



## Содержание

1	Введение .....	3
2	Математическая модель смеси проппант-жидкость.....	4
2.1	Граничные условия .....	5
2.2	Начальные условия .....	5
2.3	Термостат .....	6
2.4	Потенциал взаимодействия .....	7
2.5	Интегрирование уравнений движения .....	8
3	Программная реализация на языке программирования C++ .....	9
3.1	Структура программы.....	9
3.2	Система визуализации .....	10
4	Компьютерное моделирование двухфазной смеси.....	12
4.1	Определение эффективной вязкости смеси .....	12
4.1.1	Течение Пуазейля.....	12
4.1.2	Течение Куэтта.....	14
4.1.3	Аналитические формулы для эффективной вязкости смеси .....	16
4.2	Результаты моделирования методом динамики частиц .....	17
4.2.1	Течение Пуазейля без проппанта .....	17
4.2.2	Моделирование смеси при низких концентрациях проппанта.....	19
4.2.3	Сходимость решения по числу частиц.....	23
4.2.4	Проверка выполнения закона вязкости Ньютона .....	26
5	Заключение .....	28
	Список литературы .....	29

## 1 Введение

Суспензиями называются грубодисперсные системы с твёрдой дисперсной фазой (размер твердых частиц более  $10^{-5}$  м) и жидкой дисперсионной средой. Такие смеси повсеместно встречаются как в промышленном производстве, так и в природных процессах. Именно поэтому исследованиям реологии суспензий уделяется много внимания: с начала XX века по данной тематике опубликованы сотни научных статей.

Одним из примеров суспензии является смесь проппант-жидкость. Проппант (расклинивающий агент) - гранулообразный материал, который используется в нефтедобывающей промышленности для повышения эффективности отдачи скважин с применением технологии гидроразрыва пласта (ГРП). Служит для закрепления (предупреждения смыкания под действием горного давления) трещин, создаваемых в ходе ГРП. Представляет собой гранулы сходного размера, с типичным диаметром от 0,5 до 1,2 мм. [1].



Рис. 1. Керамический проппант

В данной работе будем исследовать реологию смеси проппант-жидкость, хотя результаты применимы и для других суспензий.

Заметим, что при низких концентрациях частиц проппанта применимы аналитические формулы, приведенные в пункте 4.1.3. Однако для исследования реологии смеси при высоких концентрациях необходимо использовать численные методы.

Для исследования сред с включениями сложно применить теорию сплошной среды, поэтому для моделирования двухфазной смеси мы будем использовать методы механики дискретных сред.

Одним из популярных методов, используемых для моделирования двухфазной смеси, является метод гидродинамики сглаженных частиц (SPH), описанный в [2]. Однако, как показано в [3, 4], моделирование методом SPH и методом динамики частиц дает одинаковый результат; при этом метод динамики частиц проще в реализации и позволяет избежать появления артефактов, возникающих при моделировании методом гидродинамики сглаженных частиц.

Метод динамики частиц основан на моделировании среды совокупностью взаимодействующих частиц, для которых записываются классические уравнения динамики. Взаимодействие частиц описывается посредством потенциалов взаимодействия.

Для решения поставленной задачи мы численно интегрируем уравнения движения, предварительно задав начальные условия. После перехода течения в установившийся режим мы определяем характеристики течения, зная которые можем рассчитать эффективную вязкость смеси.

## **2 Математическая модель смеси проппант-жидкость**

В данном пункте описана математическая модель смеси проппант-жидкость, позволяющая исследовать влияние концентрации проппанта на эффективные реологические характеристики смеси с помощью компьютерного моделирование методом динамики частиц.

В данной работе мы будем рассматривать течение смеси в плоском бесконечном канале.

## 2.1 Граничные условия

Канал моделировался как область с периодическими граничными условиями по двум направлениям и фиксированными стенками по третьему направлению.

Периодические граничные условия позволяют моделировать бесконечные области с использованием конечного числа частиц. Для этого создаются образы частиц, находящихся вблизи границы, что позволяет реализовать "взаимодействие через границу" (см. Рис. 2).

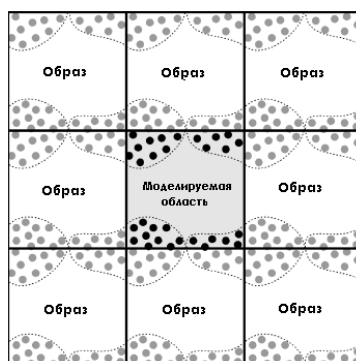


Рис. 2. Иллюстрация периодических граничных условий

Для моделирования стенок канала мы использовали два слоя фиксированных частиц жидкости (см. Рис. 4). Взаимодействия всех частиц со стенками канала (с частицами стенок) рассчитывалось по формуле (8), приведенной ниже.

## 2.2 Начальные условия

В начальный момент времени распределение частиц жидкости представляет собой гранецентрированную кубическую решетку (показана на Рис. 3).

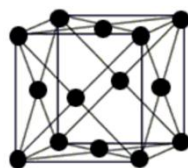


Рис. 3. Гранецентрированная кубическая решетка

Начальное распределение частиц пропанта представляет собой простую кубическую решетку.

Однако начальные распределения частиц не являются столь важными для нас, так как за счет наличия у частиц начальных случайных скоростей и нагрева системы (с

последующим поддержанием постоянной температуры) происходит нарушение начального порядка, и через некоторое время частицы распределяются равномерно (см. Рис. 4).

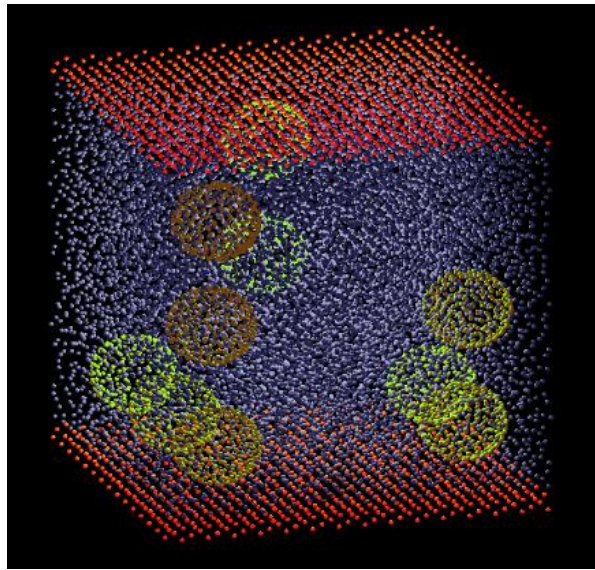


Рис. 4. Распределение частиц после нарушения начального порядка

На Рис. 4 синим показаны частицы жидкости, оранжевым - частицы стенок канала, желтым - частицы пропанта.

## 2.3 Термостат

Для поддержания постоянной температуры был реализован изокINETический термостат. Температура - есть мера средней кинетической энергии теплового движения частиц вещества. Разобьем область моделирования на несколько зон плоскостями, проходящими параллельно стенкам канала. Тогда для  $n$ -й зоны

$$\frac{3}{2}kT_n = 0.5m \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_i - \langle \mathbf{v} \rangle_n)^2}{N} \quad (1)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана,  $T_n$  - температура  $n$ -й зоны,  $m$  - масса частицы жидкости,  $N$  - число частиц в  $n$ -й зоне, суммирование ведется по частицам жидкости.

Из формулы (1) получим выражение для  $T_n$

$$T_n = 0.5m \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_i - \langle \mathbf{v} \rangle_n)^2}{1.5kN} \quad (2)$$

Тогда для  $i$ -й частицы жидкости  $n$ -й зоны скорость пересчитывается следующим образом

$$\check{v}_i = v_i \sqrt{\frac{T^*}{T_n}} \quad (3)$$

где  $T^*$  - целевая температура.

## 2.4 Потенциал взаимодействия

Одним из наиболее простых и, вместе с тем, часто используемых, является потенциал Леннард-Джонса

$$\Pi(r) = D \left( \left( \frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{a}{r} \right)^6 \right) \quad (4)$$

где  $r$  - расстояние между частицами,  $a$  - равновесное расстояние для двух частиц,  $D$  - энергия связи.

Введем параметры, которые понадобятся нам в дальнейшем для описания моделирования.

$$C = \Pi''(a) = 72 \frac{D}{a^2} \quad (5)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}} \quad (6)$$

$$v_s = a \sqrt{\frac{C}{m}} \quad (7)$$

$C$  - жесткость связи в положении равновесия,  $T$  - период колебаний массы  $m$  под действием линейной силы с жесткостью  $C$ ,  $v_s$  - скорость распространения длинных волн малой амплитуды в одномерной цепочке при взаимодействии (4).

