

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН  
\_\_\_\_\_А.М. Кривцов  
«\_\_»\_\_\_\_\_2023г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

магистерская диссертация

### **ВЛИЯНИЕ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА РОСТ И РАСКРЫТИЕ ТРЕЩИНЫ АВТОГРП**

по направлению подготовки (специальность)

01.04.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль)

01.04.03\_04 Математическое моделирование процессов нефтегазодобычи

Выполнил  
студент гр.5040103/10401

А.А. Еникеева

Руководитель  
доцент ВШТМиМФ, к.т.н.

С.А. Калинин

Консультант  
по нормоконтролю

Е.А. Хайбулова

Санкт-Петербург – 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ,  
А.М. Кривцов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Еникеевой Арине Алексеевне гр.5040103/10401

1. Тема работы: Влияние многофазной фильтрации на рост и раскрытие трещины автоГРП
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 26.05.2023
3. Исходные данные по работе: научные статьи и публикации по теме работы, экспериментальные данные в области многофазной фильтрации флюида в пористой среде. Код на языке программы FreeFem, моделирующий трещину автоГРП с учетом однофазной фильтрации.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): разработка методики исследования влияния многофазной фильтрации на раскрытие и рост трещины автоГРП, создание однослойной гидродинамической модели с учетом многофазной фильтрации в программе TNavigator, работа с расчетным модулем в программе FreeFEM++ для расчета механики с учетом однофазной и многофазной фильтрации с помощью разработанной методики, разработка парсера на платформе языка программирования Python для выгрузки данных из TNavigator в необходимом формате, разработка модуля для преобразования поля давлений в градиент давления для дальнейшей загрузки в расчетный модуль, проведение расчетов и анализ результатов.
5. Перечень графического материала: не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: не предусмотрены.
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ С.А. Калинин, доцент ВШТМиМФ, к.т.н.  
Задание принял к исполнению 27.02.2023г.

Студент \_\_\_\_\_ А.А. Еникеева

## РЕФЕРАТ

На 52 страницы, 19 рисунков, 1 таблицу.

ТРЕЩИНА АВТОГРП, МНОГОФАЗНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ, ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАЗРЫВ ПЛАСТА.

Тема выпускной квалификационной работы: «Влияние многофазной фильтрации на рост и раскрытие трещины автоГРП».

Настоящая работа посвящена исследованию влияния многофазной фильтрации на рост и раскрытие трещины автоГРП. Было сделано предположение о возможности исследования многофазной фильтрации посредством получения поля давления из расчета гидродинамической модели с двухфазной фильтрацией – вода-нефть, и передачи этого давления в расчетный механический модуль для модели с однофазной фильтрацией. Рассматривалась односторонняя задача влияния давления на деформации, влияние деформаций на давление не рассматривалось.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что многофазная фильтрация существенно влияет на скорость роста трещины автоГРП, при учете многофазности, трещина растет быстрее.

В будущем планируется рассмотреть влияние трехфазной фильтрации - вода, нефть, газ - на рост и раскрытие трещины автоГРП, в том числе и техногенных жидкостей.

## **ABSTRACT**

52 pages, 19 figures, 1 table.

**HYDRAULICALLY-DRIVEN FRACTURE, MULTIPHASE FILTRATION, HYDRODYNAMIC MODEL, FINITE-ELEMENT MODELLING, HYDRAULIC FRACTURING.**

Subject matter of final qualification work: "Influence of multiphase filtration on growth and opening of hydraulically-driven fracture".

This work is devoted to the study of the effect of multiphase filtration on the growth and opening of the fracture auto-fracture. The assumption was made that multiphase filtration can be investigated by obtaining the pressure field by calculating the hydrodynamic model with two-phase oil-water filtration and transferring that pressure to the computational mechanical module for the single-phase filtration model. The one-sided problem of pressure influence on deformation was considered; the influence of deformation on pressure was not considered.

The results obtained suggest that multiphase filtration significantly affects the crack growth rate of hydraulically-driven fracture, when multiphase filtration is taken into account, the crack grows faster.

In the future, it is planned to consider the effect of three-phase filtration - water, oil, gas - on the growth and opening of hydraulically-driven fracture, including man-made fluids.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕЩИН АВТОГРП .....	9
1.1.    Общая теория трещин автоГРП .....	9
1.2.    Промысловые методы регистрации и контроля трещины автоГРП	10
1.3.    Модели с учетом многофазной и однофазной фильтрации .....	14
1.3.1 Метод совместного решения - SS метод.....	15
1.3.2 Метод неявный по давлению, явный по насыщенности – IMPES метод.....	15
1.3.3 Моделирование многофазной фильтрации и взаимосвязь с ростом трещин автоГРП. ....	16
1.4.    Моделирование динамики трещин автоГРП.....	16
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА И РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИНЫ АВТОГРП С УЧЕТОМ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ .....	24
2.1. Постановка задачи.....	24
2.2. Алгоритм решения задачи.....	26
2.3. Создание гидродинамической модели с учетом многофазной фильтрации в программном комплексе «TNavigator». ....	28
2.4. Решение задачи многофазной фильтрации. ....	31
2.4.1 Уравнение фильтрации.....	31
2.4.2 Модели флюида.....	36
2.4.3 Формулировка уравнения фильтрации при неизвестных давлениях. .....	37
2.4.4. Формулировка уравнений фильтрации при неизвестном давлении в нефти и водонасыщенности. ....	38
2.5. Решение задачи пороупругости с использованием конечно- элементного решателя «FreeFEM++». ....	41
2.5.1 Уравнение пороупругости.....	41
2.5.2 Определение граничных условий.....	43
2.5.3 Численное решение.....	44
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ .....	46
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	47
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	48

## ВВЕДЕНИЕ

Нефтедобывающая промышленность является сферой, которая существенно влияет на экономическую и политическую картину мира, а нефть считается одним из самых ценных энергетических природных ресурсов. В последние годы наблюдается истощение традиционных источников энергии, в связи с чем растет роль трудноизвлекаемых запасов. Очевидно, что извлечение нефти из подобных резервуаров с низким коэффициентом извлечения нефти (КИН) является более технологичным и сложным процессом, чем нефтедобыча на традиционных месторождениях. Процесс также усложняется тем, что зачастую нефтяные месторождения имеют невысокие значения проницаемости нефтесодержащих пластов, в связи с чем не удастся эффективно использовать системы поддержания пластового давления (ППД) на нагнетательных скважинах. Увеличение давления закачки на нагнетательных скважинах при переводе на ППД приводит к незапланированному увеличению трещин гидроразрыва, такие трещины называются авто-ГРП. Возникновение таких трещин в большинстве случаев крайне нежелательно, поскольку оно может иметь необратимые последствия вплоть до преждевременного обводнения нефтяного пласта, что значительно снижает качество и количество извлекаемой нефти. Магистральные трещины автоГРП могут приводить к преждевременному обводнению добывающих скважин, находящихся на расстояниях нескольких километров [5]. Рост трещины автоГРП может стать причиной роста давления и в последствии происходить в верхние/нижние горизонты, а это снижает эффективность эксплуатации или добычи.

Отрицательные последствия роста трещины автоГРП зависят от ее раскрытия, длины и ориентации в разрабатываемом пласте. Поскольку нагнетание жидкости производится с большим расходом или небольшим, но в течение относительно длительного времени для ППД, практически

невозможно избежать образования трещины автоГРП. Однако насыщение разрабатываемого пласта водой по мере закачки может сдерживать рост трещины благодаря эффектам пороупругости. С другой стороны, контролируемые трещины автоГРП можно использовать для управления масштабным заводнением, оптимизации схем расположения скважин.

Чтобы предотвратить проблему разрастания трещин, можно использовать метод разработки предполагающей ориентацию относительно преимущественного направления развития трещин. Однако во избежание взаимовлияния скважин, важно определять траекторию развития трещин автоГРП до начала проектирования разработки.

Для точного определения параметров инициации и роста трещины автоГРП, наилучшим методом является комбинированное гидродинамическое и геомеханическое моделирование. Этот подход включает в себя измерение распределения давления в текущий момент времени, решение механической задачи и учет взаимодействия соседних скважин. Траектория развития трещины определяется изменениями порового давления и поля напряжений.

В дополнение к предотвращению обводнения добывающих скважин, информация о геометрии трещин автоГРП может использоваться для оптимизации системы разработки. Зная ориентацию и геометрию предполагаемых трещин автоГРП, возможно сокращение количества скважин при сохранении эффективности ППД и максимальное сближение зон отбора и нагнетания в радиусе действия .

Во время разработки очень важно в самом начале учесть влияние трещины автоГРП и её возможное развитие. Напряжено-деформированное состояние в пласте определяет рост трещины в длину и высоту, если при выборе системы разработки исходить из ориентации относительно преимущественного развития трещины, то можно избежать случаев с ростом трещины. Также зная приблизительно геометрию трещины автоГРП, можно оптимизировать систему разработки с помощью правильного расположения

скважин.

На рост и раскрытие трещины могут повлиять различные факторы – в первую очередь это, конечно, закачка жидкости в пласт через нагнетательную скважину. Жидкость попадает в продуктивный пласт или в трещины, образованные после проведения ГРП, давление растет и трещины открываются, в последствии это влияет на поле давлений в целом во всем пласте и на его напряженно-деформированное состояние. Однако также существенно осложнить процесс может изменение состава жидкости – закачиваемой или уже находящейся в пласте. Смесь воды, нефти и газа в различных их состояниях могут изменить течение в пласте, что может значительно повлиять на динамику трещины автоГРП.

Многофазная фильтрация может оказывать влияние на добычу нефти в результате нестабильного взаимодействия различных флюидов с пористой структурой. При многофазной фильтрации сопротивление течению различных фаз в породе является разным: какие-то фазы имеют высокую подвижность в присутствии других фаз, а какие-то фазы наоборот имеют низкую подвижность. Различное сопротивление течению фаз приводит к распределению давления, которое может значительно отличаться от давления при однофазной фильтрации. Оценить степень этого различия - это суть дипломной работы. В настоящем исследовании нужно ответить на вопрос о том, надо ли учитывать распределение давления при многофазной фильтрации для оценки геометрии трещины авто-ГРП, а значит и характера заводнения и эффективности вытеснения.

При многофазном течении многокомпонентной смеси в продуктивном пласте идет интенсивный массообмен между фазами, движущимися с разными скоростями. Это может привести к изменению состава и физических свойств фильтрующихся фаз. Негативными последствиями закачки техногенных флюидов в разрабатываемый пласт могут являться: закупорка пористой среды твердыми частицами (кольматация) и обратный процесс отрыва и переноса частиц (суффозия), снижение фильтрационных



характеристик и другие. Кроме того, часть твердой фазы может задерживаться в порах, а другая часть может перемещаться дальше в пласт. Некоторые из осевших частиц могут попадать в фильтрационный поток и перемещаться в более глубокие зоны пласта и оседать там.

Моделирование распространения, роста и раскрытия трещин автоГРП и понимание важности их исследования в дальнейшем позволит перенаправить все негативные факторы неминуемого их возникновения в положительные, даст возможность извлекать пользу из данного процесса. Поэтому задача моделирования распространения трещины автоГРП с целью её контролирования является как никогда актуальной в практике разработки месторождений.

В данной работе исследуется влияние двухфазной фильтрации – вода, нефть, на раскрытие и рост уже существующей трещины, полученной после проведения гидроразрыва пласта - автоГРП.

## ГЛАВА 1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕЩИН АВТОГРП

В данной главе будет проведен обзор существующей литературы по теме настоящей работы, также будут исследованы математические модели расчета роста и раскрытия трещины автоГРП, будут рассмотрены методы моделирования многофазной и однофазной фильтрации.

### 1.1. Общая теория трещин автоГРП

Эффект автоГРП может возникать и при бурении скважин, если плотность бурового раствора превышает некоторую критическую величину, однако в данной работе такие трещины автоГРП не будут рассматриваться. Появление и развитие трещин автоГРП при ППД может быть как ожидаемым (запланированным), так и неожиданным. При этом сделать качественную и количественную оценку геометрии образовавшейся трещины авто-ГРП зачастую очень сложно из-за взаимного и одновременного влияния многих факторов. Длина трещины автоГРП может варьироваться от метра до километра и более, также трещина имеет свойство раскрываться и закрываться в процессе ППД.

