

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н., член-корр. РАН  
\_\_\_\_\_ А.М. Кривцов  
«\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

магистерская диссертация

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ГИДРОПРОСЛУШИВАНИЯ**

по направлению подготовки (специальности) 01.04.03 Механика и  
математическое моделирование

Направленность (профиль) 01.04.03\_04 Математическое моделирование  
процессов нефтегазодобычи

Выполнил

студент гр. 5040103/10401

А.О. Мео

Научный руководитель

доцент ВШТМиМФ, к.т.н.

В.М. Каешков

Санкт-Петербург

2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

**Физико-механический институт**

**Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Мео Алексею Олеговичу, гр. 5040103/20401

1. Тема работы: Исследование периодического гидропрослушивания
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 30.05.2024
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, уравнение Дюпюи
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): исследование метода фильтрационных волн давление; уравнение Дюпюи для периодического режима; преобразование Фурье и дискретное преобразование Фурье; прямое и обратное преобразование Лапласа; описание алгоритма решения прямой задачи; описание алгоритма решения обратной задачи; проверка применимости метода; апробирование метода на синтетических данных.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: Марков Н.С. – владелец продукта ООО «Недра»
7. Дата выдачи задания: 26.02.2024

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ Каешков И.С. – доцент ВШТМиМФ, к.т.н.

Задание принял к исполнению 26.02.2024

Студент \_\_\_\_\_ Мео А.О.

## РЕФЕРАТ

На 58 с., 23 рисунка, 1 таблица, 0 приложений

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ГАРМОНИКА, ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ГИДРОПРОСЛУШИВАНИЕ, РЯДЫ ФУРЬЕ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА, СИНТЕТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ, ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ, БЕСКОНЕЧНЫЙ ПЛАСТ, ПОИСК ПРОНИЦАЕМОСТИ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Исследование периодического гидропрослушивания».

В данной работе изучена задача исследования периодического гидропрослушивания. Целью является построение модели, позволяющей получить фильтрационные свойства пласта на основании данных о возмущающем и возмущённом давлении. Подробно изучена современная и классическая литература, посвящённая данной проблеме, проведён синтез полученной информации. Проведено подробное исследование возможных аналитических решений, в том числе приведён вывод уравнения пьезопроводности. Разработанная модель использует современные достижения численных методов, в том числе обратное преобразование Лапласа, для наиболее эффективного достижения точного результата. Проведена многоэтапная проверка полученной методологии решения обратной задачи на полученных синтетических данных. Проанализированы слабые стороны алгоритма и добавлены необходимые улучшения, в том числе разработан алгоритм для подавления Гауссовского шума. Проанализированы результаты работы алгоритма для сложного негармонического сигнала, используется дискретное преобразование Фурье. Предложены возможные улучшения полученной программы, рассматривается возможность практического использования созданной программы в нефтедобывающей отрасли.

## ABSTRACT

58 pages, 23 figures, 1 table, 0 appendices

**KEYWORDS:** HARMONICS, PERIODIC SONICATION, FOURIER SERIES, LAPLACE TRANSFORM, SYNTHETIC DATA, FILTRATION PRESSURE WAVES, INFINITE RESERVOIR, PERMEABILITY SEARCH.

The subject of the graduate qualification work is «A study of periodic hydro-penetration».

In this paper, the problem of periodic hydropermeability study is studied. The aim is to build a model that allows us to obtain the filtration properties of the reservoir based on the perturbation and perturbed pressure data. Modern and classical literature devoted to this problem has been studied in detail, and synthesis of the obtained information has been carried out. A detailed study of possible analytical solutions is carried out, including the derivation of the piezoconductivity equation. The developed model utilizes modern advances in numerical methods, including the inverse Laplace transform, to most efficiently achieve an accurate result. A multi-step validation of the obtained methodology for solving the inverse problem on the obtained synthetic data is carried out. Weaknesses of the algorithm were analyzed and necessary improvements were added, including the development of an algorithm to suppress Gaussian noise. Analyzed the results of the algorithm for a complex non-harmonic signal, discrete Fourier transform is used. Possible improvements of the obtained program are proposed, the possibility of practical use of the created program in the oil industry is considered.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ГИДРОПРОСЛУШИВАНИЯ.....	7
ГЛАВА 2. ФИЗИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ГИДРОПРОСЛУШИВАНИЯ.....	15
2.1. Физическая модель.....	15
2.1.1. Постулаты механики.....	15
2.1.2. Уравнение Дарси.....	18
2.1.3. Уравнение неразрывности.....	20
2.1.4. Граничные условия.....	25
2.2. Математическая модель.....	26
2.2.1. Вывод итоговых уравнений.....	27
2.2.2. Дискретное преобразование Фурье.....	29
2.2.3. Обратное преобразование Лапласа.....	34
2.2.4. Решение обратной задачи.....	36
ГЛАВА 3. ПРОВЕРКА МОДЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТЫ.....	37
3.1. Применимость метода.....	37
3.2. Синтетическая модель.....	42
3.2.1. Результаты для обратной задачи.....	44
3.2.2. Гауссовская ошибка.....	49
3.2.3. Тест для сложных сигналов.....	53
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	55
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	57

## ВВЕДЕНИЕ

Эффективное управление разработкой нефтяных месторождений предполагает знание значений фильтрационных параметров пластов в околоскважинном и межскважинном пространстве, таких как пьезопроводность, проницаемость.

Данные параметры в том числе можно оценивать по результатам геофизических исследований и лабораторных исследований керна, но это сопряжено с достаточно высокой погрешностью вследствие неоднородности пласта. Неправильная оценка фильтрационных свойств может привести к неэффективной разработке скважин, что, в свою очередь, повлечёт за собой обязательные экономические потери в столь важной для нашего государства отрасли, как нефтедобывающая.

Более достоверная же информация о фильтрационных параметрах пласта может быть получена только по результатам гидродинамических экспериментов. Исследования пластов могут проводиться в условиях как стационарной, так и нестационарной фильтрации. Стоит отметить, что исследование нестационарной фильтрации требует более сложного математического аппарата в связи со сложностью моделируемых процессов и значительного числа переменных, но особенно важна, так как в условиях пластов с малой проницаемостью, разработка которых в данный момент является задачей, которую необходимо решать, стационарный режим устанавливается в течении значительного промежутка времени. Таким образом, результаты исследований в условиях стационарной фильтрации нельзя использовать на этапе неустановившегося режима, который может продлиться долгие месяцы.

Таким образом, необходимо исследовать методы, подходящие для нестационарной фильтрации, такие как кривые восстановления давления.

Кроме того, зачастую эксплуатация скважин с постоянным забойным давлением является нецелесообразной и может повлечь за собой экономические издержки, которых следует избегать.

В данной работе рассматривается один из нестационарных методов исследований фильтрационных свойств пластов - метод фильтрационных волн давления. Сущность метода заключается в возбуждении на одной из скважин или на нескольких скважинах сразу периодических изменений дебита и, соответственно, давления. В результате данных процессов во флюидонасыщенном пласте начнут распространяться волны давления диффузионного типа, а на соседних скважинах будут регистрироваться отклики на первоначальное возмущение в виде изменения давления с тем же периодом, что и на возмущающей скважине. При этом форма возмущающих колебаний может быть как периодической, так и значительно более сложной. Важно, что многие скважины в связи с экономической целесообразностью данного типа разработки эксплуатируются именно в таком режиме. Таким образом, нет необходимости в смене режима эксплуатации скважин для использования данного метода.

## ГЛАВА 1. ОБЗОР ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ГИДРОПРОСЛУШИВАНИЯ

На сегодняшний день многие скважины работают в периодическом режиме. Периодическое гидропрослушивание позволяет определить фильтрационные свойства пласта, которые напрямую влияют на дебит углеводородов. Так как данная задача актуальна, многие научные работы посвящены исследованию данной темы.

Можно отметить два принципиально разных подхода в решении данной задачи, а именно упрощённый подход и более детальный. Оба подхода будут более подробно разобраны ниже и используются в данной работе.

Для упрощённого подхода характерно в первую очередь исследование гармонических колебаний давления, то есть удовлетворяющих синусоидальному закону. Данное ограничение объясняется практической необходимостью и простотой применения полученного решения, что было особенно важно до массового внедрения цифровых технологий в нефтегазовую отрасль. Кроме того, данный подход чаще всего рассматривает так называемый квазистационарный режим работы периодических скважин, то есть позволяет проводить исследования пласта в том случае, когда возмущения давления на возмущаемой скважине соответствуют гармоническим, что происходит спустя определённое время, зависящее от фильтрационных свойств пласта.

Так как ранее в отечественной промышленности значительная часть разрабатываемых пластов соответствовали относительно высокой проницаемости, данное ограничение не влекло за собой издержек. В настоящее время массово разрабатываются пласты с более низкими значениями проницаемости, таким образом, данный подход может принести лишь ограниченные результаты. Кроме того, многие скважины в периодическом режиме работают не при гармоническом изменении давления и дебита, что

ограничивает применимость полученных решений.

С другой стороны, более сложное и подробное исследование уже работает не с квазистационарным режимом, то есть может дать результат даже по прошествии малого времени после запуска скважины. Таким образом, данное решение можно считать фундаментальным для гармонического вида дебита. Но большинство работ ставят своей задачей исследование именно гармонических колебаний давления, а не периодических в общем виде. Это может объясняться тем, что согласно принципу суперпозиции, достаточно применить решение к каждой из гармоник, на которые можно разложить форму давления возмущающей скважины.

Но данная задача не является тривиальной. Она требует использования сложного математического аппарата, а именно разложения в ряд Фурье. Кроме того, в нефтегазовой отрасли работают не с непрерывными функциями, а с высокодискретными замерами давлений и дебита, что тем более осложняет задачу, так как необходимо использовать дискретное преобразование Фурье.

Следовательно, необходимо представить модель, которая сможет раскладывать любой периодический дебит на гармонические составляющие, а затем применять фундаментальное решение для поиска фильтрационных свойств пласта методом решения обратной задачи, то есть для восстановления проницаемости или же пьезопроводности по заданным графикам возмущённых и возмущающих давлений.

Так, автор [4] рассматривает в своей работе практическое применение фильтрационных волн давления. Предположениями являются гармонические возмущающие волны давления и установившийся квазистационарный режим, что сужает область использования приведённых формул, используемых автором работы (1.1):

$$p(R) = \frac{2*Q*\mu}{kh\pi^2} * \sqrt[4]{\frac{\pi*T*\chi}{8*R^2}} * e^{-R*\sqrt{\frac{\pi}{\chi T}}}, \quad (1.1)$$

где  $R$  – расстояние,  $T$  – период,  $q$  – дебит,  $x$  – пьезопроводность,  $k$  – проницаемость,  $\mu$  – вязкость,  $h$  – мощность пласта,  $p$  – возмущённое давление. Таким образом, стоит отметить, что упрощённая форма решения для гармонических колебаний представляет собой функцию с экспоненциальной зависимостью от расстояния, что в практических случаях важно учитывать, так как приборы для измерения возмущённых давлений обладают ограниченной точностью.

Кроме того, авторы приводят необходимую формулу (1.2) для зависимости разности фаз на расстоянии от возмущающей скважины:

$$a = R * \sqrt{\frac{\pi}{xT}} + \frac{\pi}{8}. \quad (1.2)$$

Отсюда видно, что зависимость разности фаз от расстояния значительно проще, чем зависимость возмущённого давления от расстояния. Авторы в своей работе не рассматривают алгоритмизацию решения обратной задачи, что объясняется простотой полученных формул. Таким образом, для использования данных формул в этой работе будет получено обратное решение, вывод которого будет представлен в явном виде.

В работе [7] автор использует более сложный математический аппарат для решения поставленной задачи. Кроме того, приведены результаты исследования применимости модели. Исходными предпосылками данного решения стоит считать установившийся квазистационарный режим, что следует из более сложного вида для режима неустановившегося, и, кроме того, объясняется высокой скоростью установления квазистационарного решения (со второго-третьего периода).

Таким образом, получено следующее соотношение:

$$X_n = r \left( \frac{\omega_n}{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon} \frac{q_n}{X_{wn}} \left[ \frac{Ker^2 X_n + Kei^2 X_n}{Ker_1^2 X_{wn} + Kei_1^2 X_{wn}} \right]^{\frac{1}{2}} = P_{rn}. \quad (1.4)$$

И выражение для разности фаз:

$$\Delta_n = \arctg \frac{Ker X_n Kei_1 X_{wn} - Ker_1 X_{wn} Kei X_n}{Ker_1 X_{wn} Ker X_n + Kei_1 X_{wn} Kei X_n} + \frac{3\pi}{4}. \quad (1.5)$$

Где  $Ker X_n$ ,  $Kei_1 X_{wn}$ ,  $Ker_1 X_{wn}$ ,  $Kei X_n$  – функции Кельвина 0 и 1 порядка, известные численно;  $P_{rn}$  – постоянная составляющая давления;  $q_n$  – амплитуда  $n$ -ной гармоники дебита на возмущающей скважине;  $P_{rn}$  – амплитуда  $n$ -ной гармоники давления на реагирующей скважине;  $\omega_n$ ,  $\Delta$ ,  $\delta$ , – разность фаз между  $n$ -ми гармониками дебита и давления на возмущающей и реагирующей скважинах соответственно;  $\chi$  – пьезопроводность пласта;  $\varepsilon$  – гидропроводность пласта;  $rw$  – приведенный радиус скважины;  $r$  – расстояние между скважинами по пласту. Значения величин  $q_n$ ,  $P_{rn}$ ,  $\Delta$ ,  $\delta$  определяются в результате гармонического анализа при математической обработке экспериментальных кривых  $q(t)$ ,  $P(t)$  и служат для расчёта гидродинамических параметров  $\chi$ ,  $\varepsilon$ ,  $rw$ .

Таким образом, используются функции Кельвина, и достаточно сложные математические выражения. При этом стоит отметить, что период колебаний давления на возмущающей скважине может составлять относительно длительный промежуток времени. Кроме того, в данной работе в явном виде не представлен алгоритм решения поставленной задачи, в том числе не используется дискретное преобразование Фурье.

