат скорости (3.3) в задаче о свободных цилиндрах на прямой при различных значениях параметров. (Здесь взято  $m_1 = 2m_2 = 4, R_2 = 3R_1 = 1.$ )

скорость стремится к предельному значению

$$\dot{s}_\infty^2 = \frac{2h(m_1 + m_2 + \pi(R_1^2 + R_2^2)) - c^2}{(m_1 + \pi R_1^2)(m_2 + \pi R_2^2)}.$$

Если  $V(s)$  обращается в нуль в точке  $s_0 > R_1 + R_2$ , то цилиндры не сталкиваются, а после достижения расстояния  $s_0$  (точка поворота) меняется знак их скорости  $\dot{s}$ . Заметим также, что в этом случае не имеется стационарных решений. Видимо, справедливо следующее, пока аналитически не доказанное, свойство: если  $V(s) > 0$ , то  $V'(s) > 0$  (из которого следует отсутствие относительных равновесий). Характерный вид функции  $V(s)$  для различных значений параметров приведен на рисунке П11.5.

В трактате [5] Ламб, в частности, показал, что если шары движутся с постоянными скоростями, то между ними действует отталкивающая сила. В нашем случае аналогично получается, что ускорение  $\ddot{s}$  всегда отрицательно.

**3.** Пусть теперь один цилиндр совершает гармонические колебания по заданному закону, так что его скорость  $u = u_0 \sin \omega t$ . Подставляя в (3.2), получим неавтономную систему с одной степенью свободы, описывающую движение второго цилиндра. Выполняя преобразование Лежандра  $p = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = a_4(s)\dot{s} + b_2(s)u$ , представим уравнения движения в гамильтоновой форме

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial s}, \tag{3.4}$$

с периодически зависящим от времени гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2a_4(s)} + pf_1(s)u_0 \sin(\omega t) + f_2(s)u_0^2 \sin^2(\omega t),$$

$$f_1(s) = -\frac{b_2(s)}{a_4(s)}, \quad f_2(s) = -\frac{1}{2} \frac{a_4(s)a_1(s) - b_2^2(s)}{a_4(s)}. \quad (3.5)$$

Отображение Пуанкаре за период для системы (3.5) приведено на рисунке П11.6. Оно имеет очень регулярный характер, и мы не смогли пока найти зоны хаотического поведения. Как показывают численные эксперименты, отображение имеет единственную (гиперболическую) неподвижную точку (наименьшего периода), лежащую на оси  $p = 0$ , а все остальные траектории являются либо рассеивающимися, либо столкновительными. Неподвижной точке соответствует периодическое решение — синхронное колебание цилиндра, при котором их скорости всегда противоположно направлены.

Докажем существование периодического решения при больших частотах  $\omega$ . Выберем отношение  $\frac{u_0}{\omega} = \varepsilon$  в качестве малого параметра и выполним замены  $\tau = \omega t$ ,  $p \rightarrow u_0 p$ , тем самым приведем уравнения (3.4) к стандартной форме одночастотной системы

$$\frac{ds}{d\tau} = \varepsilon \left( \frac{p}{a_4} + f_1 \sin \tau \right), \quad \frac{dp}{d\tau} = \varepsilon \left( \frac{p^2}{2a_4^2} a_4' - p f_1' \sin \tau - f_2' \sin^2 \tau \right),$$

где штрих обозначает производную по  $s$ .

Усредняя по  $\tau$ , получаем

$$\frac{ds}{d\tau} = \varepsilon \frac{p}{a_4}, \quad \frac{dp}{d\tau} = \varepsilon \left( \frac{p^2}{2a_4^2} a_4' - \frac{1}{2} f_2' \right). \quad (3.6)$$

Усредненная система имеет единственное положение равновесия  $p = 0$ ,  $s = s_0$ , где  $s_0$  — корень уравнения  $f_2'(s) = 0$ . Это положение равновесия невырожденно, собственные числа матрицы Якоби удовлетворяют уравнению  $\lambda^2 = -1/(2a_4(s_0)f_2''(s_0))$ . Следовательно, по теореме Боголюбова–Крылова, точная система (3.4) имеет близкое к положению равновесия периодическое решение.

Сепаратрисы неподвижной точки разбивают полуплоскость  $s > R_1 + R_2$  на четыре области I, II, III, IV (см. рис. П11.6). Опишем подробнее характер поведения системы в каждой из областей.

*Область I.* Если начальные условия выбраны в области I таким образом, что  $p < 0$ , т. е. свободный цилиндр движется в направлении цилиндра,

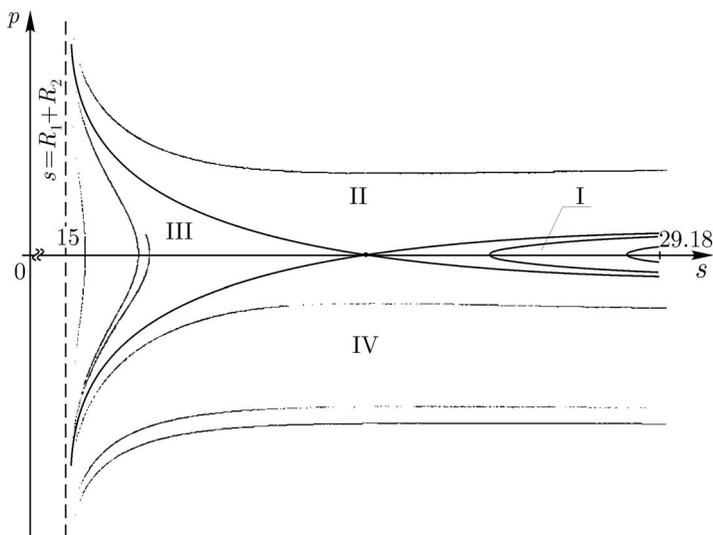


Рис. П11.6. Характерный вид отображения Пуанкаре системы (3.5) при  $m_1 = 1$ ,  $u_0 = 2$ ,  $R_1 = 5$ ,  $R_2 = 10$ ,  $\omega = 200$ .