Самопроизвольное возникновение трещин автоГРП напрямую связано с эффектами термоупругости. Влияние термоупругости определяется процессом закачки воды с низкой температурой, гораздо меньшей температуры в пласте, в последствии охлаждение пласта снижает напряжения в нем и приводит к инициации или росту трещины автоГРП.

Трещины автоГРП, с одной стороны, имеют схожую природу с обычным ГРП на добывающих скважинах: происходит закачка жидкости под давлением, которое, в свою очередь, разрывает горную породу и способствует распространению трещины. Особенностью явления автоГРП является то, что закачка низковязкой ньютоновской жидкости без пропанта происходит с малым непостоянным расходом в течение длительного промежутка времени,

это приводит к изменению порового давления и температуры вследствие работы нагнетательных и добывающих скважин, которые влияют на напряженно-деформированное состояние на масштабах системы разработки, что в свою очередь сказывается на инициации и распространении трещины автоГРП.

Контроль роста и раскрытия трещин автоГРП является важной и актуальной задачей в наши дни, так как на данный момент не существует оптимальных методов контроля проведения ГРП и соответственно контроля дальнейшего развития трещин автоГРП при ППД. Если не проводить постоянный анализ наличия и изменения трещин автоГРП в пласте, можно получить сложнейшие негативные последствия: прорыв воды в верхние или нижние горизонты, а так же преждевременное обводнение добывающих скважин. На рисунке 1 представлена визуализация трещины автоГРП.

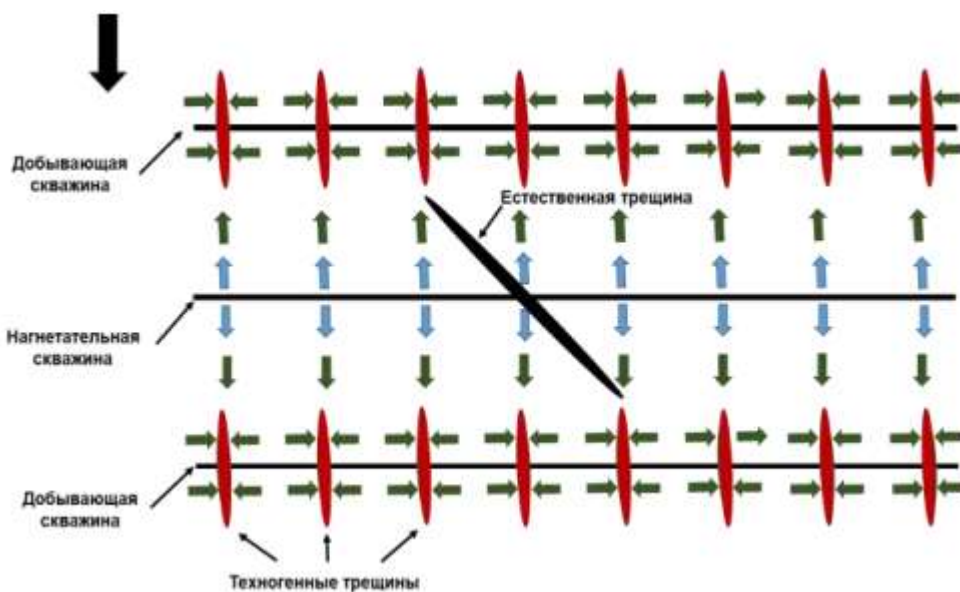


Рисунок 1 - Схема расположения нагнетательной и добывающих скважин, трещины автоГРП, пересекающей нагнетательную скважину на участке низкопроницаемой залежи.

## 1.2. Промысловые методы регистрации и контроля трещины автоГРП

Выявление эффекта автоГРП является важным с точки зрения определения причин обводнения пласта, планирования заводнения, выбора

системы разработки и других нефтедобывающих процессов. На сегодняшний день существуют методы регистрации и контроля трещин ГРП, однако с трещинами автоГРП все гораздо сложнее, существуют методы, по которым можно определить существование трещины автоГРП, однако их в разы меньше и динамику их роста сложно прогнозировать и практически невозможно контролировать.

Устьевое и забойное давление – самые доступные источники информации в гидродинамических исследованиях скважин и гидродинамико-геофизическом мониторинге скважин. Цель ГДИС – оценка пластового давления, продуктивности пласта и его фильтрационных свойств с помощью кривой восстановления давления, которую можно интерпретировать с помощью графика Нолта-Смита.

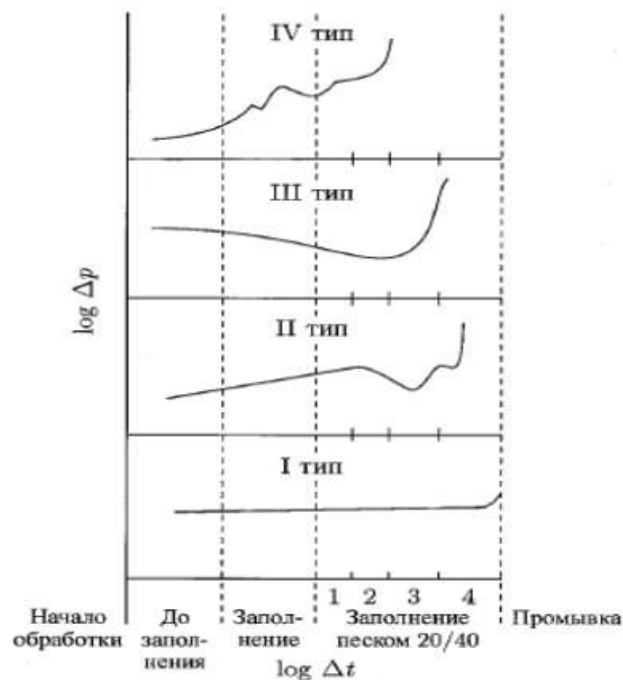


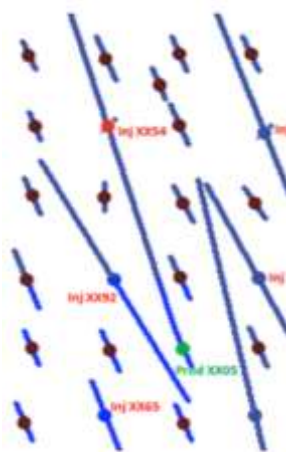
Рисунок 2 - Типы восстановления давления в реальном масштабе времени

Для проведения ГДИС используются специализированные приборы, такие как, например, датчики давления, которые устанавливаются на глубине,

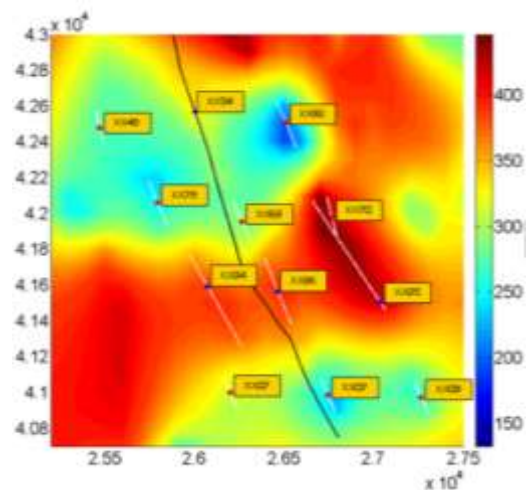
в которой проводится гидроразрыв. Данные полученные с датчиков анализируются на поверхности с помощью специализированных компьютерных программ, которые позволяют определить размеры, форму и направление развития трещин ГРП.

На основе данных гидродинамических исследований скважин можно определить динамику роста трещин путем сравнения данных за разные периоды времени. Исследования подтверждают, что рост трещин автоГРП неизбежен и его крайне сложно контролировать, особенно при интенсивной закачке жидкости, что характерно для низкопроницаемых коллекторов.

Результаты ГДИС, описанные в статье [32], показывают рост трещины автоГРП и ее влияние на обводнение скважин. Промысловые исследования выявили, что длина такой трещины может превышать 1 км, а ее траектория распространения может быть сложной. Если нагнетательная скважина ориентирована перпендикулярно минимальным напряжениям, то рост трещины от нее до добывающей скважины может привести к обводнению на уровне 99% (Рисунок 3б).



а)



б)

Рисунок 3 - а) Участки исследования взаимодействия скважин [32]; б) Карта распределения давления и расчет траектории развития трещины автоГРП в нагнетательной скважине [9].

Примерами из статей [32] и [9] служат скважины между нагнетательной и добывающей (Рисунок 3а), которые имеют низкую обводненность, что подтверждает влияние трещины на процесс добычи. Ограничение закачки или полная остановка нагнетательной скважины может уменьшить обводненность добывающей. Некоторые исследования показывают возможность смыкания незакрепленной пропантом части трещины при изменении режима работы нагнетательной скважины. Через ограничение закачки и снижение давления на забое можно добиться смыкания трещин автоГРП.

Иначе контроль трещин ГРП в пласте можно проводить с использованием геофизических методов, в том числе сейсмического и радиологического. Сейсмическим методом используется измерение ультразвуковых волн, которые отражаются от тел нефти и газа, проходящих через трещины. Радиологический метод позволяет определить изменения плотности грунтов, а также отслеживать состояние пласта и прогнозировать местонахождение трещин, используя радиоактивные источники.

Также существует метод оценки скорости растяжения трещины (ESD - Extension Strain Damage), который основан на измерении деформаций, вызванных трещиной в ее окружении. Для этого используют специальные дисплеи, которые установлены в скважинах на глубинах проведения гидроразрыва.

Еще одним из показательных методов является отслеживание изменения приемистости нагнетательных скважин, изменение которой может возникать из-за образования трещин автоГРП или из-за загрязнения призабойной зоны скважины. В данном случае одними из самых эффективных инструментов для анализа работы нагнетательных скважин являются графики Холла и Хорна. На рисунке 4 представлен график Холла, который определяет зависимость функции давления от суммарной закачки. График показывает, что уменьшение наклона соответствует росту трещин, а увеличение наклона говорит о засорении призабойной зоны.

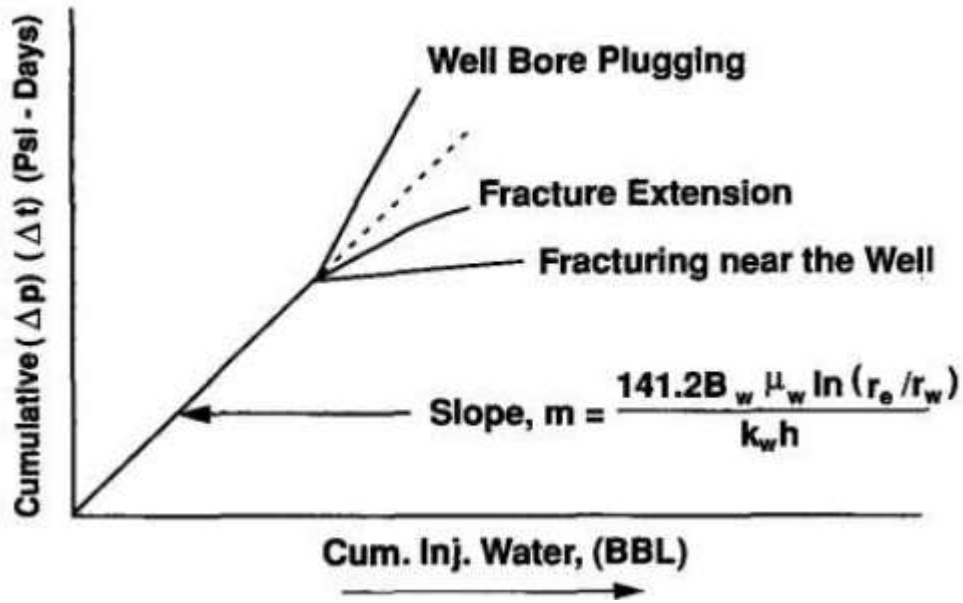


Рисунок 4 - График Холла

Таким образом, для регистрации и контроля трещин, которые возникают в результате гидроразрыва пласта или при поддержании пластового давления, применяются различные промышленные методы, которые позволяют определять размеры, форму и направление развития трещины, а также оценивать скорость ее роста и деформации окружающей горной породы.