Таким образом, можно сформулировать требования к данной работе: необходимо представить модель, позволяющую из высокодискретных данных возмущающего давления получить в явном виде пьезопроводность, используя дискретное преобразование Фурье, учитывая неустановившийся квазистационарный режим, и, кроме того, представить обоснование данной полученной модели для использования на практике путём проверки данной

модели на разных синтетических данных, используя современное программное обеспечение для создания цифровых моделей для получения синтетических данных.

В работе [1] авторы рассматривают использование аппроксимации для аналитических функций, описывающих поведение изучаемой системы. Представлены данные, которые показывают точность данного решения.

В работе же [14] автор использует сложный математический аппарат, в том числе преобразование Лапласа, для получения аналитических формул, отражающих зависимость возмущающего и возмущённого давления. При этом ввиду отсутствия общего аналитического решения изучается создание так называемого прямоугольного импульса давлений. Данная работа даёт общие представления о фильтрационно-волновом поле давлений.

Автор [5] рассматривает более сложный случай, когда решается задача при нелинейном уравнение пьезопроводности. На данный момент аналитического решения подобной задачи нет, таким образом, решение данной задачи не позволяет получить универсальную модель. К преимуществам такого подхода можно отнести возможность получения более точных решений для конкретных промышленных задач. Автор исходит из следующего уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( x(k(p)) r \frac{\partial}{\partial r} \left( P + \tau_2 \frac{\partial P}{\partial t} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( P + \tau' \frac{\partial P}{\partial t} \right), \quad (1.6)$$

где  $\tau'$ ,  $2\tau$  – постоянные размерности времени, характеризующие насыщенную пористую среду. Выражение для изменения проницаемости принимает вид:

$$k(p) = k_0 [\exp(\alpha(p - p_0))]. \quad (1.7)$$

То есть используется экспоненциальная зависимость проницаемости от разности давлений.

В работах [8] и [15] представлен аналитический вывод уравнений для решения задачи о распространении периодических волн давления в линейных средах для случая однородного и изотропного пласта постоянной толщины при наличии системы вертикальных скважин и при постоянном значении проницаемости. Данные работы являются аналитическим обоснованием построенной модели, использующей как непосредственно математические выводы, так и численные решения там, где это необходимо.

После рассмотрения работ, посвящённых теме изучения фильтрационных волн давления, можно сделать определённые выводы об основных подходах в данном направлении [13]. Первый подход характеризуется относительно простым математическим аппаратом, при этом решается задача квазистационарного режима, что может являться важным ограничением. Второй же подход предполагает более глубокое изучение неустановившегося режима, при этом рассматривая частные случаи ввиду невозможности получения аналитического решения в общем виде. Более подробно информация о сравнении подходов представлена в табл.1.1.

Таблица  
1.1Сравнение подходов к решению задачи фильтрационных волн  
давления

Модель пласта	Достоинства	Недостатки
Модель установившегося периодического режима	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Простота решения</li> <li>– Не требует больших вычислительных мощностей</li> <li>– Отлично подходит для случая квазистационарного режима или же малых периодов и высоких проницаемостей</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Не даёт точного решения</li> <li>– Требует длительного времени для больших периодов</li> </ul>
Модель нестационарного режима работы скважины	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Хорошо подходит для больших периодов</li> <li>– Позволяет эффективно решать поставленную задачу при малых проницаемостях</li> <li>– Обладает необходимой точностью и строго обосновано</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Требует глубоких знаний о физике рассматриваемого процесса</li> <li>– Требует больших вычислительных мощностей</li> <li>– Ограничена моделью постоянной проницаемости</li> </ul>

При создании данной работы используются преимущества обоих подходов. Так, для случая квазистационарного режима будут использованы аналитические выкладки, позволяющие не использовать больших вычислительных мощностей [6].

При неустановившемся режиме, который зачастую имеет большое значение в промысловых условиях ввиду как необходимости корректировать работу скважины, так и продолжительных периодах и низких фильтрационных свойств, будет использовано численное решение в пространстве Лапласа и обратное преобразование Лапласа [3].

При получении решения для обратной задачи также будет использовано решение для квазистационарного случая в качестве приблизительного, или же быстрого решения.

Данный подход обусловлен необходимостью эффективно использовать

вычислительные мощности для возможного создания в будущем пользовательской программы, позволяющей пользователям оценить фильтрационные свойства пласта по дискретным данным с возмущающей и возмущаемой скважины.

Таким образом, в основе данной работы лежит синтез существующих аналитических решений для задачи периодического гидропрослушивания и использование современных технологий для численного решения обратной задачи и апробирования методики.

## **ГЛАВА 2. ФИЗИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ГИДРОПРОСЛУШИВАНИЯ**

В главе рассматривается общая концепция построения физической модели периодического пласта и исследуется математическая теория, необходимая для решения задачи аналитически или численно. В параграфе 2.1 рассматривается в первую очередь физическая модель, в том числе приведён вывод необходимых уравнений. Параграф 2.2 посвящён математической модели, а именно необходимым знаниям по теории разложения в ряды Фурье, дискретному преобразованию Фурье, прямому и обратному преобразованию Лапласа, в том числе численному решению данных задач. Данная глава предусмотрена как в качестве научного обоснования использованных методов, так и в качестве анализа рассматриваемой задачи.

### **2.1. Физическая модель**

Физической моделью для решения поставленной задачи будет являться основополагающее отраслевое уравнение, которое позволяет решить задачу поиска распределения давления (в данном случае рассматривается прямая задача, многократное решение которой позволит получить фильтрационные свойства системы) – уравнение пьезопроводности [10]. Таким образом, данный раздел будет посвящён выводу уравнения пьезопроводности на основании классических постулатов механики. Дальнейшие преобразования уравнения пьезопроводности и его численное решение, следовательно, будет строго научно обусловлено. Реализации численного решения будет посвящён параграф 2.2, в третьей главе будет разобрано подробно действия модели (в том числе её проверка на данных).

#### **2.1.1. Постулаты механики**

В качестве основных постулатов классической механики выступают

особые свойства пространства и времени, а именно независимость свойств пространства от направления, также называемая изотропностью, и однородность времени и пространства. Время же не обладает изотропностью, что напрямую следует из второго закона термодинамики, который говорит о том, что энтропия (мера хаоса) изолированной системы не может обладать отрицательной производной по времени.

Приведём вывод основных законов сохранения, основываясь на данных свойствах. Распишем функцию Лагранжа для материальной точки (особую функцию, минимизация интеграла которой по времени движения полностью описывает само движение) под действием силы [2]:

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r, t). \quad (2.1)$$

Данное уравнение также называется вторым законом Ньютона. Теперь получим полную производную функции Лагранжа, используя свойства времени для того, чтобы избавиться от нулевых частных производных по нему:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i. \quad (2.2)$$

После очевидных преобразований получим выражение [12]:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right). \quad (2.3)$$

Или же, в другой форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0. \quad (2.4)$$

Так как производная выражения по времени равна нулю, следовательно, величина по времени неизменна и является константой, известной также как энергия системы:

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (2.5)$$

Таким образом, мы получили закон сохранения энергии системы. Получим также закон сохранения импульса. Записав уравнение Лагранжа в следующем виде:

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q). \quad (2.6)$$

Где  $T$  – квадратичная функция скоростей, можно применить теорему Эйлера, которая гласит, что если в выражении полного дифференциала однородной функции  $f(x, y, \dots, u)$  заменить дифференциал каждого независимого переменного самим этим переменным, то получится функция  $f(x, y, \dots, u)$ , умноженная на показатель однородности. Применив данную теорему, получим:

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \quad (2.7)$$

И в декартовых координатах [9]:

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(r_1, r_2, \dots). \quad (2.8)$$

Таким образом, мы получили выражения для потенциальных и кинетических энергий механической системы. Теперь же запишем приращение функции Лагранжа по направлениям после бесконечно малого переноса и используя однородность пространства:

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_a} \delta r_a = \varepsilon \sum_a \frac{\partial L}{\partial r_a}. \quad (2.9)$$

Что абсолютно эквивалентно:

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0. \quad (2.10)$$

Таким образом, можно сказать, что:

$$P = \sum_a \frac{\partial L}{\partial v_a}. \quad (2.11)$$

В замкнутой механической системе величина импульса остаётся неизменной [11]. Закон сохранения импульса напрямую относится к выводу уравнения пьезопроводности, что будет наглядно показано ниже.

### 2.1.2. Уравнение Дарси

Данное уравнение было получено эмпирически знаменитым французским инженером Генри Дарси. При этом данное уравнение не только выводится эмпирически, но и является прямой физической аналогией, например, закону Ома в электродинамике, с той лишь разницей, что в роли поля в законе Дарси занимает поле давлений, а роли потока – поток жидкостей. Для вывода данного уравнения запишем уравнение Навье-Стокса, являющееся аналогом закона сохранения импульса для ньютоновских жидкостей:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} * \nabla)\vec{v} + \vartheta \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}, \quad (2.12)$$

где  $\Delta$  – лапласиан,  $\nabla$  – оператор Набла,  $t$  - время.

Перепишем данное уравнение в другом виде (уравнение Стокса, для несжимаемой жидкости):

$$\mu \nabla^2 u_i - \partial_i p = 0. \quad (2.13)$$

Учитывая линейность сопротивления, преобразуем данное выражение:

$$-(k^{-1})_{ij} \mu \varphi u_j - \partial_i p = 0. \quad (2.14)$$

Таким образом, получаем уравнение Дарси:

$$q_n = -\frac{k_{ni}}{\mu} \partial_i p. \quad (2.15)$$

Что для изотропного пласта (проницаемость в таком случае не может зависеть от направления) принимает более простой вид:

$$q = -\frac{k}{\mu} \nabla p. \quad (2.16)$$

Таким образом, вывод уравнения Дарси можно считать законченным. Уравнение Дарси можно наглядно продемонстрировать на графике (рис. 2.1).

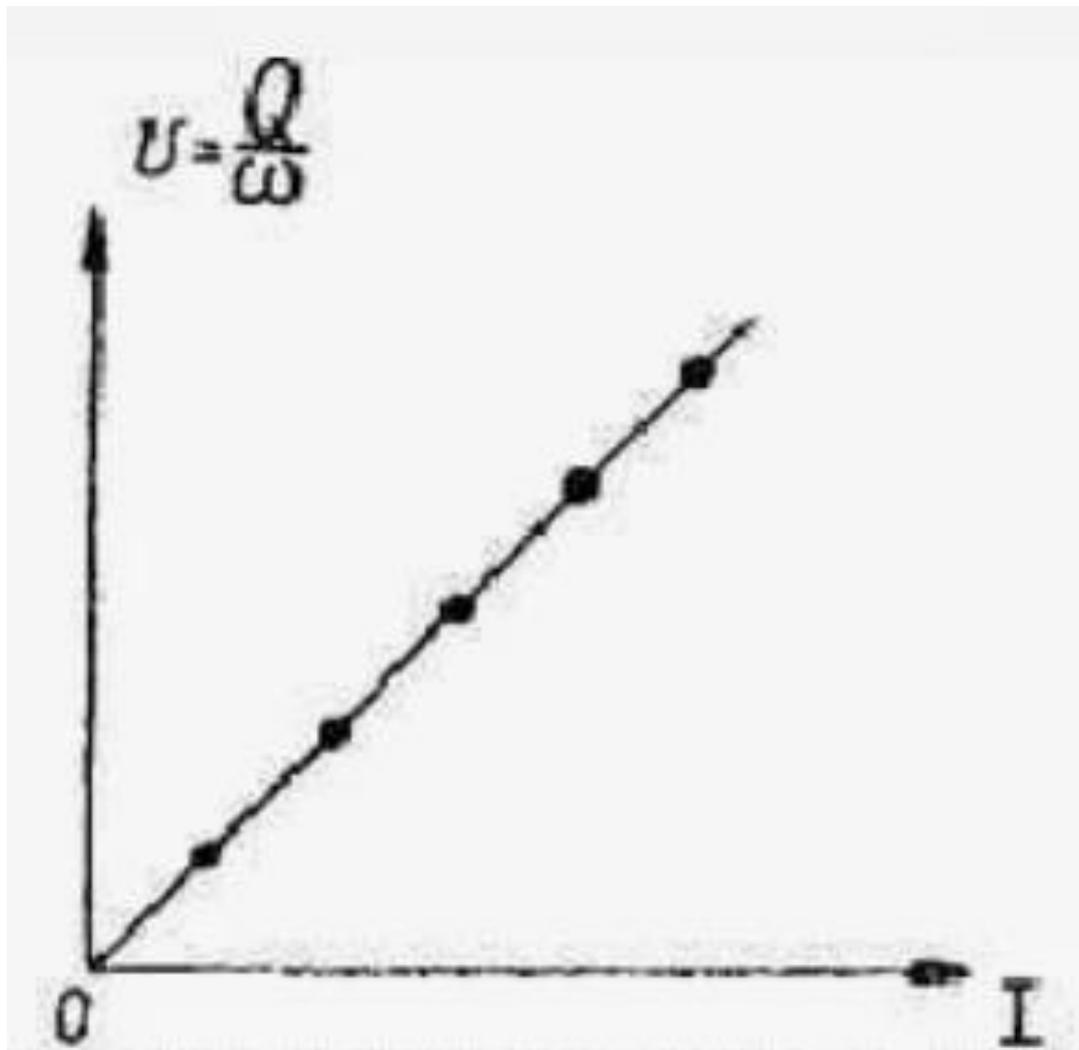


Рис. 2.1. Зависимость скорости жидкости и гидравлическим градиентом.