Для описания взаимодействия между частицами жидкости использовался приближенный сплайнами потенциал Леннард-Джонса [5, 6]. Сила, действующая на  $i$  частицу со стороны  $j$  частицы, рассчитывалась по формуле, приведенной ниже.

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{12Dk(r_{ij})}{a^2} \left( \left( \frac{a}{r_{ij}} \right)^{14} - \left( \frac{a}{r_{ij}} \right)^8 \right) \mathbf{r}_{ij}, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad (8)$$

$$k(r) = \begin{cases} 1, & r < b, \\ \left( 1 - \left( \frac{r^2 - b^2}{a_{cut}^2 - b^2} \right)^2 \right)^2, & b \leq r \leq a_{cut}, \\ 0, & r > a_{cut} \end{cases}$$

Здесь  $b = \left(\frac{13}{7}\right)^{\frac{1}{6}} a$ ,  $a_{cut}$  — радиус обрезания (расстояние, на котором пренебрегаем взаимодействием).

В соответствии с подходом, описанным в [3, 4], в данной работе частицы проппанта моделировались как набор жестко соединенных микрочастиц, равномерно распределенных по его поверхности. Такой подход позволяет эффективно вычислять силы взаимодействия в системе частиц разного размера. Таким образом, частица проппанта рассматривалась как абсолютно твердое тело с шестью степенями свободы.

Для расчета взаимодействия частиц проппанта с жидкостью использовалась приведенная выше формула (8). Такой закон взаимодействия обеспечивает выполнение условий прилипания.

Для расчета силы взаимодействия между микрочастицами, составляющими разные частицы проппанта, использовалась формула (8); радиус обрезания полагался равным равновесному расстоянию, чтобы исключить притяжение микрочастиц.

## 2.5 Интегрирование уравнений движения

Для  $i$ -й частицы жидкости уравнение движения выглядит следующим образом:

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_j \mathbf{F}_{ij} + m_i \mathbf{g} \quad (9)$$

где  $\sum_j \mathbf{F}_{ij}$  - сумма сил со стороны частиц, с которыми взаимодействует данная частица;  $m_i \mathbf{g}$  - внешняя массовая сила ( $|\mathbf{g}|$  - напряжение массовой силы).

Приведем уравнения движения для  $i$ -й частицы проппанта. Для поступательного движения:

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{\substack{k \in \Omega_i \\ j \notin \Omega_i}} \mathbf{F}_{kj} + m_i \mathbf{g} \quad (10)$$

где  $m_i$  - масса рассматриваемой частицы проппанта,  $\mathbf{v}_i$  - скорость центра масс,  $\Omega_i$  — множество микрочастиц, образующих  $i$ -ю частицу проппанта; суммирование ведется по всем микрочастицам ( $k$ )  $i$ -й частицы проппанта и по всем внешним частицам ( $j$ ), действующим на выбранную микрочастицу.

Теперь опишем вращательное движение  $i$ -й частицы проппанта:



$$\dot{\omega}_i \theta_p = \sum_{\substack{k \in \Omega_i \\ j \notin \Omega_i}} (r_k - r_j) \times F_{kj} \quad (11)$$

где  $\theta_p$  — момент инерции относительно центра масс.

Найдя угловую скорость на текущем шаге интегрирования, пересчитываем кватернион, определяющий ориентацию частицы проппанта, исходя из формулы (12).

$$\dot{Q}_i = 0.5 \omega_i \cdot Q_i \quad (12)$$

Для численного интегрирования уравнений движения использовался метод с перешагиванием (leap-frog) [6, 7], обеспечивающий устойчивость интегрирования, а также сохранение энергии в системе.

### 3 Программная реализация на языке программирования C++

В данной главе описана численная реализация математической модели смеси проппант-жидкость на языке программирования C++. Разработанная нами программа позволяет исследовать влияние концентрации проппанта на эффективные реологические характеристики смеси с помощью компьютерного моделирования методом динамики частиц.

#### 3.1 Структура программы

Для удобства реализации и масштабирования программы нами был выбран объектно-ориентированный подход. Основные классы программы:

- **Particle.** Содержит поля: положение и скорость частицы, тип частицы (жидкость / микрочастица, входящая в молекулу проппанта / частица стенки)
- **Proppant.** Вспомогательный класс, содержащий поля для хранения данных о положении, скорости, ориентации и угловой скорости частицы проппанта
- **Vect3D.** Класс, реализующий вектор для трехмерного пространства
- **Scene3D.** Класс для обработки анимации, потомок класса **QGLWidget**
- **Thread.** Класс, реализующий функционал потока (основан на библиотеке Pthreads)
- **Modelling.** Класс, содержащий поля для хранения параметров моделирования и метод для проведения расчетов
- **Visualization.** Класс для проведения моделирования с возможностью визуализации, потомок классов **Scene3D** и **Modelling**

- **Simulation.** Класс для проведения моделирования с возможностью параллельного запуска нескольких расчетов, потомок классов **Thread** и **Modelling**

На Рис. 5 приведена диаграмма, в общих чертах описывающая архитектуру и схему работы программы.

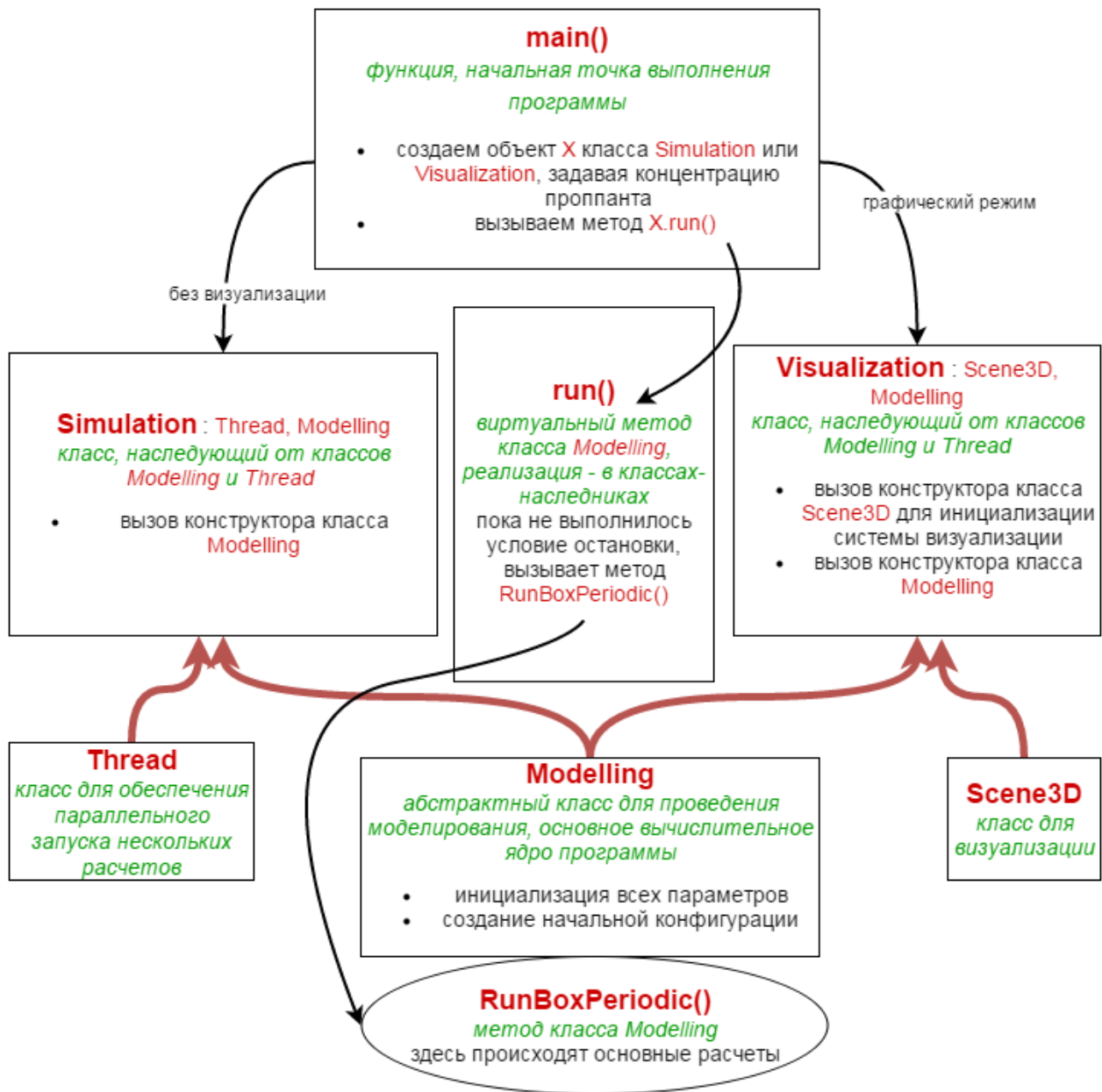


Рис. 5. Структура программы

### 3.2 Система визуализации

Для создания системы визуализации и ее интеграции с расчетным модулем в рамках объектно-ориентированного подхода нами был реализован ряд классов, структура описана ниже. Реализация была проведена на основе средств Qt+OpenGL для объектно-

ориентированной организации контекста OpenGL и freeglut для рисования сфер (визуализации частиц).