### 1.3. Модели с учетом многофазной и однофазной фильтрации

Численные модели фильтрации широко применяются для рационального использования природных ресурсов, особенно для прогнозирования и оптимизации эксплуатации недр Земли. Однако моделирование многофазных потоков значительно сложнее, чем однофазных, из-за связанных нелинейных уравнений и возможности фазовых превращений. Например, возможны конденсация воды или испарение при производстве геотермальной энергии или растворение в нефти легких углеводородных компонентов при разработке месторождений углеводородов.

В этой области находят применение различные методы решения, в том числе и специализированные для более сложных задач. С начала изучения

двухфазных течений около сотни лет назад было опубликовано множество статей. Ричардсон и Стоун уже делали обзор этих методов в 1973 году и представили два основных метода решения уравнений многофазной фильтрации: метод SS (совместное решение) и метод IMPES (решение неявным методом по давлению и явным методом по насыщенности).

### **1.3.1 Метод совместного решения - SS метод**

SS метод - это метод совместного решения уравнений фильтрации, где производные от насыщенностей в правой части уравнений записываются через производные от давлений и затем решаются для давлений. Этот метод был предложен Дугласом и др. (1959), а позднее обобщено и проанализировано несколькими исследователями (Коутс и др., 1967; Коутс, 1968 и Шеффилд, 1969).

При решении систем нелинейных уравнений этого типа важно правильно выбрать аппроксимацию по времени, и метод с аппроксимацией уравнений обратной разностью обычно является более надежным. В своей работе 1960г. Дуглас показал, что рассмотренный им метод позволяет получать устойчивые решения задач двухфазной фильтрации, он часто используется при моделировании нефтяных пластов.

Явный метод Писмана (1967) и неявный метод переменных направлений Писмана — Рэчфорда (ADI-метод), для задач данного типа часто бывают неустойчивыми.

### **1.3.2 Метод неявный по давлению, явный по насыщенности – IMPES метод**

IMPES метод, который является неявным по давлению, но явным по насыщенности, был предложен в работах Шелдона и др. (1959), а также Стоуна и Гарднера (1961). Основная идея метода заключается в получении



одного уравнения для давлений путем комбинирования уравнений фильтрации различных флюидов. Сначала прогнозируется изменение давления, а затем вычисляются новые значения насыщенности. Аналогичный метод был также предложен советскими авторами в 1968 году (Данилов и др., 1968), а также похожая численная процедура используется для уравнений Навье-Стокса (Фокс и Дирдоф, 1972). Главное допущение в данном методе состоит в том, что капиллярное давление в потоковых уравнениях остается неизменным на временном шаге

### **1.3.3 Моделирование многофазной фильтрации и взаимосвязь с ростом трещин автоГРП.**

Существует относительно мало работ, учитывающих влияние многофазной фильтрации на динамику роста трещины автоГРП. Можно выделить работы Sharma M. и др. (2016). В силу сложности корректных измерений параметров в полевых условиях любые независимые оценки геометрии трещины авто-ГРП представляют самостоятельную ценность, поскольку позволяют сравнить полученные результаты и выявить возможные ошибки. В данной работе используется подход, который позволяет разделить моделирование многофазной фильтрации и механику роста трещин авто-ГРП, что очень важно с вычислительной точки зрения. Кроме того, такой подход позволяет сделать оценку вклада многофазной фильтрации в динамику роста трещины авто-ГРП, а значит упростить и ускорить расчеты при определенных условиях.

### **1.4. Моделирование динамики трещин автоГРП**

Динамика роста трещин автоГРП может быть смоделирована с учетом нескольких процессов: изменение напряженно-деформированного состояния пласта, движение жидкости внутри трещины и фильтрация жидкости в пласте. Более детальный учет всех этих процессов при моделировании может

существенно усложнить саму модель и потребовать значительных вычислительных ресурсов. Для упрощения модели можно сделать некоторые допущения в отношении определенных процессов и описать их приблизительно. Поэтому разработка аналитических и полуаналитических моделей, которые могут помочь понять фундаментальные физические механизмы возникновения и роста трещин автоГРП, является важным вопросом.

Первое упоминание о моделировании процесса распространения трещин автоГРП представлено в работе Nagoort, J. (1980). В своем исследовании автор объединил численную модель однофазной фильтрации и аналитическую модель распространения трещины. В работе рассматривается двумерный симметричный элемент, содержащий одну нагнетательную и одну или несколько добывающих скважин. В модели предполагается, что трещина распространяется перпендикулярно минимальному главному напряжению в горизонтальном направлении, а в вертикальном направлении трещина сдерживается в целевом пласте кровлей и подошвой пласта. Схема моделируемого элемента разработки показана на рисунке 5.

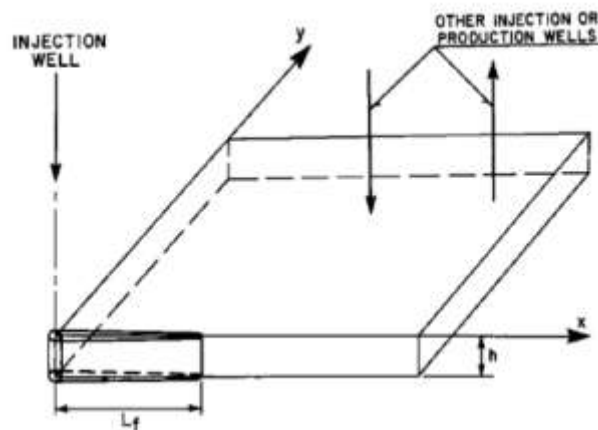


Рисунок 5 - Схематическая иллюстрация моделируемого элемента разработки.

В данной задаче были введены некоторые допущения. Считалось, что трещина распространяется в линейно-порупругой однородной изотропной

непористой твердой среде, что позволило автору получить не сложные аналитические формулы для оценки параметров динамики распространения трещины. Давление распространения трещины в модели находится по формуле (1).

$$P_{fp} = P_{foc} + \frac{K_{Icr}}{\sqrt{\pi L_f}} \quad (1)$$

где  $P_{fp}$  - давление распространения трещины,  $P_{foc}$  - давление смыкания трещины,  $K_{Icr}$  - критический коэффициент интенсивности напряжений,  $L_f$  - полудлина трещины.

Давление закрытия или смыкания трещины определяется следующим образом:

$$P_{foc} = s_h \quad (2)$$

где  $s_h$  - минимальное горизонтальное напряжение.

Минимальное горизонтальное напряжение линейно зависит от порового давления:

$$\Delta s_h = A \Delta p \quad (3)$$

где  $A$  – пороупругая константа, равная:

$$A = 2 \frac{(1 - 2\nu)}{1 + 2\nu} \alpha \quad (4)$$

где  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $\alpha$  - константа Био.

Важнейшим результатом исследования является вывод зависимости давления распространения трещины автоГРП и длины трещины автоГРП от

времени (Рисунок 6).

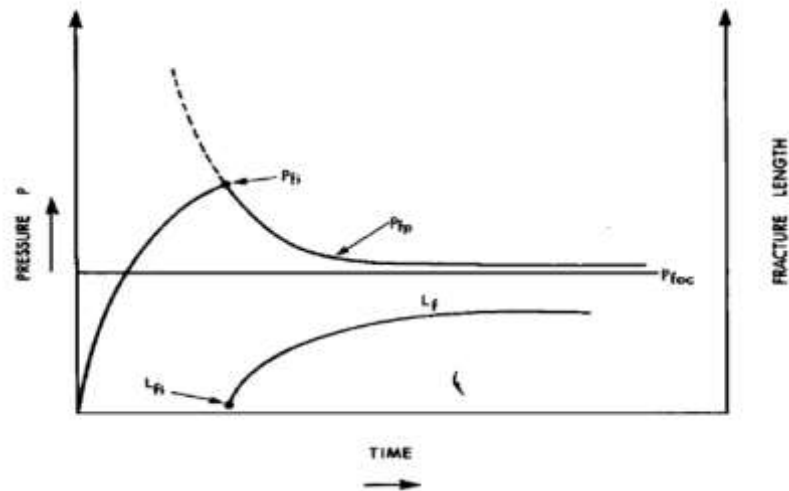


Рисунок 6 - Зависимости давления распространения трещины автоГРП и длины трещины автоГРП от времени

Важно уточнить, что уравнение (1) применимо только в случае длины трещины равной больше двух радиусов скважины. При увеличении длины трещины давление распространения уменьшается, начиная с исходной длины трещины автоГРП  $L_{fi}$ . Давление для длинных трещин сравнивается практически с давлением открытия или закрытия трещины. Давление образования трещины рассчитывается следующим образом:

$$P_{fi} = P_{foc} + \frac{K_{Icr}}{\sqrt{\pi L_{fi}}} \quad (5)$$

где  $L_{fi}$  - начальная длина трещины, при которой уравнение (1) справедливо.

В модели предполагается, что уменьшение ширины трещины может повлечь за собой увеличение ее длины, за счет расширения скелета породы из-за эффектов пороупругости. В работе [18] раскрытие или рост в высоту трещины находится по формуле (6):

$$w_f = \frac{2(1-\nu^2)L_f}{E} \left( p_f - s_h - \frac{\lambda}{1+2\lambda} A(p_f - p_e) \right) \quad (6)$$

где  $E$  - модуль Юнга.

На основе модели Картера были рассчитаны утечки из трещины в пласт [12]:

$$q_d = \int_0^{L_f} \frac{k_y h}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y} \partial x \quad (7)$$

Однако, следует уточнить, что формула (7) для давления распространения трещины получена для особого вида трещин автоГРП, где высота намного больше ее длины.

Используемая для одномерных утечек, перпендикулярных трещине, не всегда верна, Так как в случае одномерных утечек скорость распространения давления в пласте может получиться намного меньше скорости распространения трещины, можно сказать, что модель Картера [12] не всегда верна. Согласно этой модели, скорость распространения трещины пропорциональна квадратному корню из времени и пропорциональна скорости распространения возмущения пластового давления (8):

$$L = \frac{q_d \cdot t^{\frac{1}{2}}}{\pi \cdot C \cdot h_f} \quad (8)$$

где  $q_d$  - безразмерный параметр,  $L$  - длина трещины автоГРП,  $C$  - коэффициент потери жидкости,  $h_f$  - высота трещины автоГРП,  $t$  - время.

$$q_d = \frac{q\mu}{2\pi h_f (p_f - p_i)} \quad (9)$$

где  $p_i$ - забойное давление,  $p_f$  - пластовое давление,  $q$ - объемная скорость потока,  $\mu$ - вязкость жидкости.

Одномерная модель Картера перестает быть верной в случае, когда скорость распространения возмущения пластового давления становится больше скорости распространения трещины.

Случай, когда длина трещины намного больше высоты рассматривается в работе [21]. Данный случай больше соответствует действительности. Авторам удалось вывести свою формулу расчёта длины трещины, предположив, что можно использовать эллиптическое решение для давления (10):

$$L = 3 \exp\left(-\frac{2\pi kh\Delta p}{q\mu}\right) \sqrt{\pi\eta} \quad (10)$$

В статье Клиффорда [13] представлена трехмерная модель динамики роста трещины автоГРП. В работе совмещаются упругая задача и задача фильтрации жидкости в пористой среде. Сложность объединения задач в одну постановку заключается в том, что концентратор напряжений в упругой постановке расположен на кончике трещины, в то время как фронты температуры и насыщения могут находиться в другом месте. Используя ряд допущений, авторы получили трехмерную модель распространения трещины авто-ГРП (Рисунок 7).