### 2.1.3. Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности есть частная форма одного из основополагающих законов сохранения – закона сохранения массы. Для гидродинамики данное выражение можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} v + v \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (2.17)$$

Для жидкостей, которые можно считать в рамках модели несжимаемыми, а к таким жидкостям в известном приближении можно отнести, например, воду, в силу постоянной плотности запишем:

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2.18)$$

Теперь перепишем уравнение неразрывности в привычном виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r)}{\partial r} = -\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.19)$$

Подставив сюда скорость, используя известный закон Дарси, преобразуем выражение:

$$\frac{k}{\mu} * \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \rho \frac{\partial P}{\partial r} \right)}{\partial r} = \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Приведём теперь уравнение сжимаемости жидкости:

$$c = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (2.21)$$

Преобразуем его для подстановки в уравнение неразрывности, представив таким образом:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}. \quad (2.22)$$

После простых преобразований сможем получить:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} = c \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.24)$$

И, в итоге, выражение для дифференциала плотности по времени примет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c \rho \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Тогда, после подстановки в уравнение неразрывности, получим данное дифференциальное уравнение:

$$\frac{k}{\mu} * \frac{1}{r} \frac{\partial \left( r \rho \frac{\partial P}{\partial r} \right)}{\partial r} = \varphi c \rho \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Легко заметить, что данное выражение, во-первых, является нелинейным (что усложняет его аналитическое решение), а во-вторых, в нём есть две зависимые переменные – плотность и давление.

Следовательно, можно провести линеаризацию:

$$\frac{1}{r} \left( r \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \rho \frac{\partial P}{\partial r} + r \frac{\partial P}{\partial r} * \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = \frac{\varphi c_t \rho \mu}{k} * \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Сюда подставим следующее выражение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = c_t \rho \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (2.27)$$

Получим тогда:

$$\frac{1}{r} \left( r \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \rho \frac{\partial P}{\partial r} + c_t \rho r \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)^2 \right) = \frac{\varphi c_t \rho \mu}{k} * \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.28)$$

Данное выражение, к счастью, можно упростить, используя простое

классическое допущение – малость частной производной давления по радиусу, что следует из непрерывности (и более того, гладкости) распределения давления в пласте.

Таким образом, квадратом второй частной производной давления по радиусу можно пренебречь:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\varphi c_t \mu}{k} * \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2.29)$$

Мы получили уравнение пьезопроводности, которое является основным уравнением не только в данной работе, но и в целом в отрасли.

Для решения данного уравнения необходимо использовать так называемые граничные условия (как и для нахождения решения любого другого дифференциального уравнения).

Исходя из данного уравнения, можно получить пьезометрические кривые (рис. 2.2)

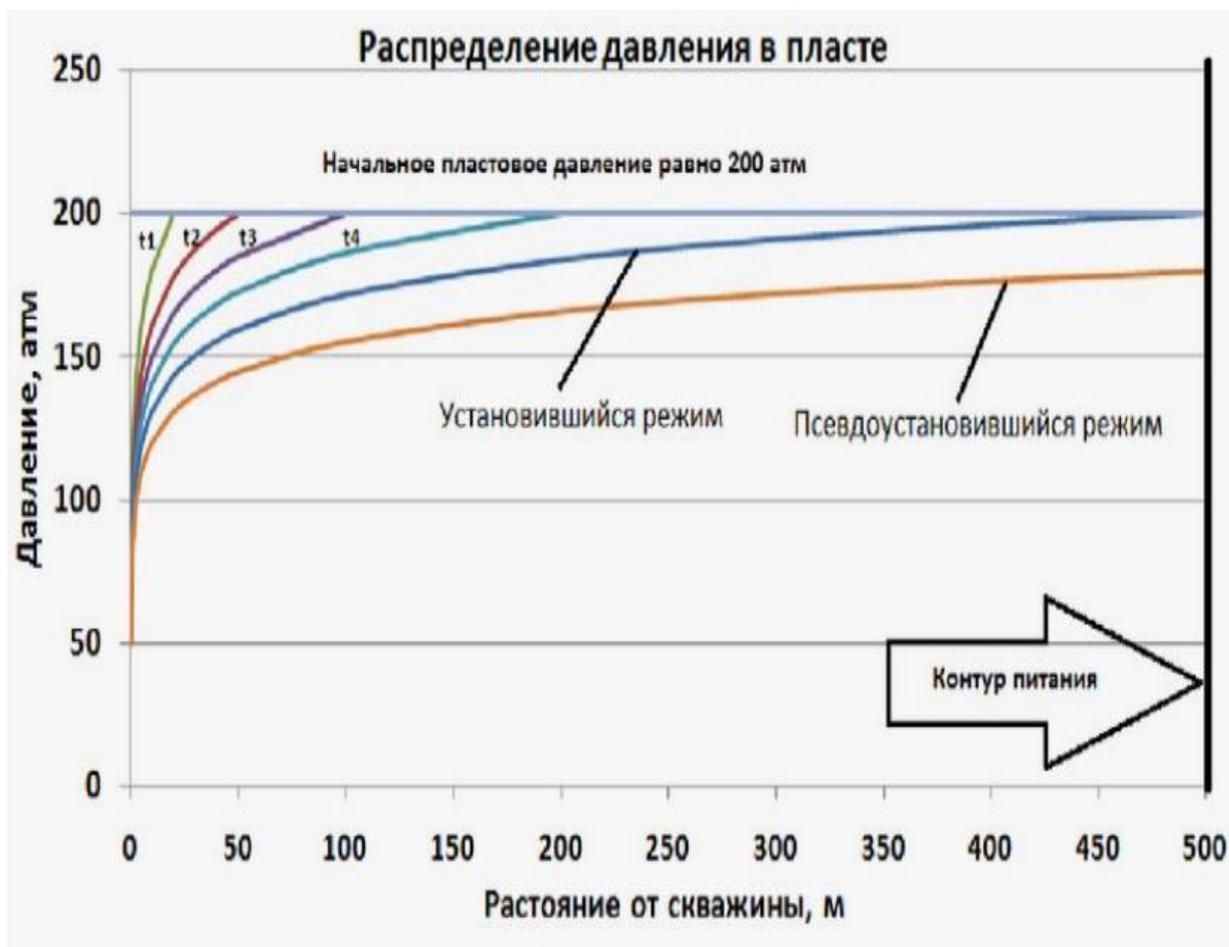


Рис. 2.2. Распределение давление в пласте.

Наибольший интерес, безусловно, представляет нестационарный режим работы скважины. Во-первых, данный режим лучше всего подходит для сбора сведений о пласте, во-вторых, решение данного уравнения при устремлении времени к бесконечности относительно простое.

Приведём, таким образом, график неустановившегося режима (рис. 2.3).

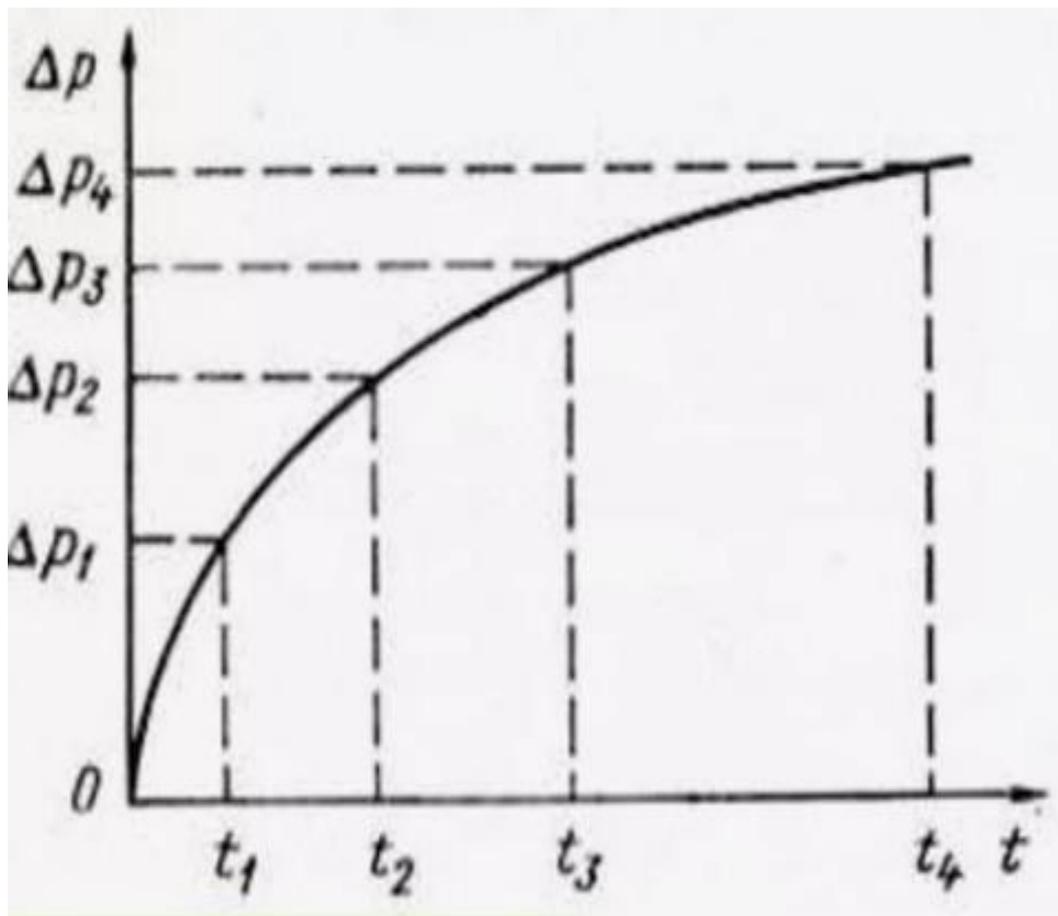


Рис. 2.3. Нестационарный режим на скважине.

Можно заметить, что форма линии близка к логарифмической зависимости. Проверим это на полулогарифмических координатах (рис. 2.4).

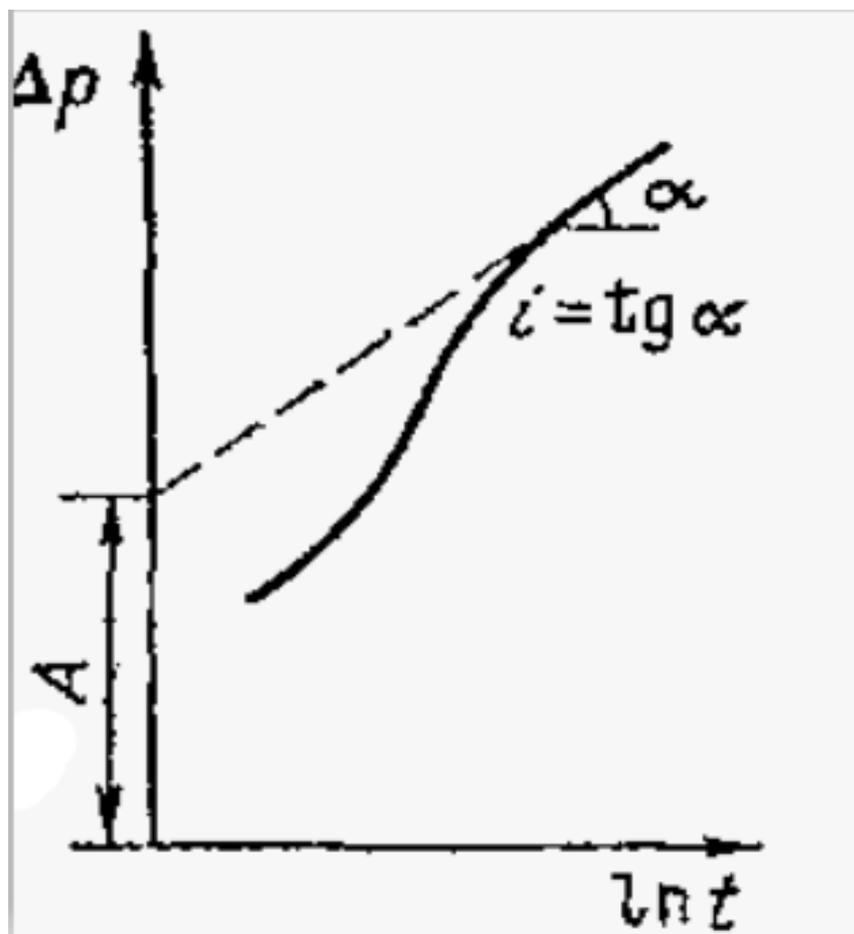


Рис. 2.4. Полулогарифмические координаты, нестационарный режим.

#### 2.1.4. Граничные условия

Распишем возможные граничные условия для уравнения пьезопроводности. В первую очередь опишем граничное условие на скважине. В данной задаче рассматривается вертикальная скважина, таким образом, получим:

$$(u_r)_{r=r_w} = -\frac{q_{sf}B}{2\pi r_w h} = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_w}, \quad (2.30)$$

что эквивалентно:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_w} = -\frac{q_{sf}B\mu}{2\pi kh} * \frac{1}{r_w}. \quad (2.31)$$

Для внешних граничных условий характерны также ограничения для

давления. Пусть пласт считаем бесконечным, тогда получим:

$$P(r, t) = P_i, \quad (2.32)$$

$$r \rightarrow \infty.$$

Для пласта конечных размеров данное выражение преобразуется в следующее:

$$P(r_e, t) = 0. \quad (2.33)$$

Или же так:

$$P(r_e, t) = P_i. \quad (2.34)$$

Таким образом, все возможные граничные условия можно считать описанными в данном параграфе. Далее перейдём непосредственно к выводу выражений для нестационарного пласта, испытывающего возмущающее воздействие от скважины, работающей в периодическом режиме.

## 2.2. Математическая модель

В предыдущем разделе нами был подробно разобран вывод основного уравнения гидродинамики – уравнения пьезопроводности. Данное дифференциальное уравнение в контексте поставленной задачи позволяет получить необходимое решение.

Любая физическая модель, используемая для получения практических результатов в современном мире, должна иметь возможность обратиться к численным методам. Таким образом, в данном разделе задачей можно считать получение итоговых выражений для оптимизации модели.

Кроме того, в данном разделе будут подробно описаны численные методы, к которым прибегает автор для создания программы.

### 2.2.1. Вывод итоговых уравнений

Выведем теперь итоговые уравнения, основываясь на уравнении пьезопроводности. Рассмотрим случай гармонического возбуждения пласта. Пусть дебит скважины изменяется по закону:

$$q(t) = q_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T_k}\right), \quad (2.35)$$

Где  $T_k$  – период колебаний.

