Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., член-корр. РАН
____________ А.М.Кривцов
«___» ______________ 2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

Описание электромагнитных эффектов с позиции среды Коссера

по направлению подготовки
01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль
01.04.03_01 Механика деформируемого твердого тела

Выполнил
студент гр.5040103/20101 ____________ Д.М. Пашковский

Руководитель
профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н. ____________ Е.А. Иванова

Санкт-Петербург
2024

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ
Директор ВШТМиМФ
А.М. Кривцов
«____» __________ 2024 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Пашковскому Дмитрию Максимовичу, гр. 5040103/20101

1. Тема работы: Описание электромагнитных эффектов с позиции среды Коссера
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 30.05.2024
3. Исходные данные по работе: монографии и актуальные научные публикации по теме работы
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): получение балансовых уравнений для среды Коссера, получение кинематический уравнений для среды Коссера, построение модифицированной системы уравнений Максвелла на основе среды Коссера специального вида, постановка задачи магнитостатики для катушки с сердечником, аналитическое решение модифицированной системы уравнений магнитостатики, сравнение с аналитическим решением для классической системы уравнений Максвелла
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): отсутствует
6. Консультанты по работе: отсутствует
7. Дата выдачи задания: 26.02.2024

Руководитель ВКР — Иванова Е.А., д.ф.-м.н., профессор ВШТМиМФ

Задание принял к исполнению: 26.02.2024

Студент — Пашковский Д.М.

РЕФЕРАТ

На 50 с., 5 рисунков, 2 таблиц.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: СРЕДА КОССЕРА, МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ, ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

В работе предложена модель электромагнитного поля на основе континума Коссера специального вида. Исходя из рассматриваемого набора гипотез построена редуцированная система уравнений сплошной среды с вращательными степенями свободы, включающая: баланс кинетического момента, соотношение, связывающее ротор угловой скорости и меры деформаций, уравнение совместности деформаций для вращательных степеней свободы и определяющее соотношение для сопутствующего вектора тензора моментных напряжений. Рассматриваемая модель среды Коссера специального вида по структуре дифференциальных уравнений эквивалента расширенной системе уравнений Максвелла. В отличие от классических уравнений электромагнетизма, при данном подходе в дифференциальных уравнениях получены дополнительные источниковые слагаемые. Другое отличие заключается в том, что закон Гаусса для магнитного поля определен в форме тензорного уравнения для вектора магнитного заряда и тензора электромагнитной индукции, что позволяет в явной форме учесть наличие постоянных магнитов в среде.

На основе модифицированной системы уравнений Максвелла решена задача магнитостатики для катушки с сердечником. Построено аналитическое решение для тензора электромагнитной индукции на основе тензорной декомпозиции Гельмгольца, а также получено аналитическое решение модифицированной системы уравнений Максвелла для магнитной индукции. Качественно описан эффект усиления поля при добавлении в катушку сердечника.

ABSTRACT

50 pages, 5 pictures, 2 tables.

KEYWORDS: COSSERAT MEDIA, CONTINUUM MECHANICS, SPATIAL DESCRIPTION, ELECTROMAGNETISM

The paper proposes a model of the electromagnetic field based on the Cosserat continuum of a special kind. Based on the considered set of hypotheses, a reduced system of equations of a continuous medium with rotational degrees of freedom is constructed, including: the balance of kinetic momentum, the relation linking the rotor of angular velocity and deformation measures, the equation of deformation coexistence for rotational degrees of freedom, and the determining relation for the associated vector of the moment stress tensor. The considered model of the Cosserat medium of a special kind is equivalent to the extended system of Maxwell's equations in terms of the structure of differential equations. In contrast to the classical equations of electromagnetism, additional source terms are obtained in the differential equations by this approach. Gauss's law for the magnetic field is defined in the form of a tensor equation for the magnetic charge vector and the electromagnetic induction tensor, which makes it possible to take into account the influence of permanent magnets in the medium in an explicit form.

To solve the problem of magnetostatics for a coil with a core, a modified system of Maxwell's equations is applied. The analytical solution for the electromagnetic induction tensor using Helmholtz tensor decomposition is constructed, and the analytical solution of the modified system of Maxwell's equations for magnetic induction is obtained. The effect of field enhancement when a core is added to the coil is qualitatively described.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Для описания сред с микроструктурой требуется создавать более общие модели механики сплошных сред: градиентные теории упругости, микрополярная теория, микроморфная теория и другие. Более подробная классификация приведена на Рис. 1 и в работах [11, 6]. Наибольший интерес в современных работах по механике сплошных сред представляет модель среды Коссера, имеющая дополнительные вращательные степени свободы [9]. В дальнейшем модель среды Коссера развивалась большим числом исследователей [3, 4, 18, 7, 8]. Наиболее значимый вклад внесли работы Трусделла [20, 21] и Эрингена [1, 2].

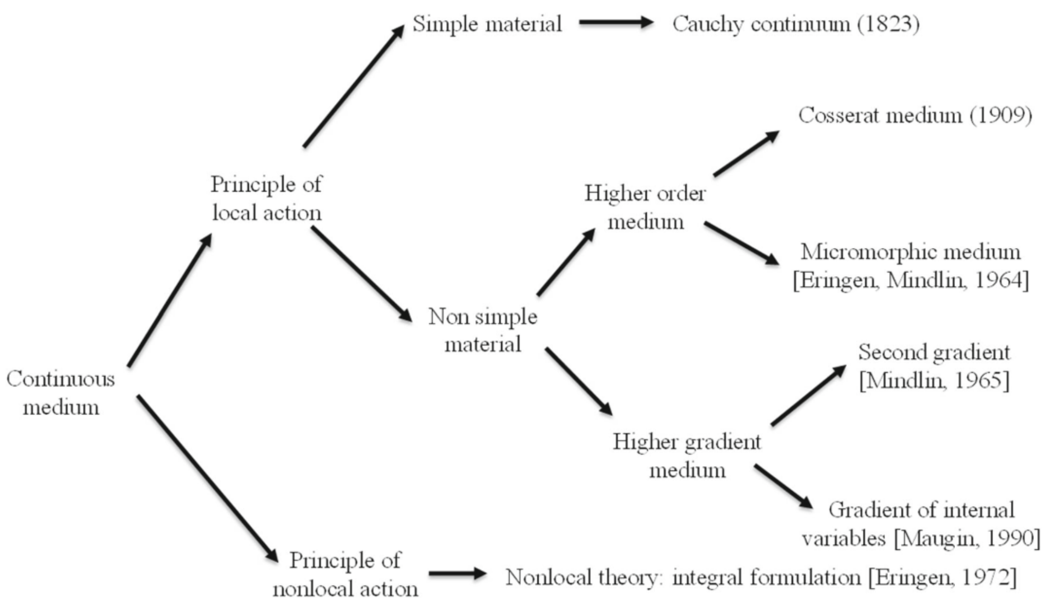

Рисунок 1 — Классификация моделей сплошной среды [11]

В работах Жилина был предложен другой подход к построению среды Коссера, основанный на концепции тела - точки [24]. При этом балансовые соотношения строились в пространственном описании [24]. В дальнейшем данный подход был развит в работах [12, 13, 14].

Для описания электромагнитных явлений тоже использовались модели механики сплошных сред с дополнительными степенями свободы. В работе Жилина была предложена модель электромагнитного поля, основанная на среде Коссера [22, 23, 24, 25]. Затем в работах Ивановой [15, 16, 17] данная теория была развита для случая нелинейной модели электромагнитного поля и термо-электро-магнетизма [15].

Основной целью работы является развитие подхода работы [15] к построению электромагнитного поля на основе модели среды Коссера специального вида. В данной работе предложен вывод балансовых соотношений геометрически нелинейной упругой среды Коссера. На основе данной модели среды строится модифицированная система уравнений Максвелла при помощи аналогий между механическими и электромагнитными величинами.

В работе решены следующие задачи:

- Получена система балансовых соотношений упругой и геометрически нелинейной среды Коссера в эйлеровом описании;
- Получена система дифференциальных уравнений для микрополярного континума специального вида на основе среды Коссера общего вида и системы гипотез;
- Получены аналогии между средой Коссера специального вида и модифицированной системой уравнений Максвелла;
- Решена модельная задача для катушки с сердечником на основе модифицированной системы уравнений. Описан эффект усиления магнитного поля при добавлении сердечника в катушку.

ГЛАВА 1

Модель среды Коссера в пространственном описании

1.1 Динамические структуры тела - точки

В качестве исходного объекта в Эйлеровой механике вводится понятие тела - точки [22, 23, 24], которое обладает трансляционными и вращательными степенями свободы, а также обладает массой m и занимает нулевой объем в пространстве. Частный вид кинетической энергии тела - точки задается в виде квадратичной формы скоростей:

$$K = m\left(\frac{1}{2}\,\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\underline{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\,J\,\underline{\boldsymbol{\omega}}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}\right) \tag{1.1}$$

где $\underline{\boldsymbol{v}}$ - трансляционная скорость, $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ - угловая скорость, $\underline{\underline{\boldsymbol{J}}} = J\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}$ - тензор инерции тела - точки.

Для тела-точки вводятся две динамические структуры: количество движения и кинетический момент. Количеством движения $\underline{\boldsymbol{K}}_1$ называется линейная форма скоростей, определяемая следующим выражением:

$$\underline{\boldsymbol{K}}_1 = \frac{\partial K}{\partial \underline{\boldsymbol{v}}} = m\,\underline{\boldsymbol{v}} \tag{1.2}$$

Собственный кинетический момент тела-точки определяется следующим соотношением:

$$\underline{\boldsymbol{K}}_2 = \frac{\partial K}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}} = J\,\underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.3}$$

Кинетический момент тела - точки вычисленный относительно опорной точки Q определяется как сумма момента количества движения и собственного кинетического момента:

$$\underline{\boldsymbol{K}}_2^{\,Q} = (\underline{\boldsymbol{r}} - \underline{\boldsymbol{r}}_Q)\times\underline{\boldsymbol{K}}_1 + \underline{\boldsymbol{K}}_2 \tag{1.4}$$

Для построения уравнений среды Коссера требуется ввести массовые плотности кинетической энергии, количества движения и кинетического момента. Для этого аксиоматически постулируется, что все три динамические структуры являются аддитивными функциями массы. Далее записывается определение плотностей динамических структур.

$$\mathcal{K} = \lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta K}{\Delta m} = \frac{1}{2}\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\underline{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\,J\,\underline{\boldsymbol{\omega}}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}, \qquad K = \int\limits_{\Delta m}\rho\,\mathcal{K}\,dm \tag{1.5}$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 = \lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta\,\underline{\boldsymbol{K}}_1}{\Delta m} = \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\underline{\boldsymbol{v}}} = \underline{\boldsymbol{v}}, \qquad \underline{\boldsymbol{K}}_1 = \int\limits_{\Delta m}\rho\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1\,dm \tag{1.6}$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2^Q = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}_2^Q}{\Delta m} = (\underline{\boldsymbol{r}} - \underline{\boldsymbol{r}}_Q) \times \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2, \qquad \underline{\boldsymbol{K}}_2^Q = \int\limits_{\Delta m} \rho \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2^Q \, dm \tag{1.7}$$

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \underline{\boldsymbol{\omega}}} = J \, \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.8}$$

Итоговые выражения для массовой плотности количества движения и кинетический момента имеют следующий вид:

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 = \underline{\boldsymbol{v}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2 = \underline{\boldsymbol{r}} \times \underline{\boldsymbol{v}} + J \, \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.9}$$

1.2 Кинематика среды Коссера в пространственном описании

1.2.1 Материальная производная

Пусть дано некоторое поле $\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t)$, описывающее некоторую физическую характеристику частицы, находящейся в данное время в данной точке $\underline{\boldsymbol{y}}(t)$ системы отсчета. Материальная производная поля $\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t)$ определяется через предел отношения:

$$\frac{\delta \, \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t)}{\delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t + \Delta t) + \Delta \underline{\boldsymbol{s}}, t + \Delta t) - \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t)}{\Delta t} \tag{1.10}$$

где Δs определяется:

$$\Delta \underline{\boldsymbol{s}} = \left(\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) - \frac{d\underline{\boldsymbol{y}}}{dt} \right) \Delta t + O(\Delta t^2) \tag{1.11}$$

Выражение для Δs имеет смысл перемещения за время Δt относительно точки наблюдения $\underline{\boldsymbol{y}}(t)$ частицы, которая в момент времени t находилась в данной точке.