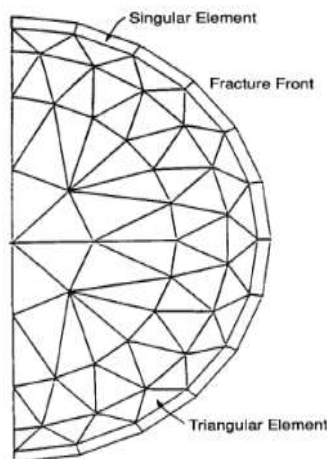


Рисунок 7 - Иллюстрация трехмерной модели распространения трещины авто-ГРП

Трехмерная постановка задачи также присутствует в работах [6] и [21]. В данных исследованиях представлены модели, которые позволяют описывать процессы происходящие в ходе изменения динамики трещин автоГРП, учитывая их взаимное влияние. Трехмерные модели отличаются значительной сложностью постановки задачи, большими вычислительными затратами для расчетов, что делает сложным их применение в практических приложениях.

В работе [27] был проведен расчёт фильтрации в пласте, после этого было произведено совместное решение уравнений динамики распространения трещины и деформаций породы. Описанные выше статьи позволяют предсказать направление распространения трещины автоГРП. В статьях [32], [5] фильтрация жидкости в пласте и ее движение в трещине описываются одновременно. Данный подход позволяет диагностировать наличие трещины автоГРП.

Наиболее подходящей для описания роста трещины автоГРП моделью является модель Кёнинга, в предпологается, что практически вся жидкость из трещины утекает в бесконечный пласт, давление в трещине равняется минимальному горному напряжению, при постоянном расходе и забойном давлении трещина автоГРП растёт таким образом, чтобы компенсировать приёмистость скважины. В модели Кёнинга полудлина трещины

пропорциональна квадратному корню из времени (11):

$$x_f = L_d(q_d)\sqrt{\chi t} \quad (11)$$

где  $\chi = \sqrt{\frac{k}{\mu c_t}}$  - коэффициент пьезопроводности, а  $L_d$  - безразмерный

коэффициент, который зависит от безразмерного параметра  $q_d$ .

Исходя из обзора существующих методов моделирования трещин автоГРП, можно сделать вывод о том, что аналитические решения могут быть получены только при определенных предположениях о распределении порового давления, напряженно-деформированном состоянии пласта и рассматриваемой области решения. При этом зачатую моделирование трещины автоГРП подразумевает возникновение трещины, а не развитие уже существующей трещины, что значительно влияет на критерий ее роста.

Работы, посвященные полному геомеханическому моделированию роста трещины, являются более вычислительно затратным по сравнению с полуаналитическими оценками, однако предлагают подходы, позволяющие избежать упрощающих предположений.



## ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА И РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИНЫ АВТОГРП С УЧЕТОМ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В данной главе будет рассмотрено решение поставленной задачи, рассмотрена математическая и физическая постановки, а так же описание гидродинамической модели и разработанная методика связки многофазной фильтрации и пороупругой задачи.

### 2.1. Постановка задачи

В данной работе приводится постановка задачи для учета влияния двухфазного характера течения в пористой среде на развитие трещины автоГРП. Строится упрощенная модель, где, как и в случае упрощенной модели кольматации, геомеханическая часть сводится к аналитическим формулам, при этом рассматривается модель трещины в случае режима доминирующих утечек.

Схема четвертинки области течения на плоскости  $Oxу$  представлена на рисунке 8 и сама трещина на рисунке 9.

При этом дополнительно делаются следующие предположения:

а) поскольку толщина пласта намного меньше его горизонтальной протяженности, то задачу можно считать плоской, а область течения — симметричной; трещина - прямая линия (разрез), расположенная вдоль оси  $Ox$ , ось  $Oy$  направлена вдоль минимальных напряжений. Задается условие плоской деформации в геометрии KGD (допущение о плоской деформации горизонтального сечения вертикальной трещины);

б) течение в скважине не моделируется, скважина задается точечным источником постоянной интенсивности  $Q$  и рассматривается режим доминирующих утечек;

в) пренебрегаем силой тяжести и изменением температуры ( $T = \text{const}$ );

г) вода в пласт поступает только из трещины (скважина связана с

пластом

только посредством трещины), других источников (нагнетательных скважин) и стоков (добывающих скважин) нет:  $q_o = q_w = 0$ ;

д) деформациями резервуара при моделировании фильтрации пренебрегаем, т.е. поровое давление оказывает влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) резервуара, но НДС не влияет на изменение порового давления;

е) давление в трещине в каждый момент времени постоянно (трещина бесконечной проводимости);



Рисунок 8 - Схема рассматриваемой области

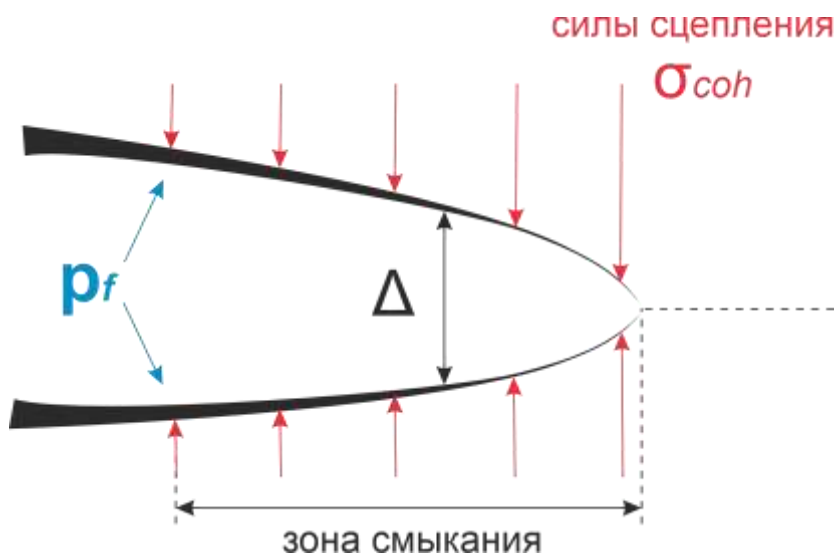


Рисунок 9 - Визуализация трещины

## 2.2. Алгоритм решения задачи

Задача исследования влияния многофазной фильтрации на рост и раскрытие трещины автоГРП может быть решена несколькими способами:

1. Полное решение в гидродинамическом симуляторе «TNavigator».
2. Полуаналитическим методом, в котором и задача многофазной фильтрации и задача пороупругости будут решаться в единой модели с помощью конечно-элементного решателя «FreeFem++».
3. Решение задачи с помощью связки двух вышеописанных симуляторов.

Подробнее о каждом из решений:

1. «TNavigator» отлично справляется с гидродинамическими задачами, однако в части механики в нем возможно реализовать не все случаи. Программный комплекс имеет специальный расчетный модуль для исследования трещин автоГРП, но, к сожалению, он не имеет на сегодняшний день должной популярности, в связи с чем осложняется процесс реализации работы, а также существенным его минусом является отсутствие возможности моделирования закрытия трещины. Так как нам необходимо решать контактную задачу, данным методом решения мы воспользоваться не можем.
2. «FreeFem++» - конечно-элементный решатель, который позволяет работать с дифференциальными уравнениями в частных производных, создавать неравномерную сетку и работать с ней, а так же визуализировать полученные результаты, как в процессе решения, так и по окончании работы. В данном решении сложность заключается в самом решении задачи многофазной фильтрации. Прикладные математические модели процессов массопереноса в пористых средах являются нелинейными и трудными для исследования.
3. Метод решения, используемый в данной задаче, к сожалению, нельзя сравнить с иными решениями, поскольку многофазную фильтрацию аналитически решить не представляется возможным, а связка пороупругой задачи с трещиной автоГРП и учетом многофазности мало

изучена. В данном решении мы учитываем многофазность и можем решать контактную задачу, что является оптимальным методом для выбора метода под решение конкретной задачи.

Исследование влияния многофазной фильтрации на рост и раскрытие трещины автоГРП сводится к совмещению гидродинамического решения задачи фильтрации и геомеханического решения задачи пороупругости.

С учетом всех выбранных допущений, указанных в постановке задачи (2.1. Постановка задачи) мы можем реализовать связку решений.

Алгоритм решения построен следующим способом: Мы связываем два симулятора с помощью модуля, написанного на языке программирования «Python», который представляет собой цикл передачи данных и последовательного запуска необходимых дополнительных модулей пост-преобработки данных и запуска соответствующих симуляторов.

Принцип действия:

1. Создание гидродинамической модели в программном комплексе «TNavigator».
2. Расчет 1 шага модели в «TNavigator» (решение задачи фильтрации).
3. Запуск модуля по выгрузке поля давления из «TNavigator» в виде бинарного файла и перекомпиляция в формат txt.
4. Запуск модуля по наложению полученного поля давления на прямоугольной сетке «TNavigator» на треугольную сетку «FreeFem++».
5. Запуск расчетного модуля в программном комплексе «FreeFem++» (решение задачи пороупругости). Итогом расчета – является полученная измененная длина трещины автогрп.
6. Передача новой длины в гидродинамическую модель «TNavigator».
7. Переход к пункту 1.

И так мы просчитываем необходимое количество итераций, на каждой итерации записываем в файл текущие на момент итерации длину и раскрытие трещины, а так же выводим соответствующие значения напряжений, перемещений, и графики.

### 2.3. Создание гидродинамической модели с учетом многофазной фильтрации в программном комплексе «TNavigator».

Для учета многофазной фильтрации была создана однослойная гидродинамическая модель с двумя фазами – вода и нефть. В модели присутствует одна скважина, которая является нагнетательной. Так же от скважины в направлении оси  $Ox$  распространяется трещина автоГРП. Трещина бесконечной проводимости, капиллярное давление в модели так же учитывается, все остальные условия соответствуют условиям, указанным в постановке задачи (2.1. Постановка задачи). В таблице 1 представлены параметры созданной гидродинамической модели.

Таблица 1. Параметры гидродинамической модели.

Наименование группы параметров	Наименование параметра	Значение
Размеры модели	Количество ячеек (x,y,z)	500*500*1
	Размер каждой ячейки, м (x,y,z)	1*1*15
Параметры пласта	Опорное давление, бар	256.6
	Сжимаемость породы, 1/бар	0.5e-5
	Глубина залежи, м	2600
	Проницаемость, мД (x,y,z)	(3,3,1)
	Пористость, д.ед	0.17
	Расход, м <sup>3</sup> /сут	100
Параметры фаз	Давление насыщения, бар	159.9
	Объемный коэффициент по нефти	1.04467
	Объемный коэффициент по воде	1.03498
	Вязкость воды, сПз	1
	Вязкость нефти, сПз	2.70748
	Плотность воды, кг/м <sup>3</sup>	1000

	Плотность нефти, кг/м <sup>3</sup>	860
	Относительные фазовые проницаемости определены по корреляции Кори	
Параметры трещины	Трещина моделируется как продолжение скважины	
	Трещина бесконечной проводимости	
	Исходная длина трещины, м	100
	Исходное раскрытие трещины, мм	1

Ниже представлена визуализация на текущем шаге распространения давления (Рисунок 10), насыщенность нефтью (Рисунок 11) и водой (Рисунок 12) и сгенерированная прямоугольная сетка (Рисунок 13).