- За основу был взят класс QGLWidget (виджет для рендеринга OpenGL графики), наследующий от класса QWidget (базовый класс для всех объектов пользовательского интерфейса в Qt). QGLWidget содержит три виртуальные функции, которые должны быть реализованы в каком-либо классе-потомке, для выполнения типичных задач OpenGL
  - ✓ paintGL() - отображает OpenGL сцену. Вызывается всякий раз, когда виджет должен быть обновлен
  - ✓ resizeGL() - устанавливает параметры отображения контекста OpenGL, вызывается всякий раз, когда виджет меняет размер
  - ✓ initializeGL() - устанавливает исходные параметры OpenGL, например, освещение сцены, цвет фона и т. д. Вызывается один раз при инициализации.
- Абстрактный класс Scene3D, наследующий от класса QGLWidget: в нем реализованы методы обработки событий мыши и клавиатуры.
- Класс Visualization, являющийся потомком классов Scene3D и Modelling (класс, где реализованы основные методы для проведения расчетов методом динамики частиц). Наследует методы для визуализации от класса Scene3D и методы для проведения моделирования методом динамики частиц от класса Modelling. Реализует виртуальные методы класса QGLWidget, описанные выше. Содержит метод отрисовки частиц (в виде сфер) с помощью средств библиотеки freeglut.

Основные возможности разработанного средства визуализации:

- визуальное отображение состояния моделируемой системы частиц в произвольный момент времени (можно задать период обновления визуализации и пропускать любое количество шагов моделирования)
- задавать разные параметры освещения частиц разного типа, что позволяет различать частицы по цвету, тем самым улучшая удобство восприятия
- вращать сцену (с помощью мышки), приближать/отдалять (с помощью колеса мышки) относительно наблюдателя

На Рис. 6 приведен пример работы системы визуализации моделирования, синим показаны частицы жидкости, желтым - частицы проппанта, оранжевым - частицы стенок.

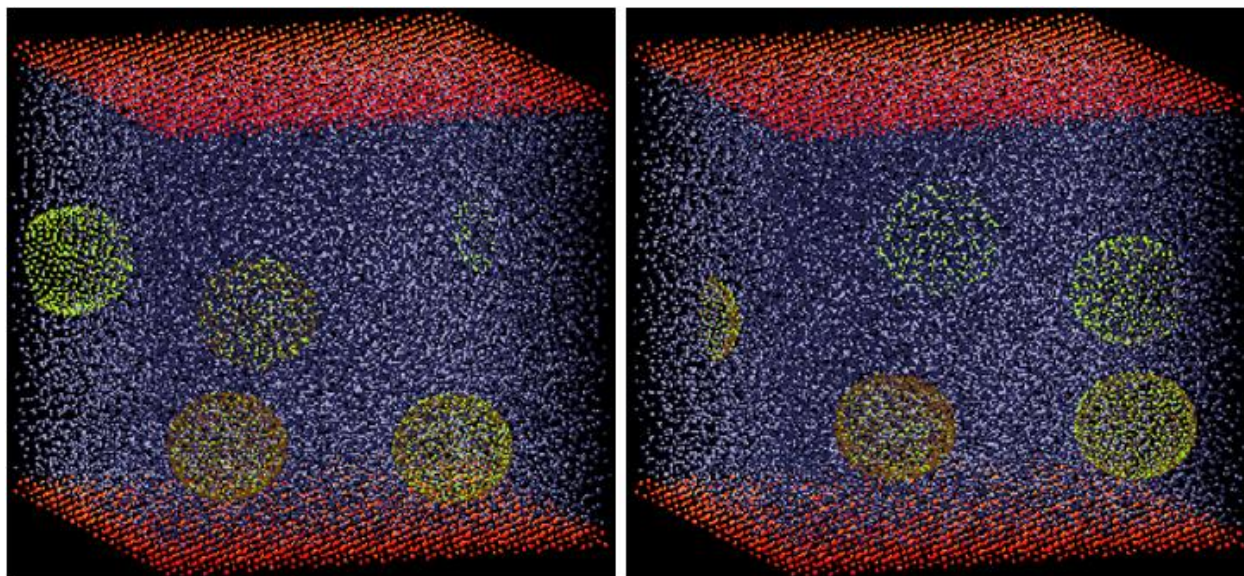


Рис. 6. Визуализация течения смеси проппант-жидкость

## 4 Компьютерное моделирование двухфазной смеси

### 4.1 Определение эффективной вязкости смеси

В этом пункте рассмотрены методы определения эффективной вязкости смеси проппант-жидкость с помощью компьютерного эксперимента, а также с помощью аналитических формул.

Для нахождения вязкости с помощью численного эксперимента мы будем моделировать течения Пуазейля и Куэтта, так как для них уравнения Навье-Стокса имеют аналитическое решение. Рассмотрим подробнее данные течения.

#### 4.1.1 Течение Пуазейля

Рассмотрим течение ньютоновской жидкости в плоском канале постоянной ширины под действием объемной силы, направленной вдоль канала.

Как показано в [3, 4], такое течение соответствует течению под действием постоянного градиента давлений (течению Пуазейля).

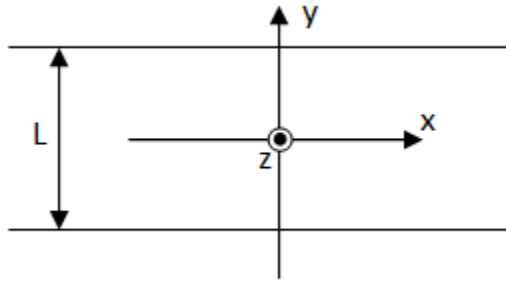


Рис. 7. Плоский канал

Найдем аналитическое решение данной задачи. Запишем уравнение Навье-Стокса в общем виде:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (13)$$

Здесь  $\rho$  - плотность жидкости,  $\mu$  - вязкость жидкости,  $\rho \mathbf{f}$  - объемные силы. Полагая  $\nabla p = 0$ ,  $\rho \mathbf{f} = \rho f \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{v} = v(y) \mathbf{i}$ , перепишем уравнение в виде:

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{\rho f}{\mu} \quad (14)$$

Дважды интегрируя по  $y$ , находим

$$v(y) = -\frac{\rho f}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (15)$$

Используя граничные условия (условия прилипания)

$$v\left(\pm \frac{L}{2}\right) = 0 \quad (16)$$

находим

$$v(y) = \frac{\rho f}{2\mu} \left( \left(\frac{L}{2}\right)^2 - y^2 \right) \quad (17)$$

Зная профиль скорости течения в стационарном режиме, несложно найти вязкость жидкости. Из формулы (17) находим:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{L} \frac{\rho f}{2\mu} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \left(\frac{L}{2}\right)^2 - y^2 \right) dy \quad (18)$$

$$\langle v \rangle = \frac{\rho f L^2}{12\mu} \quad (19)$$

$$\mu = \frac{\rho f L^2}{12 \langle v \rangle} \quad (20)$$

Рассматривая смесь проппант-жидкость как новую среду (ньютоновскую жидкость) с характеристиками, зависящими от концентрации проппанта [8, 9], делаем вывод, что формула (20) верна и для смеси проппант-жидкость. В этом случае под  $\mu$  понимаем эффективную вязкость смеси, а под  $\rho$  - эффективную плотность смеси:

$$\rho = \frac{m_f N_f + m_p N_p}{V} \quad (21)$$

где  $m_f$  - масса частицы жидкости,  $N_f$  - количество частиц жидкости,  $m_p$  - масса частицы проппанта,  $N_p$  - количество частиц проппанта,  $V$  - объем области моделирования.