Далее преобразуем выражение $\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t + \Delta t) + \Delta s, t + \Delta t)$:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t + \Delta t) + \Delta s, t + \Delta t) = \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t + \Delta t), t + \Delta t) + \Delta \underline{\boldsymbol{s}} \cdot \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t + \Delta t), t + \Delta t) \tag{1.12}$$

Тогда выражение материальной производной преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\delta \, \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t)}{\delta t} = \frac{d}{dt} \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) + \left(\underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) - \frac{d\underline{\boldsymbol{y}}(t)}{dt} \right) \cdot \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) \tag{1.13}$$

Полная производная в предыдущем выражении может быть записана следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) + \frac{d\underline{\boldsymbol{y}}(t)}{dt} \cdot \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) \tag{1.14}$$

В результате подстановки в выражение для материальной производной получается итоговое выражение:

$$\frac{\delta \, \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t)}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) + \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) \cdot \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{K}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t), t) \tag{1.15}$$

В дальнейшем оператор материальной производной записывается следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \tag{1.16}$$

1.2.2 Уравнения кинематики трансляционного движения

Вводится в рассмотрение вектор перемещений $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t)$, который переводит частицу из положения $\underline{\boldsymbol{r}}_0$ в точку $\underline{\boldsymbol{r}}$. Определим материальную производную поля перемещений $\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t)$:

$$\frac{\delta\, \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t)}{\delta\, t} = \frac{d\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t)}{dt} + \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \cdot \nabla \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) = \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \tag{1.17}$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\frac{\delta\, \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t)}{\delta\, t} = \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \tag{1.18}$$

где тензор определяется следующим выражением:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) = \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} - \nabla \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t), \quad \det(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t)) > 0, \quad \nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) = 0 \tag{1.19}$$

Далее получим вспомогательное соотношение для дивергенции поля скоростей $\underline{\boldsymbol{v}}$. Записывается выражение для материальной производной градиента вектора перемещений $\underline{\boldsymbol{u}}$:

$$\frac{\delta}{\delta\, t} \nabla \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}},t) = \nabla \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{r}},t) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \quad \Rightarrow \quad \nabla \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{r}},t) = \left(\frac{\delta}{\delta\, t} \nabla \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{r}},t) \right) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \tag{1.20}$$

Данное выражение можно переписать в следующей форме:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\delta\, \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \tag{1.21}$$

Тогда дивергенция поля скоростей запишется следующим образом:

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}}(\underline{\boldsymbol{r}},t) = -\frac{\delta\, \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t)}{\delta t} \cdot\cdot\, \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \tag{1.22}$$

1.2.3 Уравнения кинематики вращательного движения

Для описания вращательного движения вводится вектор угловой скорости $\underline{\boldsymbol{\omega}}(\underline{\boldsymbol{r}},t)$ на основе уравнения Пуассона:

$$\frac{d}{dt} \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}(\underline{\boldsymbol{r}}, t) \tag{1.23}$$

где $\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}$ - тензор поворота. Данное уравнение справедливо для материального описания, поэтому для пространственного описания уравнение Пуассона преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\delta}{\delta\, t}\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t),t) = \underline{\boldsymbol{\omega}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t),t) \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}(\underline{\boldsymbol{y}}(t),t) \tag{1.24}$$

Также вводится пространственное уравнение Пуассона для меры деформаций $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$:

$$\nabla \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \underline{\boldsymbol{r}}^s \otimes \underline{\boldsymbol{F}}_s \tag{1.25}$$

С учетом определения материальной производной, уравнение Пуассона можно переписать следующим образом:

$$\frac{\delta}{\delta\, t}\underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \frac{d}{dt}\underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \tag{1.26}$$

$$\frac{d}{dt}\underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}, \quad \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q_s} = \underline{\boldsymbol{F}}_s \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \tag{1.27}$$

где $\underline{\boldsymbol{\Omega}}$ - вспомогательный вектор. Тогда выражение для угловой скорости имеет вид:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\boldsymbol{\Omega}} + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{1.28}$$

Далее получим вспомогательное тождество для $\nabla\Omega$. Для этого записывается уравнение и дифференцируется по времени t:

$$\frac{d}{dt}\nabla \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \nabla\left(\frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{dt}\right) = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{dt} \tag{1.29}$$

Выражение для градиента $\nabla\left(\frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{dt}\right)$ преобразуется следующим образом:

$$\nabla\left(\frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{dt}\right) = \nabla\underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{r}}^s\, \underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q_s} \tag{1.30}$$

Тогда $\nabla\underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\nabla\underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} &= \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{dt} - \underline{\boldsymbol{r}}^s\, \underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q_s} = \\
&= \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times (\underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) - (\underline{\boldsymbol{r}}^s\, \underline{\boldsymbol{\Omega}}) \times (\underline{\boldsymbol{F}}_s) = \\
&= \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{r}}^s \left[\underline{\boldsymbol{F}}_s \times (\underline{\boldsymbol{\Omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) - \underline{\boldsymbol{\Omega}} \times (\underline{\boldsymbol{F}}_s \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})\right] \\
&= \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{r}}^s \left(\underline{\boldsymbol{\Omega}}\, \underline{\boldsymbol{F}}_s - \underline{\boldsymbol{F}}_s\, \underline{\boldsymbol{\Omega}}\right) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \\
&= \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{r}}^s \left(\underline{\boldsymbol{F}}_s \times \underline{\boldsymbol{\Omega}}\right) \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}
\end{aligned}$$

В результате получено следующее соотношение

$$\nabla\underline{\mathbf{\Omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \left(\frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\mathbf{\Omega}}\right) \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}$$

которое эквивалентно следующему выражению для $\nabla\underline{\mathbf{\Omega}}$:

$$\nabla\underline{\mathbf{\Omega}} = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\mathbf{\Omega}} \tag{1.31}$$

Данное выражение понадобиться в процессе получения соотношения для $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$. Возвращаемся к выражению для $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ и выражаем из него $\underline{\mathbf{\Omega}}$:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\mathbf{\Omega}} + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{\Omega}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{1.32}$$

Далее подставим в выражении для $\nabla\underline{\mathbf{\Omega}}$:

$$\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}} - \nabla(\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times (\underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) \tag{1.33}$$

Выразим $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$ из предыдущего выражения:

$$\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + \nabla\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} + (\nabla\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times (\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}})$$

Слагаемое $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times (\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}})$ преобразуется следующим образом:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times (\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) = (\nabla\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\nabla) \cdot \underline{\boldsymbol{v}}$$

Подставляем $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times (\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}})$ в выражение для $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot (\nabla\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + (\nabla\underline{\boldsymbol{v}}) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} + (\nabla\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - (\nabla\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T) \cdot \underline{\boldsymbol{v}}$$

Материальная производная для тензора $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$ имеет следующий вид:

$$\frac{\delta\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{dt} + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot (\nabla\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})$$

Итоговое выражение для градиента $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$ имеет следующий вид:

$$\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + \nabla\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{1.34}$$

1.3 Балансовые соотношения среды Коссера

1.3.1 Локальная формулировка баланса массы

Записывается баланс массы в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V} \rho\, dV = -\int\limits_{\Delta S} \rho\, \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}}\, dS \tag{1.35}$$

где ρ - плотность точки среды, $\underline{\boldsymbol{v}}$ - поле скоростей и $\underline{\boldsymbol{n}}$ - внешняя нормаль.

Воспользуемся теоремой Остроградского - Гаусса для правой части:

$$\int\limits_{\Delta V} \frac{d\,\rho}{dt}\, dV = -\int\limits_{\Delta V} \nabla \cdot (\rho\, \underline{\boldsymbol{v}})\, dV \tag{1.36}$$

$$\int\limits_{\Delta V} \left[\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho\, \underline{\boldsymbol{v}})\right] dV = 0 \tag{1.37}$$

Затем осуществляется переход к локальной форме баланса массы в силу произвольности выбора объема ΔV:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho\, \underline{\boldsymbol{v}}) = 0 \tag{1.38}$$

Далее полученное выражение преобразуется следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla\rho \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \rho\, \nabla \cdot\, \underline{\boldsymbol{v}} = 0, \quad \frac{\delta\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{\delta t} + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla \tag{1.39}$$

С учетом выражения для материальной производной получаем следующий вид локальной формы баланса массы:

$$\frac{\delta\rho}{\delta t} + \rho\, \nabla \cdot\, \underline{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{1.40}$$

1.3.2 Локальная форма баланса количества движения

Записывается интегральная форма баланса количества движения:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V} \rho\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1\, dV = \int\limits_{\Delta V} \rho\, \underline{\boldsymbol{f}}\, dV + \int\limits_{\Delta S} \underline{\boldsymbol{T}}_n\, dS - \int\limits_{\Delta S} (\underline{\boldsymbol{n}} \cdot \rho \underline{\boldsymbol{v}})\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1\, dS \tag{1.41}$$

где $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1$ - количество движения, $\underline{\boldsymbol{f}}$ - поле объемных сил и $\underline{\boldsymbol{T}}_n$ - поле поверхностных сил.

Поверхностные силы $\underline{\boldsymbol{T}}_n$ вводятся следующим образом:

$$\underline{\boldsymbol{T}}_n = \underline{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \tag{1.42}$$

где $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ - тензор силовых напряжений.

В результате применения теоремы Остроградского - Гаусса осуществляется переход к объемным интегралам:

$$\int\limits_{\Delta V} \frac{d}{dt}(\rho\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1)\,dV = \int\limits_{\Delta V} \rho\,\underline{\boldsymbol{f}}\,dV + \int\limits_{\Delta V} \nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\,dV - \int\limits_{\Delta V} \nabla\cdot(\rho\,\underline{\boldsymbol{v}}\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1)\,dV \tag{1.43}$$

Преобразуется выражение к следующему виду:

$$\int\limits_{\Delta V} \left[\frac{d}{dt}(\rho\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1) - \rho\,\underline{\boldsymbol{f}} - \nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \nabla\cdot(\rho\,\underline{\boldsymbol{v}}\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1)\right] dV = 0 \tag{1.44}$$

В результате переходим к балансу количества движения в локальной форме:

$$\frac{d}{dt}(\rho\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1) - \rho\,\underline{\boldsymbol{f}} - \nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \nabla\cdot(\rho\,\underline{\boldsymbol{v}}\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1) = 0 \tag{1.45}$$

Раскроем скобки в выражении

$$\frac{d\rho}{dt}\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \rho\,\frac{d\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1}{dt} - \rho\,\underline{\boldsymbol{f}} - \nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \underline{\boldsymbol{v}}\cdot(\nabla\rho)\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + (\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{v}})\,\rho\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \rho\,\underline{\boldsymbol{v}}\,\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 = 0 \tag{1.46}$$

Учтем выражение для баланса массы:

$$\underbrace{\left[\frac{d\rho}{dt} + \underline{\boldsymbol{v}}\cdot(\nabla\rho) + \rho\,(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{v}})\right]}_{=0}\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \rho\,\frac{d\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1}{dt} - \rho\,\underline{\boldsymbol{f}} - \nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \rho\,\underline{\boldsymbol{v}}\,\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 = 0 \tag{1.47}$$

Далее учет слагаемое с материальной производной по времени для $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1$:

$$\rho\left[\frac{d\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1}{dt} + \underline{\boldsymbol{v}}\,\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1\right] - \rho\,\underline{\boldsymbol{f}} - \nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = 0 \tag{1.48}$$

Тогда локальная форма баланса количества движения в пространственном описании запишется следующим образом:

$$\nabla\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \rho\,\underline{\boldsymbol{f}} = \rho\,\frac{\delta\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1}{\delta\,t} \tag{1.49}$$

1.3.3 Локальная форма баланса кинетического момента

Запишем баланс кинетического момента в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V}\left[\underline{\boldsymbol{r}}\times\rho\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2\right]dV = \int\limits_{\Delta V}(\underline{\boldsymbol{r}}\times\rho\,\underline{\boldsymbol{f}} + \rho\,\underline{\boldsymbol{L}})\,dV + \int\limits_{\Delta S}(\underline{\boldsymbol{r}}\times\underline{\boldsymbol{T}}_n + \underline{\boldsymbol{M}}_n)\,dS -$$

$$-\int\limits_{\Delta S}(\underline{\boldsymbol{n}}\cdot\underline{\boldsymbol{v}})(\underline{\boldsymbol{r}}\times\rho\,\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2)\,dS \tag{1.50}$$

Вводится тензор моментных напряжений:

$$\underline{\boldsymbol{M}}_n = \underline{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} \tag{1.51}$$

С учетом теоремы Остроградского - Гаусса исходное уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\int\limits_{\Delta V} \left[\frac{d}{dt}\big(\underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2\big) - \underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{f}} - \rho\,\underline{\boldsymbol{L}} + \nabla \cdot \Big(\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2) \Big) + \nabla \cdot \big(\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \times \underline{\boldsymbol{r}}\big) - \right. \tag{1.52}$$

$$\left. - \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} \right] dV = 0$$

Баланс кинетического момента в локальной форме запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\big(\underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2\big) - \underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{f}} - \rho\,\underline{\boldsymbol{L}} + \nabla \cdot \Big(\underline{\boldsymbol{v}}\,(\underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2) \Big) + \nabla \cdot \big(\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \times \underline{\boldsymbol{r}}\big) - \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} = 0$$

Преобразуем выражение:

$$\frac{\delta}{\delta t}\big(\underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2\big) + (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}})(\underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2) - \underline{\boldsymbol{r}} \times \rho\underline{\boldsymbol{f}} -$$

$$-\rho\,\underline{\boldsymbol{L}} - \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} - (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}) \times \underline{\boldsymbol{r}} + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot \times \nabla \underline{\boldsymbol{r}} = 0 \tag{1.53}$$

В результате итоговая форма баланса кинетического момента выглядит следующим образом:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_{\times} + \rho\underline{\boldsymbol{L}} = \rho\left(\underline{\boldsymbol{v}} \times \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \frac{\delta\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2}{\delta t} \right) \tag{1.54}$$

1.4 Приведенное уравнение баланса энергии

1.4.1 Локальная форма баланса энергии

Полная энергия тела $\mathcal{A}$ складывается из суммы кинетической и внутренний энергии:

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}) = \int\limits_V \rho\,\big(\mathcal{K} + \mathcal{U}\big) dV \tag{1.55}$$

Первый закон термодинамики (уравнение баланса энергии) формулируется следующим образом: скорость изменения полной энергии тела $\mathcal{A}$ складывается из мощности $\mathcal{N}^e$ внешних воздействий на тело $\mathcal{A}$ и скорости подвода энергии в тело от внешних источников Q:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\big(K + U\big) = \mathcal{N}^e + Q \tag{1.56}$$

Мощность $\mathcal{N}^e$ записывается следующим образом:

$$\mathcal{N}^e = \int\limits_V \rho\,(\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{L}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}})\,dV + \int\limits_S (\underline{\boldsymbol{T}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{M}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}})\,dS \tag{1.57}$$