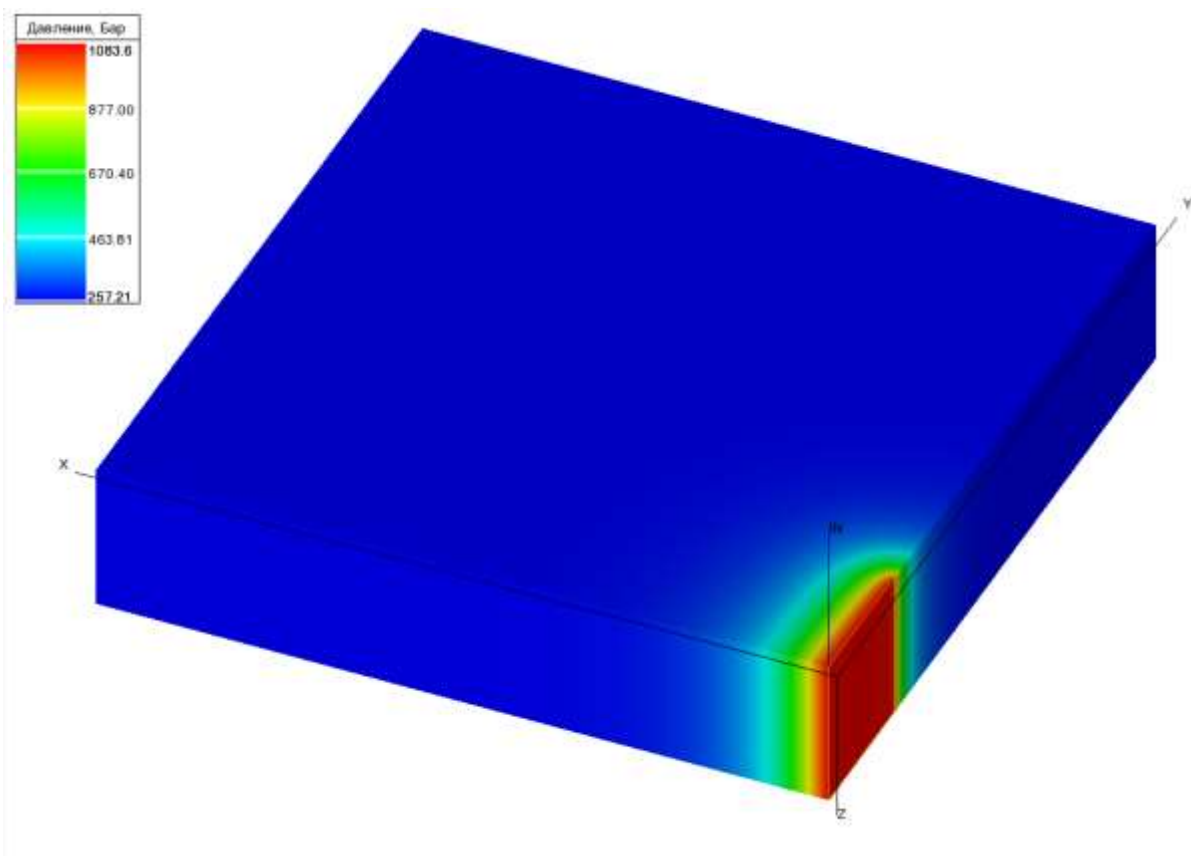


Рисунок 10 - Распределение давления при закачке воды

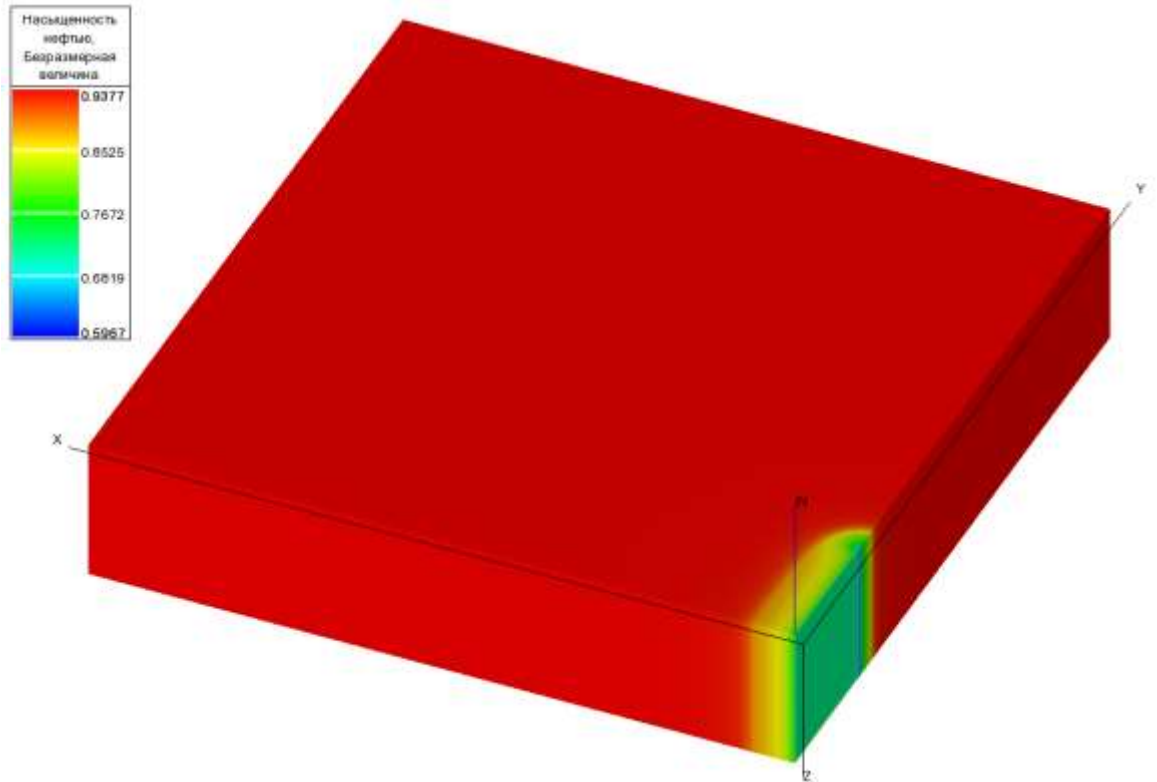


Рисунок 11 - Насыщенность нефтью

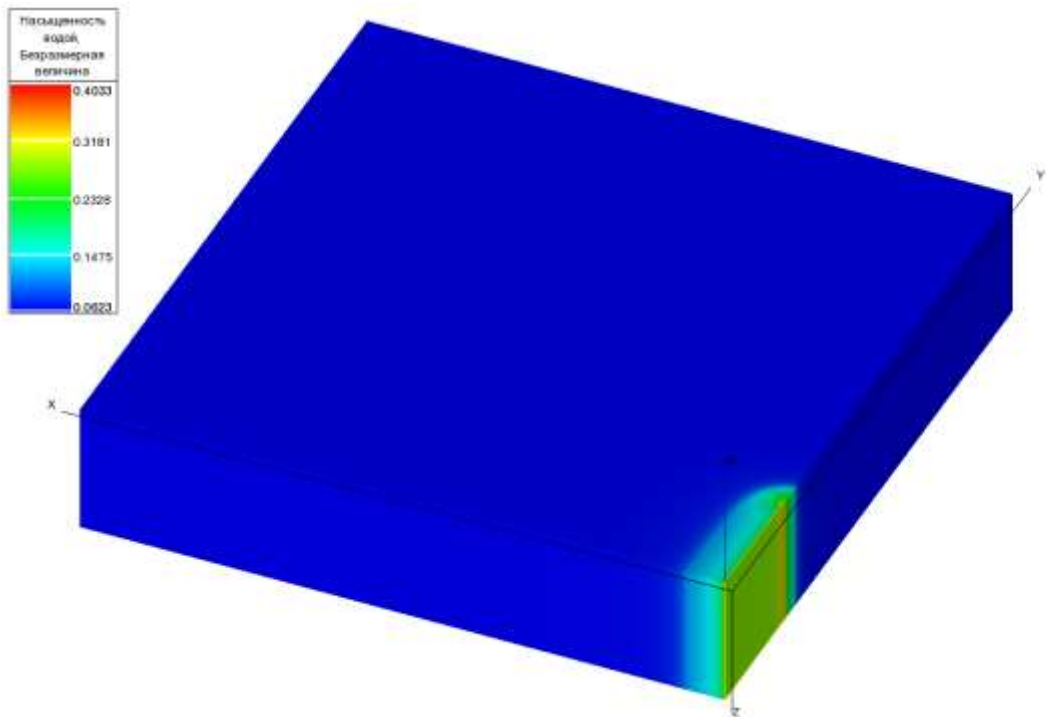


Рисунок 12 - Насыщенность водой

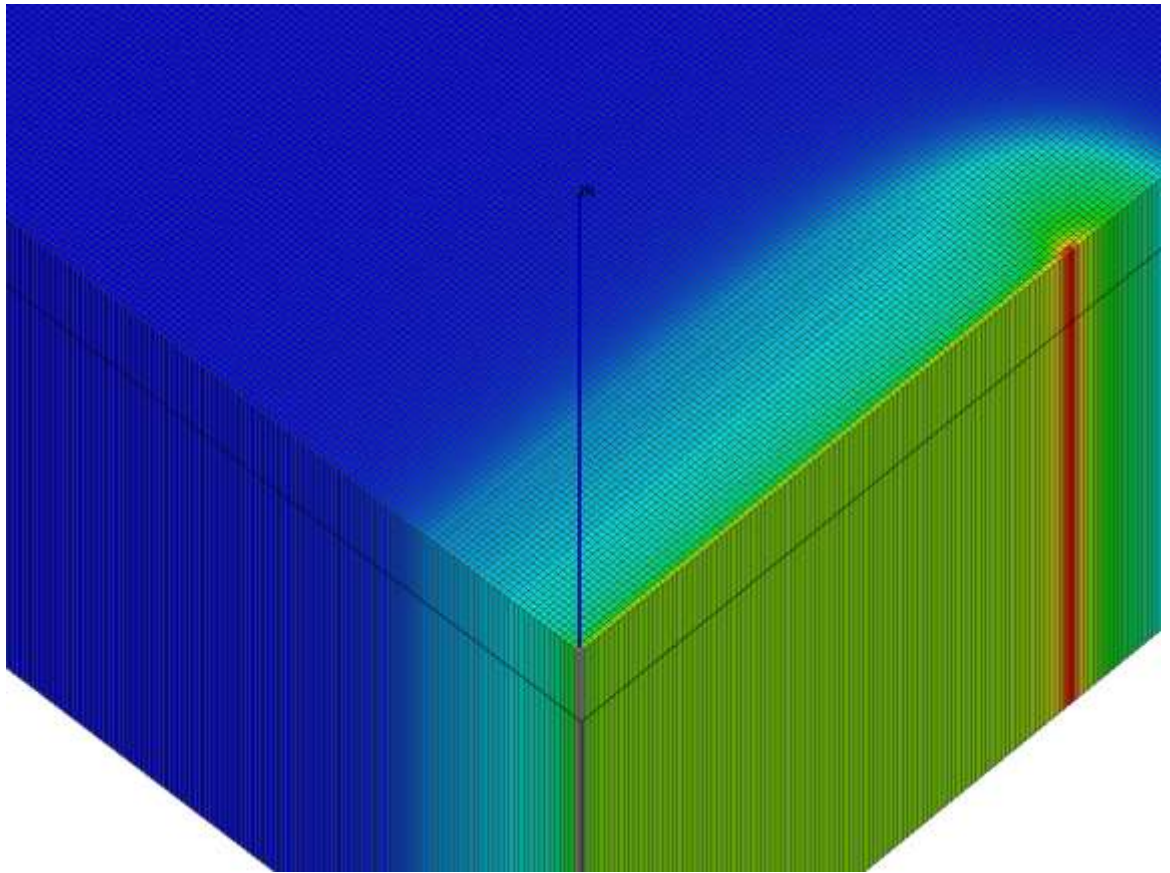


Рисунок 13 - Сгенерированная прямоугольная сетка

## 2.4. Решение задачи многофазной фильтрации.

Задача фильтрации в настоящей работе полностью решается в «TNavigator». В данном пункте будет рассмотрена математика, которая заложена в симулятор для решения задачи фильтрации.

### 2.4.1 Уравнение фильтрации

Основой для разработки месторождений является уравнение фильтрации флюида в пористой среде. Оно возникает при объединении уравнения неразрывности (то есть закона сохранения массы) и закона Дарси для скорости течения в пористой среде. Уравнение неразрывности определяет баланс втекающего и вытекающего флюида, закон Дарси, в свою очередь, связывает скорости флюида с градиентом потенциала и свойствами среды.

В механике сплошных сред при изучении течений в пористой среде



широко применяется дифференциальная форма закона Дарси с учетом движения в поле тяжести.

$$\vec{u} = -\frac{K}{\eta} \nabla(\rho g z + P) \quad (12)$$

где  $\rho$  - плотность флида,  $K$  - коэффициент проницаемости,  $g$  - ускорение свободного падения,  $P$  - внешнее давление,  $z$  - вертикальная координата.

