Введение

Рассматривается стальной стержень прямоугольного поперечного сечения $(2a \times 2b)$, где $a = 5$ мм, $b = 5$ мм (Рис.1). Необходимо решить задачу о кручении его вокруг оси OZ. Найти жесткость на кручение данного стержня и сравнить ее с жесткостью на кручение стержня круглого поперечного сечения, имеющего ту же площадь. Необходимо также найти касательные напряжения, построить поверхность депланации сечения. Рассмотреть аналитическое, приближенное и численное решения.

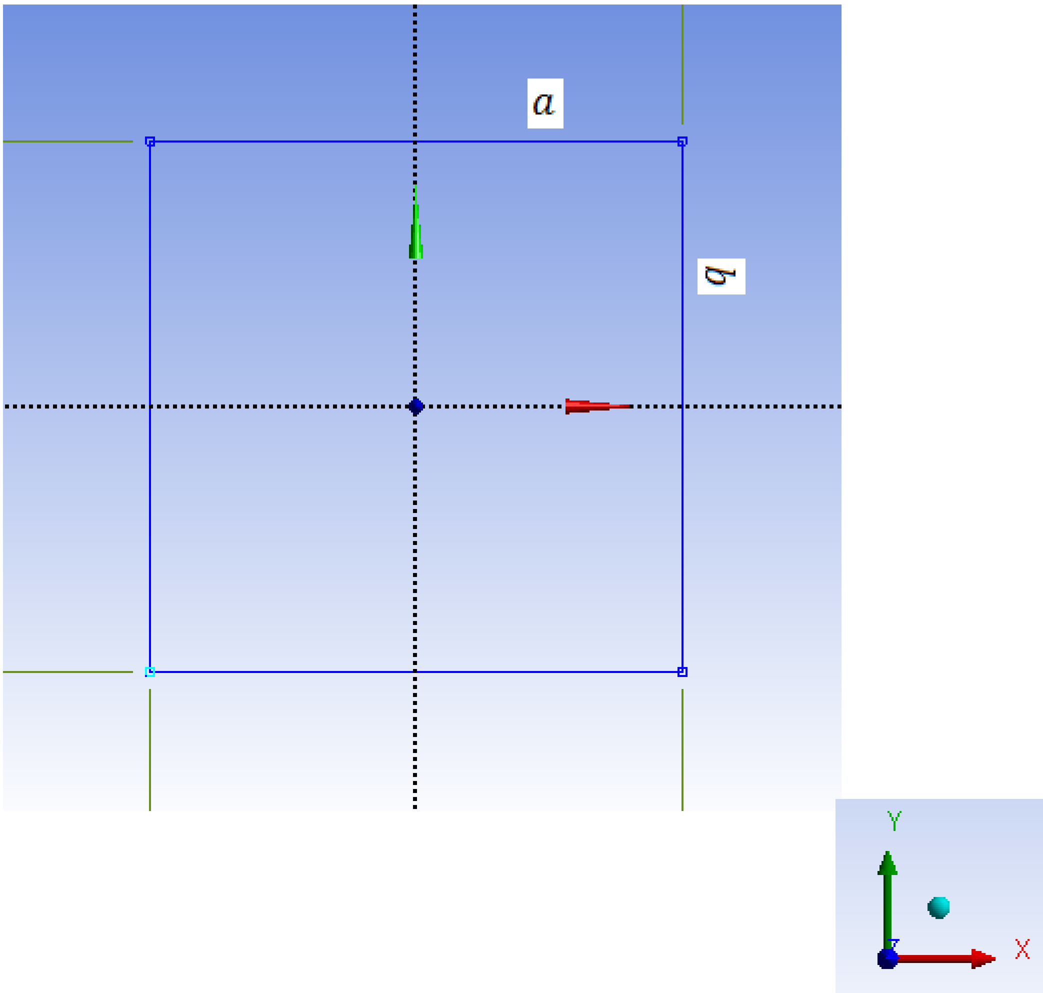

Рис. 1: Прямоугольное поперечное сечение рассматриваемого стержня.

1 Аналитическое решение

Рассматриваемая задача решена Сен-Венаном [1]. Найдены функция напряжений Φ, максимальные по модулю касательные напряжения $|\tau|_{max}$ и жесткость на кручение C.

$$\Phi(x,y) = b^2 - y^2 + \frac{32b^3}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\frac{\mathrm{ch}\dfrac{(2n+1)\pi x}{2b}}{\mathrm{ch}\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b} \tag{1}$$

В свою очередь, касательные напряжения в плоскостях OXZ, OYZ находятся по следующим соответствующим формулам:

$$\tau_{xz} = G\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -G\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{2}$$