Далее рассматривается чисто упругая среда Коссера без учета тепловых эффектов, поэтому подвод энергии Q определяется выражением:

$$Q = -\int\limits_S \rho\,(\underline{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}})(\mathcal{K} + \mathcal{U})\,dS \tag{1.58}$$

С учетом предположений баланс энергии в интегральной форме имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\,(\mathcal{K} + \mathcal{U})\,dV = \int\limits_V \rho\,(\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{L}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}})\,dV + \int\limits_S (\underline{\boldsymbol{T}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{M}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}})\,dS - \tag{1.59}$$

$$-\int\limits_S \rho\,(\underline{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}})(\mathcal{K} + \mathcal{U})\,dS \tag{1.60}$$

Далее преобразуем каждое из слагаемых в интегральной форме (1.59). Преобразуем слагаемое полной энергии:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\,(\mathcal{K} + \mathcal{U})\,dV = \int\limits_V \left[\frac{d}{dt}(\rho\,\mathcal{K}) + \frac{d}{dt}(\rho\,\mathcal{U})\right] dV \tag{1.61}$$

Далее преобразовываем слагаемое для поверхностных сил $\underline{\boldsymbol{T}}_n$ при помощи теоремы Остроградского - Гаусса:

$$\int\limits_S \underline{\boldsymbol{T}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{v}}\,dS = \int\limits_S (\underline{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}}\,dS = \int\limits_V \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}})\,dV \tag{1.62}$$

Для слагаемого справедливо следующее тождество:

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}}) = (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot \nabla\,\underline{\boldsymbol{v}} \tag{1.63}$$

В результате слагаемое с $\underline{\boldsymbol{T}}_n$ преобразуется к следующей форме:

$$\int\limits_S \underline{\boldsymbol{T}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{v}}\,dS = \int\limits_V \left[(\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot \nabla\,\underline{\boldsymbol{v}}\right] dV \tag{1.64}$$

Аналогичные преобразование осуществляются для слагаемого с $\underline{\boldsymbol{M}}_n$:

$$\int\limits_S \underline{\boldsymbol{M}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}\,dS = \int\limits_S (\underline{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}\,dS = \int\limits_V \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{M}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}})\,dV \tag{1.65}$$

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{M}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}) = (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.66}$$

$$\int\limits_S \underline{\boldsymbol{M}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} \, dS = \int\limits_V \left[(\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} \right] dV \tag{1.67}$$

Слагаемое с подводом энергии Q по теореме Остроградского - Гаусса преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_S \rho \, (\underline{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}})(\mathcal{K} + \mathcal{U}) \, dS = \int\limits_V \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{v}} \, (\rho \, \mathcal{K} + \rho \, \mathcal{U})) \, dV \tag{1.68}$$

Тогда интегральная форма (1.59) преобразуется к следующему виду:

$$\int\limits_V \left[\frac{d}{dt}(\rho \mathcal{K}) + \frac{d}{dt}(\rho \mathcal{U}) - (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{v}} - (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} - \right. \tag{1.69}$$

$$\left. -\rho \, (\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{L}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{v}} \, (\rho \, \mathcal{K} + \rho \, \mathcal{U})) \right] dV = 0$$

Так как уравнение верно для любой области V, то локальная форма записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\rho \, \mathcal{K}) + \frac{d}{dt}(\rho \, \mathcal{U}) - (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{v}} - (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} - \tag{1.70}$$

$$-\rho \, (\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{L}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{v}} \, (\rho \, \mathcal{K} + \rho \, \mathcal{U})) = 0 \tag{1.71}$$

Раскроем производные в уравнении следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\rho \, \mathcal{K}) + \frac{d}{dt}(\rho \, \mathcal{U}) - (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{v}} - (\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} - \tag{1.72}$$

$$-\rho \, (\underline{\boldsymbol{f}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\boldsymbol{L}} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}) + (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}}) \, (\rho \, \mathcal{K}) + (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}}) \, (\rho \, \mathcal{U}) + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla(\rho \, \mathcal{K} + \rho \, \mathcal{U})) = 0$$

Затем перегруппируем слагаемые:

$$\left[\frac{d}{dt}(\rho \, \mathcal{K}) + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla(\rho \, \mathcal{K}) \right] + \left[\frac{d}{dt}(\rho \, \mathcal{U}) + \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla(\rho \, \mathcal{U}) \right] - [\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \rho \, \underline{\boldsymbol{f}}] \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - [\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} + \rho \, \underline{\boldsymbol{L}}] \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} +$$

$$+\rho \, (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}}) \mathcal{K} + \rho \, (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}}) \mathcal{U} - \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} = 0 \tag{1.73}$$

Из баланса количества движения и кинетического момента преобразовываем слагаемые в балансе энергии:

$$\rho \, \frac{\delta \, \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1}{\delta \, t} = \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \rho \, \underline{\boldsymbol{f}}, \quad \rho \, \frac{\delta \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2}{\delta t} - \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_\times = \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} + \rho \, \underline{\boldsymbol{L}} \tag{1.74}$$

В результате подстановки получается следующее:

$$\frac{\delta(\rho\,\mathcal{K})}{\delta\,t}+\frac{\delta(\rho\,\mathcal{U})}{\delta\,t}-\rho\,\frac{\delta\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_1}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{v}}-\rho\,\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{K}}_2}{\delta t}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}+\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_{\times}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}+ \tag{1.75}$$

$$+\rho\,(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{v}})\mathcal{K}+\rho\,(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{v}})\mathcal{U}-\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T\cdot\cdot\,\nabla\,\underline{\boldsymbol{v}}-\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T\cdot\cdot\,\nabla\,\underline{\boldsymbol{\omega}}=0 \tag{1.76}$$

Далее материальные производные раскрываются по свойству произведения:

$$\frac{\delta(\rho\,\mathcal{K})}{\delta\,t}=\frac{\delta\,\rho}{\delta\,t}\,\mathcal{K}+\rho\,\frac{\delta\,\mathcal{K}}{\delta\,t},\quad \frac{\delta(\rho\,\mathcal{U})}{\delta\,t}=\frac{\delta\,\rho}{\delta\,t}\,\mathcal{K}+\rho\,\frac{\delta\,\mathcal{U}}{\delta\,t} \tag{1.77}$$

Подставим в уравнение баланса энергии и преобразуем слагаемые:

$$\rho\,\frac{\delta\,\mathcal{K}}{\delta\,t}+\rho\,\frac{\delta\,\mathcal{U}}{\delta\,t}+\left[\frac{\delta\,\rho}{\delta\,t}+\rho\,(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{v}})\right]\mathcal{K}+\left[\frac{\delta\,\rho}{\delta\,t}+\rho\,(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{v}})\right]\mathcal{U}-\rho\,\frac{\delta\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_1}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{v}}-\rho\,\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{K}}_2}{\delta t}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}=$$

$$=-\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_{\times}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}+\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T\cdot\cdot\,\nabla\,\underline{\boldsymbol{v}}+\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T\cdot\cdot\,\nabla\,\underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.78}$$

С учетом уравнения баланса массы:

$$\frac{\delta\,\rho}{\delta\,t}+\rho\,(\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{v}})=0 \tag{1.79}$$

баланс энергии преобразуется к следующему виду:

$$\rho\,\frac{\delta\,\mathcal{K}}{\delta\,t}+\rho\,\frac{\delta\,\mathcal{U}}{\delta\,t}-\rho\,\frac{\delta\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_1}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{v}}-\rho\,\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{K}}_2}{\delta t}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}=-\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_{\times}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}+\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T\cdot\cdot\,\nabla\,\underline{\boldsymbol{v}}+\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T\cdot\cdot\,\nabla\,\underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.80}$$

Затем преобразовывается выражение с динамическими слагаемыми:

$$\rho\,\frac{\delta\,\mathcal{K}}{\delta\,t}-\rho\,\frac{\delta\,\boldsymbol{\mathcal{K}}_1}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{v}}-\rho\,\frac{\delta\boldsymbol{\mathcal{K}}_2}{\delta t}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}=\rho\,\frac{\delta}{\delta\,t}\left(\frac{1}{2}\,\underline{\boldsymbol{v}}\cdot\underline{\boldsymbol{v}}+\frac{1}{2}\,J\,\underline{\boldsymbol{\omega}}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}\right)-\rho\,\frac{\delta\,\underline{\boldsymbol{v}}}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{v}}-\rho\,\frac{\delta\,(J\,\underline{\boldsymbol{\omega}})}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}= \tag{1.81}$$

$$=\rho\,\frac{\delta\,\underline{\boldsymbol{v}}}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{v}}+\rho\,\frac{\delta\,(J\,\underline{\boldsymbol{\omega}})}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}-\rho\,\frac{\delta\,\underline{\boldsymbol{v}}}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{v}}-\rho\,\frac{\delta\,(J\,\underline{\boldsymbol{\omega}})}{\delta\,t}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}=0$$

Преобразуем выражение для $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_{\times}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}$. Для этого рассмотрим следующее выражение:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T\cdot\cdot\,(\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}\times\underline{\boldsymbol{\omega}})=(\underline{\boldsymbol{r}}^i\,\underline{\boldsymbol{T}}_i)^T\cdot\cdot\,(\underline{\boldsymbol{r}}_j\,\underline{\boldsymbol{r}}^j\times\underline{\boldsymbol{\omega}})=(\underline{\boldsymbol{T}}_i\,\underline{\boldsymbol{r}}^i)\cdot\cdot\,(\underline{\boldsymbol{r}}_j\,\underline{\boldsymbol{r}}^j\times\underline{\boldsymbol{\omega}})= \tag{1.82}$$

$$=(\underline{\boldsymbol{r}}^i\cdot\underline{\boldsymbol{r}}_j)\,(\underline{\boldsymbol{T}}_i\cdot\underline{\boldsymbol{r}}_j\times\underline{\boldsymbol{\omega}})=\delta^i_j\,\underline{\boldsymbol{T}}_i\cdot\underline{\boldsymbol{r}}_j\times\underline{\boldsymbol{\omega}}=\underline{\boldsymbol{T}}_i\cdot\underline{\boldsymbol{r}}_i\times\underline{\boldsymbol{\omega}}=-(\underline{\boldsymbol{r}}_i\times\underline{\boldsymbol{T}}_i)\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}=-\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_{\times}\cdot\underline{\boldsymbol{\omega}}$$

С учетом (1.81) и (1.82) баланс энергии преобразуется к следующему виду:

$$\rho\,\frac{\delta\,\mathcal{U}}{\delta\,t}+0=\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T\cdot\cdot\,(\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}\times\underline{\boldsymbol{\omega}})+\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T\cdot\cdot\,\nabla\,\underline{\boldsymbol{v}}+\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T\cdot\cdot\,\nabla\,\underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.83}$$

Итоговое уравнение баланса энергии в локальной форме без учета тепловых процессов имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot (\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.84}$$

В работе [22, 14] предложена следующая декомпозиция тензора силовых и тензора моментных напряжений:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_d, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_d \tag{1.85}$$

где $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e$ и $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e$ - упругие составляющие, $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_d$ и $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_d$ - диссипативные составляющие (зависят от скоростей).

Подставляем данное разложение в баланс энергии и получаем приведенное уравнение баланса энергии:

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e^T \cdot\cdot (\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_d^T \cdot\cdot (\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_d^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.86}$$

Так как рассматривается чисто упругая среда Коссера, то диссипативные составляющие отсутствуют:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_d = 0, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_d = 0 \tag{1.87}$$

Итоговый вид приведенного уравнения баланса энергии для упругой среды Коссера без учета тепловых процессов следующий:

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e^T \cdot\cdot (\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.88}$$

1.5 Соотношения Коши - Грина

В данном разделе построены определяющие соотношения для тензоров напряжений $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e$ и $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e$, которые называются соотношениями Коши - Грина. Для начала запишем приведенное уравнение баланса энергии через меры деформаций $\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}$ и $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$.