совершающего свободные колебания, то свободный цилиндр сначала приближается, а затем без соударения изменяет направление движения и уходит на бесконечность.

*Область II.* В этом случае свободный цилиндр удаляется на бесконечность от колеблющегося цилиндра.

*Область III.* Здесь свободный цилиндр сначала удаляется (если  $p > 0$ ), а затем приближается до тех пор, пока цилиндры не столкнутся.

*Область IV.* В данном случае свободный цилиндр приближается до соударения.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В случае упругого соударения цилиндров траектория из области III после одного или нескольких соударений перескакивает в область II, а из области IV после первого соударения попадает либо в область III, либо в область II.

Согласно Ламбу [5], если один шар совершает колебания, а другой неподвижен, то на неподвижный шар действует сила притяжения. Любопытно, что в рассматриваемой нами родственной задаче взаимное ускорение  $\ddot{s}$  определяется начальными условиями и имеется четыре области на

фазовой плоскости (см. рис. П11.6), характер поведения системы в которых качественно различается. Отметим также, что Ламб рассматривал лишь малые колебания сфер, в то время как рисунок П11.6 соответствует большой амплитуде колебаний цилиндров.

#### 4. Уравнения движения в предельном случае

$$R_1 = R_2 = 0$$

Рассмотрим снова общие уравнения (1.4), (1.5) и устремим радиусы двух цилиндров к нулю  $R_1 = R_2 = 0$ . При этом будем считать, что  $m_1 \neq 0$ ,  $m_2 \neq 0$ ,  $\Gamma_1 \neq 0$ ,  $\Gamma_2 \neq 0$ . Соответствующие вихри будем называть *массовыми*, в отличие от классических кирхгофовских вихрей. Подобные постановки задачи в отношении вихревых колец имеются, например, в [2], где, однако, не получено точной и конечномерной формы уравнений движения. Физическое обоснование модели массовых вихрей весьма естественно, так как любой вихревой процесс (ураган, смерч и пр.) всегда сопровождается всасыванием в вихревой столб дополнительных массивных образований, инерцию которых необходимо учитывать.

В этом случае цилиндры не испытывают гидродинамическое (обусловленное присоединенными массами) сопротивление, поэтому формулы для коэффициентов функции (1.5) упрощаются:

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = m_1 + m_2 = a, \quad a_3 = m_2 s^2, \quad a_4 = m_2, \\ b_1 = m_2 s, \quad b_2 = m_2, \\ \beta = s, \quad \gamma = \frac{s^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При стремлении радиусов цилиндров к нулю кинетическая энергия жидкости, порожденная циркуляционным обтеканием  $\Gamma^2 \kappa(s)$  стремится к бесконечности, т. к. двойной интеграл в выражении для кинетической энергии становится расходящимся. Однако  $\kappa'(s) \rightarrow \frac{1}{4\pi s}$ . В связи с этим примем  $\kappa(s) = \frac{\ln s}{2\pi}$ , что соответствует гамильтониану в задаче о движении пары классических бесконечно тонких вихрей в жидкости.

Запишем теперь функцию Рауса (1.5) через координаты и скорости частиц в неподвижной системе координат:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \frac{1}{2} (m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2) + \frac{\Gamma}{2} (\mathbf{J} (\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}}_2), \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2, \\ \mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Сделаем линейную замену переменных, соответствующую переходу в систему центра масс,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2,$$

и с помощью преобразования Лежандра запишем уравнения движения в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, & \dot{\mathbf{P}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{R}}, & \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, & \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \\ H &= (\mathbf{P}, \mathbf{R}) + (\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \mathcal{R} = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}^2 - \\ & - \frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} (\mathbf{p}, \mathbf{J} \mathbf{r}) + \frac{\Gamma}{m} (\mathbf{P}, \mathbf{J} \mathbf{r}) + \frac{\Gamma^2}{8\mu} \mathbf{r}^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln |\mathbf{r}|^2, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $m = m_1 + m_2$ ,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ , а канонические импульсы определены соотношениями

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = m \dot{\mathbf{R}} + \Gamma \mathbf{J} \mathbf{r}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \mu \dot{\mathbf{r}} - \frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} \mathbf{J} \mathbf{r}.$$

Вследствие инвариантности уравнений (4.2) относительно движений плоскости (группы  $E(2)$ ) имеется три интеграла движения вида

$$P_x = \text{const}, \quad P_y = \text{const}, \quad L = (\mathbf{P}, \mathbf{J} \mathbf{R}) + (\mathbf{p}, \mathbf{J} \mathbf{r}).$$

Таким образом, полагая в (4.2)  $P_x, P_y = \text{const}$ , получаем систему с двумя степенями свободы, описывающую динамику точки на плоскости в поле потенциальных и гироскопических сил. Если  $P_x = P_y = 0$ , то получаем интегрируемый случай системы, который соответствует центральному потенциальному полю и разделяется в полярных координатах на плоскости.

