

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
« ____ » _____ 2024г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Оценка критического давления роста трещины

автоГРП при росте в высоту

По направлению подготовки

02.03.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

02.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред
с микроструктурой

Выполнил
студент гр. 5030103/00101

Д.А. Цветкова

Руководитель
доцент ВШТМиМФ, к. т. н.

С.А. Калинин

Санкт-Петербург
2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__»_____2024г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Цветковой Дарье Александровне, гр. 5030103/00101

1. Тема работы: Оценка критического давления роста трещины автоГРП при росте в высоту
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы, основные определяющие уравнения теории пороупругости (уравнение фильтрации, уравнение теории смазки)
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): модель трещины РКН; метод конечных элементов для решения начально-краевых задач; двумерная модель пласта; определение давления в трещине из теории смазки с заданным расходом жидкости; исследование влияния порового давления на развитие трещины автоГРП.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания 28.02.2024

Руководитель ВКР _____ Калинин С.А, доцент ВШТМиМФ, к.т.н

Задание принял к исполнению 28.02.2024

Студент _____ Цветкова Д.А

РЕФЕРАТ

На 37 страниц, 23 рисунка, 2 таблицы.

КРИТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ, ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ РОСТА ТРЕЩИНЫ АВТОГРП ПРИ РОСТЕ В ВЫСОТУ, ВОЗМОЖНОСТЬ ДОСТИЖЕНИЯ КРИТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В ТРЕЩИНЕ С ЕЁ ДАЛЬНЕЙШИМ РОСТОМ В ДЛИНУ, ТРЕЩИНА РКН, ЗАМЕНА НА ПРОНИЦАЕМОСТЬ ТРЕЩИНЫ, ФОРМУЛА СНЕДДОНА, FREEFEM++, PARAVIEW

В данной работе рассматриваются методы моделирования роста трещины: с использованием формулы Снеддона и упрощенный вариант с заменой на проницаемость трещины. Выведены слабые постановки методов и произведен расчёт в FreeFEM++, графики получены с помощью ParaView. Сделан анализ расчетов с изменением входных параметров. Сделаны сравнения двух методов.

THE ABSTRACT

37 pages, 23 pictures, 2 tables.

CRITICAL PRESSURE, ASSESSMENT OF THE EFFECT OF THE CRITICAL PRESSURE OF THE GROWTH OF THE AUTOGRP FRACTURE WITH HEIGHT GROWTH, THE POSSIBILITY OF ACHIEVING CRITICAL PRESSURE IN THE FRACTURE WITH ITS FURTHER GROWTH IN LENGTH, PKN FRACTURE, REPLACEMENT FOR FRACTURE PERMEABILITY, SNEDDON FORMULA, FREEFEM++, PARAVIEW

In this paper, we consider methods for modeling fracture growth: using the Sneddon formula and a simplified version with replacement by fracture permeability. Weak statements of methods are derived and calculations are performed in FreeFem++, graphs are obtained using ParaView. The analysis of calculations with changes in input parameters is made. Comparisons of the two methods are made.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	10
ГЛАВА 2. МОДЕЛЬ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТ С УПРОЩАЮЩИМИ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯМИ	12
2.1. Уравнение фильтрации и смазки	12
2.2 Слабая постановка задачи	14
ГЛАВА 3. МОДЕЛЬ ОДНОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛЫ СНЕДДОНА	17
3.1 Уравнение фильтрации и смазки	17
3.2 Слабая постановка задачи	19
ГЛАВА 4. КРИТЕРИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ	23
ГЛАВА 5. РЕЗУЛЬТАТЫ	24
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	35
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	36

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одним из методов добычи нефти и газа является «Гидравлический разрыв пласта» (ГРП). Технология работы ГРП [14], [15] при добыче заключается в нагнетании под давлением флюида, который заполняет трещины и образует новые.

Этапы проведения:

1) формирование трещины (закачка жидкости разрыва).

Данный этап начинается с интенсивной закачки в ствол скважины маловязких жидкостей разрыва для увеличения давления в перфорационных каналах выше давления ГРП. Дальнейший рост трещины продолжается при давлении распространения трещины.

2) заполнение трещины расклинивающим агентом.

После разрыва под воздействием давления трещина увеличивается. В образованные трещины закачивают песконоситель.

3) Закачка продавочной жидкости.

На данном этапе происходит закачивание продавочной жидкости для проталкивания пропанта в трещину и предохранения их от смыкания.

После проведения этих этапов дебит скважины резко возрастает.

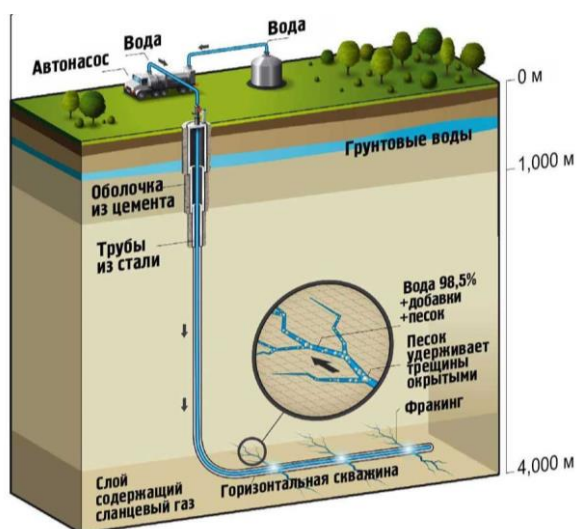


Рис. 1 Гидро разрыв пласта.

Актуальность моделирования процесса ГРП заключается в достаточно высокой степени неопределенности получаемых результатов в ходе вычислений, связанных с низкой точностью используемых инструментов измерения [4].

Для реализации задачи моделирования гидроразрыва пласта прежде всего необходимо определить модель происходящих процессов.

Основные модели:

- 1) Модель течения многофазной жидкости в трещине;
- 2) Модель деформирования породы (упругая, пороупругая);
- 3) Модель роста трещины в породе;

Каждая модель будет содержать в себе набор определенных законов и определяющих соотношений (законы баланса, сохранения, фильтрации, упругости и т.д.).

Основополагающими моделями ГРП являются: модель РКН (Перкинса-Керна-Нордгрена), модель KGD (Христиановича-Гирстма-де Клерка), а также радиальная модель [13].

Модель PKN:

В данной модели считается, что трещина имеет постоянную высоту H , много меньшую длины L всей трещины гидроразрыва. При таком рассмотрении изменение параметров трещины вдоль длины незначительно, а деформацию породы можно рассматривать, как плоское деформированное состояние в каждом вертикальном сечении. С учетом этих предположений и постоянства избыточного давления внутри трещины, получается эллиптический профиль раскрытия.

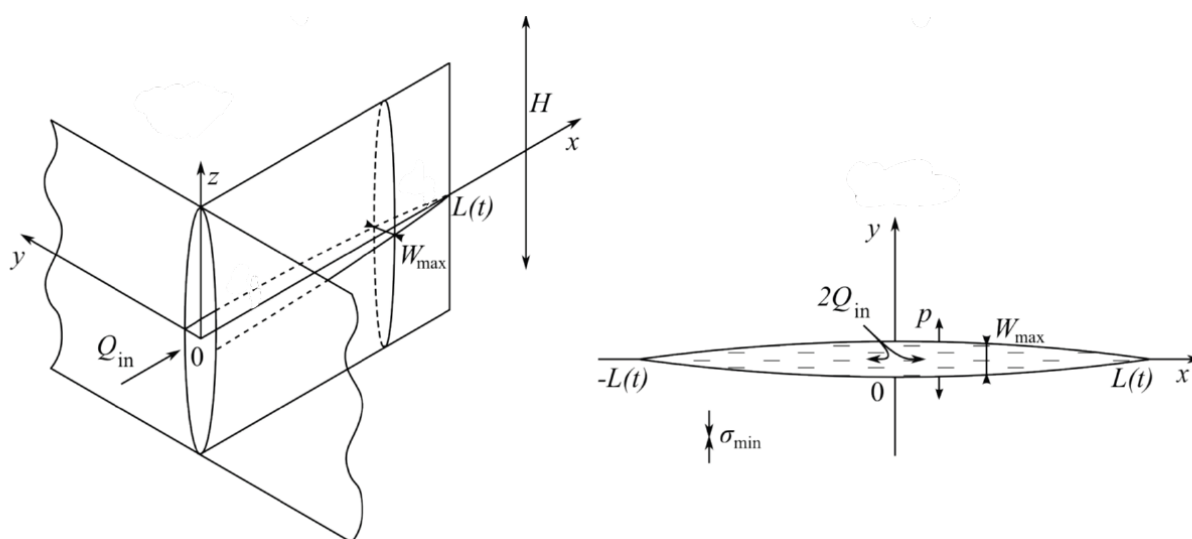


Рис. 2 Геометрическая концепция модели PKN (вид сбоку и сверху).

Модель KGD:

Основные предположения данной модели: высота трещины H значительно больше ее длины L , а влиянием нижней и верхней границ можно пренебречь. С помощью таких предположений можно считать горизонтальные сечения трещины одинаковыми, поэтому при описании деформации породы можно перейти к двумерной постановке задачи упругости.

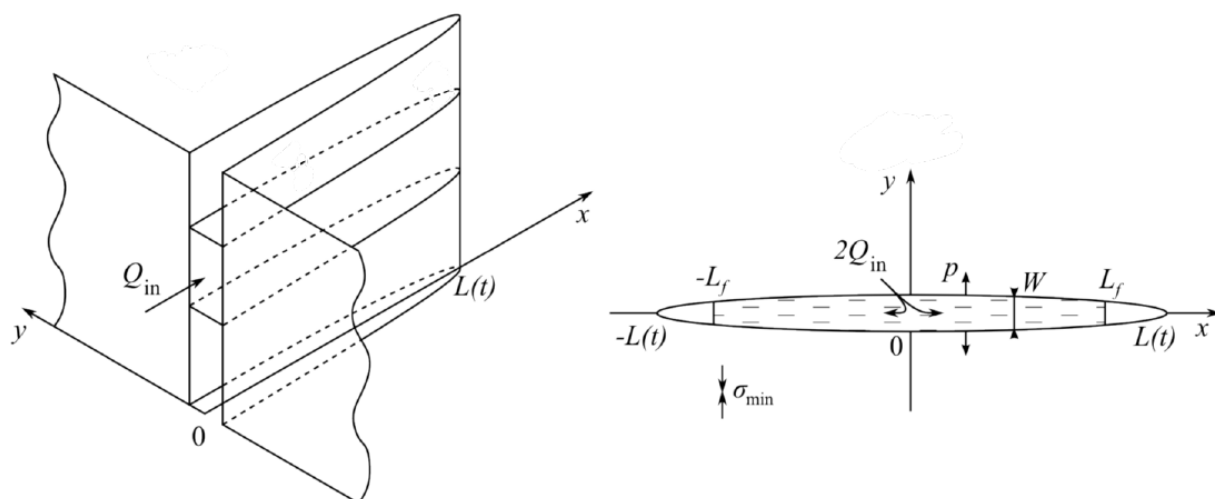


Рис. 3 Геометрическая концепция модели KGD (вид сбоку и сверху).