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e^T \cdot\cdot (\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.89}$$

Для среды Коссера в пространственном описании введены две меры деформации: одна для трансляционных степеней свободы $\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}$, вторая - вращательных степеней свободы $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} - \nabla \underline{\boldsymbol{u}}, \quad \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \tag{1.90}$$

Ранее были выведены соотношения для градиентов $\nabla \underline{\boldsymbol{v}}$ и $\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{v}} = -\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \tag{1.91}$$

$$\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + \nabla \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{1.92}$$

Начнем с преобразования соотношения для градиента $\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + \nabla \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \tag{1.93}$$

$$= \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T - \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T = \tag{1.94}$$

$$= \left[\frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} - \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right] \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T = \tag{1.95}$$

$$= \left[\frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} - \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right] \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T = \tag{1.96}$$

$$= \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} + \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T = \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \tag{1.97}$$

Таким образом итоговое выражение для $\nabla \omega$ имеет вид:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \tag{1.98}$$

Далее преобразуем выражение для $\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}$. Сначала рассматривается дополнительное тождество:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right) = \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\delta t} = \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \tag{1.99}$$

$$= \left(\frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right)}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} \right) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \tag{1.100}$$

Далее выражение преобразуется к следующему виду:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{\delta (\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1})}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right)}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \tag{1.101}$$

$$= \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \left(\frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right)}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} \right) = \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \tag{1.102}$$

Итоговое выражение для $\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}$ имеет следующий вид:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \tag{1.103}$$

Далее с учетом () и () приведенное уравнение баланса энергии преобразуется к следующему виду:

$$\rho \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e^T \cdot\cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \right) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e^T \cdot\cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \right) \tag{1.104}$$

Далее для преобразования уравнения баланса энергии понадобится тождество:

$$(\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}})^T \cdot\cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\boldsymbol{c}}\,\underline{\boldsymbol{d}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T) = (\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) \cdot\cdot \underline{\boldsymbol{c}}\,\underline{\boldsymbol{d}} \tag{1.105}$$

Применив данное преобразование к слагаемым баланса энергии получается следующее:

$$\rho \frac{\delta\, \mathcal{U}}{\delta\, t} = \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right)^T \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\, t} + \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right)^T \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\, t} \tag{1.106}$$

Баланса энергии видно, что внутренняя энергия является функцией следующих параметров:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) \tag{1.107}$$

Вычислим материальную производную от внутренней энергии:

$$\frac{\delta\, \mathcal{U}}{\delta\, t} = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}\right)^T \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\, t} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}\right)^T \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\, t} \tag{1.108}$$

Баланс энергии:

$$\frac{\delta\, \mathcal{U}}{\delta\, t} = \frac{1}{\rho}\left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right)^T \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\, t} + \frac{1}{\rho}\left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right)^T \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\, t} \tag{1.109}$$

Вычитаем одно из другого:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})} - \frac{1}{\rho}\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right)^T \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\, t} + \tag{1.110}$$

$$+\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})} - \frac{1}{\rho}\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right)^T \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\, t} = 0 \tag{1.111}$$

Соотношения Коши - Грина:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e = \rho\, \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \tag{1.112}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_e = \rho\, \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \tag{1.113}$$

1.6 Общая система уравнений среды Коссера

Запишем получившуюся систему уравнений упругой среды Коссера в пространственном описании. Система кинематических уравнений имеет следующий вид:

- Уравнение кинематики трансляционного движения:

$$\frac{\delta\, \underline{\boldsymbol{u}}}{\delta\, t} = \underline{\boldsymbol{v}} \tag{1.114}$$

- Уравнения кинематики вращательного движения:

$$\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\delta t} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \tag{1.115}$$

Меры деформаций и соотношения для них:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{g}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} - \nabla \underline{\boldsymbol{u}}, \ \ \nabla \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \tag{1.116}$$

Соотношения, связывающие кинематические величины и меры деформаций:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{v}} = -\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \tag{1.117}$$

$$\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + \nabla \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{1.118}$$

Далее запишем систему балансовых соотношений:

- **Локальное уравнение баланса массы.**

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{1.119}$$

- **Локальное уравнение баланса количества движения.**

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \rho \underline{\boldsymbol{f}} = \rho \frac{\delta \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1}{\delta t} \tag{1.120}$$

- **Локальное уравнение баланса кинетического момента.**

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_\times + \rho \underline{\boldsymbol{L}} = \rho \left(\underline{\boldsymbol{v}} \times \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 + \frac{\delta \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2}{\delta t} \right) \tag{1.121}$$

- **Приведенное уравнение баланса энергии.**

$$\rho, \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e^T \cdot\cdot (\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}}_e^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.122}$$

Внутренняя энергия должна зависеть от следующих слагаемых:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) \tag{1.123}$$

Определяющие соотношения для упругой части силовых и моментных напряжений выглядят следующим образом (соотношения Коши - Грина):

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_e = \rho \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \tag{1.124}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}_{\,e} = \rho\, \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \right)} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \tag{1.125}$$

ГЛАВА 2

Среда Коссера специального вида. Аналогия с уравнениями Максвелла

В данном главе предложена специальная модель среды Коссера специального вида на основе модели общего упругого микрополярного континума. Исходя из рассматриваемого набора гипотез построена редуцированная система уравнений сплошной среды с вращательными степенями свободы, включающая: баланс кинетического момента, соотношение, связывающее ротор угловой скорости и меры деформаций, уравнение совместности деформаций для вращательных степеней свободы и определяющее соотношение для сопутствующего вектора тензора моментных напряжений. Рассматриваемая модель среды Коссера специального вида по структуре дифференциальных уравнений эквивалента расширенной системе уравнений Максвелла. В отличие от классических уравнений электромагнетизма, при данном подходе в дифференциальных уравнениях получены дополнительные источниковые слагаемые. Другое отличие заключается в том, что закон Гаусса для магнитного поля определен в форме тензорного уравнения для вектора магнитного заряда и тензора электромагнитной индукции, что позволяет в явной форме учесть наличие постоянных магнитов в среде. Описанная выше модель показана на Рис. 2.1.

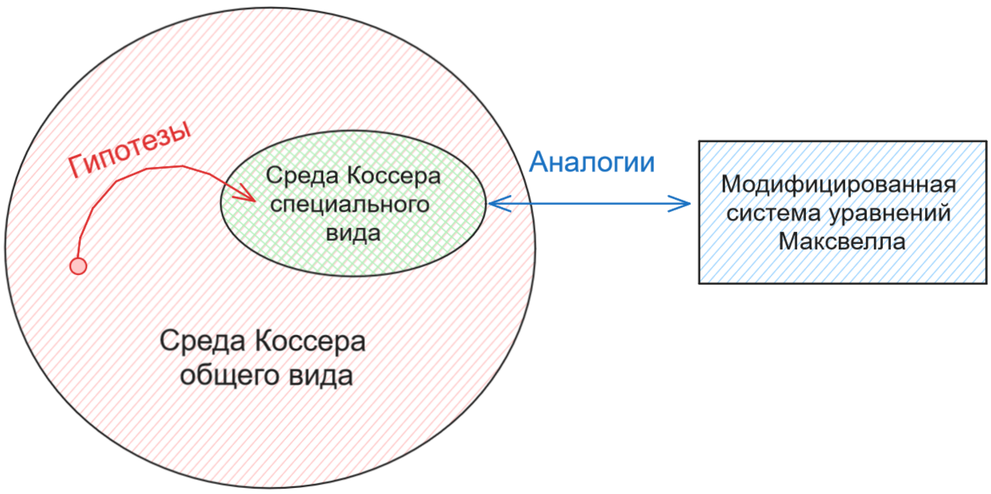

Рисунок 2.1 — Общая структура модели

Далее будет показан вывод уравнений среды Коссера специального вида. Построена аналогия между классическими уравнениями Максвелла.

2.1 Уравнения совместности деформаций для вращательных степеней свободы

Для начала выведем вспомогательное соотношение, называемое структурой Картана. В начале записываются два пространственных уравнения Пуассона для разных индексов s и m:

$$\frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q^s} = \underline{\boldsymbol{F}}_s \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}, \quad \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q^m} = \underline{\boldsymbol{F}}_m \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \tag{2.1}$$

Далее первое уравнение дифференцируется по q^m, а второе уравнение по q^s:

$$\frac{\partial^2 \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q^s \partial q^m} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_s}{\partial q^m} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{F}}_s \times \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q^m} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q^m \partial q^s} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_m}{\partial q^s} \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{F}}_m \times \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q^s} \tag{2.3}$$

В силу непрерывности полей смешанные производные от тензора поворота совпадают:

$$\frac{\partial^2 \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q^s \partial q^m} = \frac{\partial^2 \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\partial q^m \partial q^s} \tag{2.4}$$

Тогда далее вычитается уравнение и получается следующее выражение:

$$\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_m}{\partial q^s}\right) \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{F}}_s \times (\underline{\boldsymbol{F}}_m \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) - \underline{\boldsymbol{F}}_m \times (\underline{\boldsymbol{F}}_s \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) = 0 \tag{2.5}$$

$$\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_m}{\partial q^s}\right) \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} + \underline{\boldsymbol{F}}_s (\underline{\boldsymbol{F}}_m \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) - \underline{\boldsymbol{F}}_m (\underline{\boldsymbol{F}}_s \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) = 0 \tag{2.6}$$

Данное выражение умножается справа скалярно на $\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T$:

$$\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_m}{\partial q^s}\right) \times \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T + \underline{\boldsymbol{F}}_s (\underline{\boldsymbol{F}}_m \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T - \underline{\boldsymbol{F}}_m (\underline{\boldsymbol{F}}_s \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T = 0 \tag{2.7}$$

С учетом того, что тензор поворота является ортогональным тензором ($\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T = \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{-1}$), получается следующее:

$$\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_m}{\partial q^s}\right) \times \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} + \underline{\boldsymbol{F}}_s \underline{\boldsymbol{F}}_m - \underline{\boldsymbol{F}}_m \underline{\boldsymbol{F}}_s = 0 \tag{2.8}$$

Вычисляется векторный инвариант от предыдущего уравнения:

$$-2\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_m}{\partial q^s}\right) + \underline{\boldsymbol{F}}_s \times \underline{\boldsymbol{F}}_m - \underline{\boldsymbol{F}}_m \times \underline{\boldsymbol{F}}_s = 0 \tag{2.9}$$

Итоговое выражение для структур Картана записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_s}{\partial q^m} - \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_m}{\partial q^s}\right) = \underline{\boldsymbol{F}}_s \times \underline{\boldsymbol{F}}_m \tag{2.10}$$

Далее получим уравнение совместности деформаций на основе структур Картана. Запишем выражение для ротора тензора $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$:

$$\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \underline{\boldsymbol{r}}^n \times \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\partial q^n} = \underline{\boldsymbol{r}}^n \times \underline{\boldsymbol{r}}^k \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_k}{\partial q^n} = \tag{2.11}$$

$$= \underline{\boldsymbol{r}}^n \times \underline{\boldsymbol{r}}^k \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_n}{\partial q^k} + \underline{\boldsymbol{F}}_n \times \underline{\boldsymbol{F}}_k \right) = \tag{2.12}$$

$$= -\underline{\boldsymbol{r}}^k \times \underline{\boldsymbol{r}}^n \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_n}{\partial q^k} + \underline{\boldsymbol{r}}^n \times \underline{\boldsymbol{r}}^k \underline{\boldsymbol{F}}_n \times \underline{\boldsymbol{F}}_k = \tag{2.13}$$

$$= -\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} + \underline{\boldsymbol{F}}_n \underline{\boldsymbol{r}}^n \times \times \underline{\boldsymbol{r}}^k \underline{\boldsymbol{F}}_k = -\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \times \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{2.14}$$

Тогда уравнение совместности для вращательных степеней свободы имеет следующий вид:

$$\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \times \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{2.15}$$

Далее получим еще два дополнительных выражения на основе уравнения совместности. Вычислим след от правой и левой части уравнения совместности. Левая часть преобразуется следующим образом:

$$\mathrm{tr}(\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) = (\underline{\boldsymbol{r}}^k \times \underline{\boldsymbol{r}}^n) \cdot \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_n}{\partial q^k} = \underline{\boldsymbol{r}}^k \cdot \left(\underline{\boldsymbol{r}}^n \times \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}_n}{\partial q^k} \right) = \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times \tag{2.16}$$

Далее преобразуем след от правой части уравнения совместности:

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \times \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) = \frac{1}{2} (\underline{\boldsymbol{r}}^n \times \underline{\boldsymbol{r}}^k) \cdot (\underline{\boldsymbol{F}}_n \times \underline{\boldsymbol{F}}_k) = \tag{2.17}$$

$$= \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{F}}_n \cdot \left[\underline{\boldsymbol{F}}_k \times (\underline{\boldsymbol{r}}^n \times \underline{\boldsymbol{r}}^k) \right] = \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{F}}_n \cdot \left[\underline{\boldsymbol{r}}^n (\underline{\boldsymbol{F}}_k \cdot \underline{\boldsymbol{r}}^k) - \underline{\boldsymbol{r}}^k (\underline{\boldsymbol{F}}_k \cdot \underline{\boldsymbol{r}}^n) \right] = \tag{2.18}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\underline{\boldsymbol{F}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{r}}^n)(\underline{\boldsymbol{F}}_k \cdot \underline{\boldsymbol{r}}^k) - (\underline{\boldsymbol{F}}_n \cdot \underline{\boldsymbol{r}}^k)(\underline{\boldsymbol{F}}_k \cdot \underline{\boldsymbol{r}}^n) \right] = \tag{2.19}$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}))^2 - \underline{\boldsymbol{r}}^k \underline{\boldsymbol{F}}_k \cdot \cdot \underline{\boldsymbol{r}}^n \underline{\boldsymbol{F}}_n \right] = \frac{1}{2} \left[(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}))^2 - \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \right] = I_2(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) \tag{2.20}$$

Тогда если вычислить след от уравнения совместности, то получится уравнение вида:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times = I_2(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) \tag{2.21}$$

Далее выводится второе уравнение, применив векторный инвариант к правой и левой части уравнения совместности. Рассматривается сначала следующее выражение:

$$(\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}})_\times = \left(\underline{\boldsymbol{r}}^k \times \underline{\boldsymbol{r}}^n \frac{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\partial q^k} \right)_\times = (\underline{\boldsymbol{r}}^k \times \underline{\boldsymbol{r}}^n) \times \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}}{\partial q^k} = \tag{2.22}$$

$$= -\frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}}{\partial q^k} \times (\underline{\boldsymbol{r}}^k \times \underline{\boldsymbol{r}}^n) = -\underline{\boldsymbol{r}}^k \underline{\boldsymbol{r}}^n \cdot \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}}{\partial q^k} + \underline{\boldsymbol{r}}^n \frac{\partial \underline{\boldsymbol{F}}}{\partial q^k} \cdot \underline{\boldsymbol{r}}^k = \tag{2.23}$$

$$= -\nabla\big(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\big) + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \nabla = -\nabla\big(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\big) + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T = \tag{2.24}$$

$$-\nabla \cdot \big(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}\big) + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T = \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}})^T \tag{2.25}$$

Далее преобразуется векторный инвариант от правой части уравнения совместности:

$$\frac{1}{2}\,(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \times\times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}})_\times = \frac{1}{2}\,(\underline{\boldsymbol{r}}^n \times \underline{\boldsymbol{r}}^k) \times (\underline{\boldsymbol{F}}_n \times \underline{\boldsymbol{F}}_k) = \tag{2.26}$$

$$= \frac{1}{2}\,[\underline{\boldsymbol{F}}_n\,\underline{\boldsymbol{F}}_k \cdot (\underline{\boldsymbol{r}}^n \times \underline{\boldsymbol{r}}^k) - \underline{\boldsymbol{F}}_k\,\underline{\boldsymbol{F}}_n \cdot (\underline{\boldsymbol{r}}^n \times \underline{\boldsymbol{r}}^k)] = \tag{2.27}$$

$$= \frac{1}{2}\,[\underline{\boldsymbol{F}}_n\,\underline{\boldsymbol{r}}^n \cdot (\underline{\boldsymbol{r}}^k \times \underline{\boldsymbol{F}}_k) - \underline{\boldsymbol{F}}_k\,\underline{\boldsymbol{r}}^k \cdot (\underline{\boldsymbol{F}}_n \times \underline{\boldsymbol{r}}^n)] = \tag{2.28}$$

$$= \frac{1}{2}\,[\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times] = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times = (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - 2\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^A) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times = \tag{2.29}$$

$$= \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times - 2\Big(-\frac{1}{2}\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times \times \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}\Big) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times \tag{2.30}$$

Итоговый вид уравнения, полученного в результате применения векторного инварианта следующий:

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}})^T = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times \tag{2.31}$$

Преобразованные выражения инвариантов от уравнения совместности деформаций будут иметь большое значение при дальнейшем построении системы уравнений электромагнетизма.