Уравнение неразрывности предполагает что сумма приращений равняется нулю:

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dy dz + \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} dx dy dz + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} dx dy dz = 0 \quad (13)$$

где  $u$  - перемещения вдоль оси.

Рассмотрим самый общий случай, предположим, что у нас есть  $n_c$  компонентов распределенных среди  $n_\phi$  фаз.

Введем основные понятия:

$\varphi$  - пористость элементарного объема;

$V_\phi$  - количество моль всех компонентов в фазе “ф”;

$V_\phi$  - объем фазы “ф”;

$$\xi_\phi = \frac{V_\phi}{V_\phi} - \text{мольная доля фазы “ф”};$$

$$S_\phi = \frac{V_\phi}{\varphi V} - \text{объемная доля фазы “ф”};$$

$V_{c,\phi}$  - количество моль компонента “с” в фазе “ф”;

$$x_{c,\phi} = \frac{v_{c,\phi}}{\sum_c v_{c,\phi}} = \frac{v_{c,\phi}}{V_\phi} - \text{мольная доля компонента "с" в фазе "ф"};$$

$$N_c = \frac{v_c}{\phi V} = \sum x_{c,\phi} \xi_\phi S_\phi - \text{количество моль компонента "с" в фазе "ф"}$$

(концентрация);

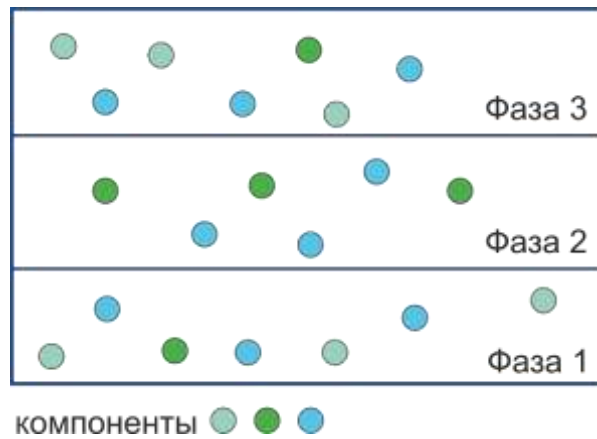


Рисунок 14 – Визуализация компонентов в фазах

Запишем дифференциальную форму уравнения фильтрации:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\phi N_c) = \operatorname{div} \sum_{P=O,W,G} x_{c,P} \xi_P \left( K \frac{k_{rP}}{\mu_P} (\nabla p_P - \gamma_P \nabla D) \right) + q_c, & c = 1, \dots, n_c, \\ p_O - p_G = P_{cOG}, \\ p_O - p_W = P_{cOW}, \\ S_W + S_O + S_G = 1; \end{cases} \quad (14)$$

где  $P$ - фаза (нефть – O, вода – W, газ – G),  $\mu$ - вязкость фазы,  $K$ - проницаемость пласта,  $k_{rP}$ - относительная фазовая проницаемость,  $\gamma_P = \rho_P g$  - вертикальный градиент давления,  $\rho_P = \rho_P(p_P)$  - массовая плотность фазы,  $D = D(x, y, z)$  - вектор глубины,  $S_W + S_O + S_G = 1$  - уравнение состояния, связь объема компонента "с" в каждой фазе "ф" с

мольной долей.

С точки зрения математики уравнение фильтрации справедливо для бесконечно малого элементарного объёма  $V$ , в котором давление и концентрация во всех фазах однородная.

$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi N_c)$  - изменение массы,  $\sum_{P=O,W,G} x_{c,P} \xi_P \left( K \frac{k_{rP}}{\mu_P} (\nabla p_P - \gamma_P \nabla D) \right)$  - поток

компоненты "с". Поток - количество флюида данной фазы, переносимого через единицу площади произвольно расположенной в пространстве в единицу времени. Поток есть векторная величина, он имеет своё значение для каждой фазы, и по закону Дарси равен произведению подвижности флюида данной фазы на тензор абсолютной проницаемости и градиент потенциала.

$(\nabla p_P - \gamma_P \nabla D)$  - потенциал точки, который определяется глубиной, давлением и гравитацией.

$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$  - оператор дивергенции.

Дивергенция потока – скорость изменения потока во всех направлениях. Если она положительна - поток увеличивается в данной точке пространства, а значит идёт накопление компонента.

Таким образом градиент потенциала определяет направление течения фазы, а подвижность умноженная на тензор проницаемости - скорость. Тензор проницаемости в большинстве моделей обычно принимается диагональным.

Уравнение фильтрации по физическому смыслу показывает изменение массовой доли компонента в элементарном объеме с течением времени за счет члена стока/источка в данном объеме (то есть скважины) и переноса вещества через поверхность объема. Стоит уточнить, что уравнение не учитывает диффузию, только конвективные потоки. Систему обычно дополняют капиллярными давлениями и уравнением объемного баланса.

Таким образом, для данного элементарного объёма неизвестными является зависимость давления в каждой фазе и молярной плотности компонента от

времени.

В качестве начальных условий можно выбрать:

Или распределение неизвестных (давлений и мольных долей) в начальный момент времени: EQU симулятор автоматически подбирает начальные капиллярные давления в каждой ячейке за счёт масштабирования/сдвигки кривой давления заданной пользователем, в случае NEQU Tempest дает компонентам перераспределиться с учетом заданной кривой давления для достижения гидростатического равновесия).

Или на основе гидростатического равновесия(отсутствия потоков) из заданных опорном давлении, глубин контактов,  $P_c$  будут рассчитаны величины начальных насыщенных в ячейках.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sum_{P=O,W,G} x_{c,P} \xi_P \left( K \frac{k_{rP}}{\mu_P} (\nabla p_P - \gamma_P \nabla D) \right) &= 0, \\ p_O - p_G &= P_{cOG}, \\ p_O - p_W &= P_{cOW}, \\ S_W + S_O + S_G &= 1; \end{aligned} \quad (15)$$

В качестве граничных условий может быть задано или условие непротекания через границу(16), или фиксированная величина потока – градиента давления(17) или смешанные условия, например, для аквифера.

$$\left( \sum_{P=O,W,G} x_{c,P} \xi_P \left( K \frac{k_{rP}}{\mu_P} (\nabla p_P - \gamma_P \nabla D) \right), n \right) = 0 \quad (16)$$

$$p_\alpha|_\Gamma = p_\alpha^0(\Gamma, t) \quad (17)$$

Также в уравнения входят параметры которые являются известными функциями от неизвестных величин(вязкость, объёмный коэффициент, ОФП...).

### 2.4.2 Модели флюида

Уравнения фильтрации можно решать непосредственно для каждого компонента отдельно - такую задачу называют композиционной. При этом на каждом шаге для каждой ячейки рассчитывается равновесие для каждого компонента между газовой и нефтяной фазой.

Но в большинстве случаев, в качестве модели флюида используют «black oil» подход, в котором уравнения записываются не для каждого компонента, а для фаз в целом. А обмен веществом между фазами описывается на основе заранее подготовленных таблиц газосодержания и конденсатосодержания от давления, выгруженных из PVT модели флюида например через PVTx. Ниже представлено распределение различных компонентов в фазах, рассматриваемых в модели «black oil»

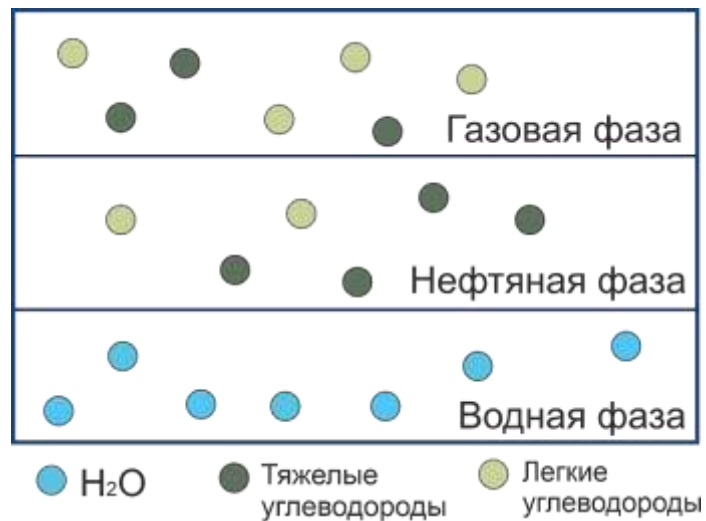


Рисунок 15 – Распределение компонентов в фазах

В уравнении (18) представлено количество молей каждого из компонентов  $N_c$  – вода, нефть, газ, в единице порового объема и отношение и молярная доля фазы  $\xi_\phi$ .

$$N_W = \xi_{W,SC} \frac{S_W}{B_W}; N_O = \xi_{O,SC} \left( \frac{S_O}{B_O} + R_{O,G} \frac{S_G}{B_G} \right); N_G = \xi_{G,SC} \left( \frac{S_G}{B_G} + R_{G,O} \frac{S_O}{B_O} \right) \quad (18)$$

$$\xi_W = \frac{\xi_{W,SC}}{B_W}; \xi_O = \frac{R_{G,O} \xi_{G,SC} + \xi_{O,SC}}{B_O}; \xi_G = \frac{R_{O,G} \xi_{O,SC} + \xi_{G,SC}}{B_G}$$

где газосодержание  $R_{G,O}$  - отношение объема газа, растворенного в нефти, в стандартных условиях к объему нефти в стандартных условиях, конденсатосодержание  $R_{O,G}$  - отношение объема конденсата, растворенного в газе, к объему газа в стандартных условиях, объёмный коэффициент  $B_{W,O,G}$  - отношение объема нефти в пластовых условиях к объему дегазированной нефти в стандартных условиях, молярная плотность фазы  $\xi_{P,SC}$  - отношение концентрации к объему фазы.

Для композиционной модели процесс решения задачи фильтрации происходит следующим образом: симулятор рассчитывает мольную долю компонента  $N_c$  и давление в каждой фазе в ячейке, далее происходит распределение компонентов между газовой и нефтяной фазой в каждой ячейке  $x_{c,\phi}$  рассчитывается из условия равенства химического потенциала в газе и жидкости для каждого компонента отдельно, после значение равновесного химического потенциала получается из уравнения состояния, и на последнем шаге рассчитывается объем(насыщенности) и плотность каждой фазы.

### 2.4.3 Формулировка уравнения фильтрации при неизвестных давлениях.

Формулировка, когда неизвестными являются давления, приводит к системе уравнений, которая является нелинейной и сильно связанной. Решать такую систему тяжело, итерации плохо сходятся, поэтому часто уравнения переписывают в других переменных.

Рассмотрим постановку на примере двухфазной системы – нефть, вода.

Как уже говорилось выше, неизвестными в данном случае являются давления нефтяной и водной фаз  $p_o$  и  $p_w$  соответственно.

Уравнения фильтрации будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w \hat{S}_w) + \nabla \cdot \left( K \frac{\rho_w k_{rw}(\hat{S}_w)}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g \nabla z) \right) &= \rho_w q_w \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_o (1 - \hat{S}_w)) + \nabla \cdot \left( K \frac{\rho_o k_{ro}(\hat{S}_w)}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla z) \right) &= \rho_o q_o \end{aligned} \quad (19)$$

Насыщенности фаз и давление в водо-нефтяной фазе будут определяться так:

$$\begin{aligned} S_w &= \hat{S}_w(p_o - p_w), \quad S_o = 1 - \hat{S}_w(p_o - p_w) \\ p_{cow} &= p_o - p_w = P_c(S_w) \\ \hat{S}_w &= P_c^{-1}(p_c) \end{aligned} \quad (20)$$

#### 2.4.4. Формулировка уравнений фильтрации при неизвестном давлении в нефти и водонасыщенности.

Формулировка, когда неизвестными являются давление в нефти и насыщенность водой, является одной из популярных записей системы уравнений фильтрации.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w S_w) + \nabla \cdot \left( K \frac{\rho_w k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_o - \nabla P_c(S_w) - \rho_w g \nabla z) \right) &= \rho_w q_w \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_o (1 - S_w)) + \nabla \cdot \left( K \frac{\rho_o k_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla z) \right) &= \rho_o q_o \end{aligned} \quad (21)$$

Данную формулировку не используют в чистом виде, ее необходимо

привести к виду классических дифференциальных уравнений в частных производных (эллиптических, параболических или гиперболических).