В комплексной форме:

$$q(t) = q_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{T_k}t}, \quad (2.36)$$

где  $q(t)$  – некоторая комплексная величина, действительная часть которой удовлетворяет уравнению (2.35).

Используя метод разделения переменных, будем искать частное решение уравнения упругого режима (2.37) фильтрации:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.37)$$

где  $t$  – время,  $p$  – давление,  $r$  – радиус,  $\chi$  – коэффициент пьезопроводности.

$$p_1 = v(r)\varphi(t), \quad (2.38)$$

где  $p_1 = p - p_{\text{нач}}$ .

Используя условие, что давление в пласте со временем также будет представлять собой гармоническую функцию времени, положим

$$\varphi(t) = e^{i\frac{2\pi}{T_k}t}, \quad (2.39)$$

и частное решение представим в виде:

$$p_1 = v(r)e^{i\frac{2\pi}{T_k}t}, \quad (2.40)$$

Подставим (2.40) в (2.37) и получим

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = \frac{i}{\chi} \frac{2\pi}{T_k} v(r) \quad (2.41)$$

Введем переменную  $z = r \sqrt{\frac{i}{\chi} \frac{2\pi}{T_k}}$

$$v''(z) + \frac{1}{z}v'(z) - v(z) = 0$$

Общий интеграл этого уравнения может быть представлен в виде

$$v(z) = AI_0(z) + BK_0(z), \quad (2.42)$$

где  $I_0(z)$  и  $K_0(z)$  – функции Бесселя 1-го и 2-го рода от мнимого аргумента.

Подставляя (2.42) в (6), получим

$$p_1(z) = [AI_0(z) + BK_0(z)]e^{i\frac{2\pi}{T_k}t}, \quad (2.43)$$

Имея ряд граничных условий для бесконечного пласта (2.44), постоянного давления на границе (2.45), отсутствия перетока на границе пласта (2.46), а также начального условия (2.47):

$$A = 0, \quad (2.44)$$

$$p_1(z_e) = 0, \quad (2.45)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_e} = 0, \quad (2.46)$$

$$-\frac{2\pi kh}{\mu} \left(r \frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_c} = 0, \quad (2.47)$$

где  $z_e = r_e \sqrt{\frac{i}{\chi} \frac{2\pi}{T_k}}$ ,  $r_e$  – радиус пласта, получим частные решения для распределения давления в пласте,  $k$  – проницаемость,  $h$  – мощность пласта,  $\mu$  – вязкость,  $r_c$  – радиус скважины.

Любой периодический процесс можно рассматривать как сумму гармонических колебаний, отличающихся амплитудой и частотой. Таким образом, учитывая принцип суперпозиции, проведя БПФ, получим ряд амплитуд

и соответствующих им частот и сдвигов фаз. Решая задачу с помощью описанного алгоритма для каждой амплитуды и объединив их, можно получить распределение давления в пласте для сложной динамики дебита.

Применяя преобразование Лапласа, преобразуем уравнение упругого режима фильтрации в радиальном пласте в уравнение вида

$$P''(r, s) + \frac{1}{r} P'(r, s) - \frac{s}{\chi} P(r, s) + \frac{p_o(r)}{\chi} = 0, \quad (2.48)$$

где  $p_o = p(0, t) = const$ ,  $P$ -изображение давления по Лапласу,  $s$  – оператор Лапласа.

Это уже встречавшееся (2.43) уравнения Бесселя. Решение этого уравнения для случая  $p_o(r) = 0$  имеет вид:

$$P(r, s) = AI_0\left(r \sqrt{\frac{s}{\chi}}\right) + BK_0\left(r \sqrt{\frac{s}{\chi}}\right), \quad (2.49)$$

Зная изменения дебита и применяя преобразование Лапласа, получим

$$L(q) = -\frac{2\pi kh}{\mu} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=r_c}, \quad (2.50)$$

которое вместе с краевыми условиями можно использовать для получения частных решений для условий бесконечного пласта, постоянного давления на границе, отсутствия притока на границе.

Применяя обратное преобразование Лапласа можно получить распределение давление в пласте. Для функций, имеющих высокую частоту изменения, традиционные методы преобразования (алгоритм Стефеста) могут показывать неудовлетворительные результаты. Данная модель в качестве численного обратного преобразования Лапласа использует алгоритм Дабнера.

### 2.2.2. Дискретное преобразование Фурье

Для разложения сложных периодических непрерывных функций на гармоники используется разложение на ряды Фурье. Представим основные формулы:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.51)$$

Где коэффициентами выступают:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (2.52)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad (2.53)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad (2.54)$$

Наглядную демонстрацию разложения Фурье можно увидеть на графике (рис. 2.5).

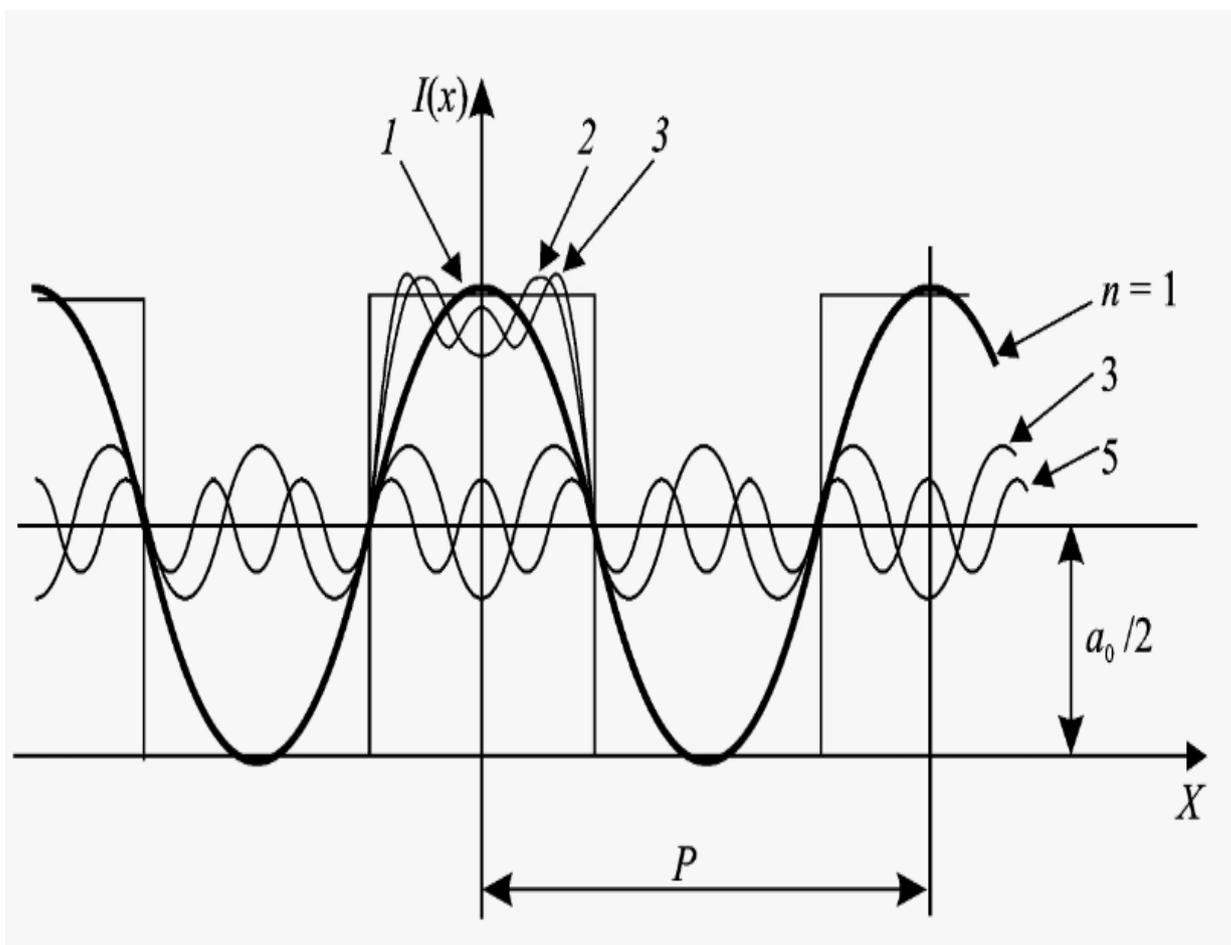


Рис. 2.5. Разложение функции в ряд Фурье.

На графике представлено разложение кусочно-непрерывной функции на гармоники. Стоит отметить, что для такой функции (она имеет особое значение для нефтедобывающей отрасли, так как зачастую именно так задаётся дебит), разложение в ряд Фурье даёт следующий результат:

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos \omega x - \frac{1}{3} \cos 3\omega x + \frac{1}{5} \cos 5\omega x + \dots \right), \quad (2.55)$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\cos(2k-1)\omega x}{2k-1}. \quad (2.56)$$

Необходимо отметить, что вследствие отсутствия гладкости (кусочно-непрерывная функция имеет неустранимые разрывы первой же производной) разложение данной функции имеет искажения в точках разрыва производной (эффект Гиббса).

Так как в данном случае исходные данные – данные о дебите и давлении в конкретные интервалы времени, можно воспользоваться двумя методами, а именно: использовать интерполяцию для получения гладкой функции, что обязательно повлечёт за собой погрешность (интерполирующий полином будет обладать другими производными), или же воспользоваться дискретным преобразованием Фурье. В данной работе будет использован второй метод.

Воспользуемся преобразованием Фурье для некоторой функции:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.57)$$

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}.$$

Теперь будем считать, будто в периоде – N отсчётов. Тогда:

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k t_n}, \quad (2.58)$$

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn}. \quad (2.59)$$

Где:

$$t_n = \frac{n}{N} T. \quad (2.60)$$

Используя главное свойство периодической функции, а именно:

$$e^{\frac{2\pi i}{N}(k+mN)n} = e^{\frac{2\pi i}{N}kn}. \quad (2.61)$$

Преобразуем выражение:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn}. \quad (2.62)$$

Коэффициенты имеют следующий вид:

$$X_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{k+lN}. \quad (2.63)$$

Теперь, проведя преобразования, выведем:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)n}, \quad (2.64)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \frac{1 - e^{2\pi i(k-m)}}{1 - e^{\frac{2\pi i(k-m)}{N}}}, \quad (2.65)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k N \delta_{km}. \quad (2.66)$$

Таким образом, получаем, что:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn}. \quad (2.67)$$

Данное выражение есть дискретное преобразование Фурье. Запишем его в более привычном виде.

$$X_n = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-\frac{2\pi i}{N}nm}, \quad (2.68)$$

$$x_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{\frac{2\pi i}{N}mn}. \quad (2.69)$$

Примером дискретного преобразования Лапласа может послужить спектр амплитуд и частот (рис. 2.6).

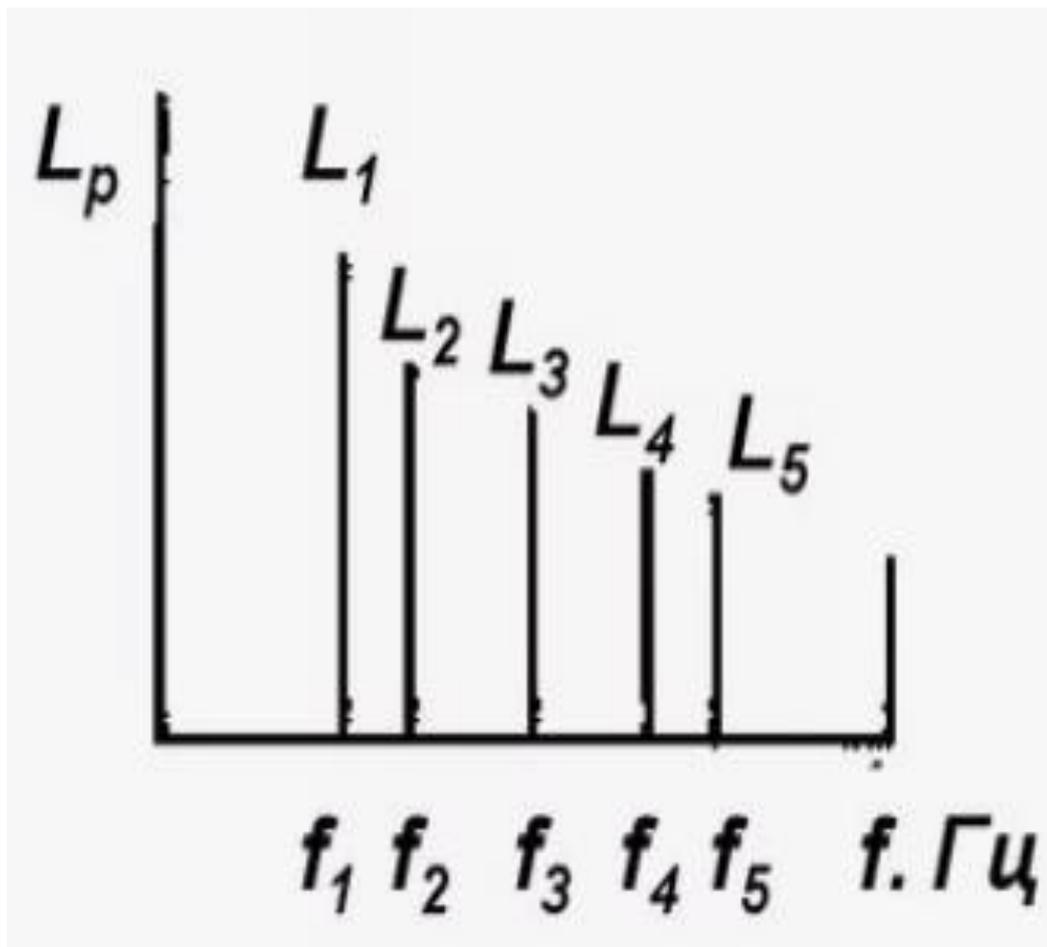


Рис. 2.6. Частотная характеристика сигнала.

Теперь можно перейти к обратному преобразованию Лапласа.

### 2.2.3. Обратное преобразование Лапласа

В методах математической физики особое место занимает преобразование Лапласа, так как оно позволяет значительно упростить некоторые выражения. В первую очередь полезны свойства дифференцирования и умножения в данном пространстве.