2.2 Модель среды Коссера специального вида

2.2.1 Гипотезы среды Коссера специального вида

Для построения среды Коссера специального вида принимается следующий набор гипотез:

- Среда является неподвижной: $\underline{\boldsymbol{v}} = 0$, $\rho = \mathrm{const}$.
- Объемные силы уравновешены поверхностными: $\rho\underline{\boldsymbol{f}} = -\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$.
- Объемный момент имеет следующий вид: $\rho\,\underline{\boldsymbol{L}} = -\beta\underline{\boldsymbol{K}}$ и $\underline{\boldsymbol{K}} = \rho\,J\,\underline{\boldsymbol{\omega}}$.
- Тензор моментных напряжений $\underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}}$ является антисимметричным: $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}} = -\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{M}}$.
- Внутренняя энергия задается в виде квадратичной формы следующего вида:

$$\rho\,\mathcal{U} = \frac{1}{2}\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_2 \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times) \tag{2.32}$$

Далее система балансовых соотношений среды Коссера общего вида будет преобразована с учетом принимаемых выше гипотез.

2.2.2 Преобразование уравнения баланса энергии с учетом гипотез

Начнем с преобразования приведенного уравнения баланса энергии и соотношений Коши - Грина. Записывается приведенное уравнение баланса энергии:

$$\rho, \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot (\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.33}$$

и соотношения для градиента скорости $\nabla \underline{\boldsymbol{v}}$ и угловой скорости $\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}}$ через меры деформаций $\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}$ и $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{v}} = -\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \tag{2.34}$$

$$\nabla \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + \nabla \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{2.35}$$

Баланс энергии (2.33) преобразуется с учетом (2.34) и (2.35) к следующему виду:

$$\rho \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot \left(-\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} \right) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \left(\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \right) \tag{2.36}$$

Преобразуем слагаемое с тензором моментных напряжений $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}$:

$$\rho \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta t} = \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^T \cdot\cdot \left(-\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} \right) + \tag{2.37}$$

$$+ \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \left(\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \right)$$

Преобразуем одно из слагаемых в (2.37) следующим образом:

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} = \left(\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} - \frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \right) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{2.38}$$

При этом справедливо следующее тождество:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) = (\underline{\underline{\boldsymbol{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T)^T \cdot\cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \tag{2.39}$$

С учетом (2.38) и (2.39) баланс энергии преобразуется к следующему виду:

$$\rho \frac{\delta \mathfrak{U}}{\delta t} = \left(\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \right)^T \cdot\cdot \left(-\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} \right) + \underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T \cdot\cdot \left(\frac{\delta \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \right) \tag{2.40}$$

Для получения соотношений Коши - Грина требуется преобразовать слагаемые в уравнении (2.40). Из предыдущей главы известно следующее соотношение:

$$\nabla \underline{\boldsymbol{v}} + \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\underline{\boldsymbol{g}}} \cdot \frac{\delta (\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T \tag{2.41}$$

Для преобразования второго слагаемое в (2.40) рассматривается следующее выражение:

$$\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t}=\left(\frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\delta\,t}\right)^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}+\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta\,t}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}+\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}}{\delta\,t}= \tag{2.42}$$

$$=(\underline{\boldsymbol{\omega}}\times\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}+\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta\,t}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}+\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot(\underline{\boldsymbol{\omega}}\times\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) \tag{2.43}$$

Затем полученное выражение умножается слева на тензор $\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}$ и справа на тензор $\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T$:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\cdot\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T=\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\cdot(\underline{\boldsymbol{\omega}}\times\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}+\frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta\,t}+\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot(\underline{\boldsymbol{\omega}}\times\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T= \tag{2.44}$$

$$=\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot(\underline{\boldsymbol{\omega}}\times\underline{\underline{\boldsymbol{E}}})\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}+\frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta\,t}+\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot(\underline{\boldsymbol{\omega}}\times\underline{\underline{\boldsymbol{E}}})=-\underline{\boldsymbol{\omega}}\times\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}+\frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta\,t}+\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\times\underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.45}$$

В результате получается следующее соотношение:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\cdot\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T=-\underline{\boldsymbol{\omega}}\times\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}+\frac{\delta\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta\,t}+\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\times\underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.46}$$

С учетом (2.41) и (2.46) баланс энергии преобразуется к следующей форме:

$$\rho\,\frac{\delta\mathfrak{U}}{\delta\,t}=\left(\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}+\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T\right)^T\cdot\cdot\left(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}\cdot\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\right)+\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T\cdot\cdot\left(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\cdot\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\right) \tag{2.47}$$

Далее воспользуемся следующим тензорным тождеством:

$$\underline{\boldsymbol{c}}\,\underline{\boldsymbol{d}}\cdot\cdot(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}\cdot\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T)=(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\boldsymbol{c}}\,\underline{\boldsymbol{d}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{g}}})\cdot\cdot\underline{\boldsymbol{a}}\,\underline{\boldsymbol{b}} \tag{2.48}$$

тогда баланс энергии примет следующий вид:

$$\rho\,\frac{\delta\mathfrak{U}}{\delta\,t}=\left[\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot(\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}+\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T)^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}\right]\cdot\cdot\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t}+\left[\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right]\cdot\cdot\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t} \tag{2.49}$$

Итоговое уравнение баланса энергии следующее:

$$\rho\,\frac{\delta\mathfrak{U}}{\delta\,t}=\left[\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^T\cdot(\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}+\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T)\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right]^T\cdot\cdot\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t}+\left[\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}\right]^T\cdot\cdot\frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t} \tag{2.50}$$

Внутренняя энергия $\mathfrak{U}$ задается, как функция зависящая только от $\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}$ (только от вращательных степеней свободы):

$$\mathfrak{U}=\mathfrak{U}(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^T\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}) \tag{2.51}$$

Предполагается, что внутренняя энергия $\mathfrak{U}$ не зависит от трансляционных степеней свободы (от слагаемого $\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}$), тогда соотношение Коши - Грина преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial\,\mathcal{U}}{\partial\,(\underline{\underline{\boldsymbol{g}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{T} = 0 \tag{2.52}$$

Получено соотношение связывающее тензор силовых $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ и моментных напряжений $\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}}$:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = -\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{T} \tag{2.53}$$

Была принята гипотеза, что тензор моментных напряжений $\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}}$ является антисимметричным, поэтому:

$$\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}} = -\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{M}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}} = -\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times (\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}}) \tag{2.54}$$

С учетом этого баланс энергии преобразуется следующим образом:

$$\rho\,\frac{\delta\mathcal{U}}{\delta\,t} = [\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times (\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}})] \cdot\cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})}{\delta\,t} = (\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\boldsymbol{M}}) \cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{P}}})_{\times}}{\delta\,t} = \tag{2.55}$$

$$= (\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\boldsymbol{M}}) \cdot \frac{\delta\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times})}{\delta\,t} \tag{2.56}$$

В качестве энергии рассмотрим квадратичную форму следующего вида:

$$\rho\,\mathcal{U} = \frac{1}{2}\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_{2} \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}) \tag{2.57}$$

В случае изотропного материала:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_{2} = C_2\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\boldsymbol{M}} = \frac{\partial\,(\rho\,\mathcal{U})}{\partial\,(\underline{\underline{\boldsymbol{P}}}^{T} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times})} \quad \Rightarrow \quad \underline{\boldsymbol{M}} = C_2\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times} \tag{2.58}$$

С учетом определяющего соотношения для сопутствующего вектора $\underline{\boldsymbol{M}}$ определим выражение для тензора силовых напряжений $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = -\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{T} = \underline{\boldsymbol{M}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^{T} \tag{2.59}$$

Вычислим векторный инвариант от тензора силовых напряжений $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_{\times} = [\underline{\boldsymbol{M}} \times \underline{\boldsymbol{F}}^{k}\,\underline{\boldsymbol{r}}_{k}]_{\times} = \underline{\boldsymbol{r}}_{k} \times (\underline{\boldsymbol{F}}^{k} \times \underline{\boldsymbol{M}}) = \tag{2.60}$$

$$= \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\boldsymbol{M}} - \underline{\boldsymbol{M}}\,(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})) + \underline{\boldsymbol{M}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}\right) \tag{2.61}$$

2.2.3 Преобразование уравнений баланса количества движения и кинетического момента

Запишем баланс количества движения:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} + \rho\, \underline{\boldsymbol{f}} = \rho\, \frac{\delta\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1}{\delta\, t} \tag{2.62}$$

Так как принята гипотеза о неподвижности сплошной среды, то динамическое слагаемое в балансе кинетического момента преобразуется следующим образом:

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1 = \underline{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta\, \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_1}{\delta\, t} = 0 \tag{2.63}$$

В результате получается, что динамическое уравнения преобразуется к уравнению статики. Для упрощения модели сплошной среды принято, что объемные силы $\rho\, \underline{\boldsymbol{f}}$ уравновешивает поверхностные силы $\underline{\boldsymbol{T}}_n$, поэтому справедливо следующее соотношение:

$$\rho\, \underline{\boldsymbol{f}} = -\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = -\nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{M}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T) \tag{2.64}$$

Таким образом закон баланса количества движения выполняется автоматически. Далее преобразуем баланс кинетического момента:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{M}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_\times + \rho \underline{\boldsymbol{L}} = \rho \frac{\delta \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2}{\delta t} \tag{2.65}$$

Далее выпишем как преобразуется каждое из слагаемых с учетом принятых гипотез и соотношений Коши - Грина.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{M}}} = -\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{M}}, \quad \underline{\boldsymbol{M}} = C_2\, \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times \tag{2.66}$$

Векторный инвариант тензора силовых напряжений $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_\times$ записывается следующим образом:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}_\times = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\boldsymbol{M}} - \underline{\boldsymbol{M}}\, (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})) + \underline{\boldsymbol{M}} \cdot \Big(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}}\Big) \tag{2.67}$$

Кинетический момент $\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2$ преобразуется следующим образом:

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2 = J\, \underline{\boldsymbol{\omega}}, \quad \underline{\boldsymbol{K}} = \rho \underline{\boldsymbol{\mathcal{K}}}_2 = \rho\, J\, \underline{\boldsymbol{\omega}}, \quad \frac{\delta \underline{\boldsymbol{K}}}{\delta\, t} = \frac{d \underline{\boldsymbol{K}}}{dt}\ (\underline{\boldsymbol{v}} = 0) \tag{2.68}$$

Для момента $\rho\, \underline{\boldsymbol{L}}$ принято следующее определяющее соотношение:

$$\rho\, \underline{\boldsymbol{L}} = -\beta \underline{\boldsymbol{K}}, \quad \underline{\boldsymbol{K}} = \rho\, J\, \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.69}$$

С учетом предыдущих выражений баланс кинетического момента преобразуется к следующему виду:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{M}} + \underline{\boldsymbol{M}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) - \beta \underline{\boldsymbol{K}} = \frac{d\underline{\boldsymbol{K}}}{dt} \tag{2.70}$$

2.2.4 Соотношение для $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$. Подвод деформаций

Рассматривается соотношение, связывающее градиент угловой скорости $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$ и меру деформаций $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$:

$$\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\delta\, \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{\delta t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + \nabla\underline{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \tag{2.71}$$

Так как среда неподвижная, то уравнение (2.71) преобразуется к следующему виду:

$$\underline{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\, \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{d\, t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} \tag{2.72}$$

Далее потребуется расширенное соотношение для $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$, учитывающее подвод деформаций:

$$\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\, \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}}{d\, t} + \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \tag{2.73}$$

где $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$ - подвод деформаций в среде. Затем вычисляется векторный инвариант от данного уравнения:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\, \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}}{d\, t} + (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}})_{\times} + \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_{\times} \tag{2.74}$$

