**А. Костарев**

**Общие уравнения движения твердого тела.**

**Динамическая эквивалентность нагрузок.**

Основной задачей динамики твердого тела является определение его движения под действием заданных сил (нагрузки) и реакций связей. Если тело свободно (Рис.5), то связи и их реакции отсутствуют, и следует найти шесть функции закона движения тела: координаты центра масс (xAyAzA) и углы Эйлера (.







Рис.5

Рис.6

Рис.7

Если тело несвободно, то, кроме закона движения, следует найти и реакции связей., и Рассмотрим частные случаи движения тела при отсутствии трения. Ввиду свойств центра масс С, будем всегда выбирать его за полюс.

Положение тела в плоском движении (Рис.6) определяют координаты (xС yС ). Связи (плоскость х у) вынуждают тело двигаться плоско. При этом возникают три интегральные реакции: нормальная реакция N и моменты относительно осей x и у. Неизвестных оказывается опять шесть.

 Вращающееся тело (Рис.7) имеет одну координату (угол поворота ) и пять неизвестных реакций XAYAZAXBYB. Всего шесть неизвестных.

 Таким образом, для любого движения твердого тела необходимо составить шесть уравнений для определения закона движения и реакций связей. Назовем их ***общими уравнениями движения тела***.

 Общие уравнения движения тела вытекают из двух общих теорем: о движении центра масс и об изменении относительного кинетического момента.

$$MW\_{C}=V^{e} (12)$$

$$\frac{dK\_{C}^{r}}{dt}=M\_{C}^{e} (13)$$

 Матрично

$$MW\_{C}=V^{e} (14)$$

$$\frac{dK\_{C}^{r}}{dt}=M\_{C}^{e} (15) $$

Дифференцировать левую часть (15) невозможно, поскольку тело вращается относительно подвижной системы отсчета, и матрица инерции *J****С*** (t) является неизвестной функцией времени в выражении кинетического момента

$K\_{C}^{r}$ (t) = *J*С(t) (t) (16)

Эту проблема исчезает, если движение тела рассмотреть в системе отсчета, связанной с телом с координатами, где матрица инерции будет постоянной.

$$\tilde{K}\_{c}\left(t\right)=\left(\begin{matrix}K\_{c\tilde{x}}\\K\_{c\tilde{y}}\\K\_{c\tilde{z}}\end{matrix}\right)=\tilde{J}\_{c}\tilde{ω}\left(t\right) \tilde{J}\_{c}=Const (16)$$

Абсолютную производную от вектора

$K\_{C}^{r}=K\_{c\tilde{x}}\tilde{i}+K\_{c\tilde{y}}\tilde{j}+K\_{c\tilde{z}}\tilde{k}$(17)

заданного в подвижной системе отсчета следует вычислять по теореме о связи производных (вспоминаем сложное движение точки):

$$\frac{dK\_{C}^{r}}{dt}=\frac{d\_{r}K\_{C}^{r}}{dt}+ω×K\_{C}^{r} (18)$$

Матрично, с учетом (16)

$$\frac{dK\_{C}^{r}}{dt}=\tilde{J}\_{c}\frac{d\tilde{ω}}{dt}+\tilde{Ω}\tilde{J}\_{c}\tilde{ω}=\tilde{J}\_{c}\tilde{ε}+\tilde{Ω}\tilde{J}\_{c}\tilde{ω} (19)$$

Приходим к искомым ***общим уравнениям движения*** тела в системе отсчета, связанной с телом

Лекции А.Костарева

$$ M\tilde{W}\_{c}=\tilde{V}^{a}+\tilde{V}^{R} (20)$$

$$\tilde{J}\_{c}\tilde{ε}+\tilde{Ω}\tilde{J}\_{c}\tilde{ω}=\tilde{M}\_{c}^{a}+\tilde{M}\_{c}^{R}$$

Здесь внешние силы разделены на активные силы (нагрузку) и реакции связей (индекс R)

В случаях сферического и вращательного движений во второй формуле центр масс С следует заменить на неподвижную точку О.

 В развернутом виде общие уравнения (20) представляют собой систему шести скалярных уравнений. В них входит столько дифференциальных уравнений *l*, сколько степеней свободы имеет твердое тело (*l* ≤ 6). Остальные 6- *l* уравнений определяют реакции связей.

 ***Эквивалентными*** назовем нагрузки, приводящие к одинаковым общим уравнениям движения тела. Уравнения (20) будут одинаковыми, если одинаковы их правые части. Значит, ***условием динамической эквивалентности*** двух нагрузок, приложенных к твердому телу, является знакомое нам условие равенства главных векторов и главных моментов нагрузок.

В Статике движения отсутствовало, и такие нагрузки мы называли ***статически эквивалентными***.