После преобразований уравнений (21) можно получить более явный вид уравнений. Для этого необходимо раскрыть производную по времени в первом и втором уравнении (21) по правилу производной произведения, ввести сжимаемость флюидов, а затем сложить оба уравнения.

Производная произведения по времени будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi \rho_\alpha S_\alpha) &= \rho_\alpha S_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \frac{d\rho_\alpha}{d p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \varphi \rho_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} = \\ &= \rho_\alpha S_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \rho_\alpha S_\alpha c_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \varphi \rho_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} \end{aligned} \quad (22)$$

Введем сжимаемость, сложим уравнения системы (21) и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} + \varphi c_o S_o \frac{\partial p_o}{\partial t} + \varphi c_w S_w \frac{\partial p_w}{\partial t} + \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o \vec{v}_o) + \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w \vec{v}_w) &= q_t \quad (23) \\ q_t &= q_o + q_w \end{aligned}$$

Таким образом можно получить более явный вид уравнения для давления, которое похоже на классическое дифференциальное уравнение (24):

$$\begin{aligned} \varphi c \frac{\partial p_o}{\partial t} - \left( \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o \lambda_o \nabla p_o) + \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w \lambda_w \nabla p_o) \right) &= \\ = q_o + q_w - \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w \lambda_w \nabla P_c) + c_w S_w \frac{\partial P_c}{\partial t} - & \quad (24) \\ - \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o^2 \lambda_o g \nabla z) - \frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot (\rho_w^2 \lambda_w g \nabla z) & \end{aligned}$$

В уравнении (23) присутствуют оба давления, поэтому с помощью функции капиллярного давления (25) можно оставить только одно



неизвестное давление для нефти и получить уравнение, похожее на уравнение в частных производных параболического типа.

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_o + \lambda_w} \quad (25)$$

где  $\lambda$  - подвижность фазы.

Уравнение для насыщенности получается путем введения подвижности, функции капиллярного давления и закона Дарси.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w S_w) + \nabla \cdot (\rho_w f_w (\vec{v} + \lambda_o \Delta \rho g \nabla z)) = \\ = \rho_w q_w - \nabla \cdot (\rho_w f_w \lambda_o P'_c \nabla S_w) \end{aligned} \quad (26)$$

Это уравнение похоже на классическое уравнение переноса (гиперболическое уравнение первого порядка). В качестве примера одномерного уравнения переноса рассмотрим классическую постановку Buckley-Leverett для одномерного транспорта насыщенности в пласте (27).

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial f(S)}{\partial x} &= 0 \\ S(x, 0) &= S_0 \\ S(0, t) &= S_i \end{aligned} \quad (27)$$

Особую сложность для численного решения представляют гиперболические уравнения, поскольку даже в случае решения простых одномерных уравнений наблюдаются такие явления как неустойчивость решения, диссипация и дисперсия волнового решения.

В частности, в случае течения несжимаемой жидкости уравнение для

насыщенности имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f_w \vec{v} + f_w \lambda_o K \Delta \rho g \nabla z) = \\ = q_w - \nabla \cdot (f_w \lambda_o K \Delta P_c' \nabla S_w) \end{aligned} \quad (28)$$

## 2.5. Решение задачи пороупругости с использованием конечно-элементного решателя «FreeFEM++».

В данном пункте рассмотрено решение пороупругой задачи, указаны все заданные граничные условия и определена слабая формулировка для численного решения.

### 2.5.1 Уравнение пороупругости

Уравнение для решения задачи пороупругости можно записать в следующем виде [33]:

$$\begin{aligned} \tau = \tau^0 + \lambda \operatorname{div} u I + 2\mu \varepsilon(u) - \alpha p I \\ \operatorname{div} \tau = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\tau$  - тензор напряжений,  $\lambda$  и  $\mu$  - коэффициенты Ламе,  $u$  - перемещения,  $I$  - единичная матрица,  $\varepsilon(u)$  - тензор деформации,  $p$  - пластовое давление,  $\alpha$  - коэффициент Био.

Единственная сила, действующая на породу, которую мы учитываем в задаче это давление -  $\alpha p$ , взяв дивергенцию от этого давления – получаем удельные объемные силы, таким образом, в решении гидродинамической – геомеханической задачи влияния многофазной фильтрации на рост и раскрытие трещины автоГРП, мы берем из TNavigator поле давления,

градиенты от которого после в расчете механической задачи мы находим и принимаем на вход.

На первом шаге решения пороупругой задачи мы находим начальное распределение перемещений по осям плоскости. Начальное распределение перемещений представлено на рисунке 17.

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{-(\lambda + \mu)\sigma_{\infty}^{\max} + \lambda\sigma_{\infty}^{\min} + 2\alpha\mu p_{\infty}}{4\mu(\lambda + \mu)} x \\ v^0 &= \frac{\lambda\sigma_{\infty}^{\max} - (\lambda + 2\mu)\sigma_{\infty}^{\min} + 2\alpha\mu p_{\infty}}{4\mu(\lambda + \mu)} y \end{aligned} \quad (30)$$

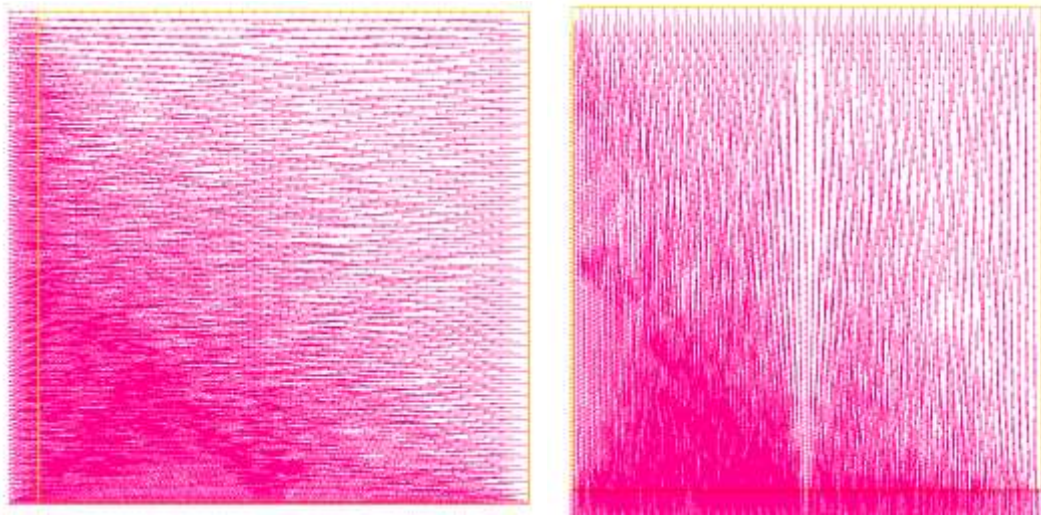


Рисунок 17 – Распределение перемещений на нулевом шаге на осях  $Ox$  и  $Oy$  соответственно

Так же находим начальный тензор напряжений:

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} -\sigma_{\infty}^{\max} & 0 \\ 0 & -\sigma_{\infty}^{\min} \end{pmatrix} \quad (31)$$

### 2.5.2 Определение граничных условий

Обозначим граничные условия, границы представлены на рисунке 16.

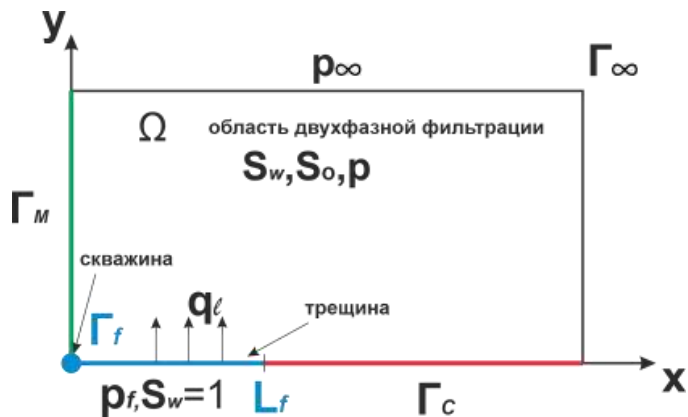


Рисунок 16 – Схема расчетной области.

Граничные условия на внешнюю верхнюю и правую границы  $\Gamma_\infty$  указаны в формуле (30). На границе задано условие Дирихле – давление на бесконечности в невозмущенном пласте, так же на границе нормальные напряжения равны бесконечным напряжениям на невозмущенном пласте и заданы уравнения на поверхности.

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty : p &= p_\infty; \quad \tau \langle n \rangle = \sigma_\infty; \quad (\tau \langle n \rangle)_i = \tau_{ij} n_j \\ \Omega &= \{(x, y) : |x| \leq \infty, 0 \leq y \leq \infty\} \\ \Gamma_\infty &= \{\partial\Omega \cap y > 0\} \end{aligned} \quad (32)$$

Граничные условия на нижней правой границах  $\Gamma_C$  и  $\Gamma_M$  указаны в формуле (31). Мы закрепляем эти части границ и считаем, что на них нет никаких касательных смещений, запретили все перемещения и ввели условие непротекания.

$$\Gamma_C, \Gamma_M : \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad v = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (33)$$

Все граничные условия касающиеся трещины  $\Gamma_f$  – учитываются в тнавигаторе, на этой границе исключаются все касательные напряжения.

### 2.5.3 Численное решение

Определим слабую формулировку и для начала зададим весовые функции:

$$\psi = (\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)); \quad (34)$$

Домножем исходное уравнение (29) на весовые функции (34):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{div}(\vec{u}) - \alpha p) \operatorname{div}(\vec{\psi}) + 2\mu \varepsilon(\vec{u}) : \varepsilon(\vec{\psi}) dx dy + \\ & + \int_{\Omega} \alpha \left( \frac{dp}{dx} \psi_1 + \frac{dp}{dy} \psi_2 \right) + \int_{\Gamma_{\infty}} \sigma_H^{eff} \psi_1 dx + \int_{\Gamma_{\infty}} \sigma_h^{eff} \psi_2 dy - \\ & - \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma_f} \chi_{[v < 0]} u_2 \psi_2 dy = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v}{1-v} * (\rho_{rock} gh - \alpha \rho_{fluid} gh) \right) = \sigma_h^{eff} \\ & \sigma_H^{eff} = \sigma_h^{eff} * 1.2 \\ & \vec{u} = (u_1, u_2) \end{aligned} \quad (36)$$

Для того, чтобы зафиксировать вычислительную область мы используем метод штрафных функций, где интерпретируем нижнюю левую границу области  $\Gamma_f$  как путь потенциального распространения трещины, которая имеет закрытую и открытую части. Однако при такой интерпритации мы не можем гарантировать отсутствие взаимного проникновения наружных стенок в процессе вычислений, и чтобы избежать этого, мы накладываем

дополнительное ограничение, где вертикальное перемещение больше или равно нулю. Для этого мы добавляем штрафной параметр. На рисунке 18 представлено сравнение деформации сеток при изменении штрафного параметра.