Слагаемое $(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}})_{\times}$ преобразуется следующим образом:

$$(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \times \underline{\boldsymbol{\omega}})_{\times} = (\underline{\boldsymbol{r}}^k\, \underline{\boldsymbol{F}}_k \times \underline{\boldsymbol{\omega}})_{\times} = \underline{\boldsymbol{r}}^k \times (\underline{\boldsymbol{F}}_k \times \underline{\boldsymbol{\omega}}) = \tag{2.75}$$

$$= \underline{\boldsymbol{F}}_k\, \underline{\boldsymbol{r}}^k \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\boldsymbol{\omega}}\, \underline{\boldsymbol{r}}^k \cdot \underline{\boldsymbol{F}}_k = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T \cdot \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\boldsymbol{\omega}}\, (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})) = \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) \tag{2.76}$$

Уравнение (2.74) преобразуется к следующей форме:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\, \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}}{d\, t} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) + \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_{\times} \tag{2.77}$$

Для подвода деформаций $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$ записывается следующее определяющее соотношение:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} = -\frac{1}{2}\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{*} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}_{\times} = \left(-\frac{1}{2}\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \times \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{*} \right)_{\times} = \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{*} \tag{2.78}$$

где $\underline{\boldsymbol{\gamma}}_{*}$ - сопутствующий вектор $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$. В результате итоговый вид уравнения для $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$ следующий:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\, \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}}{d\, t} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) + \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{*} \tag{2.79}$$

2.3 Аналогия между механическими и электромагнитными величинами

Далее выпишем полученную систему уравнений для среды Коссера специального вида. Баланс энергии и соотношения Коши - Грина преобразованы к следующему виду:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = -\underline{\boldsymbol{M}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T = \underline{\boldsymbol{M}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T, \quad \underline{\boldsymbol{M}} = C_2 \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times} \tag{2.80}$$

Баланс количества движения выполняется автоматически при выполнении предположения для силы $\rho \underline{\boldsymbol{f}}$:

$$\rho \underline{\boldsymbol{f}} = -\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = -\nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{M}} \times \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}^T) \tag{2.81}$$

Баланс кинетического момента преобразован к следующему виду:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{M}} + \underline{\boldsymbol{M}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) - \beta \underline{\boldsymbol{K}} = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}{dt} \tag{2.82}$$

Соотношение, связывающее градиент $\nabla\underline{\boldsymbol{\omega}}$ с мерой деформаций $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$ преобразовано к следующему виду:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}}{dt} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) + \underline{\boldsymbol{\gamma}}_* \tag{2.83}$$

К данной системе уравнений добавляются два уравнения и , полученные на основе уравнения совместности:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times} = I_2(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}), \quad \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) \underline{\underline{\boldsymbol{E}}})^T = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times} \tag{2.84}$$

Для начала рассмотрим частный случай данной системы уравнений, который позволит построить аналогию между механическими величинами и уравнениями Максвелла. Если линеаризовать систему дифференциальных уравнений и предположить, что $\beta = 0$ и $\underline{\boldsymbol{\gamma}}_* = 0$:

$$\underline{\boldsymbol{M}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) = 0, \quad \beta = 0 \tag{2.85}$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) = 0, \quad \underline{\boldsymbol{\gamma}}_* = 0 \tag{2.86}$$

Тогда система уравнений и преобразуется к следующему виду:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{M}} = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{K}}}}{dt} \tag{2.87}$$

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}}{dt} \tag{2.88}$$

Для сравнения далее приведена таблица с дифференциальными уравнениями среды Коссера, а также первые два уравнениями Максвелла. Величины в уравнениях Максвелла: $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ - напряженность электрического поля, $\underline{\boldsymbol{H}}$ - напряженность магнитного поля,

$\underline{\boldsymbol{D}}$ - электрическая индукция, $\underline{\boldsymbol{B}}$ - магнитная индукция.

Таблица 2.1Сравнение уравнений среды Коссера специального вида и классических уравнений Максвелла

Уравнения среды Коссера	**Уравнения Максвелла**
$\nabla \times \underline{\boldsymbol{M}} = \frac{d\underline{\boldsymbol{K}}}{dt}$	$-\nabla \times \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\underline{\boldsymbol{B}}}{dt}$
$\nabla \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times}{dt}$	$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \frac{d\underline{\boldsymbol{D}}}{dt}$

Из Таблицы 2.1 видно, что уравнения средя Коссера специального вида и уравнения Максвелла без источников имеют одинаковую структуру.

Таблица 2.2Аналогия между механическими и электромагнитными величинами

Механическая величина	**Электромагнитная величина**	**Название**
$\underline{\boldsymbol{M}}$	$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$	напряженность электрического поля
$\underline{\boldsymbol{K}}$	$\underline{\boldsymbol{B}}$	магнитная индукция
$\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times$	$\underline{\boldsymbol{D}}$	электрическая индукция
$\underline{\boldsymbol{\omega}}$	$\underline{\boldsymbol{H}}$	напряженность магнитного поля

Тогда можно провести следующие аналогии между механическими и электромагнитными величинами:

$$\underline{\boldsymbol{M}} \sim \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \underline{\boldsymbol{K}} \sim \underline{\boldsymbol{B}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times \sim \underline{\boldsymbol{D}}, \quad \underline{\boldsymbol{\omega}} \sim \underline{\boldsymbol{H}} \tag{2.89}$$

Далее вводится нормировочный коэффициент χ, который позволяет установить равенство между величинами:

$$\underline{\boldsymbol{M}} = \chi\,\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \underline{\boldsymbol{K}} = \chi\,\underline{\boldsymbol{B}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_\times = \frac{1}{\chi}\,\underline{\boldsymbol{D}}, \quad \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\chi}\,\underline{\boldsymbol{H}} \tag{2.90}$$

Возвращаясь к общей системе уравнений среды Коссера специального вида с учетом приведенной аналогии обозначим следующим образом источниковые слагаемые:

$$\underline{\boldsymbol{J}} = \chi\,\underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \big(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}\big), \quad \underline{\boldsymbol{J}}_c = \chi\,\underline{\boldsymbol{\gamma}}_*, \quad \underline{\boldsymbol{V}} = \chi\,\underline{\boldsymbol{M}} \cdot \big(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}}\big), \quad \underline{\boldsymbol{V}}_c = -\chi\,\beta\,\underline{\boldsymbol{K}}$$

Тогда первое и второе уравнение Максвелла преобразуется следующим образом:

$$-\nabla \times \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{V}} + \underline{\boldsymbol{V}}_c + \frac{d\underline{\boldsymbol{B}}}{dt} \tag{2.91}$$

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}} + \underline{\boldsymbol{J}}_c + \frac{d\underline{\boldsymbol{D}}}{dt} \tag{2.92}$$

Далее рассмотрим инварианты уравнения совместности . Запишем первый инвариант уравнения совместности и закон Гаусса для электрического заряда:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times} = I_2(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}), \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{D}} = q \tag{2.93}$$

Получается, что электрический заряд связан с выражением для второго инварианта следующим образом:

$$q = \frac{1}{\chi} I_2(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}) = \frac{1}{2\chi} \left[(\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}))^2 - \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \right] \tag{2.94}$$

Закон Гаусса для магнитного поля в классическом электромагнетизме имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{2.95}$$

Данное уравнение постулирует отсутствие магнитных зарядов в уравнениях Максвелла. В предлагаемом подходе закон Гаусса для магнитного поля формулируется на основе векторного инварианта уравнения совместности и имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}})^T = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}, \quad \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m^T = \underline{\boldsymbol{Q}}_m \tag{2.96}$$

где $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$ - тензор электромагнитной индукции и $\underline{\boldsymbol{Q}}_m$ - вектор магнитного заряда. В предлагаемой модели закон Гаусса для магнитного поля принимается в виде тензорного уравнения для тензора электромагнитной индукции $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$ и вектора магнитного заряда $\underline{\boldsymbol{Q}}_m$, для которых вводится следующее соотношение:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m = \chi \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right), \quad \underline{\boldsymbol{Q}}_m = \frac{1}{\chi} \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}$$

Далее перезапишем ток $\underline{\boldsymbol{J}}$ и напряжение $\underline{\boldsymbol{V}}$, используя тензор $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$:

$$\underline{\boldsymbol{J}} = \frac{1}{\chi} \underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m, \qquad \underline{\boldsymbol{V}} = \frac{1}{\chi} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m \tag{2.97}$$

Тогда модифицированные уравнения Максвелла преобразуются к следующему виду:

$$-\nabla \times \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{V}}_c + \frac{1}{\chi} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m + \frac{d\underline{\boldsymbol{B}}}{dt} \tag{2.98}$$

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c + \frac{1}{\chi} \underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m + \frac{d\underline{\boldsymbol{D}}}{dt} \tag{2.99}$$

2.4 Сводка основных уравнений

Далее приведена система уравнений среды Коссера специального вида. Баланс кинетического момента имеет вид:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{M}} + \underline{\boldsymbol{M}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\, \underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) - \beta \underline{\boldsymbol{K}} = \frac{d\underline{\boldsymbol{K}}}{dt} \tag{2.100}$$

Соотношение, связывающее градиент угловой скорости $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ и меру деформаций $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d\,\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times}}{dt} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \cdot \left(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - (\mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}} \right) + \underline{\boldsymbol{\gamma}}_{*} \tag{2.101}$$

Инварианты уравнения совместности:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times} = I_2(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}), \quad \nabla \cdot (\underline{\underline{\boldsymbol{F}}} - \mathrm{tr}(\underline{\underline{\boldsymbol{F}}})\,\underline{\underline{\boldsymbol{E}}})^T = \underline{\underline{\boldsymbol{F}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{F}}}_{\times} \tag{2.102}$$

Далее приведена система модифицированная система уравнений Максвелла. Первое и второе уравнение:

$$-\nabla \times \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{V}}_c + \frac{1}{\chi}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m + \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}}{dt} \tag{2.103}$$

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c + \frac{1}{\chi}\underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m + \frac{d\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}}{dt} \tag{2.104}$$

Законы Гаусса для электрического заряда и вектора магнитного заряда:

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{D}} = q, \qquad \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m^T = \underline{\boldsymbol{Q}}_m \tag{2.105}$$

ГЛАВА 3

Применение модифицированной системы уравнений Максвелла для решения задачи магнитостатики

3.1 Уравнения магнитостатики

3.1.1 Классическая система уравнений Максвелла

Классическая система уравнений Максвелла [5, 19] состоит из четырех уравнений. Первое уравнение описывает закон Фарадея и имеет вид:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{\partial \underline{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \tag{3.1}$$

Второе уравнение Максвелла характеризует закон Ампера и записывается следующим образом::

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \tag{3.2}$$

Третье и четвертое уравнения являются законами Гаусса для электрического и магнитного поля:

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{D}} = q, \qquad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{B}} = 0 \tag{3.3}$$

В случае системы включающей проводники с током уравнения Максвелла сводятся к уравнениями магнитостатики следующим образом:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{B}} = 0, \quad \underline{\boldsymbol{B}} = \mu \underline{\boldsymbol{H}} \tag{3.4}$$

μ - магнитная проницаемость. Для определения магнитного поля $\underline{\boldsymbol{B}}$ вводится векторный потенциал $\underline{\boldsymbol{A}}$:

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{B}} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \underline{\boldsymbol{A}} \tag{3.5}$$

В результате подстановки (3.5) в уравнение магнитостатики (3.4) получается следующее дифференциальное уравнение для векторного потенциала $\underline{\boldsymbol{A}}$:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\boldsymbol{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{A}}) - \Delta \underline{\boldsymbol{A}} = \mu \underline{\boldsymbol{J}}_c \;\Rightarrow\; -\Delta \underline{\boldsymbol{A}} = \mu \underline{\boldsymbol{J}}_c \tag{3.6}$$

Получено векторное уравнение Пуассона, решение которого определяется через функцию Грина следующим образом:

$$\underline{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu}{2\pi} \int\limits_V \frac{1}{r} \underline{\boldsymbol{J}}_c \, dV \tag{3.7}$$

Совершенно по-другому обстоит дело с определением полей магнитных материалов. Для определения магнитного поля в веществе вводятся понятие магнитного момента $\underline{\boldsymbol{m}}$ и намагниченности $\underline{\mathfrak{M}}$. На Рис. 3.1 показано сечение магнитного материала.

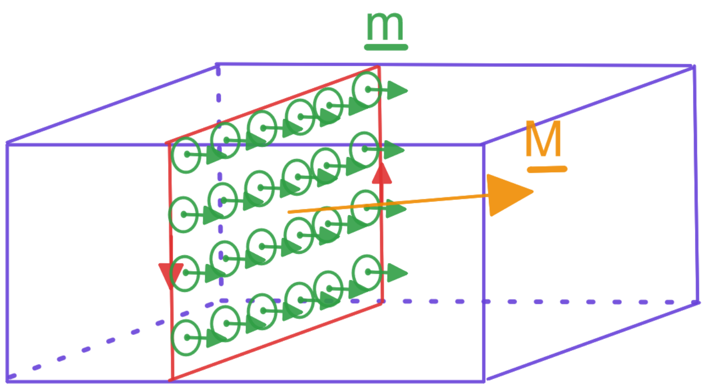

Рисунок 3.1 — Определение магнетизации

Для введения постоянных магнитов в уравнения Максвелла вводятся специальные эквивалентные токи через намагниченность $\underline{\mathfrak{M}}$:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_m = \nabla \times \underline{\mathfrak{M}} \text{ - объемный ток} \tag{3.8}$$

$$\underline{\boldsymbol{J}}_{sm} = \underline{\mathfrak{M}} \times \underline{\boldsymbol{n}} \text{ - поверхностный ток} \tag{3.9}$$

Также постулируется, что магнитное поле $\underline{\boldsymbol{B}}$ снаружи магнита определяется через намагниченность следующим образом:

$$\underline{\boldsymbol{B}} = \mu_0(\underline{\boldsymbol{H}} + \underline{\mathfrak{M}}) \tag{3.10}$$

Тогда в результате подстановки в уравнение магнитостатики получается следующее:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0}\underline{\boldsymbol{B}} - \underline{\mathfrak{M}}\right) = \underline{\boldsymbol{J}}_c \tag{3.11}$$

Преобразуем выражение следующим образом:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_0}\underline{\boldsymbol{B}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c + \nabla \times \underline{\mathfrak{M}} \tag{3.12}$$

В результате получается постановка магнитостатики с эквивалентным током $\underline{\boldsymbol{J}}_m$ в правой части:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c + \underline{\boldsymbol{J}}_m \tag{3.13}$$

Для намагниченности $\underline{\mathfrak{M}}$ вводится определяющее соотношение:

$$\underline{\mathfrak{M}} = \chi_m \underline{\boldsymbol{H}}, \quad \mu_r = 1 + \chi_m \;\Rightarrow\; \underline{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \mu_r \underline{\boldsymbol{H}} \tag{3.14}$$

где χ_m - магнитная восприимчивость. Также существуют другие способы задавать определяющее соотношение для вектора намагниченности $\underline{\boldsymbol{\mathfrak{M}}}$.