Радиальная модель:

Данная модель описывает радиально симметричное распространение трещины из точечного источника. Течение задается одномерным уравнением, в качестве пространственной координаты в котором выступает расстояние от скважины до точек трещины.

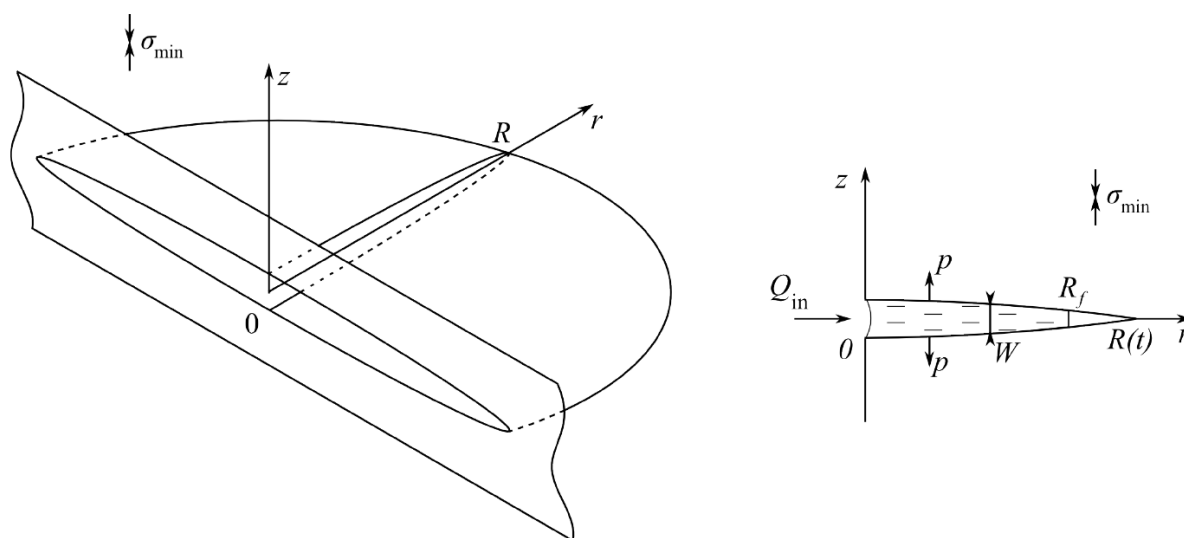


Рис. 4 Геометрическая концепция радиальной модели (вид сбоку и в разрезе).

АвтоГРП – эффект самопроизвольного роста трещины из-за закачки флюида под высоким давлением. Трещина автоГРП образуется при переводе скважины в нагнетание для поддержания пластового давления. Суть процесса заключается в том, что в призабойной зоне из-за накапливающегося давления

при закачке жидкости и превышения его критического значения, образуется трещина. Если значение давления будет сохраняться, то рост трещины может продолжиться. Это в свою очередь может вызвать не только преимущества, но и осложнения в дальнейшей разработке месторождения. Одной из проблем, связанных с эффектом автоГРП, является то, что при длительном нагнетании жидкости в пласт, трещина может расти в высоту, впоследствии это может привести к обводнению других пластов. В других случаях, данная проблема может быть экономически эффективной. Поэтому сложность данного эффекта заключается в правильно смоделированном процессе.

Целью данной работы является оценка критического давления роста трещины РКН при разных подходах вычисления.

Объектом исследования является двумерная модель пласта с начальной длиной трещины.

Предметом исследования является критическое давление, при котором возможен рост трещины в длину.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнение следующих задач:

- 1) Изучение литературы по данной теме и прототипирования в пакете FreeFem;
- 2) Построение физико-математической модели;
- 3) Численная реализация задачи в пакете FreeFem;
- 4) Определение длины трещины и критического давления при достижении критерия распространения;
- 5) Сравнение результатов при разных подходах вычисления и возможность упрощения вычислений;

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблема моделирования роста трещины в высоту является достаточно сложной. Особую роль играет возможность упрощенного моделирования, которое будет происходить с меньшими вычислительными затратами.

Одним из элементов упрощения данной задачи является сокращение затрат на оценку критического давления распространения трещины, поэтому в данной работе рассматривается решение задачи двумя подходами, дабы сравнить, насколько они взаимозаменяемы, имеет ли смысл решать упрощенным методом и насколько его результаты при изменении входных параметров отличаются от варианта с формулой Снеддона.

В данной работе рассматривается модель половины трещины PKN, в центр которой подается постоянный поток жидкости. Необходимо, имея заданный постоянный точечный расход закачиваемой в пласт жидкости, оценить значения критического давления в трещине при заданной длине и возможность роста трещины в рассматриваемой области.

Задача разделяется на 2 части, решаемых в одной области:

- 1) Задача однофазной фильтрации жидкости в пласт [1]. Давление на границе трещины определяется из уравнения смазки с заданным расходом жидкости. Раскрытие w заменяется на константу проницаемости k_f .
- 2) Задача однофазной фильтрации жидкости в пласт [1]. Давление на границе трещины определяется из уравнения теории смазки с заданным расходом жидкости. Раскрытие w считается через формулу Снеддона.

На рисунках 4 и 5 изображены непосредственно трещина PKN и расчетная область для подзадач, изложенных выше:

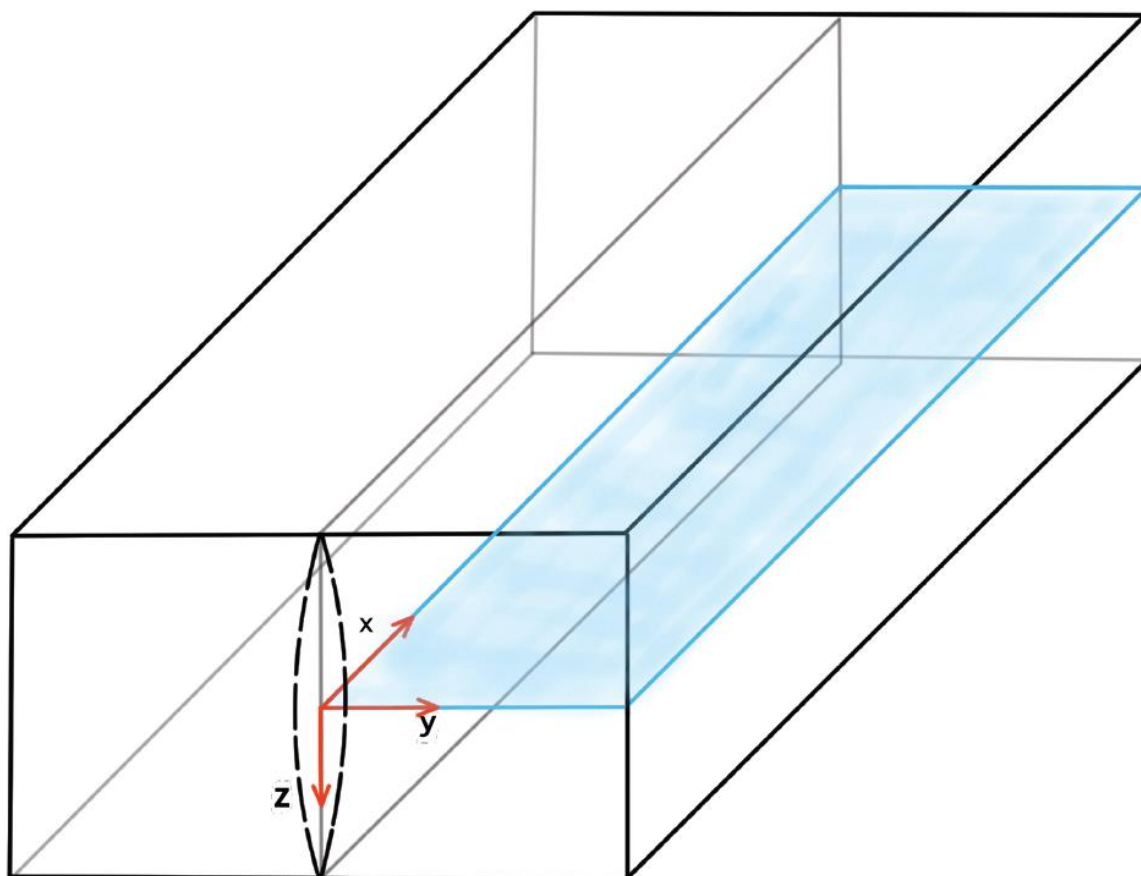


Рис. 5 Трещина PKN.

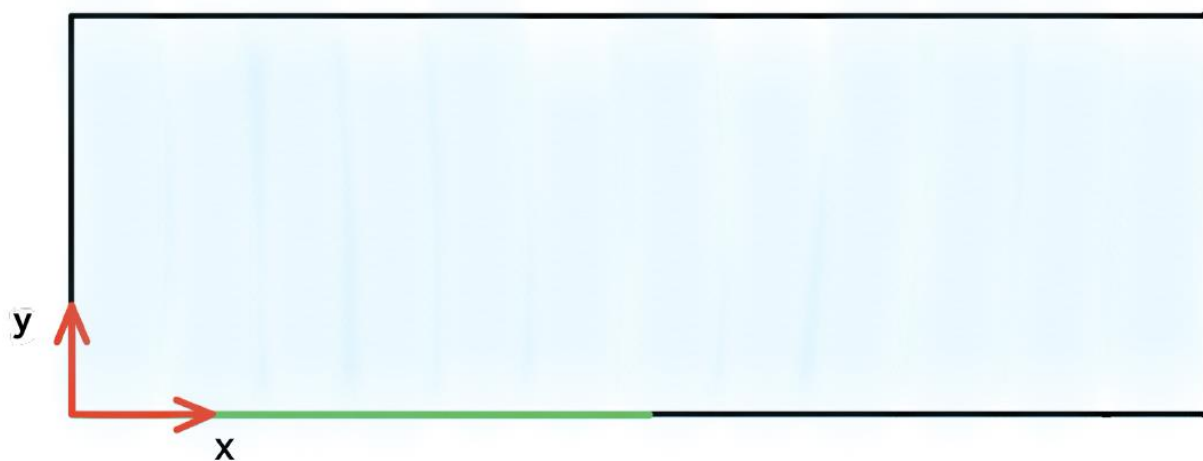


Рис. 6 Расчетная область.