### 5. Анализ предельной задачи

Найдем неподвижные точки приведенной системы (4.2), для этого выберем неподвижную систему координат так, что  $P_x = P > 0$ ,  $P_y = 0$ , и запишем гамильтониан в полярных координатах

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, \\ p_x &= p_r \cos \varphi - \frac{1}{r} p_\varphi \sin \varphi, & p_y &= p_r \sin \varphi + \frac{1}{r} p_\varphi \cos \varphi. \end{aligned}$$

Отбрасывая несущественные постоянные, получаем

$$H = \frac{1}{2\mu} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} p_\varphi + \frac{\Gamma P}{m_1 + m_2} r \sin \varphi + \frac{\Gamma^2}{8\mu} r^2 + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \ln r. \quad (5.1)$$

Без ограничения общности положим  $\Gamma > 0$ . При  $P \neq 0$  имеется только пара неподвижных точек системы, для которых  $r = \text{const}$ . Эти стационарные решения удобно параметризовать взаимным расстоянием между частицами. Действительно, мы имеем

$$r = r_0 = \text{const}, \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi, \quad p_r = 0, \quad p_\varphi = -\frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} r_0^2, \quad (5.2)$$

при этом связь между интегралом  $P$  и энергией (5.1) представляется в параметрической форме

$$P = \Gamma r_0 + \frac{\Gamma(m_1 + m_2)}{2\pi} r_0^{-1}, \quad H = -\frac{\Gamma^2}{2\pi} - \frac{\Gamma^2 r_0}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \ln r_0.$$

Соответствующая бифуркационная диаграмма (диаграмма энергии-момента), образуемая стационарными решениями, на плоскости значений интегралов  $\left( \frac{P}{\Gamma}, \frac{H}{\Gamma^2} \right)$  приведена на рис. П11.7.

Интегрируя уравнения (4.2), получаем, что для указанного стационарного решения в неподвижной системе координат точки движутся равномерно вдоль оси  $Ox$  со скоростью  $v = \frac{\Gamma^2}{2\pi r_0^2}$ , т. е. в точности так же, как в случае обычной вихревой пары.

Рассмотрим вопрос устойчивости найденных неподвижных точек приведенной системы (5.1). Справедлива следующая

**Теорема.** *Если сумма масс тел, деленная на удвоенную площадь круга радиуса  $r_0$ , меньше единицы  $\left( \frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} < 1 \right)$ , то решение (5.2) устойчиво; если  $\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} > 1$ , то решение (экспоненциально) неустойчиво.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Выберем канонические переменные вблизи решения (4.2) следующим образом:

$$\varphi = \frac{3}{2}\pi + w, \quad p_\varphi = -\frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 + W, \quad r = r_0 + z, \quad p_r = Z;$$

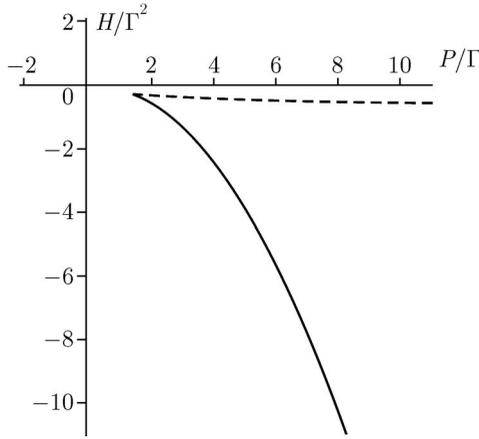


Рис. П11.7. Бифуркационная диаграмма системы (5.1). Сплошной линией обозначена ветвь, соответствующая устойчивому решению, а пунктиром — неустойчивому (здесь мы полагаем  $m_2 = 2m_1 = 1$ ).

при этом  $\{w, W\} = \{z, Z\} = 1$ . Разложим гамильтониан (5.1) с точностью до второго порядка  $H = H_0 + H_2 + \dots$ , где

$$\begin{aligned}
 H_2 = & \frac{1}{2\mu} Z^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi} \frac{2\pi r_0^2 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2} w^2 + \\
 & + \frac{\Gamma^2}{2\pi r_0^2} \frac{2\pi r_0^2(m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2) - m_1 m_2(m_1 + m_2)}{m_1 m_2(m_1 + m_2)} z^2 + \\
 & + \frac{m_1 + m_2}{2r_0^2 m_1 m_2} W^2 + \frac{\Gamma(m_1 - m_2)}{r_0 m_1 m_2} zW.
 \end{aligned}$$

Записывая уравнения в вариациях, находим, что собственные числа линеаризованной системы определяются корнями биквадратного уравнения

$$p(\lambda) = m_1^2 m_2^2 \lambda^4 + (m_1^2 + m_2^2) \lambda^2 + \left(1 + \frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2}\right) \left(1 - \frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2}\right) = 0.$$

Несложно показать, что дискриминант этого уравнения всегда положителен. Отсюда следует, что если

$$\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} < 1, \text{ то имеется две пары чисто мнимых корней;}$$

$$\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} > 1, \text{ то имеется пара мнимых сопряженных корней и пара вещественных корней.}$$

Тем самым в последнем случае доказана неустойчивость.