Для удобства обработки данных, при проведении моделирования течения Пуазейля внешняя массовая сила  $f$  пересчитывалась следующим образом:

$$f = \frac{f_0}{\rho L^2} \quad (22)$$

Таким образом, согласно (20), вязкость смеси зависит только от величины средней скорости и от значения  $f_0$ :

$$\mu = \frac{f_0}{12 \langle v \rangle} \quad (23)$$

Полагая для всех расчетов  $f_0 = const$ , получаем формулу для относительной вязкости:

$$\frac{\mu(c)}{\mu(0)} = \frac{\langle v \rangle (0)}{\langle v \rangle (c)} \quad (24)$$

#### 4.1.2 Течение Куэтта

Рассмотрим течение Куэтта ньютоновской жидкости в плоском канале постоянной ширины.

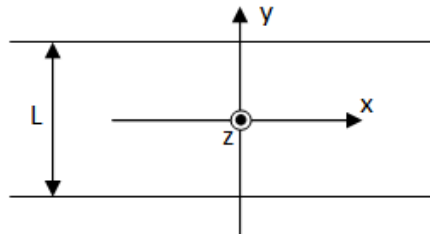


Рис. 8. Плоский канал

Пусть верхняя стенка канала имеет скорость  $u\mathbf{i}$  ( $u > 0$ ), а нижняя  $-u\mathbf{i}$ .

Найдем аналитическое решение данной задачи. Запишем уравнение Навье-Стокса в общем виде:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mu\Delta\mathbf{v} - \nabla p + \rho\mathbf{f} \quad (25)$$

Полагая  $\nabla p = 0$ ,  $\rho\mathbf{f} = 0$ ,  $\mathbf{v} = v(y)\mathbf{i}$ , перепишем уравнение в виде:

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = 0 \quad (26)$$

Дважды интегрируя по  $y$ , находим

$$v(y) = c_1 y + c_2 \quad (27)$$

Используя граничные условия (условия прилипания)

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = u \quad (28)$$

$$v\left(-\frac{L}{2}\right) = -u \quad (29)$$

находим

$$v(y) = \frac{2u}{L}y \quad (30)$$

(линейный профиль скорости).

Определяющее соотношение для ньютоновской жидкости имеет вид

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (31)$$

Откуда

$$\tau = \mu \frac{2u}{L} \quad (32)$$

Таким образом, зная значение касательного напряжения, мы можем найти вязкость жидкости

$$\mu = \frac{\tau L}{2u} \quad (33)$$

При моделировании течения Куэтта касательное напряжение может быть найдено следующим образом:

$$\tau = \frac{F_{wall}}{S} \quad (34)$$

где  $F_{wall}$  - проекция силы, действующей на стенку, на направление движения данной стенки;  $S$  - площадь стенки. Тогда получаем выражение для вязкости смеси

$$\mu = \frac{F_{wall} L}{2uS} \quad (35)$$

Для удобства представим  $u$  в виде

$$u = \frac{u_0 L}{S} \quad (36)$$

где  $u_0 = const$ ; получаем формулу для относительной вязкости

$$\frac{\mu(c)}{\mu(0)} = \frac{F_{wall}(c)}{F_{wall}(0)} \quad (37)$$

### 4.1.3 Аналитические формулы для эффективной вязкости смеси

Исследуем влияние концентрации пропанта на эффективную вязкость смеси. При малых концентрациях, в предположении невзаимодействия<sup>1</sup>, согласно [10], зависимость может быть описана линейным законом (формула Эйнштейна, получена аналитически):

$$\frac{\mu(c)}{\mu(0)} = Ac + 1 \quad (38)$$

где  $A$  - коэффициент Эйнштейна,  $c$  - объемная концентрация пропанта,  $\mu$  - эффективная вязкость смеси. В соответствии с [11] для трехмерной задачи и сферических частиц пропанта  $A = 2.5$ .

Как показано в статьях [12, 13, 14, 15], основываясь на эмпирических данных, можно заключить, что формула (38) применима только для слаборазбавленных смесей ( $c < 0.02$ ). Более точное приближение выведено в работе [16] (формула Качанова):

$$\frac{\mu(c)}{\mu(0)} = \frac{1}{1 - Ac} \quad (39)$$

Формула (39) в первом приближении совпадает с (38). Действительно: разложение (39) в ряд Тейлора в окрестности точки  $c = 0$  имеет вид

$$\frac{\mu(c)}{\mu(0)} = 1 + 2.5c + 6.25c^2 + o(c^2) \quad (40)$$

---

<sup>1</sup> Предположение невзаимодействия (принцип суперпозиции) - предположение об отсутствии взаимного влияния полей возмущений, возникающих при обтекании частиц пропанта



Согласно [16] формула (39) дает хорошее приближение примерно до  $c = 0.18$ .

## 4.2 Результаты моделирования методом динамики частиц

### 4.2.1 Течение Пуазейля без пропанта

При моделировании мы рассматривали течение смеси в канале постоянной ширины под действием постоянной массовой силы, действующей на каждую элементарную частицу, направленной вдоль канала. Величина силы пропорциональна массе частицы, на которую она действует. Для частицы с массой  $m$ :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \quad (41)$$

где  $|\mathbf{g}| = \text{const}$  - напряжение массовой силы.

Моделирование проводилось при следующих параметрах (см. Табл. 1).

Табл. 1

Параметр	Обозначение	Значение	Примечания
число частиц	$n$	$\sim 40000$	
масса частицы жидкости	$m$	1	
равновесное расстояние	$a$	1	
$F = 12D$ , где $D$ – энергия связи	$F$	1	
начальное расстояние между частицами	$a_0$	$a$	
шаг интегрирования	$dt$	$0.01T$	
радиус обрезания	$a_{cut}$	$1.7a$	
начальная скорость теплового движения	$v$	$0.35v_s$	
температура	$T^o$	$0.23Fa$	
напряжение массовой силы $f = \frac{f_0}{\rho L^2}$ (22)	$f_0$	$\sim 4.24 \frac{F}{m}$	

На Рис. 9 приведен график зависимости средней скорости от времени, измеренного в периодах колебаний  $T$ .

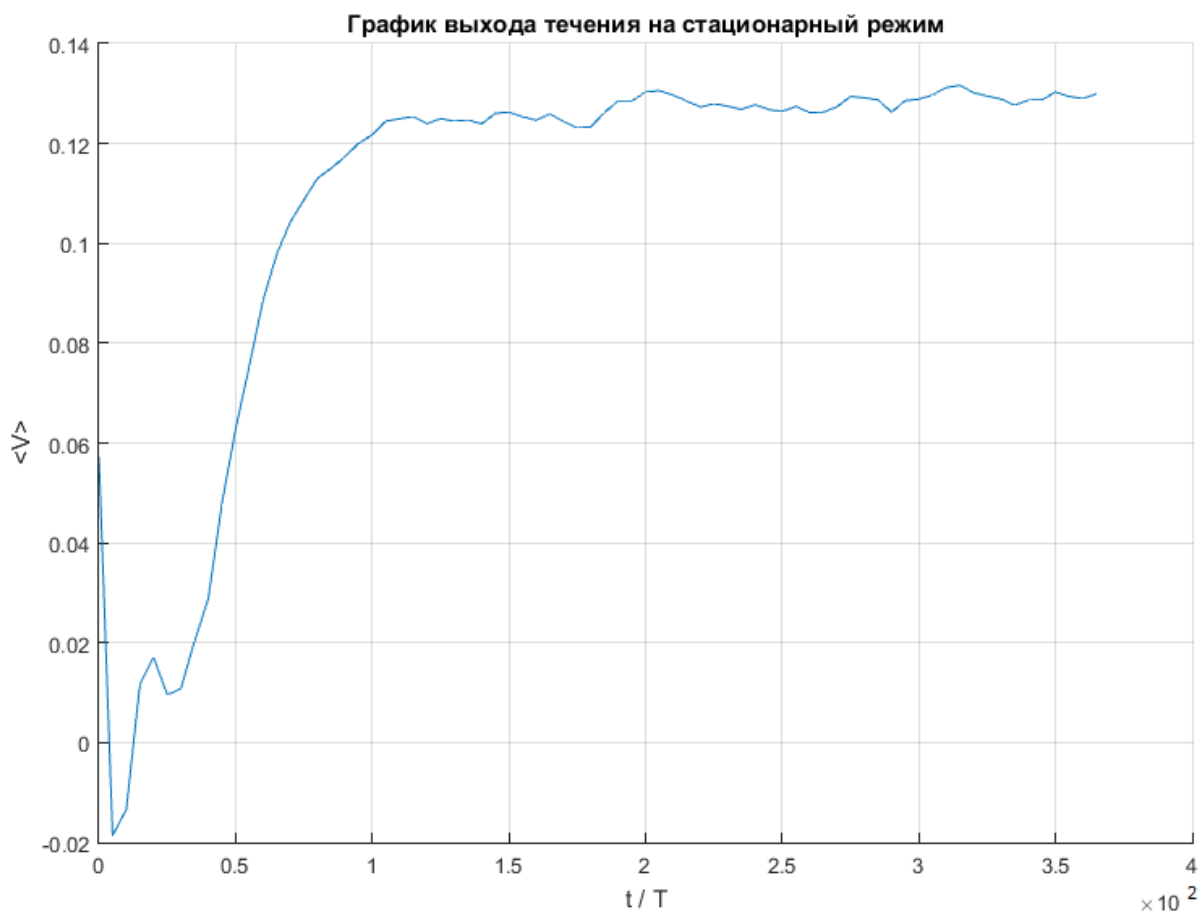


Рис. 9. График зависимости средней скорости от времени, измеренного в периодах колебаний