3.1.2 Модифицированная система уравнений Максвелла

Записывается модифицированная система уравнений Максвелла:

$$-\nabla \times \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\boldsymbol{V}}_c + \frac{1}{\chi}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m + \frac{d\underline{\boldsymbol{B}}}{dt} \tag{3.15}$$

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c + \frac{1}{\chi}\underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m + \frac{d\underline{\boldsymbol{D}}}{dt} \tag{3.16}$$

$$\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{D}} = q, \qquad \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}{}_m^T = \underline{\boldsymbol{Q}}_m \tag{3.17}$$

Для случая магнитостатики принимаются следующие предположения:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \quad \underline{\boldsymbol{D}} = 0, \quad \frac{d\underline{\boldsymbol{B}}}{dt} = 0, \quad \frac{d\underline{\boldsymbol{D}}}{dt} = 0, \quad \underline{\boldsymbol{V}}_c = 0 \tag{3.18}$$

В результате получена следующая система уравнений магнитостатики:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c + \frac{1}{\chi}\underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m \tag{3.19}$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}{}_m^T = \underline{\boldsymbol{Q}}_m \tag{3.20}$$

Вектор $\underline{\boldsymbol{J}}_c$ имеет смысл тока проводимости, ток $\underline{\boldsymbol{J}} = \frac{1}{\chi}\underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$ - эквивалентный ток для постоянного магнита. Для определения тензора $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$ требуется задать вектор магнитного заряда $\underline{\boldsymbol{Q}}_m$ и определить его из уравнения (3.20).

3.2 Определение магнитного поля катушки с сердечником

3.2.1 Постановка задачи

Требуется определить магнитное поле катушки с сердечником на основе решения модифицированной системы уравнений Максвелла (Рис. 3.2).

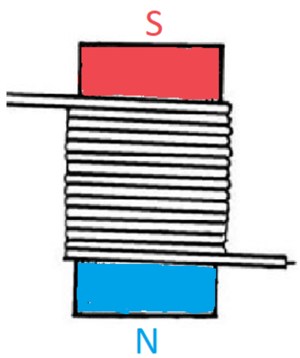

Рисунок 3.2 — Катушка с сердечником

При решении данной задачи принимается следующий набор предположений:

- Решается задача магнитостатики.

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}_c + \frac{1}{\chi}\underline{\boldsymbol{H}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m,\ \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m^T = \underline{\boldsymbol{Q}}_m$$

- Используется специальное определяющее соотношение для эквивалентного тока.

- Катушка и сердечник имеют бесконечную длину.

В следующем разделе будет показан общий алгоритм решения задачи магнитостатики для катушки с сердечником.

3.2.2 Общая схема аналитического решения

На Рис. 3.3 показана общая схема расчета магнитного поля катушки с сердечником. В начале (Рис. 3.3 - 1) расчитывается магнитное поле катушки с током $\underline{\boldsymbol{J}}_c$. Далее (Рис. 3.3 - 2) на основе закона Гаусса определяется тензор электромагнитной индукции $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$. При этом вектор магнитного заряда $\underline{\boldsymbol{Q}}_m$ задается в качестве источникового члена в уравнении.

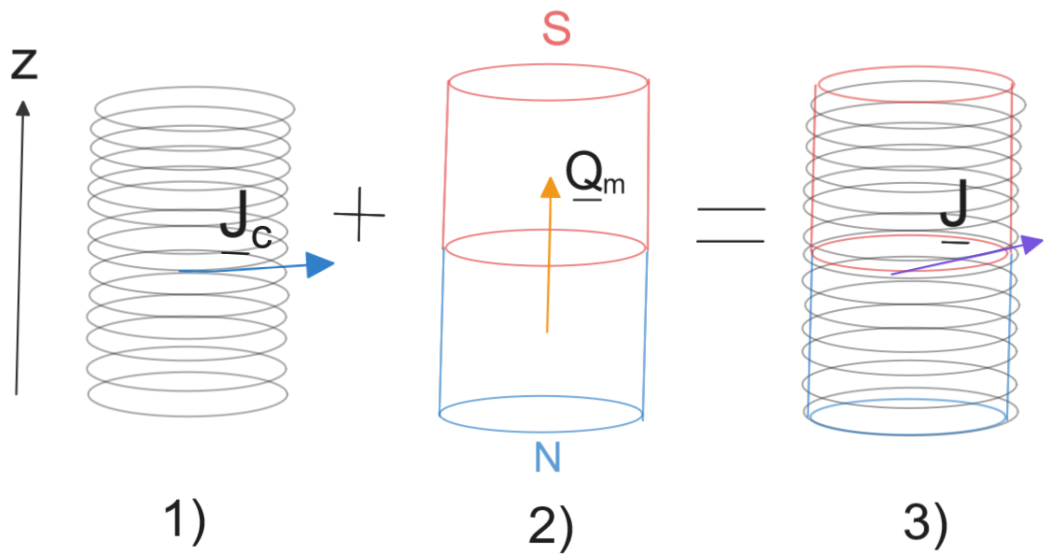

Рисунок 3.3 — Общий алгоритм определения магнитного поля катушки с током

Затем определяется эквивалентный ток $\underline{\boldsymbol{J}}$ на основе определяющего соотношения. Затем (Рис. 3.3 – 3) формулируется задача магнитостатика с током J.

Общая схема алгоритма расчета магнитного поля катушки с сердечником записывается следующим образом:

1. Определение тензора электромагнитной индукции $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m^T = \underline{\boldsymbol{Q}}_m \tag{3.21}$$

2. Определение магнитного поля катушки:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}}_0 = \underline{\boldsymbol{J}}_c, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{H}}_0 = 0 \tag{3.22}$$

3. Расчет эквивалентного тока $\underline{\boldsymbol{J}}$ на основе определяющего соотношения:

$$\underline{\boldsymbol{J}} = \frac{1}{\chi} \underline{\boldsymbol{H}}_0 \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m \tag{3.23}$$

4. Определение поля катушки с сердечником $\underline{\boldsymbol{H}}$:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}}, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{H}} = 0 \tag{3.24}$$

Далее каждый из этапов будет рассмотрен подробно.

3.3 Определение тензора электромагнитной индукции $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$

3.3.1 Закон Гаусса для магнитного поля в цилиндрической системе координат

Закон Гаусса для магнитного заряда записывается в следующем виде [15]:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m^T = \underline{\boldsymbol{Q}}_m \tag{3.25}$$

где $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$ - тензор электромагнитной индукции, $\underline{\boldsymbol{Q}}_m$ - вектор магнитного заряда.

Решение представляется в форме тензорной декомпозиции Гельмгольца [10]:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m^T = \nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}} + \nabla \underline{\boldsymbol{\Phi}} \tag{3.26}$$

где $\underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}}$ - тензорный потенциал, $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$ - векторный потенциал.

Решение в форме (3.26) подставляет в уравнение (3.25):

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m^T = \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \underline{\underline{\boldsymbol{\Pi}}})}_{=0} + \nabla \cdot \nabla \underline{\boldsymbol{\Phi}} = \Delta\, \underline{\boldsymbol{\Phi}} = \underline{\boldsymbol{Q}}_m \tag{3.27}$$

В результате получается векторное уравнение Пуассона. Векторный потенциал $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$ представляется в цилиндрической системе координат:

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}} = \Phi_r(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} + \Phi_\varphi(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,\varphi} + \Phi_z(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \tag{3.28}$$

Вектор $\underline{\boldsymbol{Q}}_{\,m}$ также записывается в цилиндрической системе координат:

$$\underline{\boldsymbol{Q}}_{\,m} = Q_1(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} + Q_2(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,\varphi} + Q_3(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \tag{3.29}$$

В результате подстановки $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$ и $\underline{\boldsymbol{Q}}_{\,m}$ в (3.27) исходное уравнение преобразуется к системе скалярных дифференциальных уравнений Пуассона:

$$\Delta\Phi_r - r^{-2}\Phi_r = Q_1, \quad \Delta\Phi_\varphi - r^{-2}\Phi_\varphi = Q_2, \quad \Delta\Phi_z = Q_3 \tag{3.30}$$

Из решения данной системы уравнений получается выражение для векторного потенциала $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$. Затем тензор электромагнитной индукции $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_{\,m}$ расчитывается через векторный потенциал $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$ следующим образом:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_{\,m} = (\nabla\underline{\boldsymbol{\Phi}})^T \tag{3.31}$$

Далее данная система будет решена для частного вида тензора $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_{\,m}$.

3.3.2 Компоненты тензора $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_{\,m}$

Аналитическое выражение для тензора электромагнитной индукции получено для векторного потенциала $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$ и вектора магнитного заряда $\underline{\boldsymbol{Q}}_{\,m}$ следующего вида:

$$\underline{\boldsymbol{\Phi}} = \Phi_r(r,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} + \Phi_z(r,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,z}, \quad \underline{\boldsymbol{Q}}_{\,m} = \alpha\, z\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,r} + \beta\, z\,\underline{\boldsymbol{e}}_{\,z} \tag{3.32}$$

Тогда система уравнений (3.30) преобразуется к виду:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Phi_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r^2}\Phi_r = \alpha\, z \tag{3.33}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\Phi_z}{\partial z^2} = \beta\, z \tag{3.34}$$

Решения уравнений (3.33) и (3.34) ищутся в следующем виде:

$$\Phi_r(r,z) = z\,\Phi_1(r), \quad \Phi_z(r,z) = z\,\Phi_2(r)$$

В результате подстановки в (3.33) и (3.34) получаются дифференциальные уравнения для Φ_1 и Φ_2:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_1(r)}{\partial r}\right) - \frac{\Phi_1(r)}{r^2} = \alpha\ ; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_2(r)}{\partial r}\right) = \beta$$

Из решения обыкновенных дифференциальных уравнений компоненты векторного потенциала Φ_r и Φ_z имеют следующий вид:

$$\Phi_r(r,z) = z\left[\frac{\alpha A_1}{r} + A_2\, r\right], \quad \Phi_z(r,z) = z\left[\beta C_1 \log(r) + C_2\right] \tag{3.35}$$

На основе полученного выражения для векторного потенциала $\underline{\boldsymbol{\Phi}}$, получено выражение для тензора $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m = (\nabla\underline{\boldsymbol{\Phi}})^T = \frac{\partial\Phi_r}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial\Phi_z}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_z\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{\partial\Phi_r}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_r\,\underline{\boldsymbol{e}}_z + \frac{\partial\Phi_z}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_z\,\underline{\boldsymbol{e}}_z + \frac{\Phi_r}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{3.36}$$

При этом компоненты тензора $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$ имеют следующий вид:

$$D_{rr} = \frac{\partial\Phi_r}{\partial r} = z\left[-\frac{\alpha A_1}{r^2} + A_2\right], \quad D_{zr} = \frac{\partial\Phi_z}{\partial r} = z\,\frac{\beta\, C_1}{r}, \quad D_{rz} = \frac{\partial\Phi_r}{\partial z} = \frac{\alpha A_1}{r} + A_2\, r$$

$$D_{zz} = \frac{\partial\Phi_z}{\partial z} = \beta C_1 \log(r) + C_2, \quad D_{\varphi\varphi} = \frac{\Phi_r}{r} = z\left[\frac{\alpha A_1}{r^2} + A_2\right]$$

Отметим, что полученные компоненты тензора $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$ являются ограниченными функциями, имеющими особенность в нуле. При этом все компоненты тензора стремятся к конечному значению при $r \to +\infty$.

3.4 Определение магнитного поля катушки

3.4.1 Представление уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат

Рассматривается модифицированное уравнение Максвелла для магнитостатики:

$$\nabla \times \underline{\boldsymbol{H}}_0 = \underline{\boldsymbol{J}}_c \tag{3.37}$$

Вектор магнитной индукции $\underline{\boldsymbol{H}}$ представляется в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\underline{\boldsymbol{H}}_0 = H_r(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + H_\varphi(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi + H_z(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{3.38}$$

Вектор эквивалентного тока в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_c = J_r(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + J_\varphi(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi + J_z(r,\varphi,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{3.39}$$

Набла-оператор Гамильтона в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\nabla = \underline{\boldsymbol{e}}_r\,\frac{\partial}{\partial r} + \underline{\boldsymbol{e}}_\varphi\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \underline{\boldsymbol{e}}_z\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.40}$$

В результате преобразований дифференциальное уравнение (3.37) преобразуется к следующему виду:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_r+\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi+\left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}+\frac{H_\varphi}{r}\right)\underline{\boldsymbol{e}}_z=J_r\,\underline{\boldsymbol{e}}_r+J_\varphi\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi+J_z\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{3.41}$$

Далее преобразуем выражением для дивергенции магнитного поля $\underline{\boldsymbol{H}}_0$:

$$\nabla\cdot\underline{\boldsymbol{H}}_0=\frac{\partial H_r}{\partial r}+\frac{H_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0 \tag{3.42}$$

Итоговая система скалярных уравнений для уравнения магнитостатики имеет следующий вид:

$$\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=J_r\\ \frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}=J_\varphi\\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}+\frac{H_\varphi}{r}=J_z\\ \frac{\partial H_r}{\partial r}+\frac{H_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0\end{cases} \tag{3.43}$$

Далее будет получено аналитическое решение данной системы для катушки - соленоида для частного вида представления $\underline{\boldsymbol{H}}_0$.