Реализация модели происходит в пакете FreeFem++ [3], [13], визуализация картины полученных результатов производится в пакете ParaView.

ГЛАВА 2. МОДЕЛЬ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТ С УПРОЩАЮЩИМИ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯМИ

2.1. Уравнение фильтрации и смазки

Пороупругая среда характеризуется своей пористостью и проницаемостью, а также поровым давлением [6]. В данной работе ограничимся моделированием начальной стадии гидравлического разрыва пласта, когда пропант не добавляется [2], [9]. Рассматривается прямая трещина с заданной длиной.

Расчетная область с начальной трещиной показана на рис. 7.

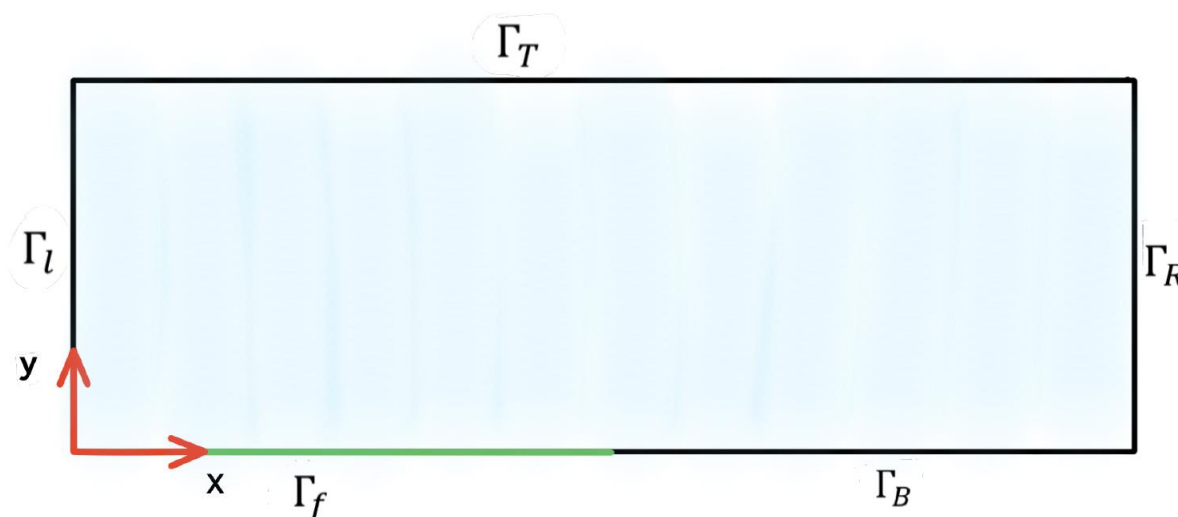


Рис. 7 Расчетная область с границами.

Основными уравнениями модели являются:

1) Уравнение фильтрации:

$$\varphi_0 C_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_r}{\eta_r} \Delta p \quad (2.1)$$

k_r – проницаемость порового пространства,

η_r – вязкость пластовой жидкости,

φ_0 – пористость,

C_t – сжимаемость породы,

p – давление.

2) Уравнение теории смазки:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) + \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (2.2)$$

w – полураскрытие,

η_f – вязкость закачиваемой жидкости,

p_f – давление в трещине.

Граничные условия:

$$\Gamma_f: \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ - \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = Q(t) \end{cases}$$

$$\Gamma_{RUT}: \quad p|_{\Gamma_{RUT}} = 0$$

$$\Gamma_L: \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\Gamma_L} = 0$$

$$\Gamma_B: \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\Gamma_B} = 0 \quad (2.3)$$

Γ_f – область трещины, которая задается раскрытием и точечным потоком жидкости в трещину.

Γ_L и Γ_B – на данных границах не происходит изменения давления (условие симметрии).

Γ_{RUT} – давление на верхней и правой границах принято 0.

2.2. Слабая постановка задачи

Чтобы реализовать слабую постановку необходимо в качестве тестовой функции взять $\varphi(x, y)$ такую, что:

$$\varphi|_{\Gamma_{RUT}} = 0 \quad (2.4)$$

Далее умножим уравнение фильтрации (2.1) на тестовую функцию и проинтегрируем по всей области:

$$\iint_{\Omega} \varphi_0 c_t \frac{\partial p}{\partial t} \varphi \, d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \varphi \Delta p \, d\Omega \quad (2.5)$$

$$\text{Вспомним: } \varphi \Delta p = \nabla \cdot (\varphi \nabla p) - \nabla p \cdot \nabla \varphi \quad (2.6)$$

Рассмотрим правую часть уравнения (2.5), подставив в него (2.6):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \varphi \Delta p \, d\Omega &= \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla \cdot (\varphi \nabla p) \, d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) \, dS - \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим отдельно контурный интеграл $\int_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) \, dS$:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) \, dS &= \\ &= \oint_{\Gamma_{RUT}} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \oint_{\Gamma_B} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \\ &+ \oint_{\Gamma_L} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS = - \oint_{\Gamma_f} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \varphi \, dS \end{aligned} \quad (2.8)$$

Интеграл по Γ_{RUT} равен нулю в силу выбора тестовой функции.

Интегралы по Γ_L и Γ_B равны нулю в силу граничных условий.

Теперь, с учетом граничных условий на область Γ_f , полученное подынтегральное выражение в (2.8) заменим на (2.3):

$$\left. \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\Gamma_f} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.9)$$

Получаем:

$$\oint_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) dS = - \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dS \quad (2.10)$$

Рассмотрим интеграл по границе трещины в (2.10):

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dS &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dx = \int_{0^+}^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dx = \\ &= \varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L, y=0} - \varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^+, y=0} - \int_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS \end{aligned} \quad (2.11)$$

Слагаемое $\varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L, y=0} = 0$ в силу граничных условий.

Слагаемое $-\varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^+, y=0} = Q(t)\varphi(0,0)$ в силу граничных условий на трещину.

Таким образом, получаем слабую постановку задачи:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \varphi_0 C_t \frac{\partial p}{\partial t} \varphi d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS - \\ - Q(t)\varphi(0,0) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Введем аппроксимацию по времени:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \quad (2.13)$$

Тогда слабая постановка модифицируется:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \varphi_0 C_t p^{n+1} \varphi \, d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla \varphi \Delta t \, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi \Delta t \, dS + \\
& + \oint_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta t \, dS = Q(t) \varphi(0,0) \Delta t + \iint_{\Omega} \varphi_0 C_t p^n \varphi \, d\Omega
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Сделаем некоторые упрощающие предположения для реализации задачи [8]:

- 1) Пренебрежем изменением раскрытия со временем $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$,
- 2) В оставшемся интеграле по Γ_f заменим $\frac{w^3}{3}$ на $k_f = 10^5 k_r$

Получаем итоговую слабую постановку для задачи:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \varphi_0 C_t p^{n+1} \varphi \, d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla \varphi \Delta t \, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{k_f}{\eta_f} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta t \, dS = \\
& = Q(t) \varphi(0,0) \Delta t + \iint_{\Omega} \varphi_0 C_t p^n \varphi \, d\Omega
\end{aligned} \tag{2.15}$$

С помощью уравнения (2.15) задача реализуется во FreeFem++ [11], чтобы оценить критическое значение давления и выполнение критерия распространения трещины с возможностью её роста.

ГЛАВА 3. МОДЕЛЬ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛЫ СНЕДДОНА

3.1. Уравнения фильтрации и смазки

В данной подзадаче рассматриваются все те же уравнения фильтрации и смазки и граничные условия, что в пунктах 2.1-2.2. Отличием является присутствие слагаемых раскрытия w , которое вычисляется через формулу Снеддона [7], [8].

Расчетная область остается неизменной:

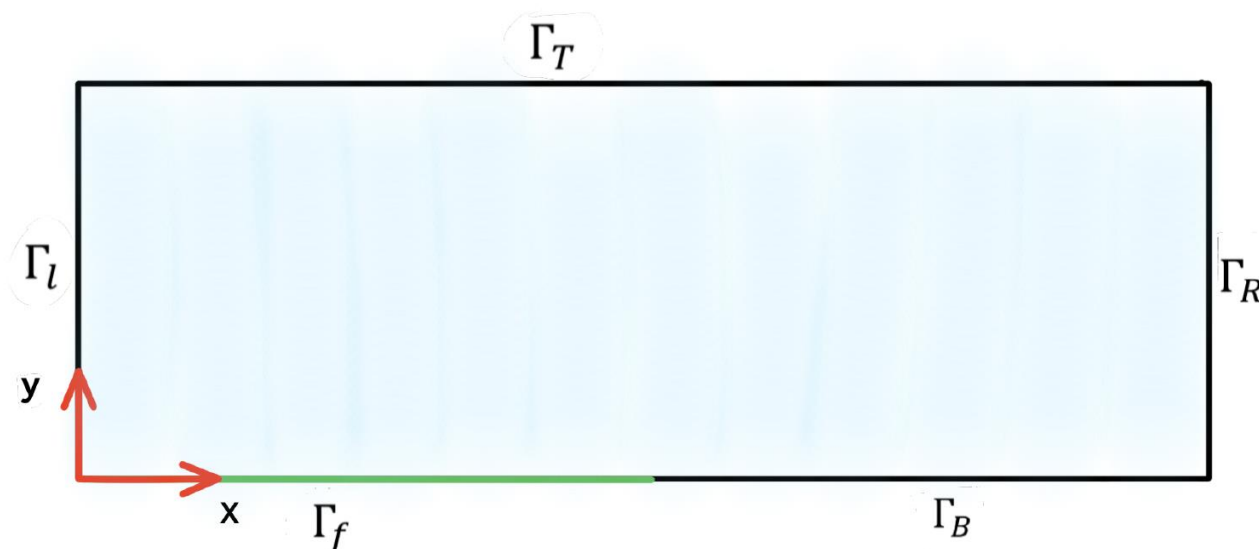


Рис. 8 Расчетная область для 2 подзадачи.

1) Уравнение фильтрации:

$$\varphi_0 C_t \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k_r}{\eta_r} \Delta p \quad (3.1)$$

k_r – проницаемость порового пространства,

η_r – вязкость пластовой жидкости,

φ_0 – пористость,

C_t – сжимаемость породы,

p – давление.

2) Уравнение теории смазки:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) + \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (3.2)$$

w – полураскрытие,

η_f – вязкость закачиваемой жидкости,

p_f – давление в трещине.