На Рис. 10 приведен график профиля скорости после выхода течения на стационарный режим. Экспериментальные данные были аппроксимированы полиномом второй степени вида (17) методом наименьших квадратов.

Профиль имеет форму параболы, что согласуется с аналитическим решением уравнения Навье-Стокса для течения Пуазейля (17).

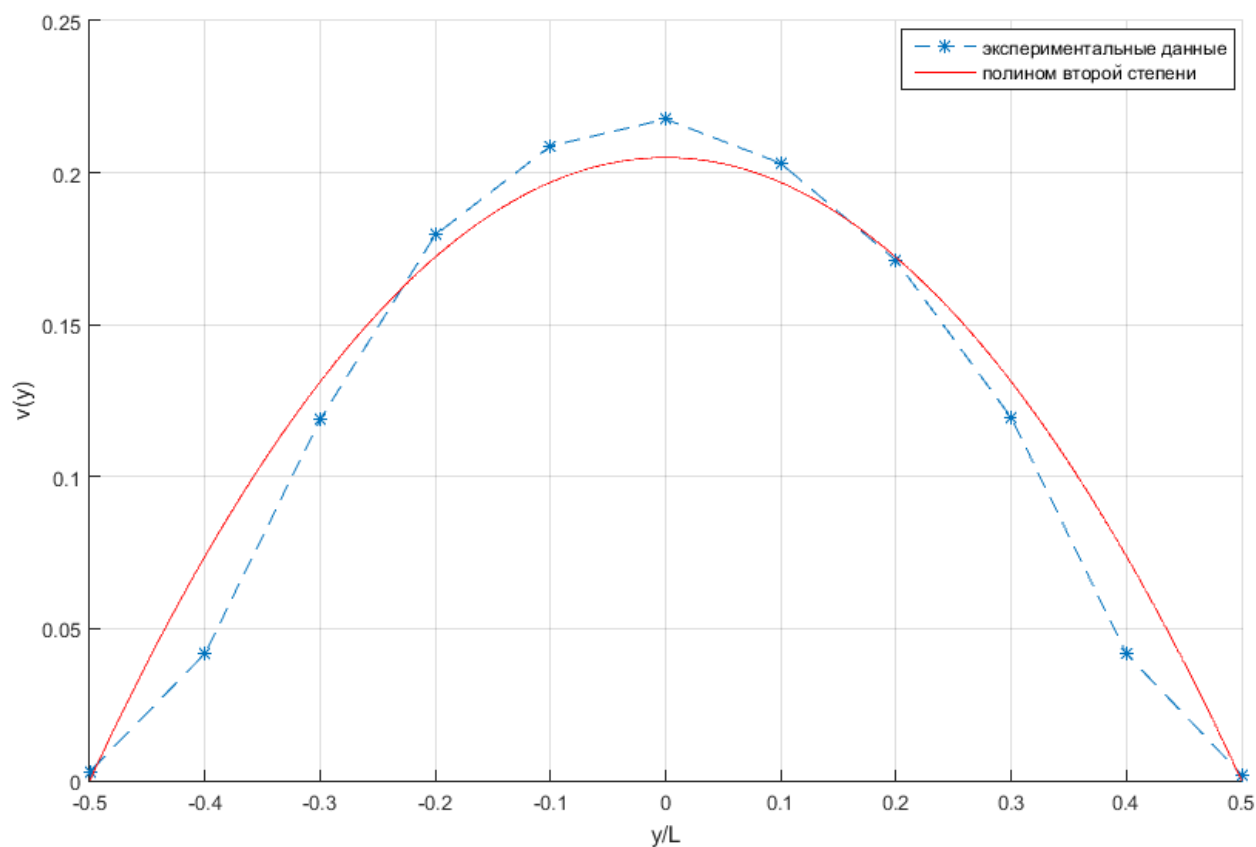


Рис. 10. Профиль скорости

#### 4.2.2 Моделирование смеси при низких концентрациях проппанта

Моделирование проводилось при следующих параметрах (см. Табл. 2).

Табл. 2

Параметр	Обозначение	Значение	Примечания
число частиц	n	~40000	
масса частицы жидкости	m	1	
равновесное расстояние	a	1	
$F = 12D$ , где $D$ – энергия связи	F	1	
начальное расстояние между частицами	$a_0$	a	
шаг интегрирования	dt	0.01Г	
радиус обрезания	$a_{cut}$	1.7a	
начальная скорость теплового движения	v	$0.35v_s$	

температура	$T^o$	$0.23Fa$	
радиус частицы проппанта	R	$\sim 3.4a$	
напряжение массовой силы $f = \frac{f_0}{\rho L^2}$ (22)	$f_0$	$\sim 4.24 \frac{F}{m}$	для течения Пуазейля
скорость стенки $u = \frac{u_0 L}{S}$ (36)	$u_0$	$\sim 4v_s$	для течения Куэтта
плотность проппанта относительно жидкости	$\frac{\rho_p}{\rho_f}$	1	

Для каждого значения концентрации было сделано по 6 независимых расчетов каждого течения (Пуазейля и Куэтта), после чего было проведено осреднение их результатов.

На Рис. 11 и Рис. 12 приведены графики выхода на стационарный режим течений Пуазейля и Куэтта соответственно. По данным графикам можно сделать вывод, что течение Куэтта быстрее выходит на стационарный режим.

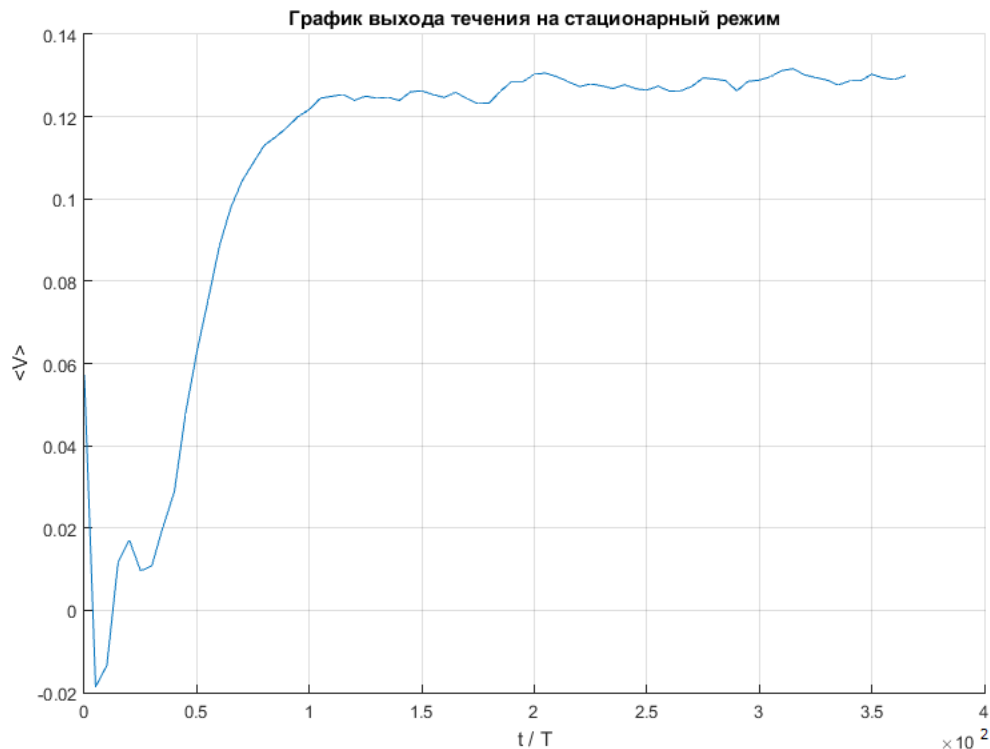


Рис. 11. Выход течения Пуазейля на стационарный режим. График зависимости средней скорости от времени, измеренного в периодах колебаний