Докажем теперь знакоопределенность функции  $H_2$  в случае  $\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} < 1$ . Используя известный критерий положительной определенности квадратичной формы, получаем условия

$$2\pi r_0^2 > m_1 + m_2 \quad \text{и} \quad 2\pi r_0^2 > \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2}.$$

Несложно показать, что  $m_1 + m_2 > m_1 m_2 (m_1 + m_2) / (m_1^2 + m_2^2 - m_1 m_2)$ . Следовательно  $H - H_0$  — знакопостоянная функция вблизи рассматриваемого решения, что доказывает его устойчивость. ■

На бифуркационной диаграмме (рис. П11.7) устойчивое решение обозначено сплошной линией, а неустойчивое — пунктиром.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним, что мы всюду полагаем плотность жидкости равной единице,  $\rho_f = 1$ ; если отказаться от этого требования, условие устойчивости запишется в форме

$$\frac{m_1 + m_2}{2\pi r_0^2} < \rho_f.$$

Рассмотрим более подробно *интегрируемый случай*, соответствующий  $P = 0$ . Согласно (4.2), в этом случае возможна редукция к одной степени свободы. Гамильтониан (5.1) (после исключения несущественных постоянных) имеет вид

$$H_1 = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + U_*(r), \quad U_* = \frac{c^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} + \frac{\Gamma^2}{8\mu} r^2 + \frac{\Gamma^2}{2\pi} \ln r, \quad (5.3)$$

где  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  — приведенная масса,  $c = p_\varphi = \text{const}$ . Вид эффективного потенциала  $U_*$  приведен на рисунке П11.8. Несложно показать, что  $U_*$  при  $c \neq 0$  имеет единственный минимум на интервале  $r \in [0, \infty)$ , которому соответствует относительное равновесие. Для этого относительного равновесия расстояние между телами остается постоянным  $r = r_0$ , а постоянные интегралы  $H_1 = h_1$ ,  $p_\varphi = c$  и угловая скорость  $\dot{\varphi} = \omega$  задаются соотношениями

$$c = \frac{\Gamma^2}{4\pi} r_0^2 (2\mu + \pi r_0^2), \quad h_1 = \frac{\Gamma^2}{4\pi\mu} (\mu + \pi r_0^2 + \mu \ln r_0^2),$$

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{c}{\mu r_0^2} + \frac{\Gamma}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2} = \text{const}.$$

Следовательно, это относительное равновесие соответствует движению вихрей с постоянной угловой скоростью вокруг общего неподвижного центра. Это движение устойчиво по части переменных  $(r, p_r)$ . Характерный вид эффективного потенциала и бифуркационная диаграмма на плоскости интегралов  $(c, h_1)$  приведены на рисунке П11.8.

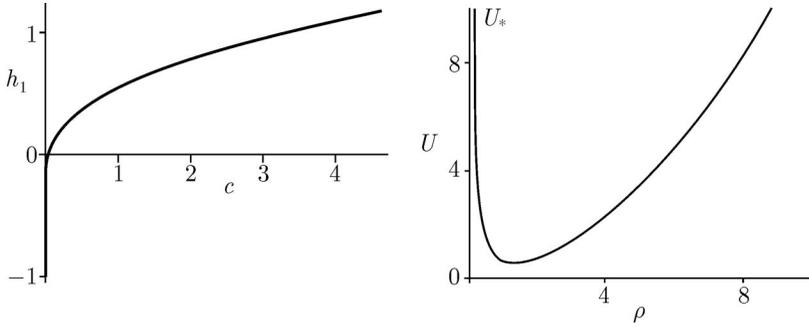


Рис. П11.8. Бифуркационная диаграмма при  $P = 0$  и характерный вид эффективного потенциала (при  $c = 1$ ) (параметры системы  $\mu = 1, \Gamma = 1$ ).

Для этого случая движение в абсолютном пространстве представляет собой квазипериодическое трехчастотное движение, при котором расстояние колеблется между значениями  $r_{\min}, r_{\max}$ , определяемыми корнями уравнения  $h_1 = U_*(r)$ . При  $P \neq 0$  движение двух массовых вихрей, вообще говоря, является хаотическим, а система (5.1) — неинтегрируемой. Однако полное исследование регулярности и хаотичности системы в зависимости от параметров пока не выполнено.

### 6. Общие уравнения движения массовых вихрей

Рассмотрим на плоскости движение в идеальной несжимаемой жидкости  $n$  тел с массами  $m_i, i = 1, \dots, n$ , размером которых можно пренебречь, а циркуляция вокруг каждого из тел равна  $\Gamma_i$ . Вычислим силу, действующую на каждое из тел в отдельности. Для определенности рассмотрим первое тело, представим его в виде кругового цилиндра радиуса  $R$  и запишем функцию тока течения вблизи него, предполагая, что размерами остальных тел можно при этом пренебречь (т.е. полагать их точечными вихрями). Согласно [8], при этом для функции тока имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = R^2 \frac{\dot{x}_1(y - y_1) - \dot{y}_1(x - x_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} - \frac{1}{4\pi} \left( \left( \Gamma_1 + \sum_{i=2}^n \Gamma_i \right) \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2 + \sum_{i=2}^n \Gamma_i (\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2 - \ln |\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_i|^2) \right) + \dots, \tag{6.1}$$

где  $\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_1 + \frac{R^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1)$  — координаты инверсных образов вихрей внутри цилиндра. Вычислим силу, действующую на поверхность цилиндра:

$$\mathbf{F} = - \oint_{c_i} p \mathbf{J} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{J} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь формулой Коши–Лагранжа (при  $\rho_f = 1$ )  $p = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{v^2}{2}$  ( $\varphi$  — потенциал течения) и условиями Коши–Римана, находим

$$\mathbf{F}_1 = - \oint_{c_1} \frac{\partial\psi}{\partial t} d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \oint_{c_1} |\nabla\psi|^2 \mathbf{J} d\mathbf{r}^2. \quad (6.2)$$