Граничные условия:

$$\Gamma_f: \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ - \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = Q(t) \end{cases}$$

$$\Gamma_{RUT}: \quad p|_{\Gamma_{RUT}} = 0$$

$$\Gamma_L: \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\Gamma_L} = 0$$

$$\Gamma_B: \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\Gamma_B} = 0 \quad (3.3)$$

Γ_f – область трещины, которая задается раскрытием и точечным потоком жидкости в трещину.

Γ_L и Γ_B – на данных границах не происходит изменения давления (условие симметрии).

Γ_{RUT} – давление на верхней и правой границах принято 0.

3.2. Слабая постановка задачи

Чтобы реализовать слабую постановку необходимо в качестве тестовой функции взять $\varphi(x, y)$ такую, что:

$$\varphi|_{\Gamma_{RUT}} = 0 \quad (3.4)$$

Далее умножим уравнение фильтрации (3.1) на тестовую функцию и проинтегрируем по всей области:

$$\iint_{\Omega} \varphi_0 c_t \frac{\partial p}{\partial t} \varphi \, d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \varphi \Delta p \, d\Omega \quad (3.5)$$

$$\text{Вспомним: } \varphi \Delta p = \nabla \cdot (\varphi \nabla p) - \nabla p \cdot \nabla \varphi \quad (3.6)$$

Рассмотрим правую часть уравнения (3.5), подставив в него (3.6):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \varphi \Delta p \, d\Omega &= \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla \cdot (\varphi \nabla p) \, d\Omega - \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) \, dS - \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассмотрим отдельно контурный интеграл $\int_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) \, dS$:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) \, dS &= \\ &= \oint_{\Gamma_{RUT}} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \oint_{\Gamma_B} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS + \\ &+ \oint_{\Gamma_L} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial n} \varphi \, dS = - \oint_{\Gamma_f} \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \varphi \, dS \end{aligned} \quad (3.8)$$

Интеграл по Γ_{RUT} равен нулю в силу выбора тестовой функции.

Интегралы по Γ_L и Γ_B равны нулю в силу граничных условий.

Теперь, с учетом граничных условий на область Γ_f , полученное подинтегральное выражение в (3.8) заменим на (3.3):

$$\left. \frac{k_r}{\eta_r} \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\Gamma_f} = \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.9)$$

Получаем:

$$\oint_{\Gamma} \frac{k_r}{\eta_r} n \cdot (\varphi \nabla p) dS = - \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dS \quad (3.10)$$

Рассмотрим интеграл по границе трещины в (3.10):

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dS &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dx = \int_{0^+}^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \varphi dx = \\ &= \varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0}^{x=L} - \varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0}^{x=0^+} - \int_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS \end{aligned} \quad (3.11)$$

Слагаемое $\varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0}^{x=L} = 0$ в силу граничных условий.

Слагаемое $-\varphi \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{y=0}^{x=0^+} = Q(t)\varphi(0,0)$ в силу граничных условий на трещину.

Таким образом, слабая постановка задачи выглядит как:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \varphi_0 c_t \frac{\partial p}{\partial t} \varphi d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{\partial w}{\partial t} \varphi dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{w^3}{3\eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dS - \\ - Q(t)\varphi(0,0) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим формулу Снеддона, в которой раскрытие зависит от давления:

$$w = \frac{2p_{net}H(1-\nu^2)}{E} \quad (3.13)$$

w — раскрытие трещины,

p_{net} — давление,

H – высота трещины,

ν – коэффициент Пуассона,

E – модуль Юнга.

Так как в задаче рассматривается половина трещины, то и раскрытие будет в 2 раза меньше:

$$w = \frac{p_{net} H (1 - \nu^2)}{E} \quad (3.14)$$

Для реализации необходимо усреднить полученное значение раскрытия по трещине в формуле (3.14):

$$\bar{w} = \frac{\pi}{4} w = \frac{\pi p_{net} H (1 - \nu^2)}{4E} \quad (3.15)$$

Подставим полученную формулу в (3.12), заранее продифференцировав по времени:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{\pi H (1 - \nu^2)}{4E} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \varphi_0 C_t \frac{\partial p}{\partial t} \varphi \, d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{\pi H (1 - \nu^2)}{4E} \frac{\partial p}{\partial t} \varphi \, dS + \\ & + \oint_{\Gamma_f} \frac{(\pi p H (1 - \nu^2))^3}{4^3 E^3 3 \eta_f} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dS - Q(t) \varphi(0,0) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Введем аппроксимацию по времени:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \quad (3.18)$$

И небольшое упрощение:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (3.19)$$

Теперь подставим ур-я (3.18), (3.19) в (3.17) и домножим на Δt , тогда слабая постановка будет выглядеть:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega} \varphi_0 C_t p^{n+1} \varphi \, d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{k_r}{\eta_r} \nabla p^{n+1} \cdot \nabla \varphi \Delta t \, d\Omega + \\
 & + \oint_{\Gamma_f} \frac{\pi H(1-v^2)}{4E} p^{n+1} \varphi \, dS + \oint_{\Gamma_f} \frac{(\pi p^{n+1} H(1-v^2))^3}{4^3 E^3 3 \eta_f} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dS = \\
 & = Q(t) \varphi(0,0) \Delta t + \iint_{\Omega} \varphi_0 C_t p^n \varphi \, d\Omega + \oint_{\Gamma_f} \frac{\pi H(1-v^2)}{4E} p^n \varphi \, dS
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ГЛАВА 4. КРИТЕРИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИНЫ

Найденные в результате решения задач значения давления на трещине усредняются, чтобы можно было сравнить с критерием распространения трещины.

Далее смотрим выполнение следующих условий [8]:

$$\bar{p} = \frac{2K_{Ic}}{\sqrt{\pi H}} \quad (4.1)$$

K_{Ic} – трещиностойкость,

H – высота трещины

Если критерий выполняется, то трещина растет в длину, иначе – не меняется.

ГЛАВА 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для реализации задач были использованы данные для расчетной области, трещины, потока.

Название	Единицы измерения	Значение
Горизонтальный размер области, L	м	3000
Вертикальный размер области, H	м	2000
Длина трещины, L_{frac}	м	200

Таблица 1. Характеристики расчетной области.

Название	Единицы измерения	Значение
Вязкость, η	Па · с	10^{-3}
Коэффициент Пуассона, ν	—	0,21
Пористость, φ_0	—	0,2
Проницаемость пласта, k_r	м^2	10^{-14}
Проницаемость трещины, k_f	м^2	10^{-9}
Поровое давление, p_0	Па	$26,4 \cdot 10^6$
Модуль Юнга, E	Па	$20 \cdot 10^9$
Объём закачки, Q	$\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$	$11 \cdot 10^{-5}$
Трещиностойкость, K_{Ic}	$\text{Па} \cdot \text{м}^{\frac{1}{2}}$	$1,73 \cdot 10^6$
Шаг по времени, dt	с	1
Время расчёта, t_{max}	с	100

Таблица 2. Исходные данные.

В ходе работы была построена расчетная область: сетка с размерами, указанными в табл. 2.

Сетка разбита на 1392 треугольника и 747 вершин.

Так как трещина с начальной длиной 200 м располагается в нижнем левом углу, то та область была измельчена с помощью цикла для получения более точных результатов.

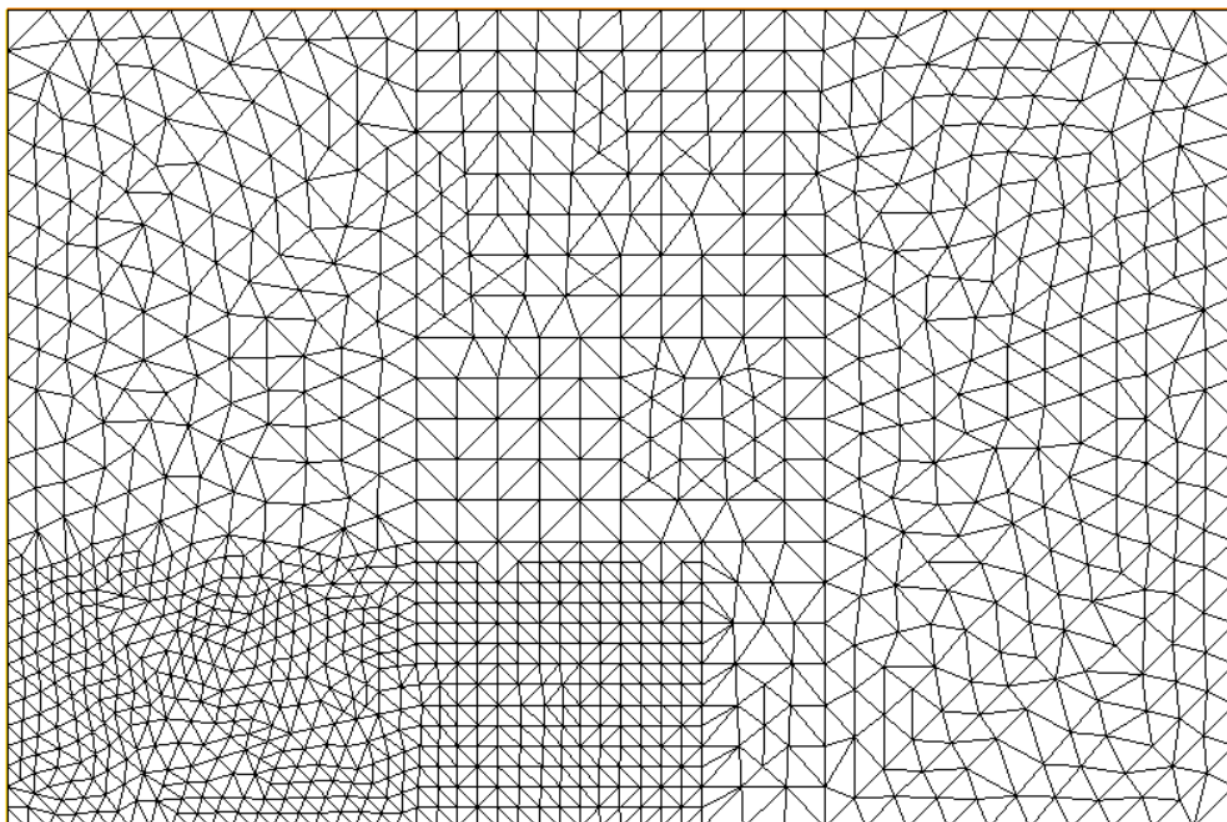


Рис. 9 Измельчение сетки.