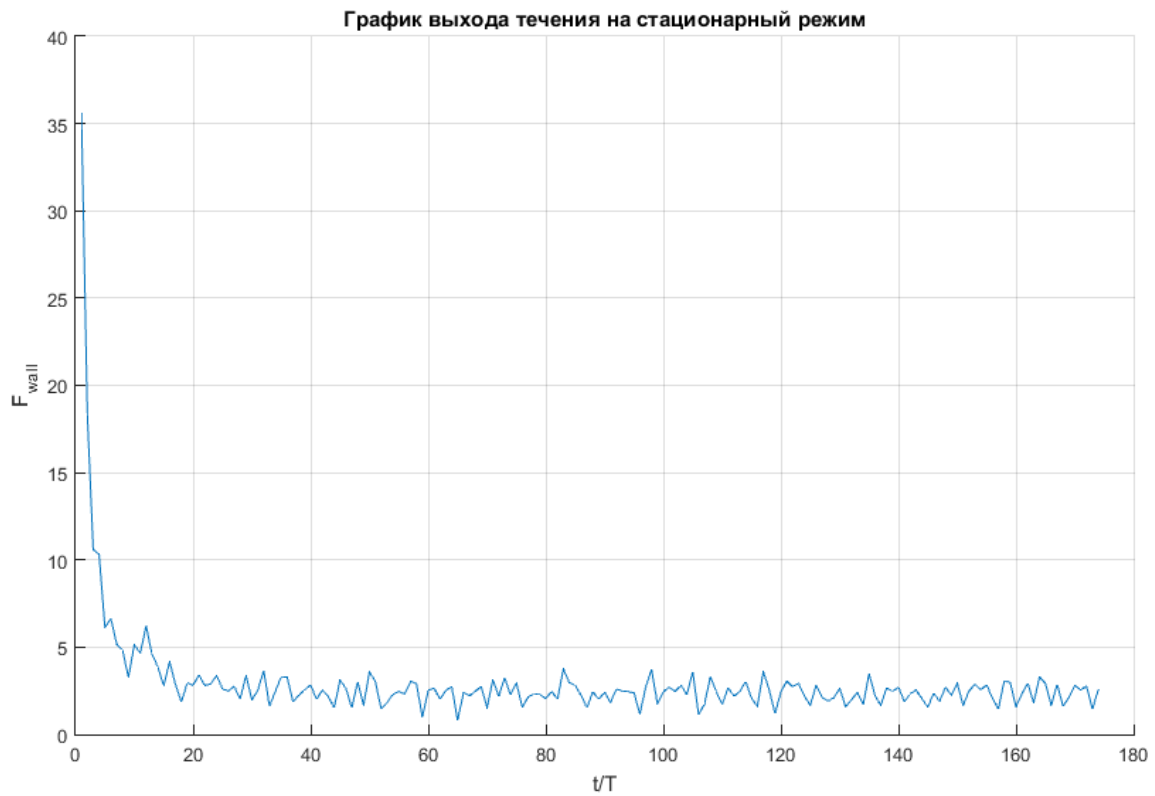


Рис. 12. Выход течения Куэтта на стационарный режим. График зависимости силы от времени, измеренного в периодах колебаний

На приведенном ниже графике зависимости величины  $\frac{\mu(c)}{\mu(0)} - 1$  от концентрации пропанта (Рис. 13) мы видим хорошее совпадение (в пределах погрешности) результатов моделирования методом динамики частиц с формулой Качанова (39).

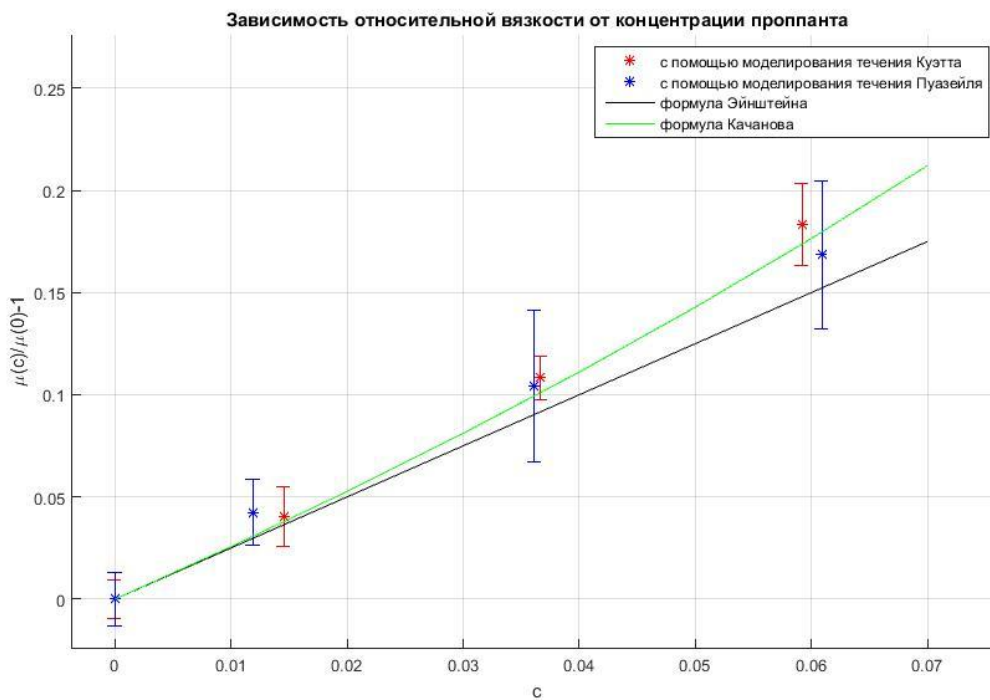


Рис. 13. Зависимость относительной вязкости смеси от концентрации проппанта ( $c < 0.07$ )

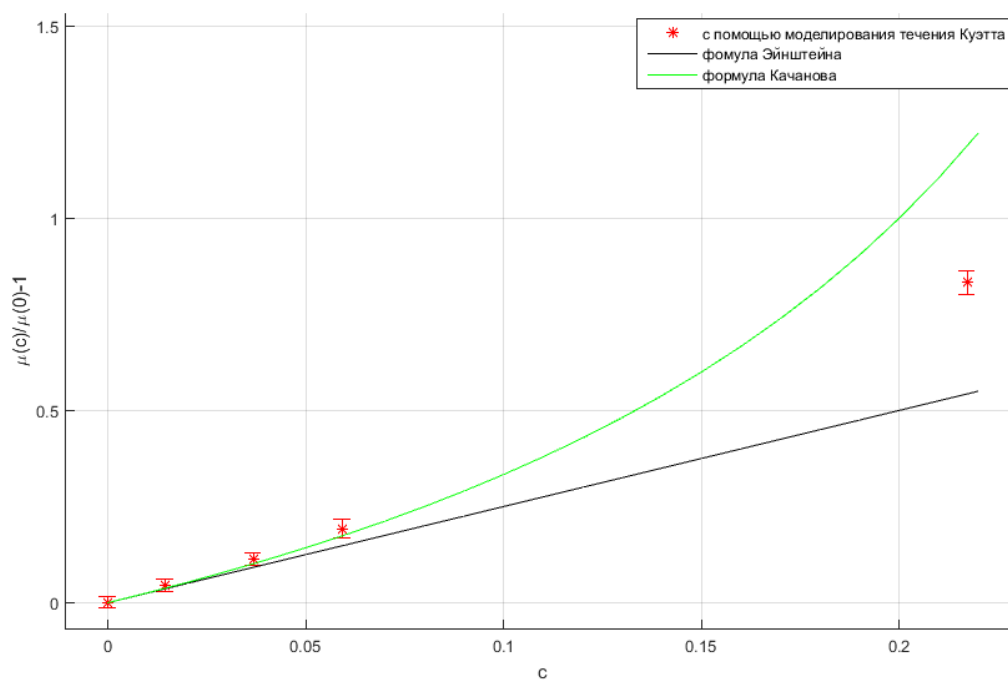


Рис. 14. Зависимость относительной вязкости смеси от концентрации проппанта ( $c < 0.25$ )

Анализируя график, приведенный на Рис. 14, можно сделать вывод, что при концентрации проппанта более 20% формула Качанова (39) не может быть применена.