Выберем на контуре  $c_1$  главную переменную  $\theta$  так, что  $x = x_1 + R \cos\theta$ ,  $y = y_1 + R \sin\theta$ ; интегрируя по  $\theta$  и переходя к пределу  $R \rightarrow 0$ , находим

$$\mathbf{F}_1 = \Gamma_1 \mathbf{J} \dot{\mathbf{r}}_1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=2}^n \Gamma_1 \Gamma_i \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая функцию тока в ряд по  $R$ , получаем

$$\psi = \psi_0 + \psi_2 R^2 + \dots,$$

$$\psi_0(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \Gamma_i \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2,$$

$$\psi_2(\mathbf{r}) = \frac{\dot{x}_1(y - y_1) - \dot{y}_1(x - x_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{i \neq 2}^n \Gamma_i \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2}.$$

Подставляя эти выражения в (6.2), находим

$$\lim_{R \rightarrow 0} - \oint_{c_1} \frac{\partial\psi}{\partial t} d\mathbf{r} = - \lim_{R \rightarrow 0} \oint_{c_1} \frac{\partial\psi_0}{\partial t} d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \Gamma_1 \mathbf{J} \dot{\mathbf{r}}_1$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{2} \oint_{c_1} |\nabla\psi|^2 \mathbf{J} d\mathbf{r} &= - \lim_{R \rightarrow 0} \oint_{c_1} |\nabla(\psi_0 + \psi_2 R^2)|^2 \mathbf{J} d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma_1 \mathbf{J} \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \Gamma_1 \Gamma_i \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_i|^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Используя сходные рассуждения для каждого из тел, получим уравнения движения в форме

$$m_i \ddot{\mathbf{r}} = \Gamma_i \mathbf{J} \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i}^n \Gamma_i \Gamma_j \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}. \quad (6.3)$$

Несложно проверить, что эти уравнения можно представить в лагранжевой форме с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Gamma_i (\mathbf{J} \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_i) - U,$$

$$U = \frac{1}{4\pi} \sum_{i < j}^n \Gamma_i \Gamma_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2.$$

Система (6.3) имеет три интеграла движения (один — векторный), соответствующих инвариантности относительно движений плоскости

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \left( m_i \mathbf{r}_i - \frac{1}{2} \Gamma_i \mathbf{J} \mathbf{r}_i \right), \quad L = \sum_{i=1}^n \left[ m_i (\dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{J} \mathbf{r}_i) + \frac{\Gamma_i}{2} r_i^2 \right],$$

и интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + U.$$

Уравнения (6.3) стандартным образом (с помощью преобразования Лежандра) можно записать в гамильтоновой форме. Уравнения движения системы массовых вихрей при  $n \geq 3$  пока совсем не изучены.

### Дополнение. Вычисление коэффициентов функции Рауса (1.5)

Вычислим сначала кинетическую энергию системы как функцию координат и скоростей цилиндра и циркуляции; для этого представим ее в форме

$$T_{b+f} = T_b + T_f,$$

где слагаемые  $T_b$  и  $T_f$  соответствуют кинетической энергии движения цилиндров и жидкости соответственно. Кинетическая энергия цилиндров с массами  $m_1, m_2$  без учета движения жидкости при помощи (1.1) может быть записана в виде

$$T_b = \frac{m_1 + m_2}{2} (u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{s}^2 + s^2 \omega^2) + m_2 (u_1 \dot{s} + u_2 s \omega).$$

Кинетическая энергия жидкости с помощью многозначного потенциала течения  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  в случае  $\Gamma_{C_1} = -\Gamma_{C_2} = \Gamma$  может быть вычислена по формуле (напомним, что мы положили плотность жидкости равной единице,  $\rho_f = 1$ )

$$T_f = -\frac{1}{2} \int_C \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl, \quad (6.4)$$

где контур  $C = C_1 \cup C_2 \cup I_1 \cup I_2$ ,  $dl$  — элемент длины дуги. Потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \varphi = 0$  и граничным условиям идеального непротекания на поверхности цилиндров.

Следуя Кирхгофу, потенциал обтекания представим в виде

$$\varphi = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 + \omega \varphi_3 + \dot{s} \varphi_4 + \Gamma \varphi_5. \quad (6.5)$$

Потенциал  $\varphi_1$  ( $\varphi_2$ ) отвечает движению жидкости, возникающему при движении цилиндров с единичной скоростью параллельно оси  $\xi_1$  ( $\xi_2$ ), потенциал  $\varphi_3$  соответствует случаю, когда второй цилиндр вращается вокруг покоящегося первого с единичной угловой скоростью,  $\varphi_4$  — потенциал обтекания в случае, когда второй цилиндр движется с единичной скоростью в положительном направлении оси  $\xi_1$ , а первый при этом покоится, и, наконец, потенциал  $\varphi_5$  описывает чисто циркуляционное обтекание покоящихся цилиндров. Напомним, что величины циркуляции жидкости вокруг цилиндров равны по величине и противоположны по знаку.

Для потенциалов выполнены следующие граничные условия

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_{C_1} &= \frac{\xi_1}{R_1}, & \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_{C_2} &= \frac{\xi_1 - s}{R_2}, & \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_{C_1} &= \frac{\xi_2}{R_1}, & \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_{C_2} &= \frac{\xi_2}{R_2}, \\ \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \right|_{C_1} &= 0, & \left. \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} \right|_{C_2} &= \frac{s \xi_2}{R_2}, & \left. \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \right|_{C_1} &= 0, & \left. \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \right|_{C_2} &= \frac{\xi_1 - s}{R_2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — границы цилиндров.