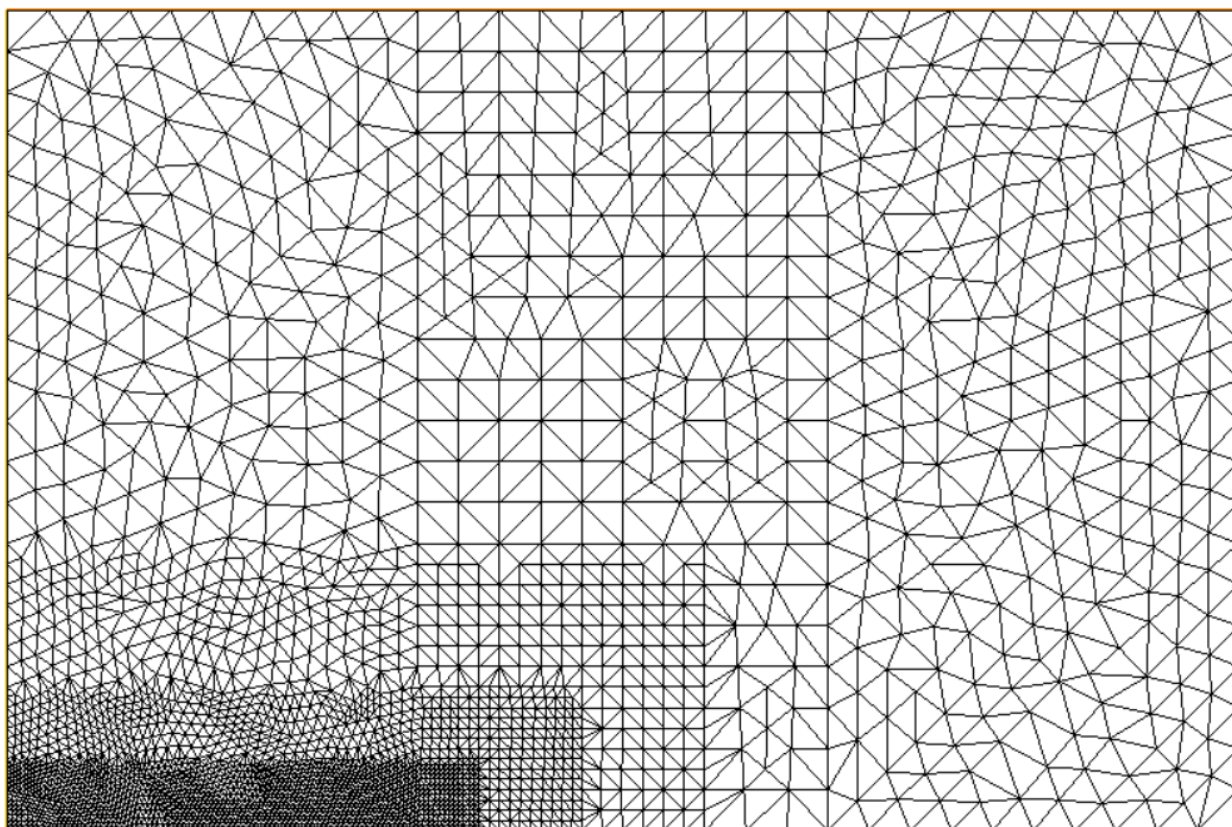


Рис. 10 Сетка в процессе измельчения.

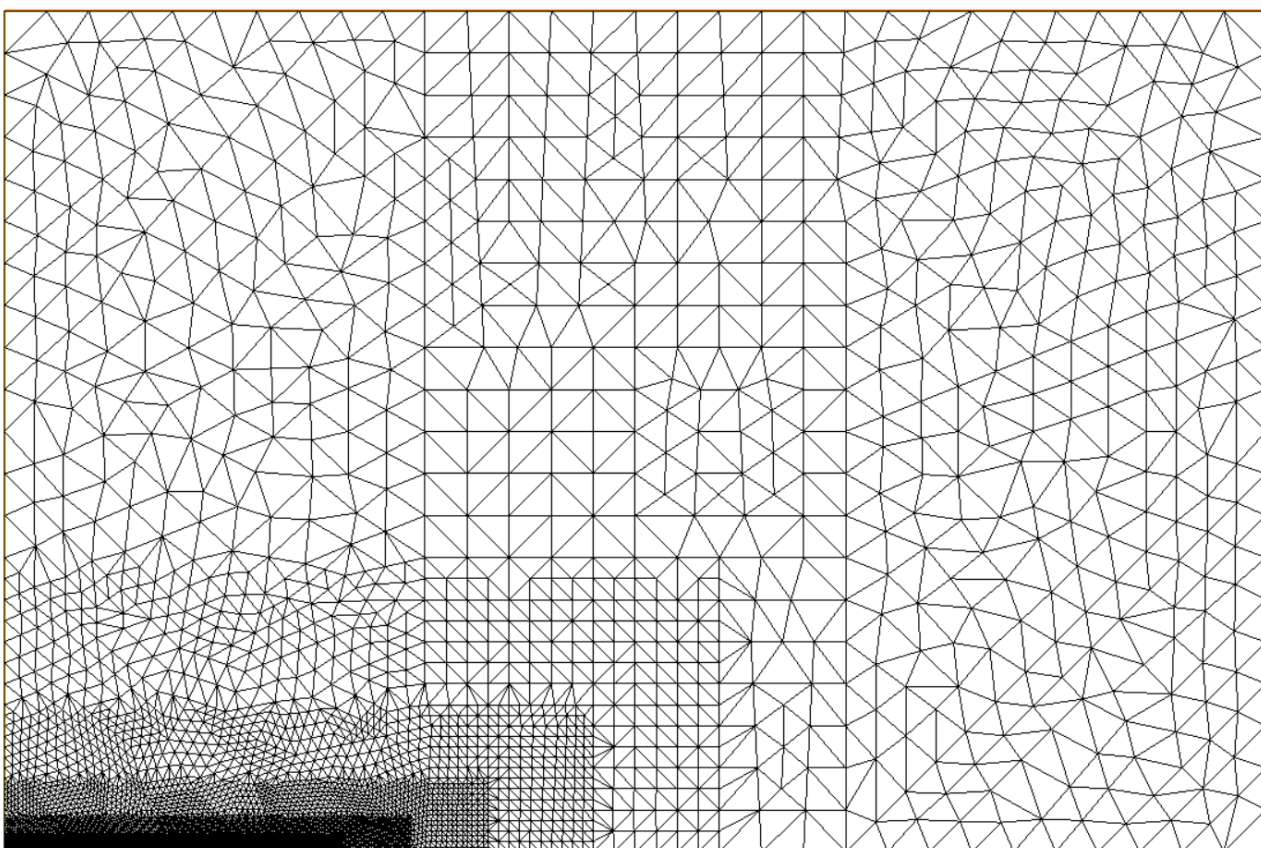


Рис. 11 Сетка.

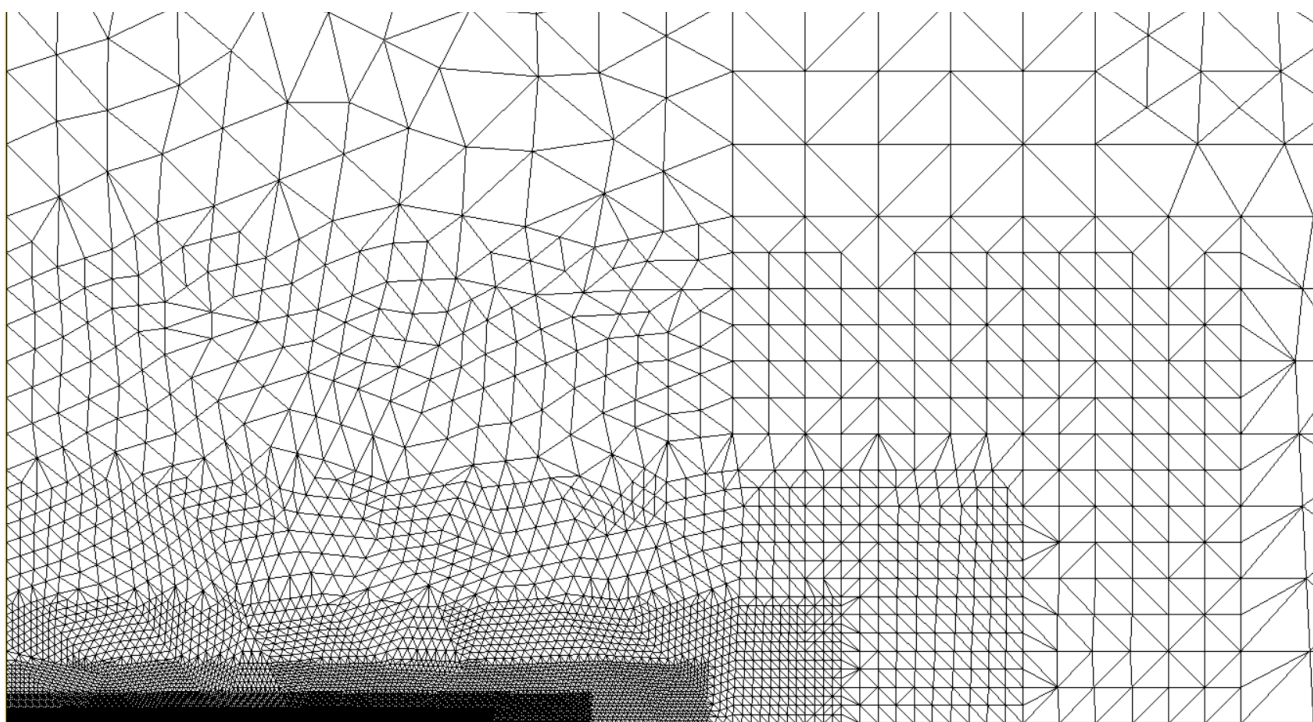


Рис. 12 Сетка, увеличенная.

Рассмотрим область с трещиной в начальный и конечный моменты времени, смоделируемые 2 способами:



Рис. 13 Давление в трещине в начальный момент времени, вычисленное с помощью замены.



Рис. 14 Давление в трещине на 100 шаге через замену на проницаемость породы.