В соответствии с [17] погрешности косвенных измерений относительной вязкости (для течения Пуазейля) для каждого значения концентрации рассчитывались по формуле

$$\Delta_c = \frac{\sqrt{(v_0 \Delta v_c)^2 + (v_c \Delta v_0)^2}}{v_c^2} \quad (42)$$

где  $\Delta v$  - погрешность прямых измерений (скорости)

$$\Delta v = St \quad (43)$$

$S$  - среднеквадратичная ошибка среднего арифметического, вычисляемая по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - \langle v \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad (44)$$

$t = 2.571$  - коэффициент Стьюдента для надежности  $P = 0.95$  и числа измерений  $n = 6$ .

Для течения Куэтта погрешности определяются аналогично, погрешность косвенных измерений имеет вид

$$\Delta_c = \frac{\sqrt{(F_0 \Delta F_c)^2 + (F \Delta F_0)^2}}{F_0^2} \quad (45)$$

Анализируя проведенные компьютерные эксперименты, можем сделать вывод, что метод определения вязкости по результатам моделирования течения Куэтта дает меньшие погрешности в сравнении с моделированием течения Пуазейля (см. Рис. 13).

По сравнению с полученными ранее результатами решения задачи определения эффективной вязкости в двумерной постановке (см. [3, 4]) получаем значение коэффициента Эйнштейна  $A = \frac{d}{dc} \frac{\mu(c)}{\mu(0)} [c = 0] = 2.5$ , тогда как в двумерном случае  $A = 2$ . Данный результат согласуется с [11].

#### 4.2.3 Сходимость решения по числу частиц

Исследуем сходимость решения по числу частиц. Будем рассматривать течение Пуазейля.

Моделирование проводилось при следующих параметрах (см. Табл. 3).

Табл. 3

Параметр	Обозначение	Значение	Примечания
----------	-------------	----------	------------

масса частицы жидкости	$m$	1	
равновесное расстояние	$a$	1	
$F = 12D$ , где $D$ – энергия связи	$F$	1	
начальное расстояние между частицами	$a_0$	$a$	
шаг интегрирования	$dt$	$0.01T$	
радиус обрезания	$a_{cut}$	$1.7a$	
начальная скорость теплового движения	$v$	$0.35v_s$	
температура	$T^o$	$0.23Fa$	
радиус частицы пропанта	$R$	$\sim 2.5a$	
напряжение массовой силы $f = \frac{f_0}{\rho L^2}$ (22)	$f_0$	$\sim 4.24 \frac{F}{m}$	
плотность пропанта относительно жидкости	$\frac{\rho_p}{\rho_f}$	1	

На Рис. 15 показана сходимость средней скорости течения по числу частиц при концентрациях  $c = 0$ ,  $c=0.1$  и  $c = 0.2$ . На Рис. 16 показана сходимость относительной вязкости смеси по числу частиц при концентрациях  $c=0.1$  и  $c = 0.2$ .



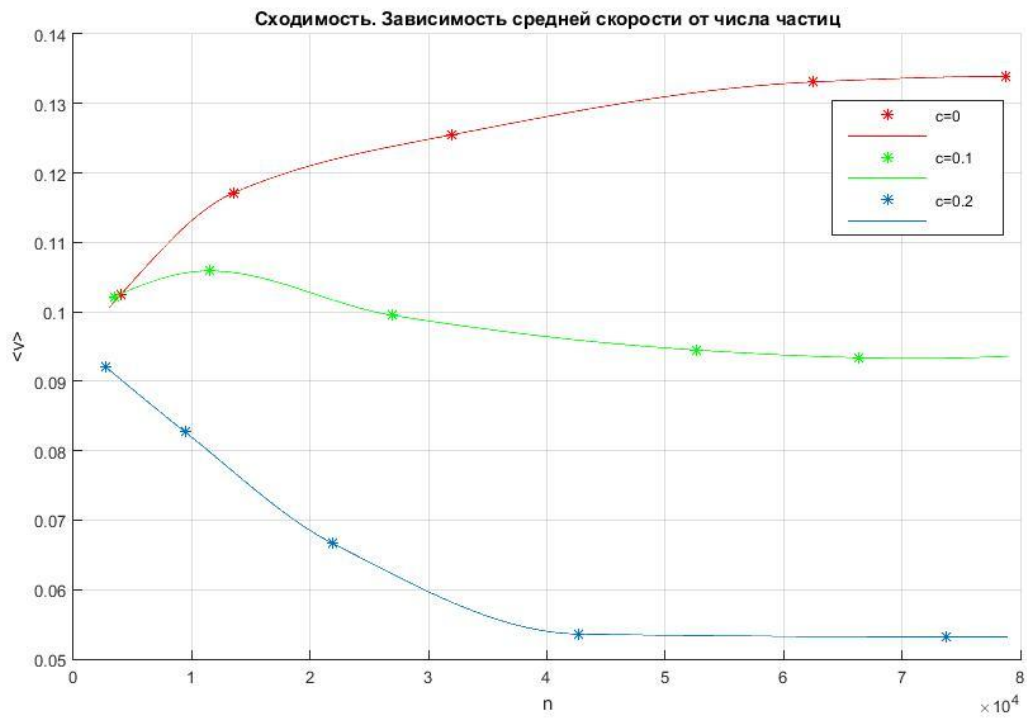


Рис. 15. Сходимость. Зависимость средней скорости от числа частиц

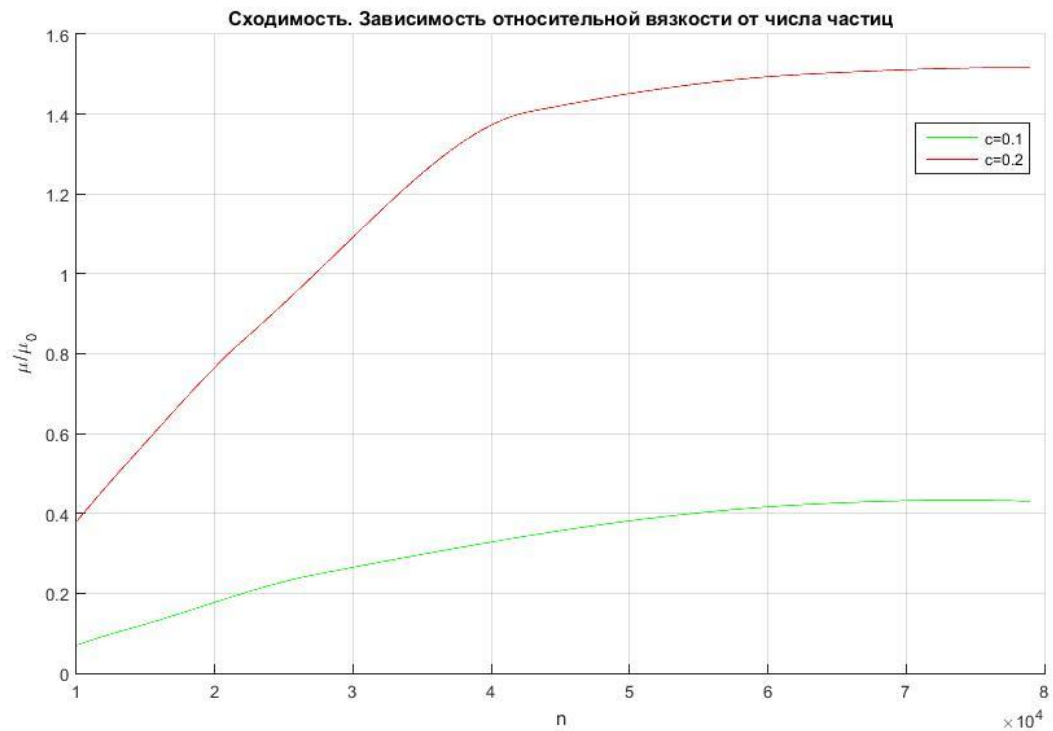


Рис. 16. Сходимость. Зависимость относительной вязкости от числа частиц

Анализируя приведенные выше графики, можем сделать вывод, что число частиц перестает влиять на результаты примерно при  $n > 60000$ .