3.4.2 Аналитическое решение для катушки

Предполагается, что компоненты вектора магнитной индукции $\underline{\boldsymbol{H}}$ зависят только от координаты r:

$$\underline{\boldsymbol{H}}_0=H_r(r)\,\underline{\boldsymbol{e}}_r+H_\varphi(r)\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi+H_z(r)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{3.44}$$

Предполагается, что катушка достаточно плотную намотку и бесконечную длину вдоль оси z. Вектор эквивалентного тока $\underline{\boldsymbol{J}}_c$, протекающей по катушке определяется следующим образом:

$$\underline{\boldsymbol{J}}_c=I_\varphi\,\delta(r-a)\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi+I_z\,\delta(r-a)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{3.45}$$

С учетом предположений система уравнений Максвелла примет следующий вид:

$$\begin{cases}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=0\\ -\frac{\partial H_z}{\partial r}=I_\varphi\,\delta(r-a)\\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial r}+\frac{H_\varphi}{r}=I_z\,\delta(r-a)\\ \frac{\partial H_r}{\partial r}+\frac{H_r}{r}=0\end{cases} \tag{3.46}$$

В результате последовательного решения каждого из уравнений получаются выражения для каждой из компонент вектора $\underline{\boldsymbol{H}}$. В итоге получаем следующее выражение для магнитного поля катушки -соленоида:

$$\underline{\boldsymbol{H}}_0=\frac{D_1}{r}\,\underline{\boldsymbol{e}}_r+\big(D_2+aI_z\theta(r-a)\big)\frac{1}{r}\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi-I_\varphi\,\theta(r-a)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{3.47}$$

3.5 Определение магнитного поля катушки с сердечником

Воспользуемся определяющим соотношением для эквивалентного тока проводимости имеет следующий вид [16]:

$$\underline{\boldsymbol{J}} = \frac{1}{\chi}\underline{\boldsymbol{H}}_0 \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m, \tag{3.48}$$

В результате подстановки получается следующее выражение для тока:

$$\underline{\boldsymbol{J}} = J_r\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + J_\varphi\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi + J_z\,\underline{\boldsymbol{e}}_z = \frac{1}{\chi}\left[H_z\frac{\partial\Phi_z}{\partial r}\underline{\boldsymbol{e}}_r + \frac{H_\varphi\,\Phi_r}{r}\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi + H_z\,\frac{\partial\Phi_z}{\partial z}\underline{\boldsymbol{e}}_z\right] \tag{3.49}$$

При этом компоненты вектора $\underline{\boldsymbol{J}}$ имеют следующий вид:

$$J_r = -\frac{z}{\chi}\,\frac{\beta\,C_1}{r}I_\varphi\,\theta(r-a)$$

$$J_\varphi = \frac{1}{\chi}\big(D_2 + aI_z\theta(r-a)\big)\left[\frac{\alpha A_1}{r^3} + \frac{A_2}{r}\right]z$$

$$J_z = -\frac{1}{\chi}\left(\beta C_1\log(r) + C_2\right)I_\varphi\,\theta(r-a)$$

Запишем уравнение магнитостатики для катушки с сердечником:

$$\nabla\times\underline{\boldsymbol{H}} = \underline{\boldsymbol{J}} \tag{3.50}$$

Магнитная индукция $\underline{\boldsymbol{H}}$ представляется в следующем виде:

$$\underline{\boldsymbol{H}} = H_r(r)\,\underline{\boldsymbol{e}}_r + H_\varphi(r,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_\varphi + H_z(r,z)\,\underline{\boldsymbol{e}}_z \tag{3.51}$$

Система уравнений для задачи магнитостатики будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r(r,z) \\ -\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi(r,z) \\ \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} = J_z(r) \\ \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$

В системе (3.52) рассмотрим первое и третье уравнение, из которых можно найти решение для компоненты $H_\varphi(r,z)$:

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r(r,z), \quad \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} = J_z(r) \tag{3.53}$$

В результате решение (3.53) $H_\varphi(r,z)$ будет выглядеть следующим образом:

$$H_\varphi(r,z) = \frac{\beta C_1 \theta(r-a) z^2}{2r} + B(r) \tag{3.54}$$

$$B(r) = -\frac{\beta I_\varphi C_1 \theta(r-a)}{2\chi}\left[\frac{a^2 C_1}{2r} - \frac{a^2 \log(a)}{r} - \frac{r}{2} + r\log(r)\right] + \frac{C_2 I_\varphi \theta(r-a)}{2\chi}\left[\frac{a^2}{r} - r\right] + \frac{\gamma}{r}$$

Далее рассматривается второе и четвертое уравнения системы (3.52).

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi(r,z), \quad \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{3.55}$$

Продифференцируем первое уравнение (3.55) по z и второе в (3.55) по r:

$$-\frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} J_\varphi(r,z) = \hat{J}(r), \quad \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} - \frac{H_r}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial H_r}{\partial r} = -\frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial z} = \hat{J}(r) \tag{3.56}$$

Из второго уравнения получается решение для $H_r(r)$ в следующем виде:

$$H_r(r) = \frac{\xi}{r} + \Gamma\, r + \frac{\alpha A_1 I_z\, \theta(r-a)}{2\chi}\left[\frac{1}{2r} + \frac{r}{2a} + \frac{\log(a)}{r} - \frac{\log(r)}{r}\right] - \frac{\alpha A_1 D_2 \log(r)}{2\chi r} + \tag{3.57}$$

$$+\frac{A_2 D_2 r \log(r)}{2\chi} + \frac{\alpha A_2 I_z \theta(r-a)}{2\chi}\left[\frac{\alpha^2}{2r} - \frac{r}{2} - r\log(a) + r\log(r)\right]$$

Решение первого уравнения получено выражение для $H_z(r,z)$:

$$H_z(r,z) = -\int J_r(r,z) dz = \frac{z^2}{\chi}\,\frac{\beta\, C_1}{2r} I_\varphi\, \theta(r-a) \tag{3.58}$$

В результате для всех компонент вектора магнитной индукции $\underline{\boldsymbol{H}}$. Если сравнить решение для катушки (3.47) и решение для катушки с сердечником , то качественно наблюдается усиление магнитного поля по всем трем направлениям, что свидетельствуем реальным экспериментальным фактам. При этом формы обоих решений не являются физически противоречивыми, так как полученные поля убывают при удалении от источника.

Заключение

В работе предложена модель электромагнитного поля на основе континума Коссера специального вида. Для рассматриваемой модели сплошной среды выбран следующий набор предположений: рассматривается неподвижная сплошная среда, отсутствуют силовые напряжения и объемные силы, тензор моментных напряжений является антисимметричным. В результате применения данного набора гипотез система балансовых и кинематических соотношений сводится к двум уравнениям: редуцированной форме баланса кинетического момента и соотношению между ротором угловой скорости $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ и мерой деформаций $\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}$. Баланс количества движения выполняется автоматически, а баланс энергии сводится к определяющему соотношению для сопутствующего вектора $\underline{\boldsymbol{M}}$ тензора моментных напряжений $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}$. Дополнительно используется уравнения совместности деформаций для вращательных степеней свободы, а также соотношение для объемного подвода деформаций.

Модель среды Коссера специального вида по структуре дифференциальных уравнений эквивалента расширенной системе уравнений Максвелла. При использовании данного подхода получено, что закон индукции Фарадея эквивалентен редуцированной форме баланса кинетического момента с дополнительным источниковым слагаемым. Закон Ампера – кинематическому соотношению для ротора вектора угловой скорости $\underline{\boldsymbol{\omega}}$, при этом подвод деформации имеет смысл тока проводимости, а второе слагаемое ассоциируется с эквивалентным током для постоянного магнита. Уравнение совместности деформаций сводится к двум дифференциальным уравнениям, которые ассоциируются с законом Гаусса для электрического и магнитного поля. При этом закон Гаусса для магнитного поля определен в форме тензорного уравнения для вектора магнитного заряда $\underline{\boldsymbol{Q}}_m$ и тензора электромагнитной индукции $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$, что позволяет в явной форме учесть наличие постоянных магнитов в среде.

Затем на основе модифицированной системы уравнений Максвелла решается задача магнитостатики для катушки с сердечником. Построено аналитическое решение для тензора электромагнитной индукции $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}_m$ на основе тензорной декомпозиции Гельмгольца, а также получено аналитическое решение модифицированной системы уравнений Максвелла для магнитной индукции. Качественно описан эффект усиления поля при добавлении в катушку сердечника.

Список использованных источников

1. Eringen A. C. Microcontinuum Field Theory, volume I. Foundations and Solids. Springer, New York, 1999.
2. Eringen A. C. Microcontinuum Field Theory, volume II. Fluent Media. Springer, New York, 2001.
3. Nowacki W. Theory of Micropolar Elasticity, volume 25 of CISM Courses and Lectures. Springer, Wien, 1970.
4. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon-Press, Oxford et al., 1986.
5. Whittaker E. A History of the Theories of Aether and Electricity: Vol. I: The Classical Theories; Vol. II: The Modern Theories, 1900-1926. – Courier Dover Publications, 1989. – T. 1.
6. Alavi S. E. et al. Hierarchy of generalized continua issued from micromorphic medium constructed by homogenization //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2023. – T. 35. – №. 6. – C. 2163-2192.
7. Altenbach H. , Eremeyev V. A., Lebedev L. P. and Rendon L. A. Acceleration waves and ellipticity in thermoelastic micropolar media. Archive of Applied Mechanics, 80(3):217–227, 2010a.
8. Altenbach J., Altenbach H. and Eremeyev V. A. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells. A short review and bibliography. Archive of Applied Mechanics, 80(1):73–92, 2010b.
9. Cosserat E., Cosserat F.: Théorie des corps déformables. Hermann et Fils, Paris (1909)
10. Dassios G., Lindell I. V. On the Helmholtz decomposition for polyadics //Quarterly of Applied Mathematics. – 2001. – T. 59. – №. 4. – C. 787-796.
11. Forest S.: Mechanics of generalized continua: construction by homogenizaton. Le Journal de Physique IV 08, Pr4-39-Pr4-48. https://doi.org/10.1051/jp4:1998405 (1998)
12. Ivanova E. A., Vilchevskaya E. N. Micropolar continuum in spatial description //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2016. – T. 28. – C. 1759-1780.
13. Ivanova E. A., Vilchevskaya E. N., Müller W. H. Time derivatives in material and spatial description—What are the differences and why do they concern us? //Advanced methods of continuum mechanics for materials and structures. – 2016. – C. 3-28.

14. Ivanova E., Vilchevskaya E. Description of thermal and micro-structural processes in generalized continua: Zhilin's method and its modifications //Generalized Continua as Models for Materials: with Multi-scale Effects or Under Multi-field Actions. – Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2013. – C. 179-197.

15. Ivanova E. A. Thermo-electrodynamics of conductive media based on the nonlinear viscoelastic Cosserat continuum of a special type //Acta Mechanica. – 2023. – T. 234. – №. 12. – C. 6205-6249.

16. Ivanova E. A. Modeling of physical fields by means of the Cosserat continuum //ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2023. – T. 103. – №. 4. – C. e202100333.

17. Ivanova E. A. On a new theory of the Cosserat continuum with applications in electrodynamics //Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. – 2022. – C. 75-87.

18. Kafadar C. B. and Eringen A. C. Micropolar media – I. The classical theory. International Journal of Engineering Science, 9(3):271–305, 1971.

19. Skomski R. Permanent magnets: History, current research, and outlook //Novel Functional Magnetic Materials: Fundamentals and Applications. – 2016. – C. 359-395.

20. Truesdell C. and Noll W. The nonlinear field theories of mechanics. In S. Flugge, editor, Handbuch der Physik, volume III/3, pages 1–602. Springer, Berlin, 1965.

21. Truesdell C. and Toupin R. The classical field theories. In S. Flugge, editor, Handbuch der Physik, volume III/1, pages 226–793. Springer, Berlin, 1960.

22. Zhilin P.A.: Reality and mechanics. In: Proceedings of XXIII Summer School "Nonlinear Oscillations in Mechanical Systems", St. Petersburg, Russia, pp. 6–49 (1996) (in Russian)

23. Zhilin P.A.: Classical and modified electrodynamics. In: Proceedings of International Conference "New Ideas in Natural Sciences", St. Petersburg. Russia. Part I—Physics, pp. 73–82 (1996)

24. Zhilin P.A.: In: Ivanova, E.A., Altenbach, H., Vilchevskaya, E.N., Gavrilov, S.N., Grekova, E.F., Krivtsov, A.M. (eds.) Rational Continuum Mechanics. Polytechnic University Publishing House, St. Petersburg (2012) (in Russian)

25. Zhilin P.A.: Modeling of the electromagnetic field based on rational mechanics approach. Z. Angew. Math. Mech. 103(4), e202302004 (2023)