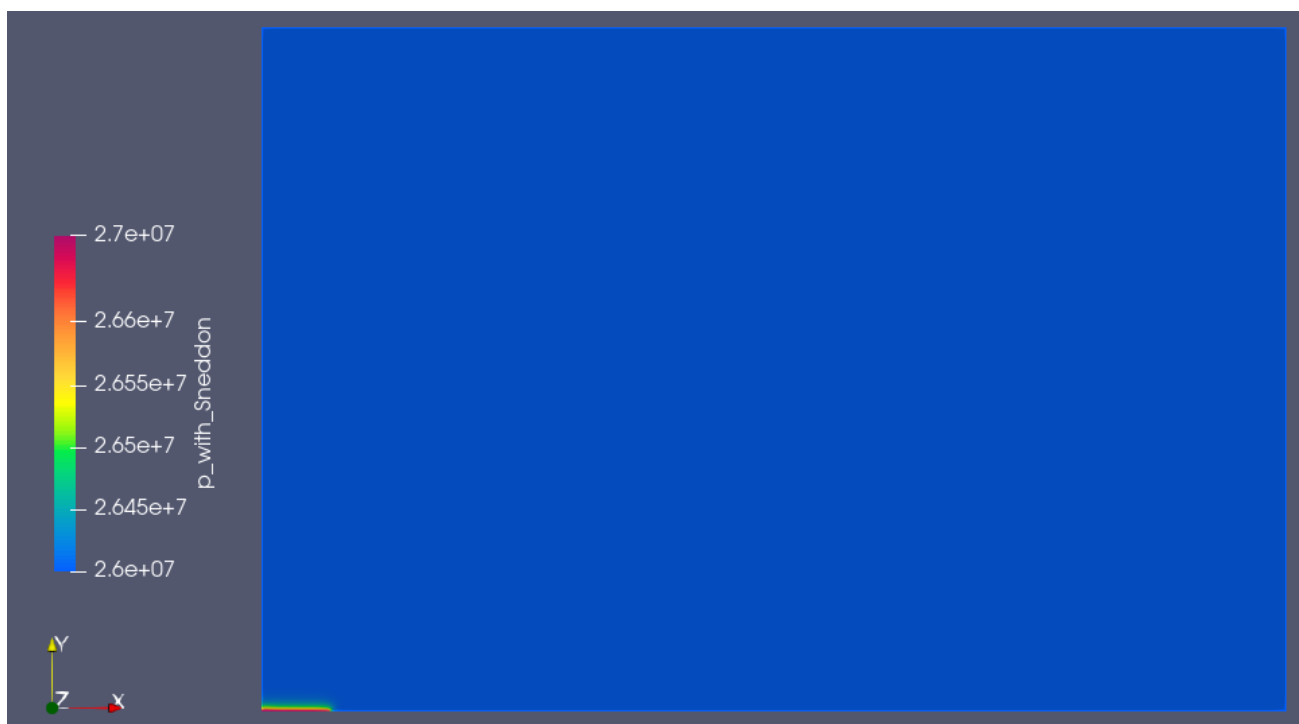


Рис. 15 Давление в трещине в начальный момент времени с учетом формулы Снеддона.

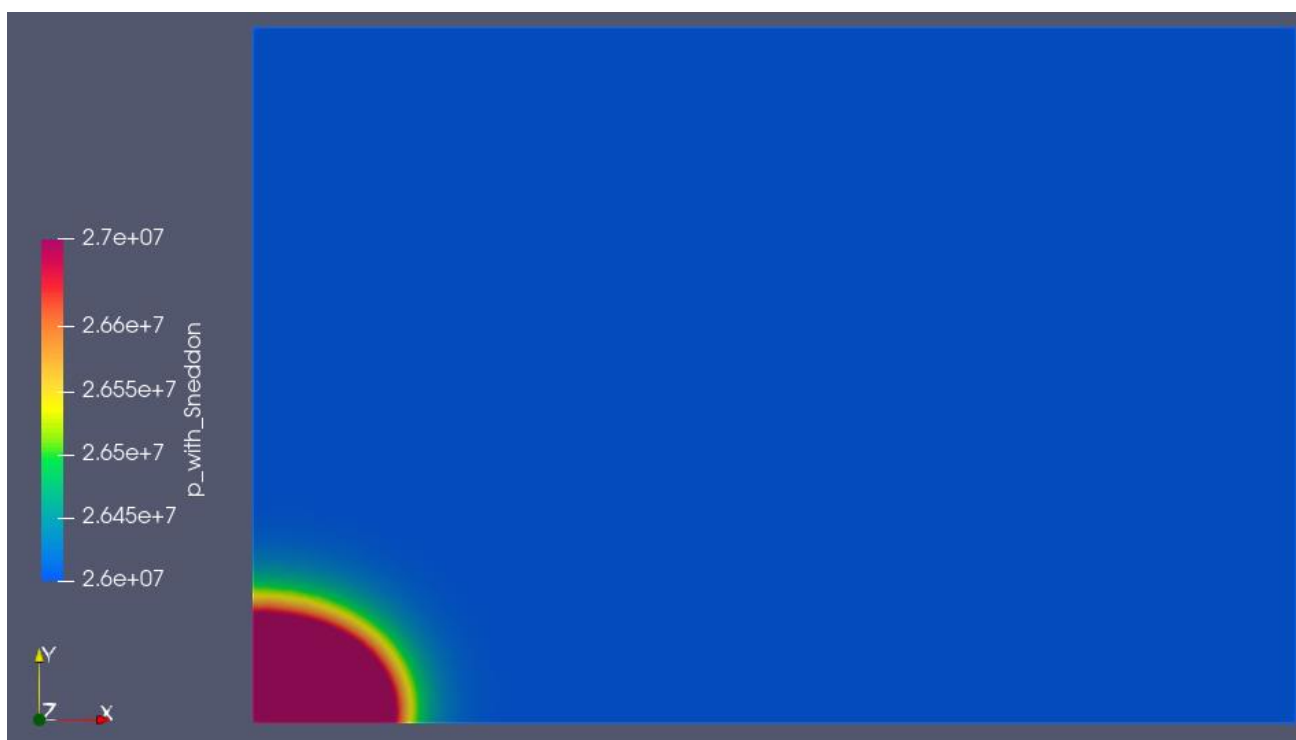


Рис. 16 Давление в трещине на 100 шаге с учетом формулы Снеддона.

На рис. 13-16 показано распределение критического давления в трещине и рядом с ней с учетом данных указанных в табл. 1-2 в начальный и конечный моменты времени. Можно заметить, что при расчете с использованием формулы Снеддона, давление задействует чуть большую область, чем с учетом проницаемости, но эти значения близки друг к другу, что говорит о равнозначной замене слагаемого с раскрытием с учётом формулы Снеддона на константу проницаемости трещины.

В результате моделирования были получены графики распределения давления по трещине в нескольких случаях: где раскрытие w заменено на константу k_f , либо вычисляется с помощью формулы Снеддона.

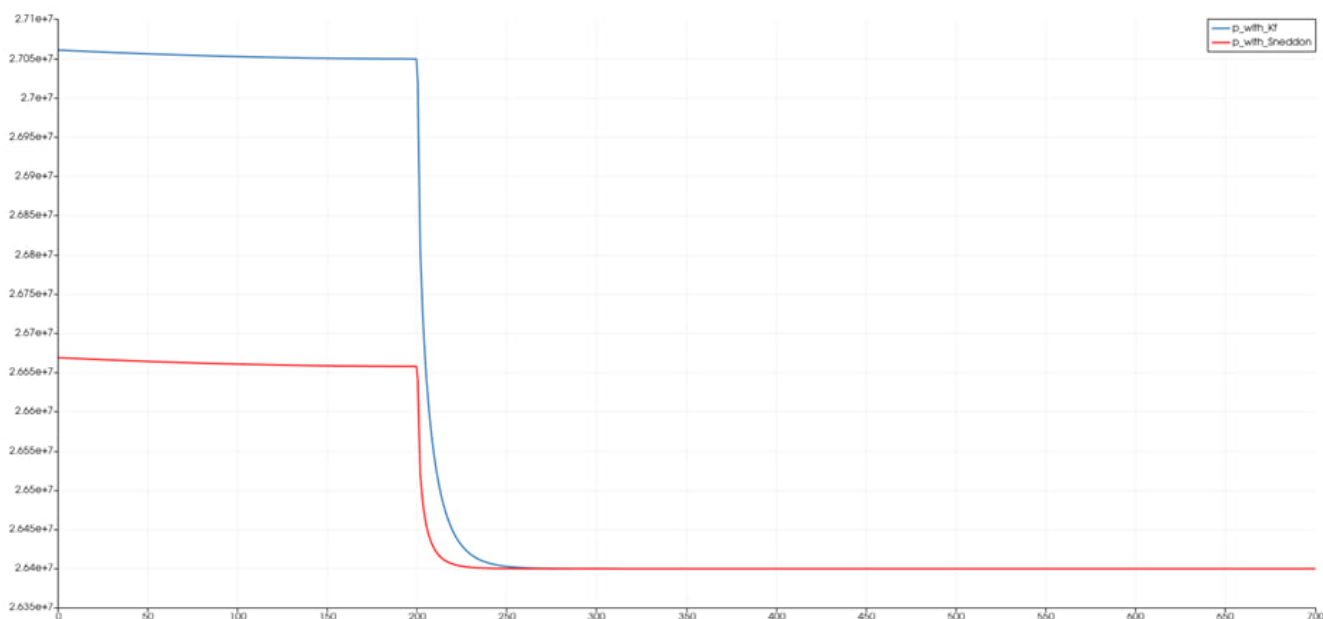


Рис. 17 Распределение давления в начальный момент времени. Синий график – давление, через проницаемость трещины $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$, красный график – давление, с помощью формулы Снеддона.

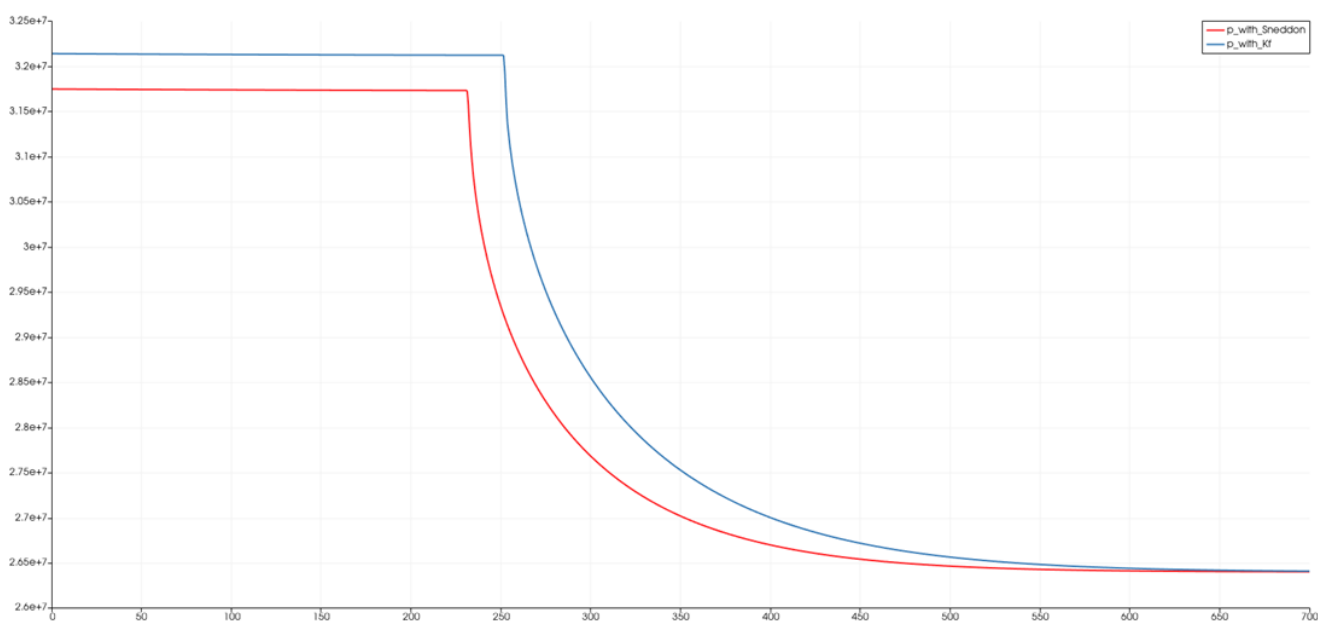


Рис. 18 Распределение давления на 100 шаге. Синий график – давление, через проницаемость трещины $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$, красный график – давление, с помощью формулы Снеддона.