#### **4.2.4 Проверка выполнения закона вязкости Ньютона**

В данной работе мы рассматривали смесь проппант-жидкость как ньютоновскую жидкость. Проверим корректность этого допущения, рассмотрев течение Пуазейля. Зависимость средней скорости от массовой силы будет линейной (см. (19)), только если жидкость является ньютоновской.

На Рис. 17 приведен график зависимости скорости от переменной, пропорциональной напряжению внешней массовой силы. Аппроксимация экспериментальных данных (см. точки на графике) была проведена методом наименьших квадратов. Анализируя график, делаем вывод, что в пределах рассмотренных концентраций смесь можно считать ньютоновской жидкостью; отклонения зависимости от линейной, вероятно, обусловлены погрешностью расчета (для каждого значения силы был проведен один расчет, осреднение по нескольким расчетам не проводилось).

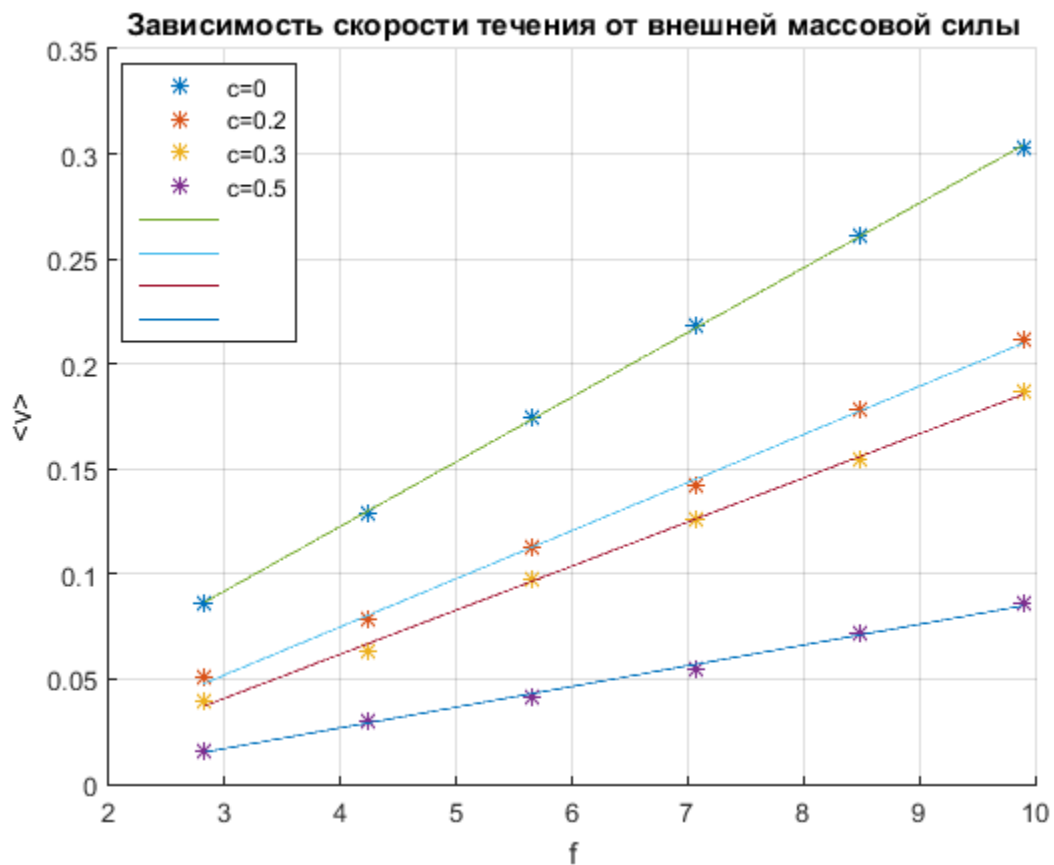


Рис. 17. Зависимость средней скорости течения от величины, пропорциональной напряжению внешней массовой силы

Моделирование проводилось при следующих параметрах (см. Табл. 4).

Табл. 4

Параметр	Обозначение	Значение	Примечания
число частиц	$n$	$\sim 30000$	
масса частицы жидкости	$m$	1	
равновесное расстояние	$a$	1	
$F = 12D$ , где $D$ – энергия связи	$F$	1	
начальное расстояние между частицами	$a_0$	$a$	
шаг интегрирования	$dt$	0.01T	
радиус обрезания	$a_{cut}$	1.7a	

начальная скорость теплового движения	$v$	$0.35v_s$	
температура	$T^o$	$0.23Fa$	
радиус частицы проппанта	R	$\sim 3.5a$	
плотность проппанта относительно жидкости	$\frac{\rho_p}{\rho_f}$	1	

## 5 Заключение

В данной работе проведено исследование влияния концентрации твердой фазы на вязкость суспензии с помощью моделирования методом динамики частиц. Для численного моделирования методом динамики частиц разработана программа на языке C++. Были предложены способы определения эффективной вязкости на основе результатов компьютерного моделирования смеси. Было проведено моделирование течений Пуазейля и Куэтта, на основе которого получена зависимость эффективной вязкости смеси проппант-жидкость от концентрации проппанта.

Анализируя полученные данные, можно сделать следующие выводы:

- метод динамики частиц может быть успешно применен для моделирования двухфазных смесей
- способы определения эффективной вязкости на основе течений Пуазейля и Куэтта дают одинаковые (в пределах погрешности) результаты
- при малых концентрациях полученные результаты согласуются с формулой Качанова (39)

В дальнейшем планируется провести расчеты для высоких концентраций, а также провести исследование реологии смеси с несферическими частицами твердой фазы.

## Список литературы

1. Арбузов В. Н. Эксплуатация нефтяных и газовых скважин. Томский политехнический университет., 2011.
2. J.J. Monaghan, "An introduction to SPH", Computer Physics Communications, vol. 48, pp. 88–96, 1988.
3. V.A. Kuzkin, A.M. Krivtsov, A.M. Linkov, "Computer Simulation of Effective Viscosity of Fluid–Proppant Mixture Used in Hydraulic Fracturing", 2014, published in Fiziko-Tekhnicheskie Problemy Razrabotki Poleznykh Iskopaemykh, 2014, No. 1, pp. 3–12.
4. V.A. Kuzkin, A.M. Krivtsov, A.M. Linkov, "Comparative Study of Rheological Properties of Suspensions by Computer Simulation of Poiseuille and Couette Flows", 2014, published in Fiziko-Tekhnicheskie Problemy Razrabotki Poleznykh Iskopaemykh, 2014, No. 6, pp. 23–32.
5. BL Holian, DJ Evans "Shear viscosities away from the melting line: A comparison of equilibrium and nonequilibrium molecular dynamics" J. Chem. Phys. 78, 5147 (1983).
6. Krivtsov, A.M., Deformirovanie i razrushenie tverdykh tel s mikrostrukturoi (Deformation and Failure of Microstructure Solids), Moscow: Fizmatlit, 2007.
7. Verlet, L., Computer "Experiments" on Classical Fluids. I. Thermodynamical Properties of Lennard–Jones Molecules, Phys. Rev., 1967, vol. 159.
8. Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 2007, vol. 44
9. Linkov A.M. On efficient simulation of hydraulic fracturing in terms of particle velocity, Int. J. Eng. Sci., 2012, vol. 52
10. A. Einstein, A new determination of molecular dimensions, Ann. Phys. 19 (4) (1906) 289–306. Correction: A. Einstein, A new determination of molecular dimensions, Ann. Phys. 34 (1911) 591–592.
11. Brady, J.F., The Einstein Viscosity Correction in n Dimensions, Int. J. Mult. Flow, 1983, vol. 10.
12. Rutgers Ir.R. Relative viscosity of suspensions of rigid spheres in Newtonian liquids, Rheol. Acta 2, 1962a, pp. 202–210
13. Rutgers Ir.R. Relative viscosity and concentration, Rheol. Acta 2, 1962b, pp. 305–348
14. Thomas D.G. 1965 Transport characteristics of suspension: 8. A note on the viscosity of Newtonian suspensions of uniform spherical particles, J. Colloid Sci. 20, pp. 267–277.

15. Mueller S., Llewellyn E.W., Mader H.M. The rheology of suspensions of solid particles, Proc. R. Soc. A, 2010, 466, pp. 1201–1228.
16. Abedian, B. and Kachanov, M.L., On the Effective Viscosity of Suspensions, Int. J. Eng. Sci., 2010, vol. 48
17. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений, 1968, Изд. 3-е, испр. и доп. Изд-во «Наука», Ленингр. ютд., Л., 1—96.