Преобразование осуществляется по данной формуле:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.70)$$

И для обратного преобразования используем:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1 - i\omega}^{\sigma_1 + i\omega} e^{st} F(s) ds. \quad (2.71)$$

Дискретное преобразование Лапласа в программировании осуществляется следующим образом. Для функции такого вида:

$$x_d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) * \delta(t - nT). \quad (2.72)$$

Применяем следующее:

$$\mathcal{D}\{x_d(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) * e^{-snT}. \quad (2.73)$$

Для производной будет верно выражение:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s * F(s) - f(0^+). \quad (2.74)$$

Или, с другой стороны:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -xf(x). \quad (2.75)$$

Опишем алгоритм Стефеста для обратного преобразования Лапласа. Данный алгоритм является наиболее простым и используемым в численных методах.

Рассмотрим следующее выражение:

$$\rho_n(b, t) = b \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} (1 - e^{-bt})^n e^{-nbt}, \quad (2.76)$$

$$b > 0,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\bar{P}_n = \int_0^{\infty} P(t) \rho_n(b, t) dt. \quad (2.77)$$

В данной работе используется метод Дабнера-Абата:

$$g_N(x, z, t) = \frac{1}{2} C_0 + \sum_{k=1}^N C_k. \quad (2.78)$$

Особенно удобно, что при этом:

$$C_k = \frac{1}{L} e^{ct} \operatorname{Re} \left[ e^{\frac{ik\pi t}{L}} \bar{f} \left( x, z, c + \frac{ik\pi t}{L} \right) \right]. \quad (2.79)$$

#### 2.2.4. Решение обратной задачи

Для решения обратной задачи использовано многократное повторение алгоритма решения прямой задачи при вариации значений пьезопроводности. Таким образом, численными методами сигнал раскладывается на гармоники, затем производится обратное преобразование Лапласа.

В качестве первичного приближения используется следующая формула:

$$p(R) = \frac{2 * q * \mu}{kh\pi^2} * \sqrt[4]{\frac{\pi * T * x}{8 * R^2}} * e^{-R * \sqrt{\frac{\pi}{xT}}}. \quad (2.80)$$

Также первичное приближение можно получить из отбора керна. Стоит отметить, что в общем случае давление меняется тем быстрее (и тем больше амплитуда на возмущённой скважине), чем выше проницаемость пласта. Таким образом, например, можно реализовать бинарный поиск, который использует вычислительные ресурсы относительно эффективно.

В качестве меры эффективности метода используется минимизация среднеквадратичной ошибки.

## ГЛАВА 3. ПРОВЕРКА МОДЕЛИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В предыдущей главе были описаны численные методы, реализованные в данной модели на языке программирования Python. Также дано обоснование аналитических выражений, которые лежат в основе решения.

В данной главе в первую очередь будет изучаться практическая часть: результаты, полученные благодаря созданной модели, проверка данных результатов с помощью tNavigator, особенности алгоритма, которые были добавлены после данных проверок.

Итоговым результатом данной главы следует считать выводы о практической применимости алгоритма.

### 3.1. Применимость метода

Для проверки применимости метода необходимо найти расстояние, на котором прибор сможет уловить вызываемые возмущения. Для нахождения пьезопроводности в пласте с вертикальной скважиной, работающей с гармоническим дебитом, необходимо применить полученное 8 уравнение к каждой точке пласта.

В случае, если дебит является квазигармоническим, необходимо разложить сигнал на гармоники при помощи разложения в ряд Фурье, затем провести суммирование, используя полученные амплитуды и разности фаз, и найти максимум на периоде для каждой точки.

В виде поверхности представлены результаты моделирования для вертикальной скважины (рис. 3.1).

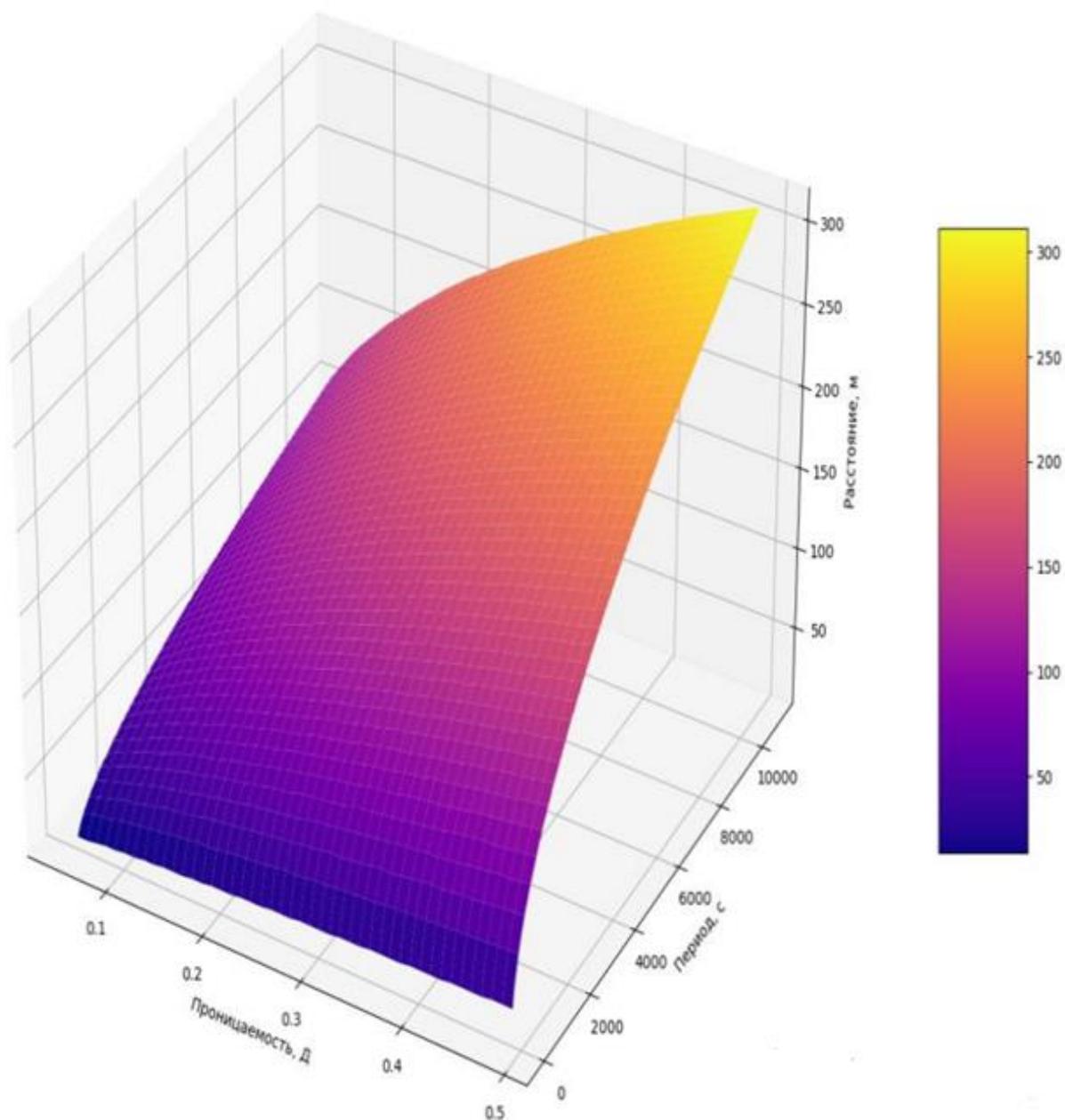


Рис. 3.1. Распределение давления в пласте

Расстояние, отложенное по оси  $z$ , является максимальным, на котором прибор с точностью измерения 0.001 атмосфер сможет зафиксировать возмущение.

Таким образом, было выяснено, что лучше всего метод работает на малых расстояниях (не более 100 метров для пластов с малой проницаемостью).

Также имеет смысл представить более наглядный график (рис. 3.2).

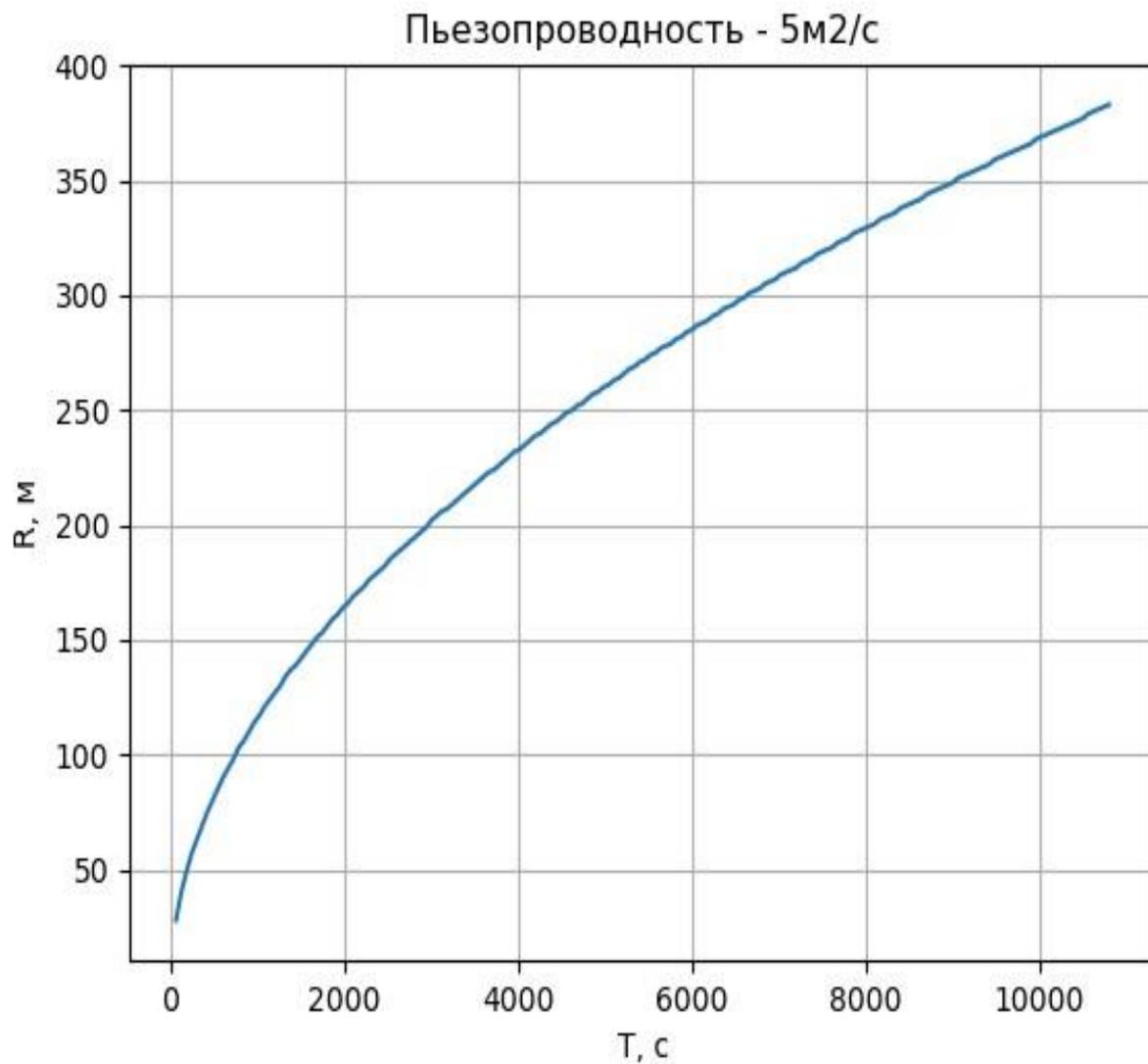


Рис. 3.2. Зависимость расстояния от периода

Также был получен график для зависимости пьезопроводности от разности фаз от расстояния. Он также представлен здесь (рис. 3.3).

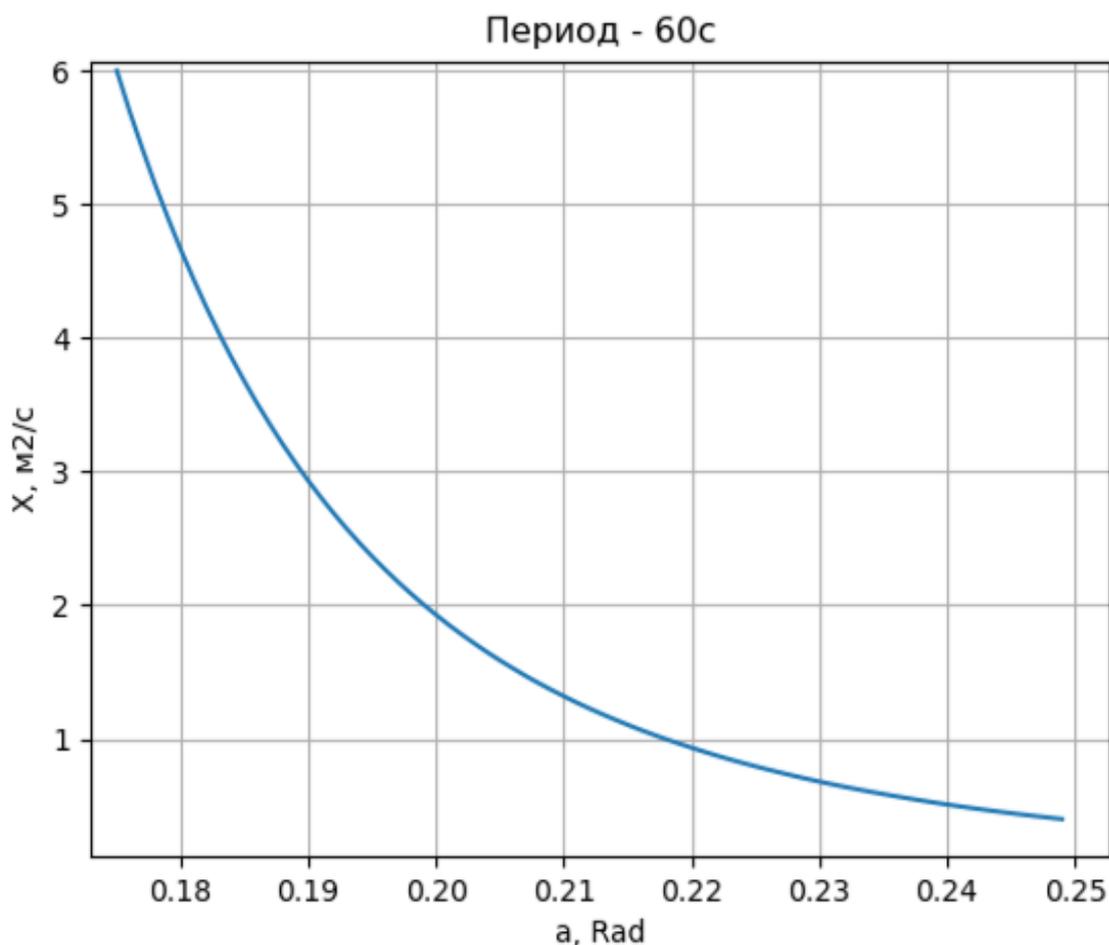


Рис. 3.3. Зависимость пьезопроводности от разности фаз

Таким образом, задачу изучения вертикальной скважины можно считать изученной.