В данном варианте (рис. 16) видно, что трещина, давление которой вычислялось с помощью проницаемости, выросла в длину с 200 м до 252 м. А трещина, давление которой вычислялось с использованием формулы Снеддона, выросла до 231 м. Также можно заметить, разницу значений давления в самой трещине. Начальные условия в этих подзадачах были

одинаковыми. На графиках по оси абсцисс представлена лишь часть области (700 м) для наглядности.

В следующем варианте была изменена проницаемость трещины: $k_f = 10^{-5} \text{ м}^2$. В таком случае трещина удлинилась до 238 м.

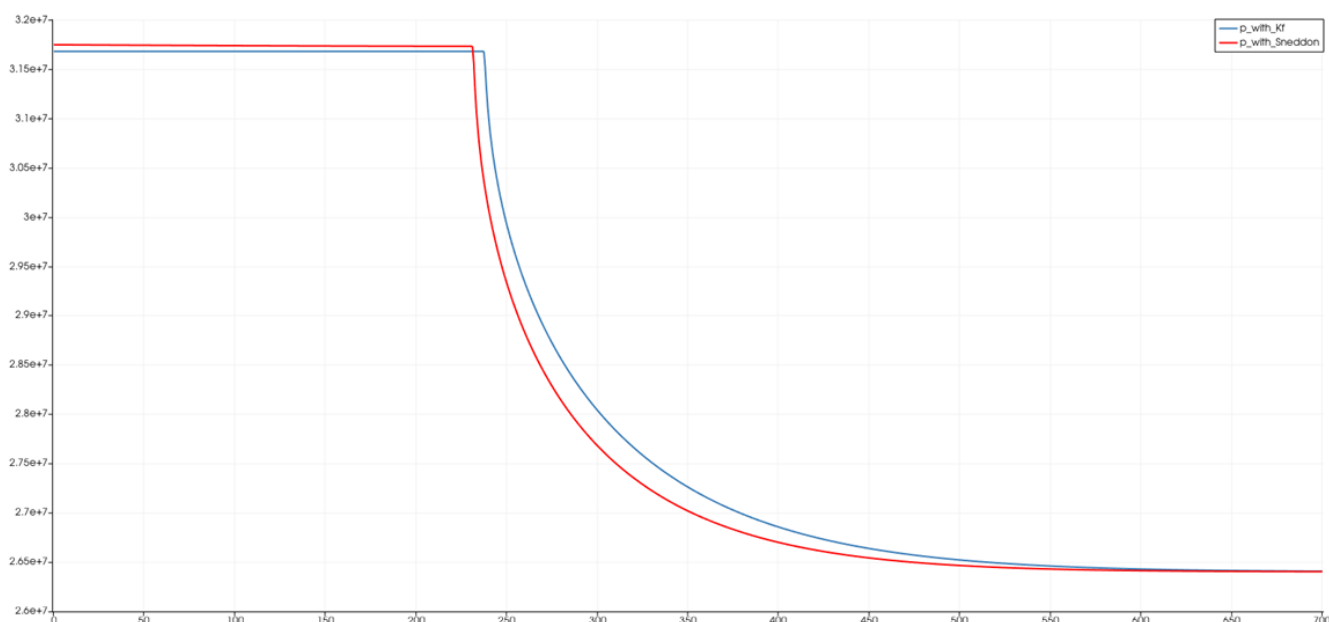


Рис. 19 Распределение давления на 100 шаге. Синий график – давление, через проницаемость трещины $k_f = 10^{-5} \text{ м}^2$, красный график – давление, с помощью формулы Снеддона.

В данном случае также можно увидеть, что значения давлений в трещине, вычисленные 2 способами, близки друг к другу.

Рассмотрим вариант роста трещины при другом значении проницаемости $k_f = 10^{-2} \text{ м}^2$. Другие данные не менялись.

В данном случае, трещина выросла до 262 м (синий график), а с использованием формулы Снеддона до 231 м. Также можно заметить, что разница давлений в трещине увеличилась, хотя подаваемый поток не менялся.

Далее были проведены расчеты при больших значениях проницаемости трещины ($k_f > 10^{-2} \text{ м}^2$), но в таком случае программа перестает давать верные результаты.

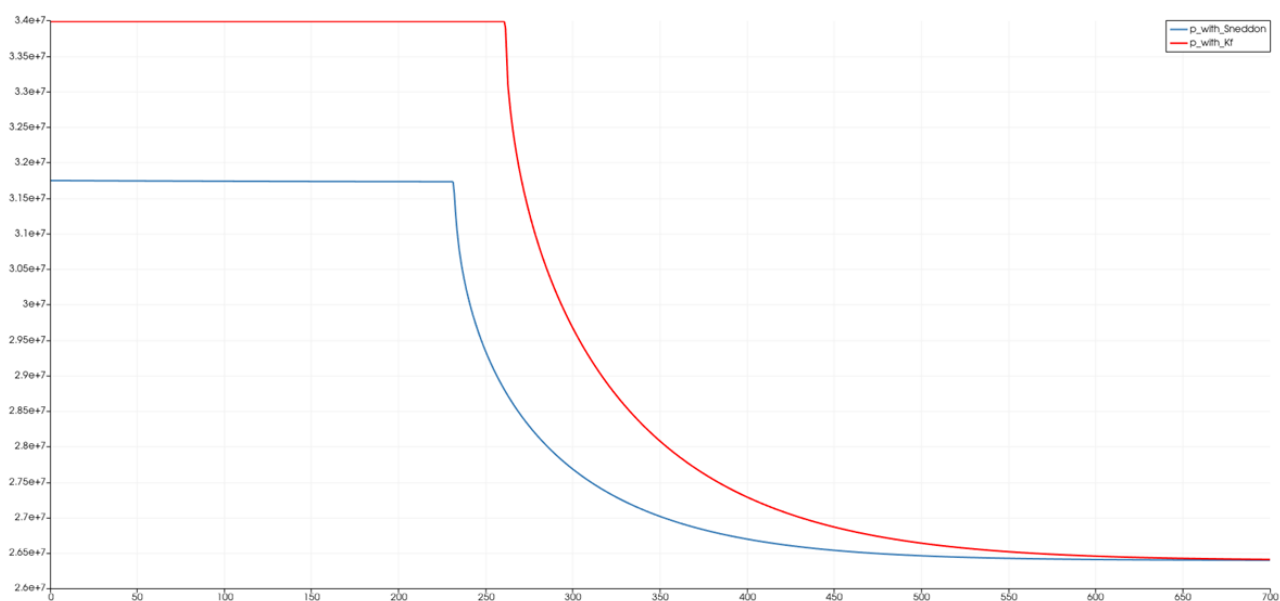


Рис. 20 Распределение давления на 100 шаге. Красный график – давление, через проницаемость трещины $k_f = 10^{-2} \text{ м}^2$, синий график – давление, с помощью формулы Снеддона.

Также был проведен расчет подзадач при разных значениях подаваемого потока. Для задачи с заменой на константу k_f , подаваемый поток равнялся:

$$Q = 7 \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \text{ а в другой задаче } Q = 11 \cdot 10^{-5} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}.$$

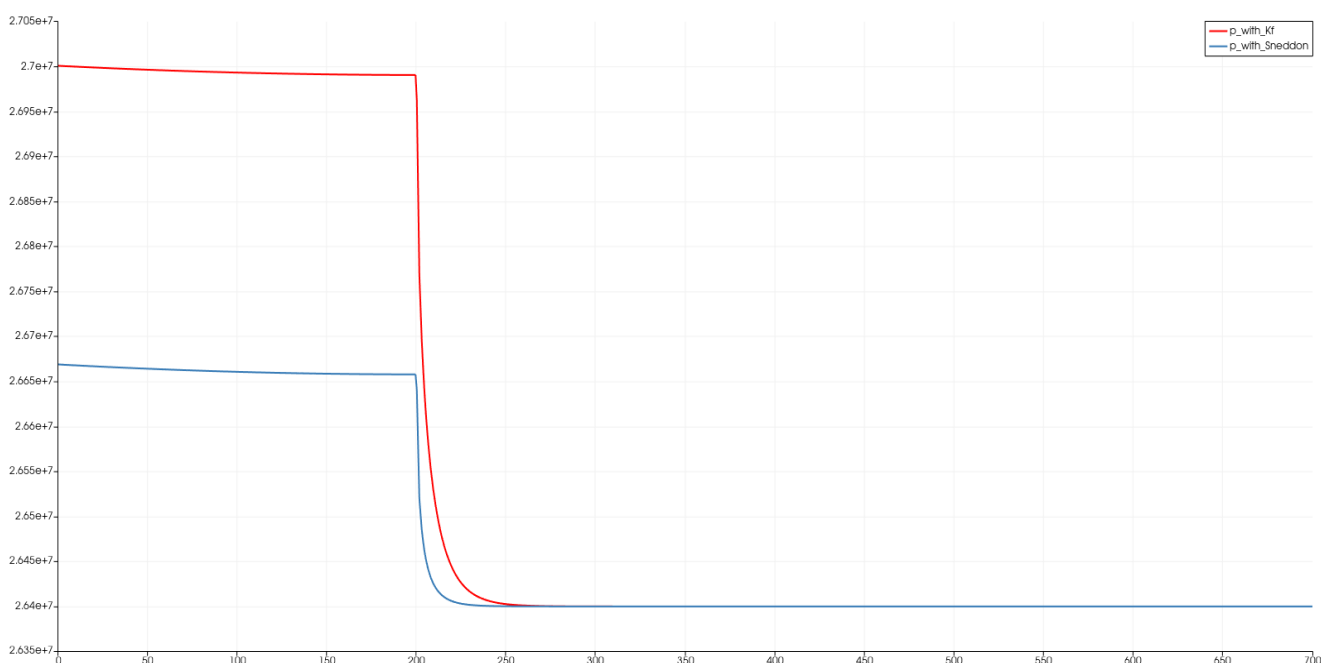


Рис. 21 Распределение давления в трещине при разных подаваемых потоках в начальный момент времени. Красный график – давление, через проницаемость трещины k_f , синий – давление, с помощью формулы Снеддона.