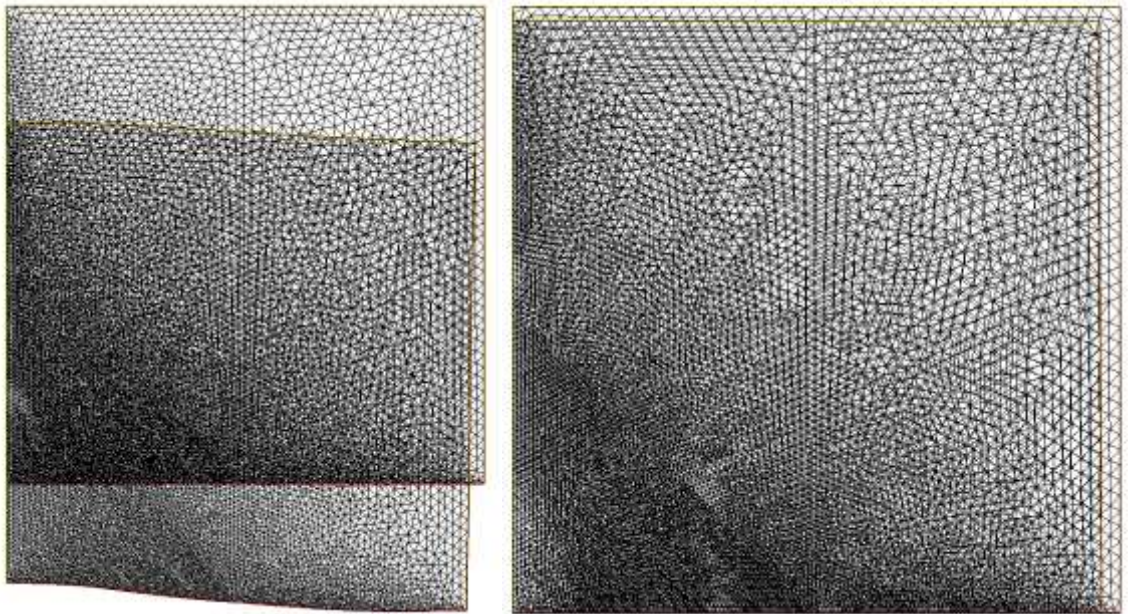


Рисунок 18 – Сравнение деформации сеток при штрафном параметре равном  $1e^{-8}$  и  $1e^{-25}$  соответственно.

### ГЛАВА 3. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве результатов был получен график изменения длины трещины со временем, временной шаг между значениями равен 2,5 дням. На рисунке 19 представлено сравнение скорости роста трещины автоГРП при учете многофазной и однофазной фильтрации.

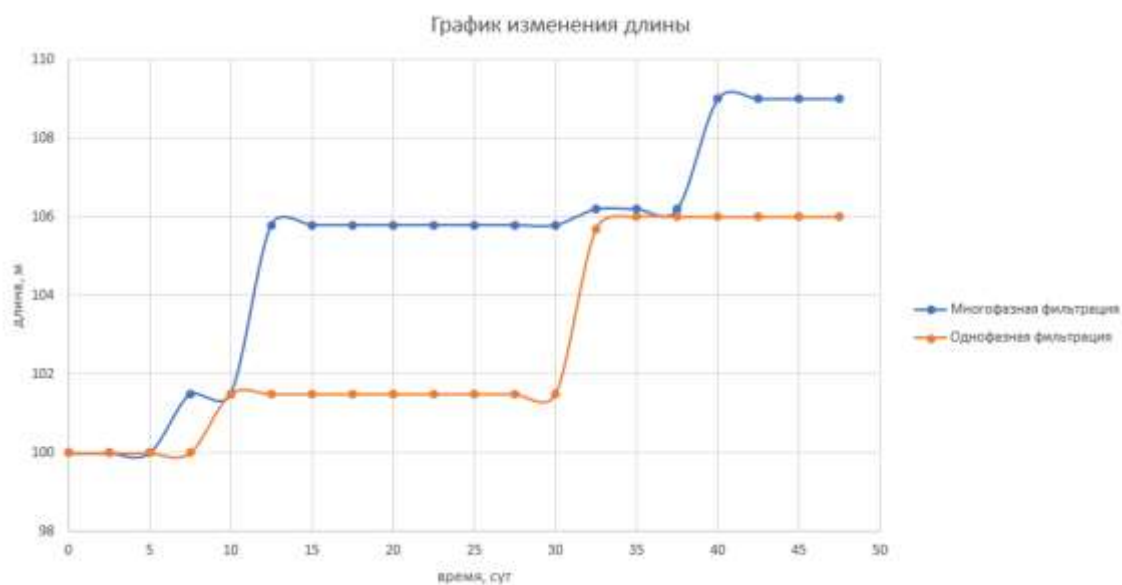


Рисунок 19 – Сравнение результатов

На графике видно, что трещины растут с одинаковым трендом, однако очевидно можно сделать вывод о том, что трещина при учете многофазной фильтрации при идентичных исходных параметрах пласта и трещины растет быстрее.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что моделирование с учетом многофазной фильтрации крайне важно, при исследовании трещин автоГРП.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной работе было проведено исследование влияния многофазной фильтрации на рост и раскрытие трещины автоГРП. Был создан алгоритм совмещения гидродинамики и геомеханики в один расчетный цикл. Разработаны необходимые дополнительные модули для пре и пост обработки данных. И был проведен анализ результатов.

Учет многофазной фильтрации является необходимым для правильного расчета роста трещин автоГРП, при многофазности в пласте, трещина автоГРП расчет значительно быстрее.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брусиловский А.И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. М.: Грааль, 2002.
2. Aziz K., Settari A. Petroleum Reservoir Simulation. L.; N.Y.: Applied Science Publishers, 1979.
3. Асалхузина, Г. Ф., Давлетбаев, А. Я., Хабибуллин, И. Л. Моделирование дифференциации пластового давления между нагнетательными и добывающими скважинами на месторождениях с низкопроницаемыми коллекторами // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21., №3. С. 537–544
4. Давлетбаев А. Я., Асалхузина Г. Ф., Иващенко Д. С., Федоров А. И., Фурсов Г. А., Назаргалин Э. Р., Слабецкий А. А., Сергейчев А. В., Ямалов И. Р., Валеева Э. З. Гидродинамические методы контроля за развитием трещин авто-ГРП при заводнении в низкопроницаемых коллекторах. 2015. SPE-176562.
5. Давлетбаев А. Я., Байков В. А., Бикбулатова Г. Р., Асмандияров Р. Н., Назаргалин Э. Р., Слабецкий А. А., Сергейчев А. В., Нуриев Р. И. Промысловые исследования по изучению самопроизвольного развития техногенных трещин в нагнетательных скважинах. 2014. SPE-171232
6. Мальцев, В.В., Асмандияров, Р.Н., Байков, В.А., Усманов, Т.С., Давлетбаев, А.Я. Исследование развития трещин автоГРП на опытном участке Приобского месторождения с линейной системой разработки // Нефтяное хозяйство. 2012. №5. С. 70-73
7. Тримонова, М.А., Дубиня, Н.В., Зенченко, Е.В., Зенченко, П.Е., Турунтаев, С.Б. Математическое и физическое моделирование процесса распространения трещины автоГРП // Тезисы докладов. Научная конференция молодых ученых и аспирантов ИФЗ РАН: тезисы докладов и программа Конференции. Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук. Москва. 2016. С. 66.
8. Федоров А.И., Давлетова А.Р. Симулятор напряженного состояния пласта для

- определения направления развития трещин. Геофизические исследования. 2014 г. Т. 15. № 1. С. 15-26.
9. Хасанов М.М., Краснов В.А., Мусабилов Т.Р., Мухамедшин Р.К. Технико-экономический анализ систем разработки, сформированных скважинами с трещинами ГПП. Нефтяное хозяйство. 2009 г. № 2. С. 92-96.
  10. Bachman, R.C., Harding, T.G., Settari, A. Tony, and D.A. Walters. "Coupled Simulation of Reservoir Flow, Geomechanics, and Formation Plugging With Application to High-Rate Produced Water Reinjection." Paper presented at the SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, February 2003. doi:
  11. Breitenbach E.A., Thurnau D.H. and Van Poolen, H.K. (1969). The fluid flow simulation equations. Soc. Petrol. Eng. J., 9, No. 2, pp. 155-69.
  12. Carter, R.D. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area, Appendix of «Optimum Fluid Characteristics for Fracture Extension», by Howard, G.C., and Fast, C.R., Drilling and Production Practice. API, 1957. 261-268 p.
  13. Clifford, P. J. Simulation of waterflood fracture growth with coupled fluid flow, temperature and rock elasticity. Proceedings 1st European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Cambridge, 1989. P. 23-44.
  14. Coats K.H. (1968). Elements of Reservoir Simulation, Lecture Notes, University of Texas, repinted by Intercomp Resources Development and Engineering Inc., Houston.
  15. Coats K.H. (1976). Simulation of steamflooding with distillation and solution gas, Soc. Petrol Eng. J., 16, No. 5, pp. 235-47.
  16. Danilov D.L., Konovalov A.N. and Yakuba S.I. (1968). Equations and boundary value problems in the theory of two phase flows through porous media, Dokl. Akad. Nauk. USSR. 183, No. 2, pp. 307-10.
  17. Douglas, J., Jr., (1961). A numerical method for the solution of a parabolic system, Numer. Math., 2, pp. 91-8

18. Douglas J., Jr., Peaceman D.W. and Rachford H.H., Jr. (1959). A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement, *Trans. SPE of AIME*, 216, pp. 297-306.
19. Fox D.G. and Deardorff J.W. (1972). Computer methods for simulation of multidimensional, nonlinear, subsonic, incompressible flow, *J. Heat Transfer*, 94, pp. 337-46.
20. Hagoort, J.: "The Mechanics of a Linear Hydraulic Fracture in Poro-Elastic Media," paper SPE 7110, revised manuscript received Feb. 16, 1980.
21. Ji, Lujun, Settari, A. Tony, Sullivan, R.B., and D. Orr. "Methods For Modeling Dynamic Fractures In Coupled Reservoir And Geomechanics Simulation." Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, September 2004
22. Kabanova,, Polina & Shel, Egor. (2020). Modeling of Water-Induced Fracture Growth Pressure Using Poroelastic Approach. 10.3997/2214-4609.202035065
23. Koning E.J.L. Fractured water-injection wells. Analytical modelling of fracture propagation. SPE 14684, 1985.
24. Peaceman D.W. (1967). Numerical solution of the nonlinear equations for two-phase flow through porous media, in: *Nonlinear Partial Differential Equations- Methods of Solutions*, ed. W.F. Ames, Academic Press, New York, pp. 79-91
25. Peaceman D.W. (1966) and Rachford H.H., Jr., (1962). Numerical calculation of multidimensional miscible displacement. *Trans. SPE of AIME*, 255, pp. 327-39. (SPEJ).
26. Richardson J.G., and Stone H.L., (1973). A quarter century of progress in the application of reservoir engineering, *J. Petrol. Technol.*, 25, pp. 1371-9.
27. Salimi H., Wolf K., Bruining J. Negative-saturation approach for compositional flow simulations of mixed CO<sub>2</sub> storage in saline aquifers // *Energy Convers. And Manag.* 2007. 48, N 6. 1761-1767.
28. Sheldon J.W., Zondek B. and Cardwell W.T., (1959). One-dimensional, incompressible, non-capillary, two-phase fluid flow in a porous medium. *Trans. SPE of AIME*, 216, pp. 290-6.

29. Stone H.I. and Garder A.O., Jr. (1961). Analysis of gas-cap of dissolved-gas reservoirs. Trans. SPE of AIME, 222, pp. 92-104 (SPEJ).
30. West W.J., Garvin W.W. and Sheldon S.W. (1954). Solution of the equations of unsteady state two-phase flow in oil reservoirs. Trans. SPE of AIME. 201, pp. 217-29.
31. Байков В.А., Давлетбаев А.Я., Асмандияров Р.Н., Усманов Т.С., Степанова З.Ю. Специальные гидродинамические исследования для мониторинга за развитием трещин ГРП в нагнетательных скважинах. Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело". 2011. №1. С. 65-75.
32. Байков В.А., Жданов Р.М., Муллағалиев Т.И., Усманов Т.С. Выбор оптимальной системы разработки для месторождений с низкопроницаемыми коллекторами, Электронный научный журнал "Нефтегазовое дело", 2011-№1.-С.84-98. №1. С. 84-98.
33. S.V. Golovin, A.N. Baykin. Influence of pore pressure on the development of a hydraulic fracture in poroelastic medium, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2018.