Кроме того, была получена модель горизонтальной скважины. Для неё имеет смысл провести следующее упрощение: можно считать, что каждая точка горизонтальной скважины есть вертикальная скважина (в численном решении, конечно, данное упрощение сводится к конечному числу вертикальных скважин, достаточно большому относительно размеров горизонтальной скважины).

Таким образом, дебит делится на число фиктивных вертикальных скважин, и каждая вертикальная скважина будет являться источником возмущающих колебаний. Подобные модели не новы в физике: например,

таким образом получают распределение электростатического поля для заряженной бесконечно тонкой нити.

Результатом данного исследования является распределение давления в пласте с горизонтальной скважиной (рис. 3.4)

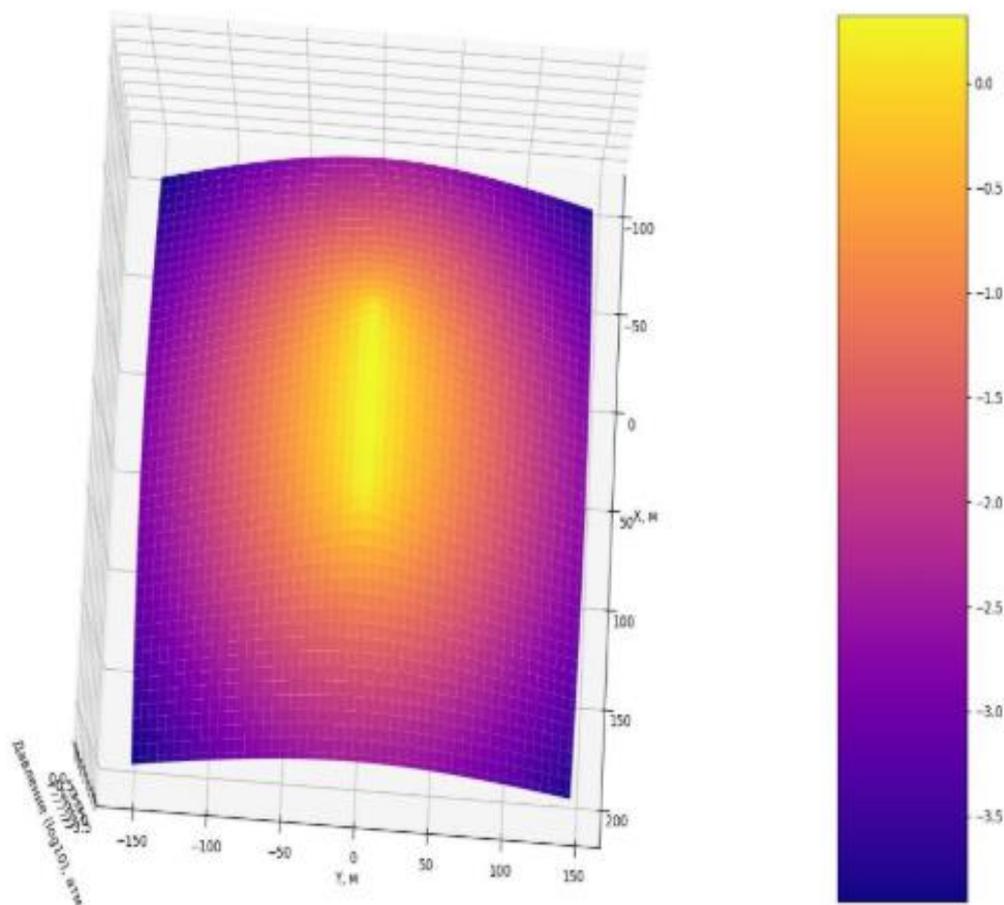


Рис. 3.4. Распределение давления в пласте с горизонтальной скважиной

Таким образом, можно считать, что алгоритм является применимым для малых расстояний при малых проницаемостях. Безусловно, на работу алгоритма напрямую будет влиять точность приборов.

Представим результаты для периодической горизонтальной скважины в виде плоскости (рис. 3.5).

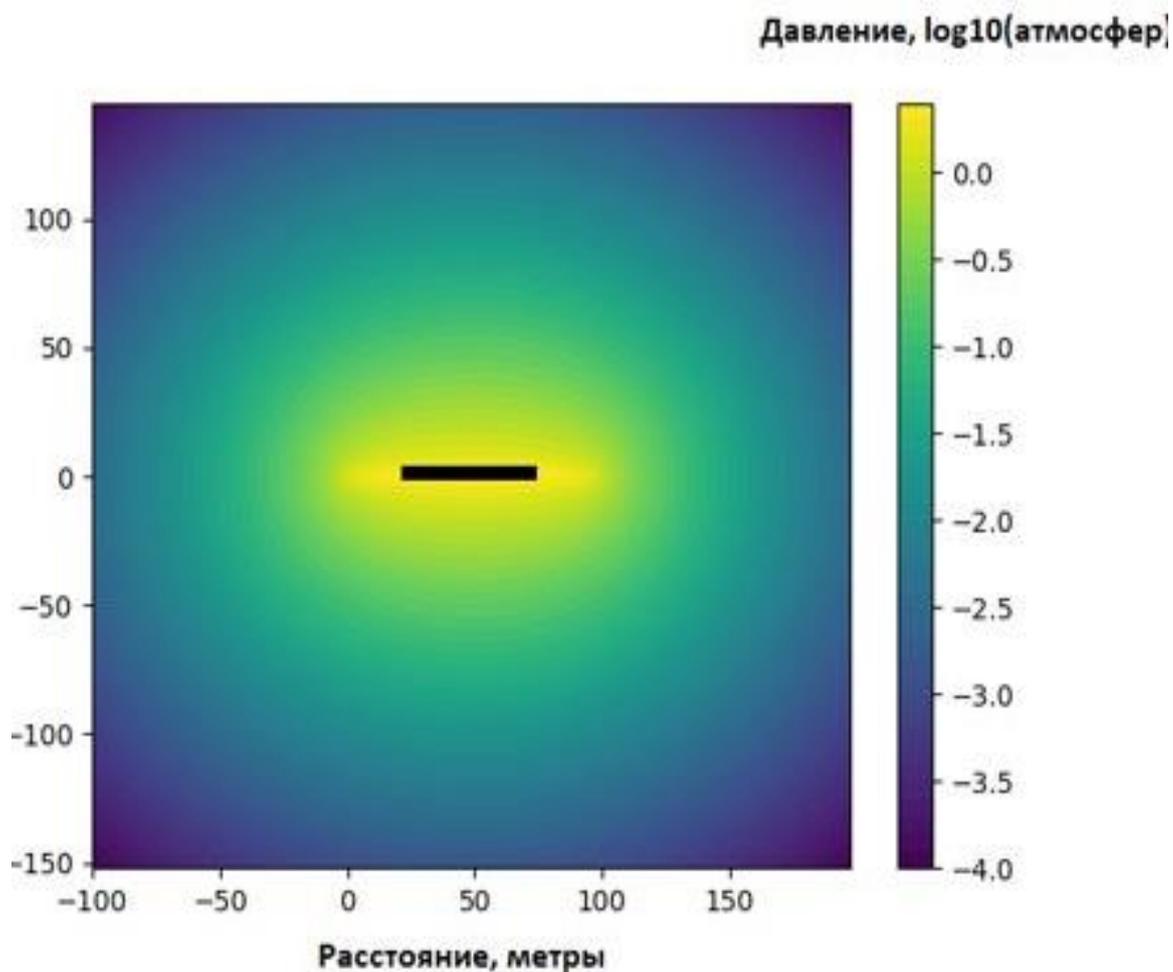


Рис. 3.5. Горизонтальная скважина, плоскость

Теперь можно переходить к практической применимости алгоритма.

### 3.2. Синтетическая модель

Для апробирования технологии требуется поставить граничные условия бесконечного пласта. В ином случае при проверке технологии на достаточно малом пласте давления во всём пласте становится примерно равным минимальному давлению за период на забое (рис. 3.6), а затем не изменяется, так как пластовое давление превышает забойное.

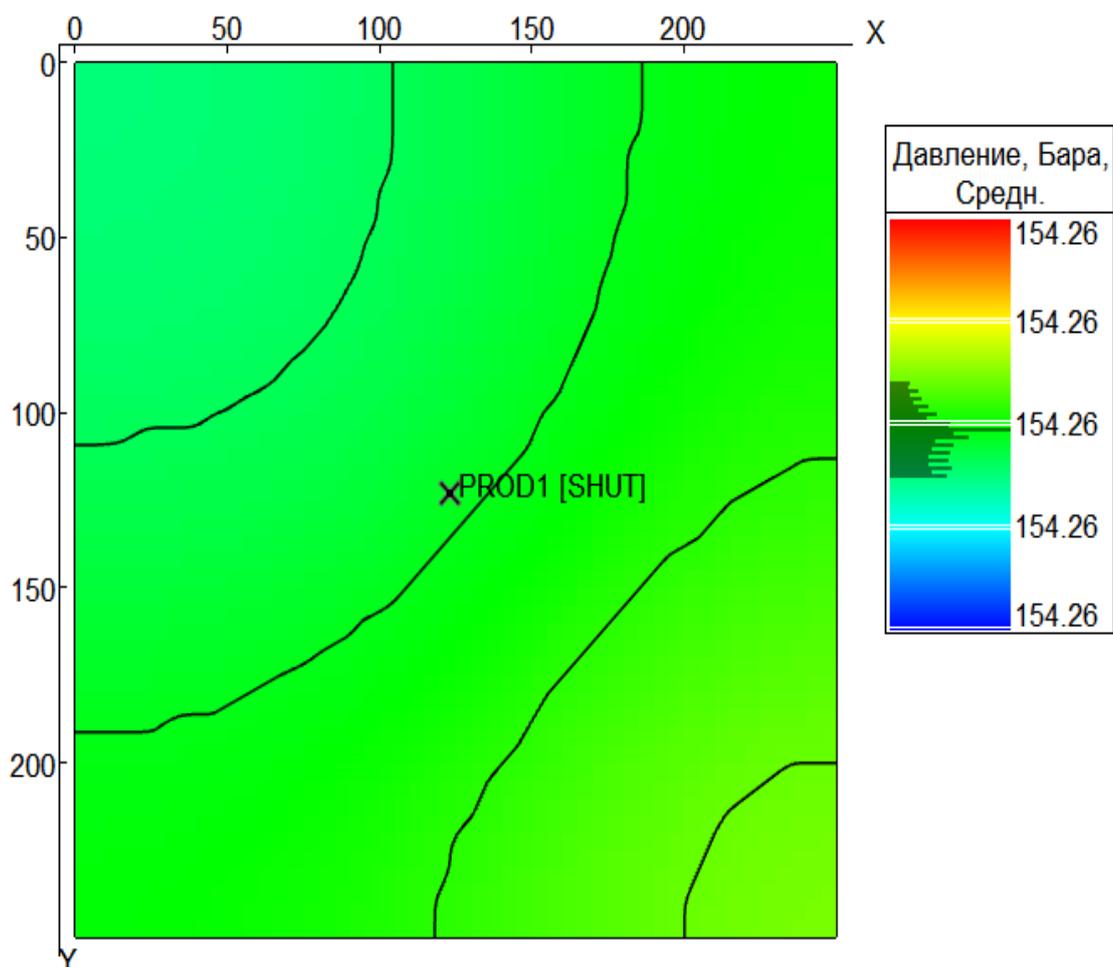


Рис. 3.6. Пласт в tNavigator

Для решения данной проблемы использован приток аквифера. Это позволяет поддерживать давление на границе пласта, таким образом, воссоздаются необходимые условия.

Стоит учитывать, что для повышения эффективности метода сетку необходимо ставить относительно мелкой (не более 5 метров по каждой из осей). При этом на эффективности метода напрямую сказывается частота заданных давлений на забое (что следует из интерполирования заданных значений).

Тогда распределение давлений в пласте будет выглядеть по-другому. Отметим, что для удобства была построена карта изобар (рис. 3.7).