В начальный момент времени давление в трещине с проницаемостью выше, чем с учётом формулы Снеддона. В конце видно, что значения давлений в трещине изменились, что связано с изменением подаваемого потока, также рост трещины в длину стал 239 м.

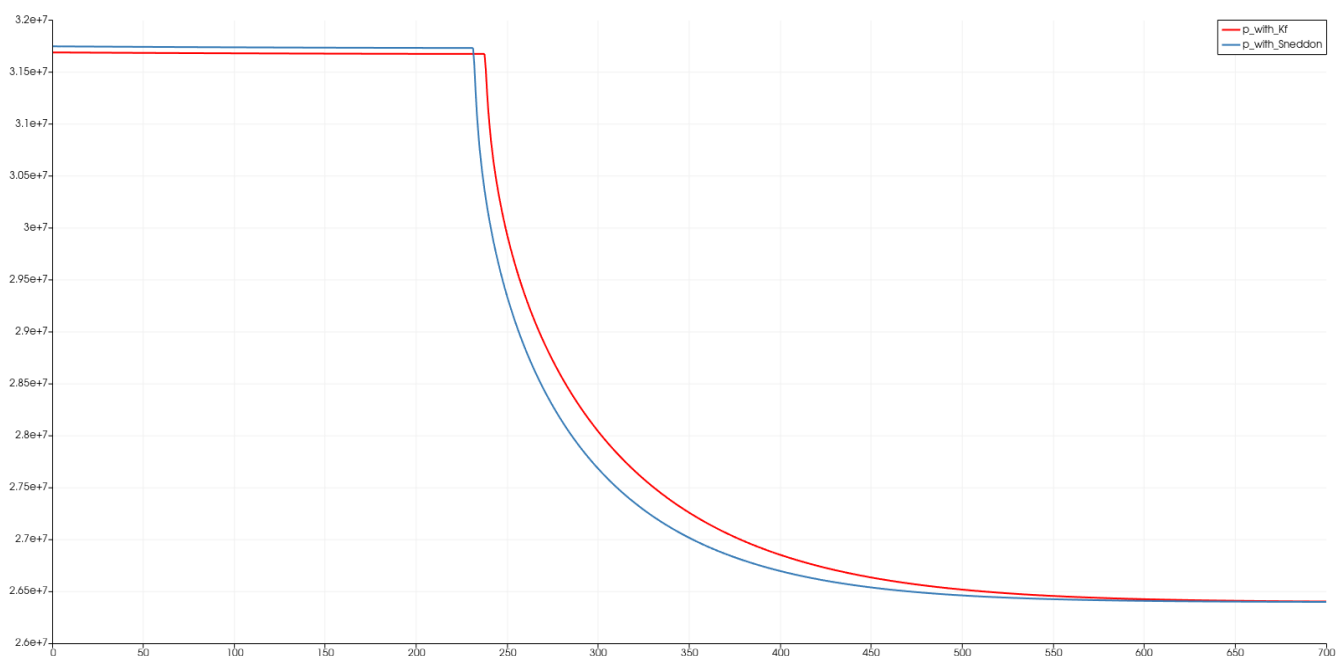


Рис. 22 Распределение давления в трещине при разных подаваемых потоках на 100 шаге. Красный график – давление, через проницаемость трещины, синий – давление, с помощью формулы Снеддона.

Также был произведен расчет при разных шагах dt отливающихся менее чем на 5%:

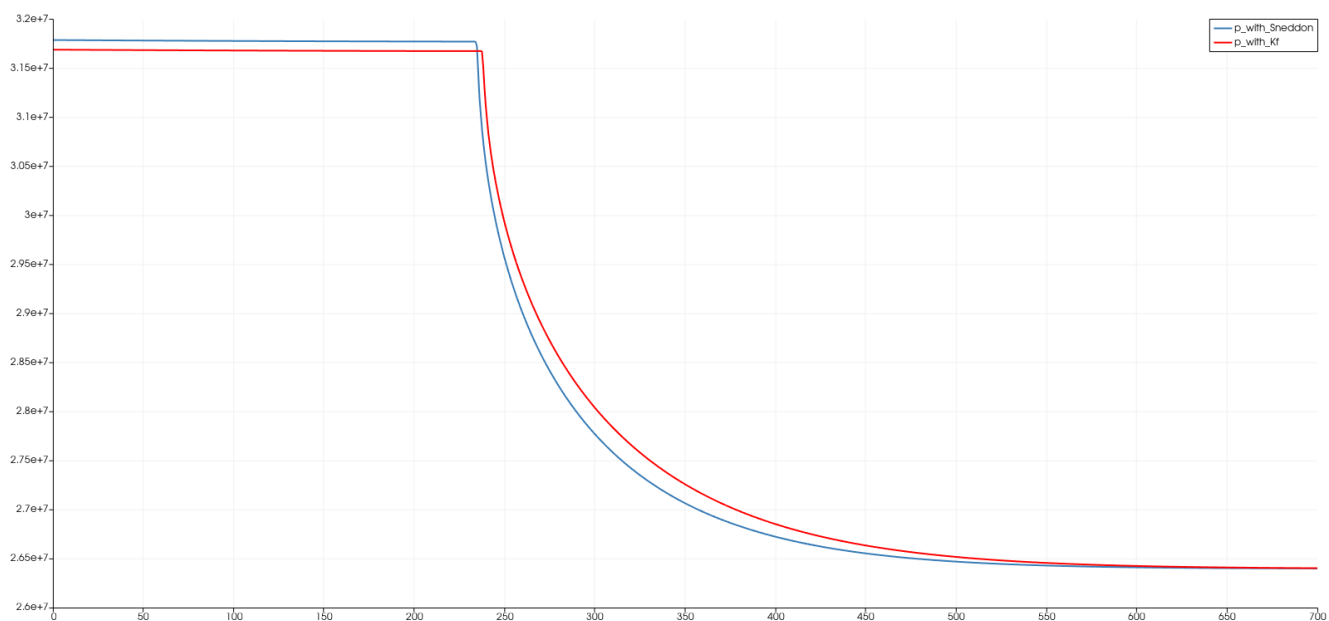


Рис. 23 Распределение давления в трещине при разных шагах. Красный график – давление, через проницаемость трещины, синий – давление, с помощью формулы Снеддона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- 1) В начале работы была определена область с начальной длиной трещины и данные для моделирования. Были выведены слабые постановки для методов с заменой на проницаемость трещины и с использованием формулы Снеддона.
- 2) Смоделирован процесс закачки жидкости в трещину РКН и её возможный рост в длину с заданной высотой при разных значениях проницаемости, подаваемого потока жидкости и шага по времени. Значения критического давления в трещине при изменении подаваемого потока и шага по времени отличались менее чем на 5%.
- 3) В ходе работы были получены графики критического давления по рассматриваемой области при двух методах. При одинаковых входных данных, указанных в таблицах 1-2, упрощенная модель дает большее распространение трещины в длину и критическое значение давления, нежели модель, вычисленная с помощью формулы Снеддона.
- 4) При увеличении проницаемости трещины в упрощенном методе, значение критического давления и рост в длину приближаются к значениям, вычисленным другим способом. Но, при значениях больших $k_f = 10^{-2} \text{ м}^2$, упрощенный метод перестает давать верные результаты.
- 5) При изменении подаваемого потока в упрощенном варианте, результаты близки с результатами, полученными во втором методе.
- 6) Также при изменении шага в упрощенном методе, критическое давление отличается менее чем на 5% от давления, вычисленного в методе с помощью формулы Снеддона.

Таким образом, было получено, что оба метода взаимозаменяемые, разница получаемых значений не превышает 5%, что говорит о возможности использования упрощенного метода, дабы уменьшить вычислительные затраты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем // Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004, 416 с.
2. Борисов В.Е., Иванов А.В., Критский Б.В., Меньшов И.С., Савенков Е.Б. Численное моделирование задач пороупругости, Москва, с. 37.
3. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии, Ростов на Дону, с. 256.
4. Шель Е.В, Кабанова П.К., Ткаченко Д.Р, Базыров И.Ш, Логвинюк А.В. Моделирование инициации и распространения трещины гидроразрыва пласта на нагнетательной скважине для нетрещиноватых терригенных пород на примере приобского месторождения., 4 с.
5. Ahmed S. Abou-Sayed, Hydraulic Fracturing, A Technology for All Time, 190-191 s.
6. Cheng Alexander H.-D. Poroelasticity, 893 s.
7. E.V. Dontsov. Analysis of a constant height hydraulic fracture, 18 s.
8. Golovin S.V., Baykin A.N. Influence of pore pressure on the development of a hydraulic fracture in Poroelastic medium. 198-208 s.
9. Coussy O. Poromechanics, 315 s.
10. Kemal Yildizdag, Fabian Weber, Prof. Dr. habil. Heinz Konietzky. Hydraulic fracturing, TU Berg akademie Freiberg, Geotechnical Institut, 55 s.
11. FreeFEM Documentation, Release 4.13.
12. Vinh Phu Nguyen. Minimum mathematics for future scientists and engineers, 1061 s.
13. Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Чёрный С. Г., с. 33-61. Математические модели гидроразрыва пласта [Электронный ресурс], Режим доступа: [Esipov_n_sc.pdf \(nsc.ru\)](#). Дата обращения: 25.05.2024.
14. Сысолятин А.А. с. 3. Технология проведения ГРП [Электронный ресурс]. Режим доступа: [Технология проведения ГРП \(cyberleninka.ru\)](#). Дата обращения: 25.05.2024.

15. Исламов Д.Э. Совершенствование методов проектирования операций по гидроразрыву пластов для повышения продуктивности скважин [Электронный ресурс]. Режим доступа: Ноябрьский научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт нефтяной промышленности (НоябрьскНИПИнефтегаз) (gazprom.ru). Дата обращения: 24.05.2024.