Для вычисления потенциала (6.5) отобразим внешнюю по отношению к контуру  $C$  часть плоскости на прямоугольник следующим образом. Воспользуемся биполярными координатами [9], поместим начало координат на плоскости  $O\xi_1\xi_2$  на прямой, соединяющей центры цилиндров на расстоянии  $\sqrt{R_1^2 + b^2}$  от первого и  $\sqrt{R_2^2 + b^2}$  от второго (рис. П11.9), где  $b$  выражается через расстояние  $s$  по формуле

$$b^2 = \frac{(s^2 - (R_1 + R_2)^2)(s^2 - (R_1 - R_2)^2)}{4s^2}. \quad (6.7)$$

Физический смысл  $b$  заключается в том, что в новой системе координат точки  $(b, 0)$  и  $(-b, 0)$  переходят друг в друга при инверсиях относительно цилиндров. Искомое

отображение  $\zeta = F(z)$  (где  $z = \xi_1 + i\xi_2$ ,  $\zeta = \eta_1 + i\eta_2$ ) имеет вид

$$F(z) = -\frac{i\pi}{k_2 - k_1} \left( \ln \frac{z+b}{z-b} - k_1 \right), \tag{6.8}$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{R_1^2 + b^2} - b}{\sqrt{R_1^2 + b^2} + b} < 0, \quad k_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{R_2^2 + b^2} + b}{\sqrt{R_2^2 + b^2} - b} > 0.$$

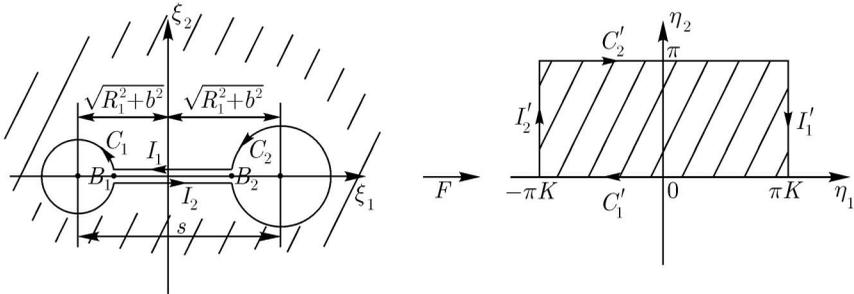


Рис. П11.9

Образ на  $\zeta$ -плоскости представляет собой прямоугольник  $\eta_1 \in (-\pi K, \pi K)$ ,  $\eta_2 \in (0, \pi)$ , где  $K = \pi/(k_2 - k_1)$  (см. рис. П11.9). (Бесконечно удаленная точка при этом отображается в точку  $\eta_1 = 0, \eta_2 = -i\pi \frac{k_1}{k_2 - k_1}$ .)

Формулы обратного пересчета имеют вид

$$\xi_1(\eta_1, \eta_2) = \frac{b \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos v}, \quad \xi_2(\eta_1, \eta_2) = -\frac{b \sin v}{\operatorname{ch} u - \cos v}, \tag{6.9}$$

$$u = \frac{\eta_2}{K} + k_1, \quad v = -\frac{\eta_1}{K}.$$

Воспользуемся условиями Коши–Римана и вместо потенциалов  $\varphi_i$  найдем соответствующие функции тока  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . На  $\zeta$ -плоскости получаем для них задачу Дирихле вида

$$\psi|_{C'_1} = f_1(\eta_1), \quad \psi|_{C'_2} = f_2(\eta_1), \quad \psi(-\pi K, \eta_2) = \psi(\pi K, \eta_2). \tag{6.10}$$

Продолжая граничные условия периодическим образом на всю полосу  $\eta_1 \in (-\infty, \infty)$ ,  $\eta_2 \in (0, \pi)$ , запишем общее решение задачи (6.10) (в интегральной форме) с помощью функции Грина для полосы:

$$\psi(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \eta_2}{\operatorname{ch}(t - \eta_1) - \cos \eta_2} f_1(t) + \frac{\sin \eta_2}{\operatorname{ch}(t - \eta_1) + \cos \eta_2} f_2(t) \right) dt.$$

Используя (6.6) и (6.9) и условие  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{C_i} = \frac{\partial \psi}{\partial(l/2\pi R_i)}$  ( $l$  — элемент длины контура), для граничных условий функций  $\psi_i$  получаем:

$$\begin{aligned} \psi_1: \quad f_1(t) = \xi_2(t, 0) &= \frac{b \sin(t/K)}{\operatorname{ch} k_1 - \cos(t/K)}, \\ f_2(t) = \xi_2(t, \pi) &= \frac{b \sin(t/K)}{\operatorname{ch} k_2 - \cos(t/K)}; \\ \psi_2: \quad f_1(t) = -\xi_1(t, 0) - b &= -\frac{b \operatorname{sh} k_1}{\operatorname{ch} k_1 - \cos(t/K)} - b, \\ f_2(t) = -\xi_1(t, 0) + b &= -\frac{b \operatorname{sh} k_2}{\operatorname{ch} k_2 - \cos(t/K)} + b; \\ \psi_3: \quad f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = s(-x + b) &= s \left( -\frac{b \operatorname{sh} k_2}{\operatorname{ch} k_2 - \cos(t/K)} + b \right); \\ \psi_4: \quad f_1(t) = 0, \quad f_2(t) = \xi_2(t, \pi) &= \frac{b \sin(t/K)}{\operatorname{ch} k_2 - \cos(t/K)}. \end{aligned}$$