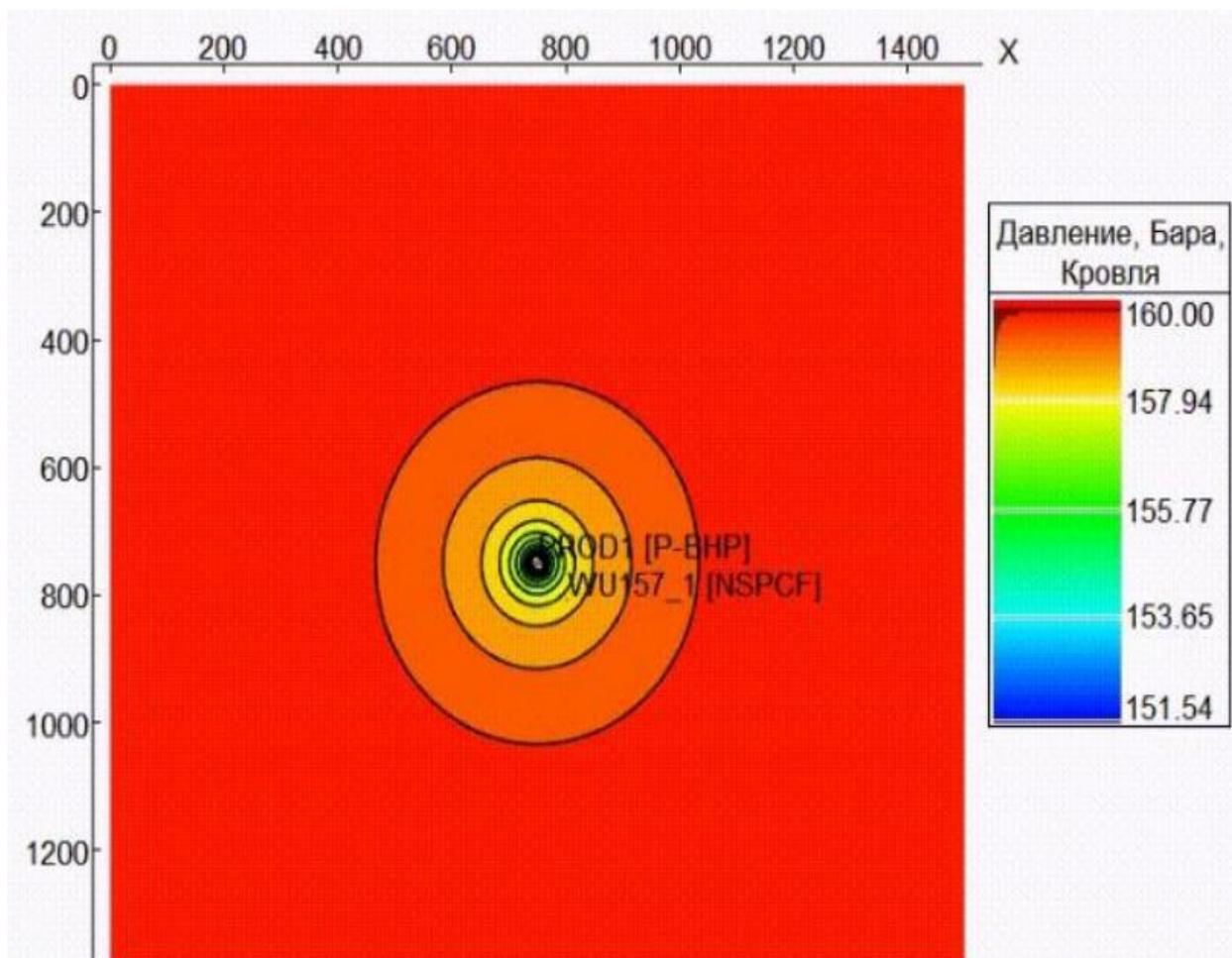


Рис. 3.7. Распределение давлений в периодическом пласте

Дальнейшее решение обратной задачи приведено ниже. Отметим, что данные для tNavigator были заданы посуточно.

### 3.2.1. Результаты для обратной задачи

Отметим, что для решения обратной задачи удобно использовать упрощённое решение, основанное на данных с двух возмущаемых скважин, в том случае, если это возможно:

$$\frac{p(R_1)}{p(R_2)} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} * e^{(-R_1+R_2)\sqrt{\frac{\pi}{xT}}}. \quad (3.1)$$

Кроме того, была получена формула, не требующая подбора (она использует численные функции).

Покажем результаты работы программы для разложения функции в ряд Фурье (рис. 3.8):

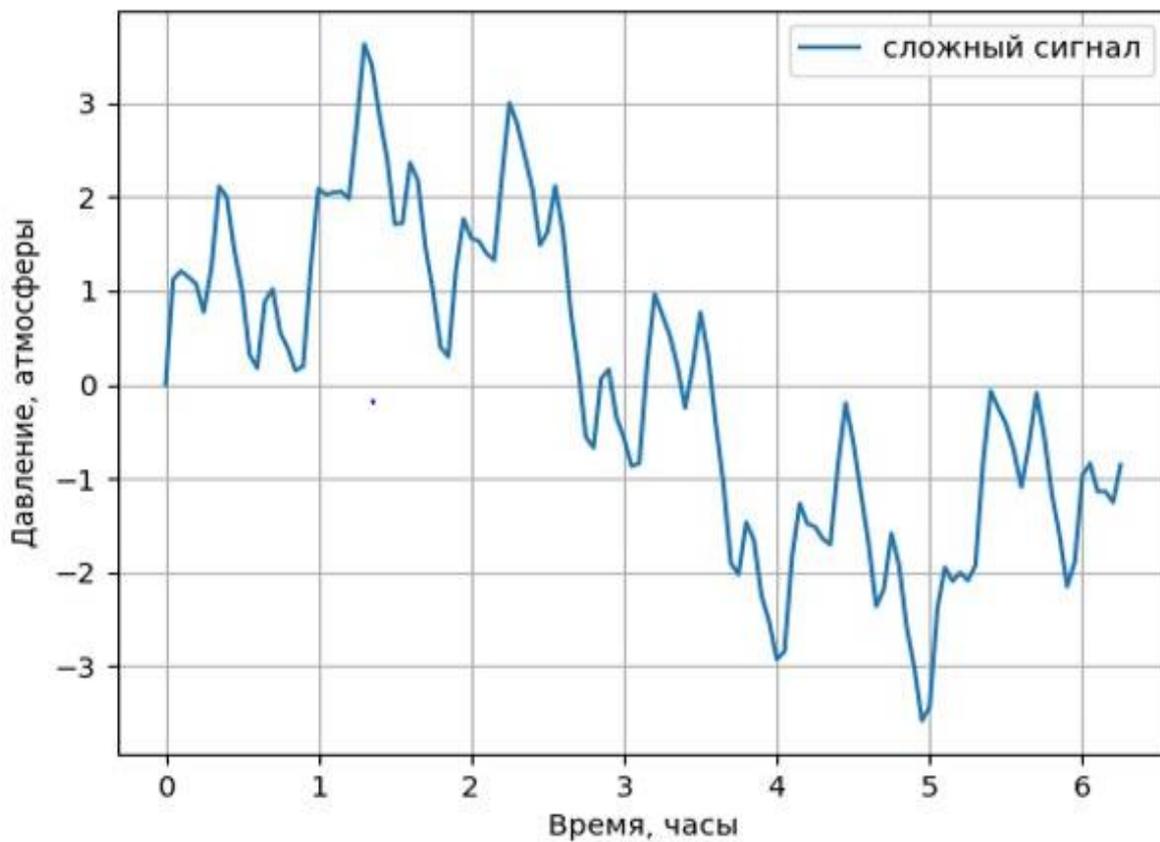


Рис. 3.8. Сложный сигнал

Представим результат после дискретного преобразования Фурье (рис. 3.9):

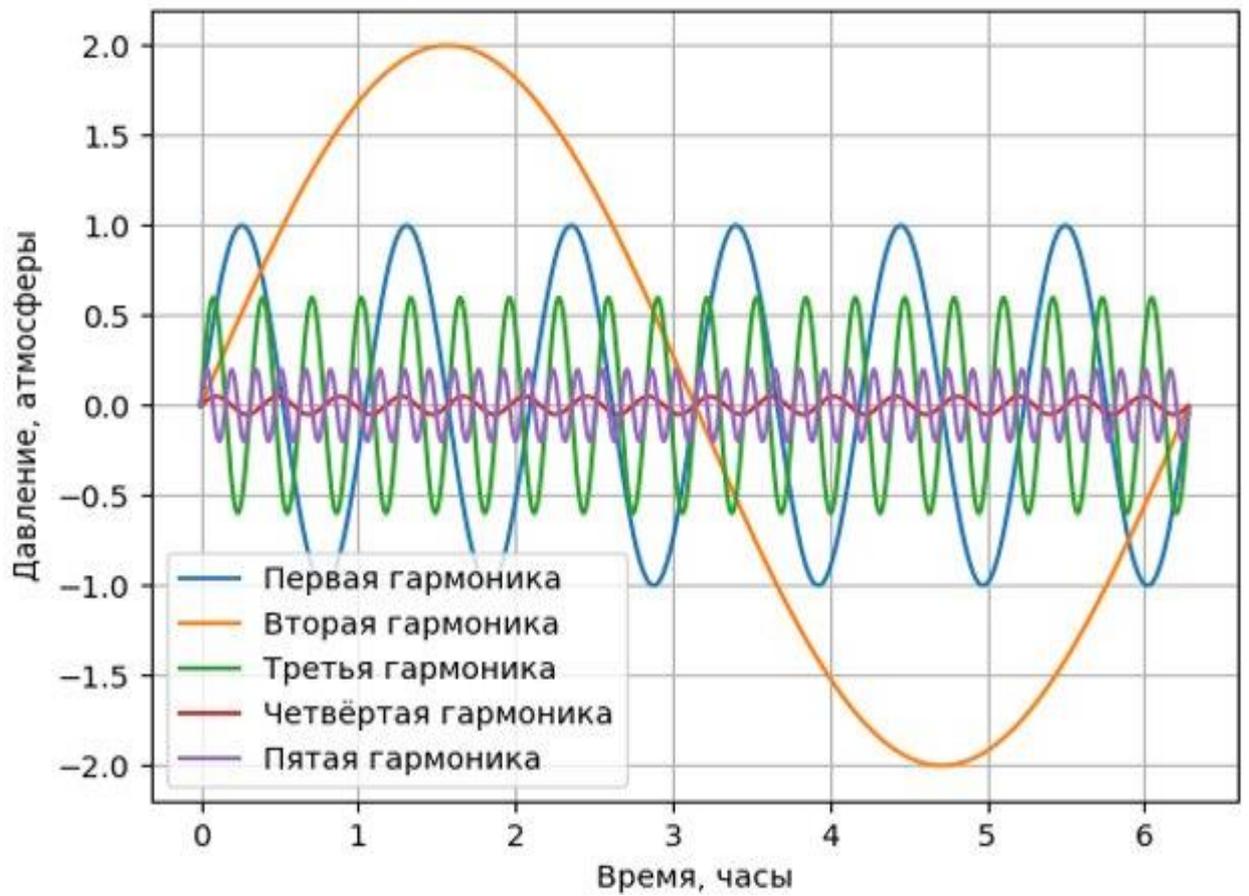


Рис. 3.9. Разложенный сигнал

Представим теперь данные о давлении из tNavigator (рис. 3.10):

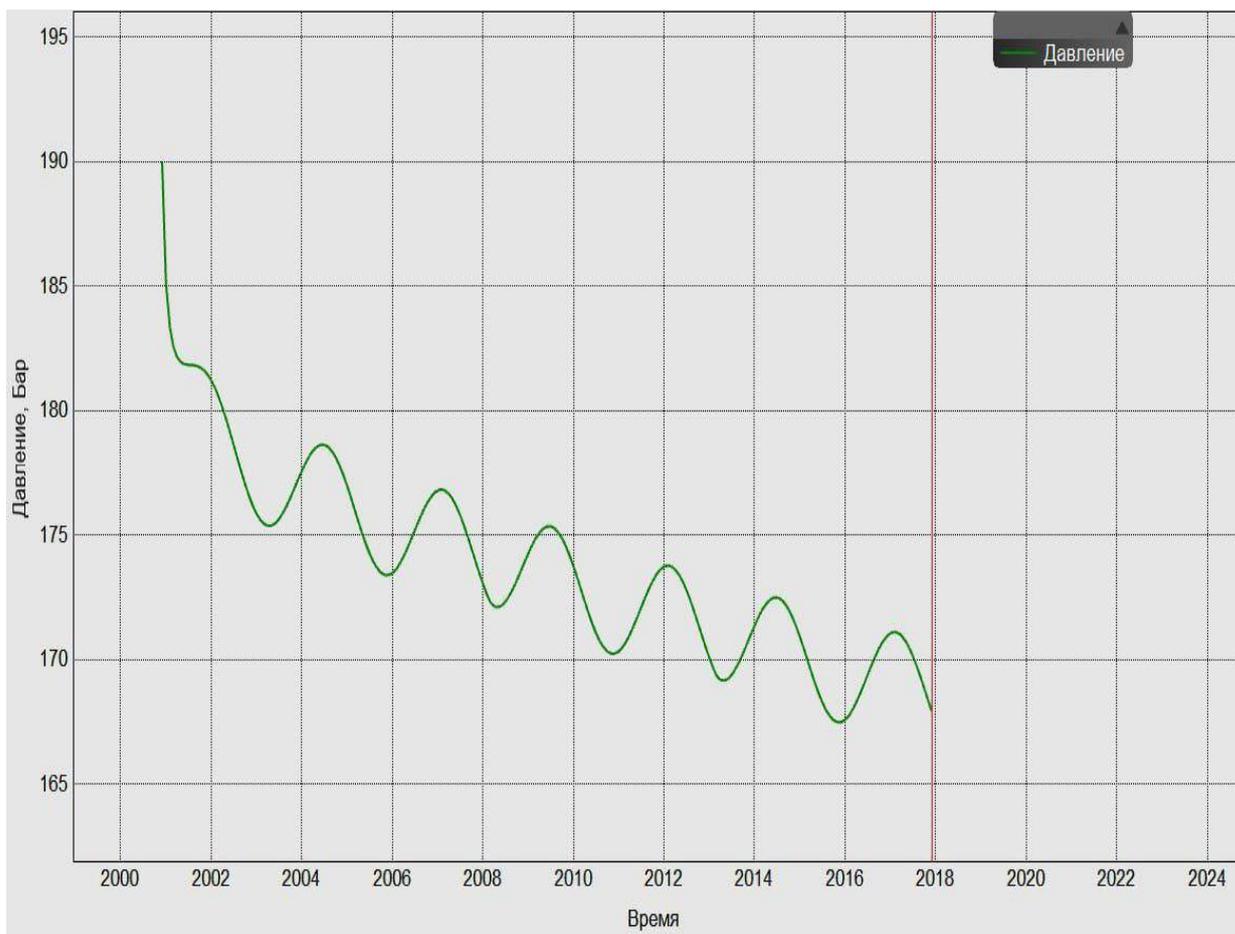


Рис. 3.10. Давление в пласте на расстоянии 60 метров

Для удобства далее будут приведены графики, полученные в специальной программе (они по точкам повторяют данные из tNavigator). Приведём теперь результаты проверки.

Таким образом, покажем квадратичную ошибку при разных проницаемостях (рис. 3.11):

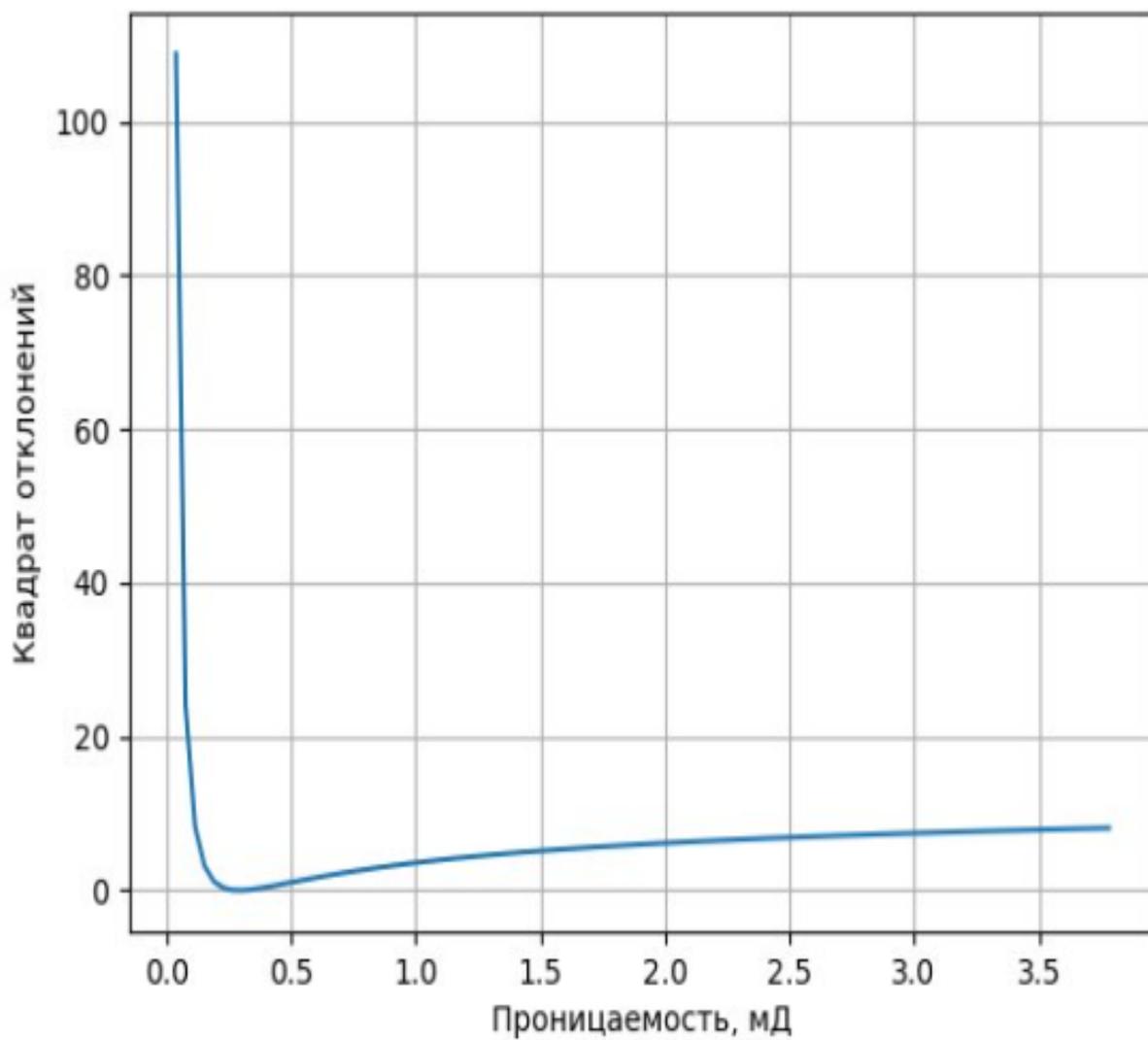


Рис. 3.11. Квадратичное отклонение

Для уточнения результатов следует увеличить график (рис. 3.12):

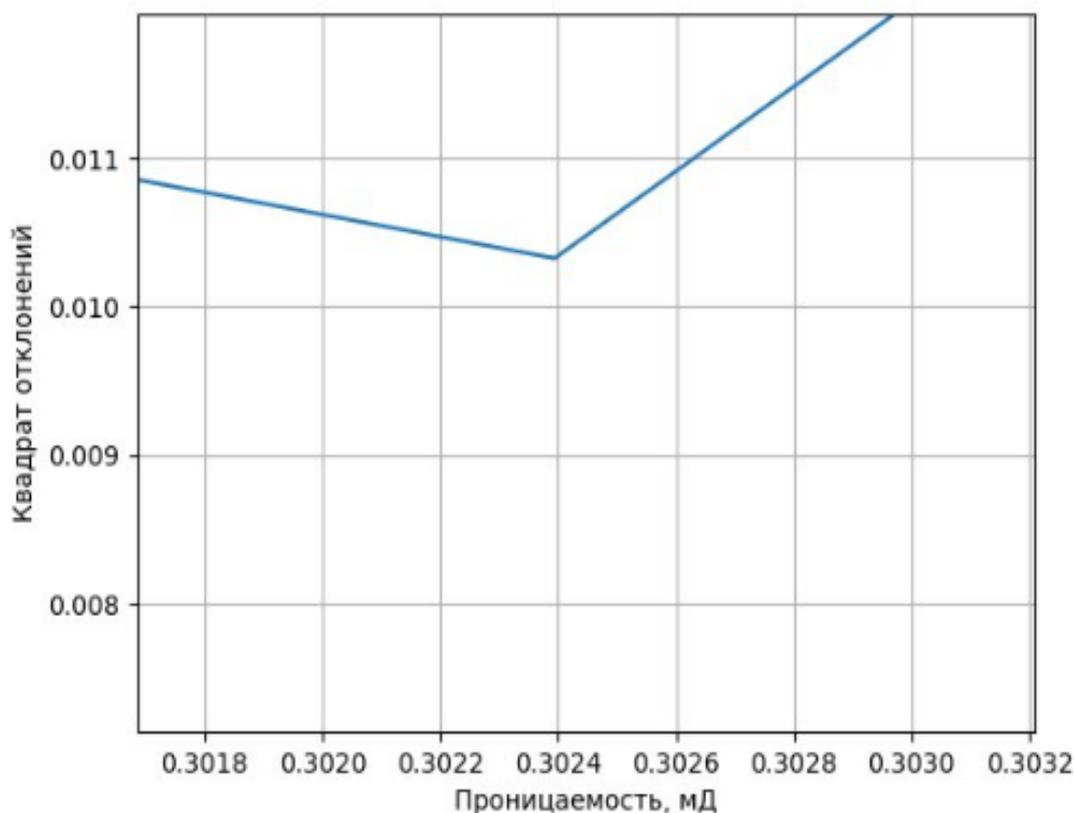


Рис. 3.12. Квадратичное отклонение, высокая точность

Итак, итоговая ошибка составляет 0.8%. Очевидно, это доказывает эффективность модели. Итоговая ошибка следует из дискретности данных, используемых tNavigator для численного решения (используется метод конечных разницей).

### 3.2.2. Гауссовская ошибка

В реальной жизни любым полученным данным, к сожалению, сопутствует шум. Имеет смысл проверить устойчивость алгоритма к случайному шуму.

Гауссовский шум определяется следующей формулой:

$$p_G(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.2)$$

Теперь представим графики и результаты проверок (рис. 3.13):



Рис. 3.13. Давление с шумом, первая проверка

Для избавления от чрезмерной погрешности в качестве подавления шума выступает усреднение данных (повышается дискретность данных), результат представлен здесь (рис. 3.14):



Рис. 3.14. Усреднённая ошибка

Итоговая ошибка после усреднения составляет 8%, что значительно хуже, чем без шума. При этом данный результат позволяет использовать программу на практике, так как такая точность значительно превышает возможности отбора керн.

Представим теперь, что максимальная ошибка в два раза больше (рис. 3.15):



Рис. 3.15. Гауссовская ошибка, второй тест

После усреднения ошибки получим (рис. 3.16):



Рис. 3.16. Усреднённая ошибка, тест 2

### 3.2.3. Тест для сложных сигналов

В предыдущих главах представлены тесты с гармоническим возмущающим давлением. Представим теперь результаты для сложных возмущающих колебаний.

Получим сложный сигнал (рис. 3.17).



Рис. 3.17. Сложный сигнал давлений

Для данного сигнала погрешность составила всего 1%. Таким образом, апробирование методологии можно считать успешным. В дальнейшем имеет смысл проверить метод

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе была всесторонне изучена задача гидропрослушивания, в особенности же периодического гидропрослушивания. Изначально изучался аналитический материал, позволяющий из основных уравнений механики получить выражения для решения данной задачи. Эти аналитические выражения достаточно сложны и не имеют точного, то есть аналитического решения.

Вторым этапом являлось изучение численных методов, позволяющих создать эффективную вычислительную программу, которая на основании данных, которыми являются в данном случае точки давления, способна получить распределение давления во всём пласте.

Основными численными методами является классическое дискретное преобразование Фурье и значительно более сложное численное обратное преобразование Лапласа. Для решения данной проблемы чаще всего используется алгоритм Стефеста, который плохо подходит для задачи периодического пласта. Поэтому был изучен алгоритм Дабнера.

Затем было изучено решение обратной задачи. Принципиальность правильной методологии сложно переоценить, ведь используемые численные методы относительно сложны и ресурсоёмки. Для эффективного решения обратной задачи используется быстрое решение, позволяющее практически моментально получить приблизительное значение фильтрационных свойств системы.

После этого была проверена применимость алгоритма на практике. Естественно, нельзя использовать алгоритм, который позволяет получить результат лишь в случае высоких проницаемостей. Конечно, также необходимо, чтобы расстояние между возмущающей и возмущаемой скважиной не должно быть меньше практических значений (например, скважины не могут располагаться на расстоянии лишь нескольких метров друг от друга).

Результатом проверки является возможность апробирования на данных. Безусловно, наиболее эффективна проверка на реальных данных. К сожалению, в отрасли не так легко получить данные со скважин (особенно учитывая, что необходимо получить именно данные с периодических скважин).

Таким образом, было принято решение совершить проверку на синтетических данных. Для проведения данных тестов в том числе была создана программа, позволяющая удобно записывать забойное давление в программу tNavigator.

Тестирование на синтетических данных было многоэтапным, было проведено значительное число тестов в течение длительного времени. Итоговые результаты и основные исправления представлены в данной работе. Кроме того, особого внимания заслуживает методика подавления случайных шумов в данных давления.

В качестве дальнейшего улучшения можно предложить проведение тестов для нескольких скважин. Кроме того, необходимо провести тестирование в том числе на реальных данных.

Возможны улучшения методологии, направленные в первую очередь на ускорение работы программы. Также есть смысл добавить интерфейс, позволяющий пользователю эффективно, быстро и удобно использовать весь функционал созданной модели.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Амелин И.Д., Сургучев М.Л., Давыдов А.В. Прогнозирование разработки нефтяных залежей на поздней стадии. – М.: Недра. – 1994. – 308 с.
2. Батлер Р.М. Горизонтальные скважины для добычи нефти, газа и битумов. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 536 с.
3. Бембель Р.М., Попов Р.М. Выделение зон трещиноватости по данным сейсморазведки // Физико-литологические особенности и коллекторские свойства продуктивных пород глубоких горизонтов Западной Сибири – Тюмень: 1988. – С. 54-68.
4. Бузинов С.Н., Умрихин И.Д. Исследование пластов и скважин при гармоническом возбуждении пласта // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1960. №4. С.48–52.
5. Бузинов С.Н., Умрихин И.Д. Исследование нефтяных и газовых скважин и пластов. М.: Недра, 1984. 265 с.
6. Валеев Ш.И., Ганиев Р.Р. Промысловый опыт определения пути движения закачиваемой воды по пласту на Стахановской площади Серафимовской группы месторождений. Геологическое строение и разработка нефтяных и газовых месторождений Башкортостана. – Уфа: РИЦ АНК «Башнефть», 1997. – 424 с.
7. Вишнякова А.В., Ивонтьев К.Н., Кабо В.Я. Применение методологии трассерных исследований межскважинного пространства при планировании и реализации технологии повышения нефтеотдачи пластов // Нефть. Газ. Новации, 2012. – №1.
8. Молокович Ю.М. Неравновесная фильтрация и ее применение в нефтепромысловой практике. М.–Ижевск: РХД, Институт компьютерных исследований, 2006. 214 с.
9. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Механика физических процессов. – М.: Ижевск. НИЦ «Регулярная хаотическая динамика», 2008. – 376 с.
10. Пешков В.Е., Соляник А.С., Крылов О.В., Захарова А.А., Тихомирова Н.О. Обоснование модели прогнозирования проницаемости параметров

продуктивных пластов при освоении нефтяных и газовых месторождений // Известия ТПУ. Т. 310. – 2007. – №3. – С. 19-21.

11. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Наука, 1997. – 320 с.
12. Сургучев М.Л. Методы контроля и регулирования процесса разработки нефтяных месторождений. – М.: Недра, 1968. – 301 с.
13. Earlougher Robert C. Advances in Well Test Analysis / Robert C. Earlougher. –New–York–Dallas: SPE, 1977. – 264 p.
14. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media/ M. Muskat.–New–York–London: 1937.
15. Gavrilov A.G., Mardanshin A.N., Ovchinnikov M.N., Shtanin A.V. The well neighbourhood testing by high frequency filtrational waves method. Electronic scientific journal "Oil and Gas Business". 2008. №2.