Проясним выбор граничных условий для функций тока  $\psi_i$  на примере функции  $\psi_2$ . Согласно условиям Коши–Римана,  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{C_i} = \frac{\partial \psi}{\partial(l/2\pi R_i)}$ , где  $l$  — элемент длины дуги. Интегрируя (6.6), получим  $\psi_2 \Big|_{C_i} = -\xi_1 + \mu_i$ , где  $\mu_i$  — некоторые постоянные, которые должны быть выбраны из условия, что циркуляция по контуру, охватывающему каждый из цилиндров в отдельности, равна нулю:

$$\operatorname{Re} \int_{C_i} \frac{dw_2(z)}{dz} dz = \int_{C'_i} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_2} d\eta_1 = 0.$$

Проинтегрируем это соотношение по  $d\eta_2$ ; так, для  $C'_1$  находим

$$\int_0^\pi d\eta_2 \int_{-\pi K}^{\pi K} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_2} d\eta_1 = \int_{-\pi K}^{\pi K} \pi K d\eta_1 \int_0^\pi \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_2} d\eta_2 = \int_{-\pi K}^{\pi K} (\psi_2(\eta_1, \pi) - \psi_2(\eta_1, 0)) d\eta_1 = 0.$$

Подставляя  $\psi(\eta_1, (m-1)\pi) = \mu_m - b \operatorname{sh} k_m / (\cos k_m - \cos(\eta_1/K))$ ,  $m = 1, 2$ , и интегрируя с учетом, что  $k_1 < 0$ ,  $k_2 > 0$ , получим

$$-2\pi K(\mu_1 - \mu_2 + 2b) = 0.$$

Таким образом, опуская несущественную общую постоянную, можем положить  $\mu_1 = b$ ,  $\mu_2 = -b$ .

Комплексный потенциал, связанный с чисто циркуляционным течением, находится из условия равномерного течения в полосе и равен

$$\varphi_5(\xi_1, \xi_2) + i\psi_5(\xi_1, \xi_2) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z+b}{z-b}, \quad z = \xi_1 + i\xi_2.$$

На основании (6.4) и (6.5) для кинетической энергии жидкости получили представление

$$T_f = \frac{1}{2}(a_1^*(s)u_1^2 + a_2^*(s)u_2^2 + a_3^*(s)\omega^2 + a_4^*(s)\dot{s}^2) + b_1^*(s)u_2\omega + b_2^*(s)u_1\dot{s} + \varkappa(s)\Gamma^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно [5], что в этом случае кинетическая энергия жидкости не содержит линейных по скоростям  $u_i$ ,  $\omega$ ,  $\dot{s}$  слагаемых.

Здесь мы также опустили заведомо нулевые слагаемые, связанные с четностью функций  $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$ .

С помощью комплексных потенциалов  $w_i = \varphi_i + i\psi_i$  коэффициенты  $a_i^*$ ,  $b_i^*$  могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} a_1^* &= -\pi(R_1^2 + R_2^2) - \text{Im} \int_C w_1 dz, & a_2^* &= -\pi(R_1^2 + R_2^2) + R_1 \int_C w_2 dz, \\ a_3^* &= -\pi R_2^2 s^2 + s \text{Re} \int_{C_2} w_3 dz, & a_4^* &= -\pi R_2^2 - \text{Im} \int_{C_2} w_4 dz, \\ b_1^* &= -\pi R_2^2 s + \text{Re} \int_C w_3 dz, & b_2^* &= -\pi R_2^2 - \text{Im} \int_C w_4 dz, \quad \varkappa = \frac{k_2 - k_1}{4\pi}, \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2$  определены выше (6.8). Покажем это подробнее на примере  $a_1^*$ . Параметризуем контуры  $C_1, C_2$  следующим образом (см. рис. П11.9):

$$C_i: \quad \xi_1 = s_i + R_i \cos \theta_i, \quad \xi_2 = R_i \sin \theta_i, \quad \text{где } s_{1,2} = \mp \sqrt{R_{1,2}^2 + b^2}.$$

Тогда, учитывая граничные условия (6.6), получаем  $\left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right|_{C_i} = R_i \cos \theta_i$  и, подставляя в (6.4), находим

$$\begin{aligned} a_1^* &= - \int_{C_1 \cup C_2} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dl = \\ &= - \sum_{i=1}^2 \int_{C_i} (\varphi_1 R_i \cos \theta_i - \psi_1 R_i \sin \theta_i) d\theta_i - \sum_{i=1}^2 \int_{C_i} \psi_1 R_i \sin \theta_i d\theta_i. \end{aligned}$$

Поскольку  $\psi_1|_{C_i} = \xi_2 = R_i \sin \theta_i$ , то  $\int_{C_1} \psi_1 R_i \sin \theta_i d\theta_i = \pi R_i^2$ ; с учетом соотношения  $dz|_{C_k} = ie^{i\theta_k} d\theta_k$  окончательно получим

$$a_1^* = -\pi(R_1^2 + R_2^2) - \text{Im} \int_C w_1 dz.$$

Здесь также учтено, что  $w_1$  — однозначная функция, поэтому интеграл по обоим берегам разреза сокращается и вместо  $C_1 \cup C_2$  можно писать  $C$ .

Для коэффициентов  $a_1^*$ ,  $a_2^*$ ,  $b_1^*$ ,  $b_2^*$  может быть получено интегральное представление. Так, для  $a_1^*$  воспользуемся тем, что вне контура  $C$  потенциал  $w_1(z)$  имеет особенность только в бесконечно удаленной точке, поэтому

$$\int_C w_1(z) dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} w_1(z) = \Lambda_1.$$

Воспользовавшись преобразованием (6.8), находим

$$\text{Im} \Lambda_1 = -\frac{2\pi^2}{k^2 - k_1} \frac{\partial \psi}{\partial \eta_1} \Big|_{\eta=0, \eta_2=\pi} - \frac{\pi k_1}{k_2 - k_1}.$$

Напомним, что точка  $(0, -\frac{\pi k_1}{k_2 - k_1})$  — образ точки  $z = \infty$ . Дифференцируя с соответствующими граничными условиями, получаем

$$a_1^* = -\pi(R_1^2 + R_2^2) - 2b^2 K \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin(Kk_1)}{(\text{ch } t - \cos(t/K))^2} \frac{\text{sh } t \sin(t/K)}{\text{ch } k_1 - \cos(t/K)} + \frac{\sin(k_1 K) \text{sh } t \sin(t/K)}{(\text{ch } t + \cos(t/K))^2 (\text{ch } k_2 - \cos(t/K))} \right) dt.$$

Покажем теперь, что коэффициенты линейных по скоростям слагаемых в функции Рауса имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \beta_1(s) &= \delta(s) = 0, \\ \beta_2(s) &= \beta(s) = 2(s - R_1 - R_2 - b), \\ \gamma(s) &= \frac{1}{2}(s - R^2)^2 - \frac{R_1^2}{2} - s \left( R_2 + b - \sqrt{R_2^2 + b^2} \right). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Напомним, что  $b$  выражается через  $s$  по формуле (6.7). Первые два равенства очевидны, поскольку, когда круглые тела движутся вдоль прямой, проходящей через

их центры, поток через разрез между ними равен нулю. Для нахождения коэффициентов  $\beta(s)$  и  $\gamma(s)$  свяжем начало координат с первым цилиндром (рис. П11.2), согласно определению (см. стр. 346), имеем

$$\beta(s) = \int_{I_2} \left( 1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1, \quad \gamma(s) = \int_{I_2} \left( \xi_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} \right) d\xi_1.$$

С помощью условий Коши–Римана находим

$$\begin{aligned} \beta(s) &= \xi_1(B_2) - \xi_2(B_1) - \psi_2(B_2) + \psi_2(B_1), \\ \gamma(s) &= \frac{1}{2} (\xi_1^2(B_2) - \xi_1^2(B_1)) - \psi_3(B_2) + \psi_3(B_1), \end{aligned}$$

где  $B_1$  и  $B_2$  — точки на концах разреза (см. рис. П11.9). Подставляя значения  $\xi_1(B_i) = \mp \sqrt{R_i^2 + b^2} \pm R_i$  и граничные условия  $\psi_2|_{C_i} = -\xi_1 \mp b$ ,  $\psi_3|_{C_1} = 0$ ,  $\psi_3|_{C_2} = s(-\xi_1 + b)$ , получаем (6.11).

## Литература

- [1] Жуковский Н. Е. Обобщение задачи Бьёркнеса о гидродинамических силах, действующих на пульсирующие или осциллирующие тела внутри жидкой массы, Труды Отд. физических наук Общества любителей естествознания, т. VIII, вып. 2, 1896. (См. также Собр. сочинений, т. 2, ГИТТЛ, Москва–Ленинград, 1949, с. 670–688.)
- [2] Ладиков-Роев Ю. П., Сальников Н. Н. К вопросу о сложном поведении динамических систем. Динамика движения системы вихрей в идеальной жидкости, Пробл. управл. и информат., 2002, № 3, с. 47–60.
- [3] Bjerknæs V. F. K. Fields of force, N. Y., Columbia Univ. Press, 1906, 135 p.
- [4] Bjerknæs C. Vorläufige Mittheilungen über die Kräfte, die entstehen, wenn kugelförmige Körper, indem sie Dilatations und Contractions — Schwingungen ausführen, in einer incompressible Flüssigkeit sich bewegen. Repert für rein und angew. Math., 1876, p. 264.
- [5] Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л., 1941. (Lamb H. Hydrodynamics, Ed. 6-th, N.Y., Dover publ., 1945.)
- [6] Poincaré H. Sur le forme nouvelle des equation de la mecanique, C. R. Acad. Sci. Paris, 1901, V. 132, p. 369–371.

- [7] Ramodanov S. M. Motion of two circular cylinders in a perfect fluid, *Reg. & Chaot. Dyn.*, 2003, V. 8, № 3, p. 313–318.
- [8] Borisov A. V., Mamaev I. S., Ramodanov S. M. Dynamics of a circular cylinder interacting with point vortices, *Discrete and contin. dyn. syst.*, B., 2005, V. 5, № 1, p. 35–50.
- [9] Johnson E. R., McDonald Robb N. *The motion of a vortex near two circular cylinders* // *Proc. R. Soc. Lond. A.* 2004. V. 460. P. 939–954.
- [10] Kirchhoff G. R. *Vorlesungen über Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883. Пер. на рус.: Кирхгоф Г. *Механика*, Ижевск: НИЦ «РХД», 2001.

**Борисов Алексей Владимирович**  
**Мамаев Иван Сергеевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**  
**ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР**

*Дизайнер М. В. Ботя*  
*Технический редактор А. В. Ширококов*  
*Корректор З. Ю. Соболева*

---

Подписано в печать 25.12.2005. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,39. Уч. изд. л. 21,65.  
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1. Заказ №100.  
АНО «Институт компьютерных исследований»  
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.  
<http://rcd.ru> E-mail: [mail@rcd.ru](mailto:mail@rcd.ru)

---