где G - модуль сдвига, α - угол закручивания стержня. При этом

$$\alpha = \frac{M}{G\theta_p}, \tag{3}$$

где M - момент кручения, θ_p - полярный момент прямоугольного поперечного сечения [2]. Для последнего:

$$\theta_p = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} x^2 + y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4}{3}ab(a^2+b^2). \tag{4}$$

По формулам (1),(2),(3),(4):

$$|\tau|_{max} = |\tau_{xz}|_{x=0,\ y=\pm b} = |\tau_{yz}|_{x=\pm a,\ y=0} = \frac{3M}{2a(a^2+b^2)}\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\ \mathrm{ch}\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}\right), \tag{5}$$

Жесткость на кручение:

$$C = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Phi(x,y)\ dxdy = \frac{16\pi ab^3}{3}\left(1 - \frac{192b}{a\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{th}\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}{(2n+1)^5}\right). \tag{6}$$

К стержню приложен момент $M = 1$ Н·м. Тогда по формуле (5): $|\tau|_{max} = 4{,}05$ МПа.
По формуле (3): $\alpha = 7{,}6\ \frac{\text{мрад}}{\text{м}}$.
По формуле (6): $C = 1{,}4\cdot10^{-9}$м^4.
Введем жесткость C_c на кручение стержня кругового сечения радиуса r, такой же площади, как прямоугольного сечения. В свою очередь, оно вычисляется по следующей формуле [1]:

$$C_c = \frac{\pi r^4}{2} \overbrace{=}^{r=2\sqrt{\frac{ab}{\pi}}} \frac{8a^2b^2}{\pi}. \tag{7}$$

По формуле (7): $C_c = 1{,}59\cdot10^{-9}$ м^4. Таким образом, показано: жесткость на кручение стержня прямоугольного сечения меньше жесткости на кручение стержня кругового сечения той же площади, что согласуется с теоретическими выкладками [1].

2 Приближенное решение

Решим эту же задачу методом вариационного исчисления. В качестве Ф возьмем следующую приближенную функцию:

$$\Phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)P_k(a_k, x, y), \tag{8}$$

где $P_k(a_k, x, y)$-полиномы, $k = 0, 1, 2, ..., N$. a_k - константы, которые находятся через принцип минимума дополнительной работы скручиваемого стержня, вычисляемую, в свою очередь, по следующей формуле:

$$\Pi = \frac{1}{2G} \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 4\Phi \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9}$$

Из принципа минимума дополнительной работы находятся константы a_k следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_0} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial a_k} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

При кручении стержня прямоугольного сечения оно не остается плоским - оно депланирует. Осевое перемещение ω при депланации можно найти из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial x} = \alpha \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + y \right) \\ \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial x} = -\alpha \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + x \right). \end{cases} \tag{11}$$

Напишем приближенное решение рассматриваемой задачи при 3 константах, т.е $\Phi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(a_0 + a_1 x^2 + a_2 y^2)$. Тогда из принципа минимума дополнительной работы (10):

$a_0 = \dfrac{35(9a^4 + 130a^2b^2 + 9b^4}{8(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^2 + 45b^6)}$;

$a_1 = \dfrac{105(9a^2 + b^2)}{8(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^2 + 45b^6)}$;

$a_2 = \dfrac{105(9b^2 + a^2)}{8(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^2 + 45b^6)}$.

Таким образом, по формуле (2) для касательных напряжений:

$$\begin{gathered} \tau_{xz} = \frac{105M(a^2 - x^2)y(9a^4 + a^2(127b^2 + 27x^2 + 6y^2) + 3b^2(-6b^2 + x^2 + 18y^2))}{16(a^2 + b^2)^2(45a^5b + 464a^3b^3 + 45ab^5)}; \\ \\ \tau_{yz} = \frac{105Mx(y^2 - b^2)(-18a^4 + a^2(127b^2 + 54x^2 + 3y^2) + 3b^2(3b^2 + 2x^2 + 9y^2))}{16(a^2 + b^2)^2(45a^5b + 464a^3b^3 + 45ab^5)}. \end{gathered} \tag{12}$$

Из формулы (11): $|\tau|_{max} = |\tau_{xz}|_{x=0,\ y=\pm 0{,}005} = |\tau_{yz}|_{x=\pm 0{,}005,\ y=0} = 4{,}21$ МПа. Найдем жесткость на кручение C:

$$C = 2 \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-b}^{b} \Phi(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{224b^3(9a^2 + b^2)(a^5 + 9a^3b^2)}{9(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^4 + 45b^6)} = 1,41 \cdot 10^{-9} \text{м}^4 \tag{13}$$

Из системы (11) найдем депланацию сечения ω:

$$\omega = -\alpha \int_0^y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + x \right) \mathrm{d}y. \tag{14}$$

Построены зависимости касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} от координат сечения (Рис.2—3 соответственно), сходимости максимального по модулю касательного напряжения (Рис.4

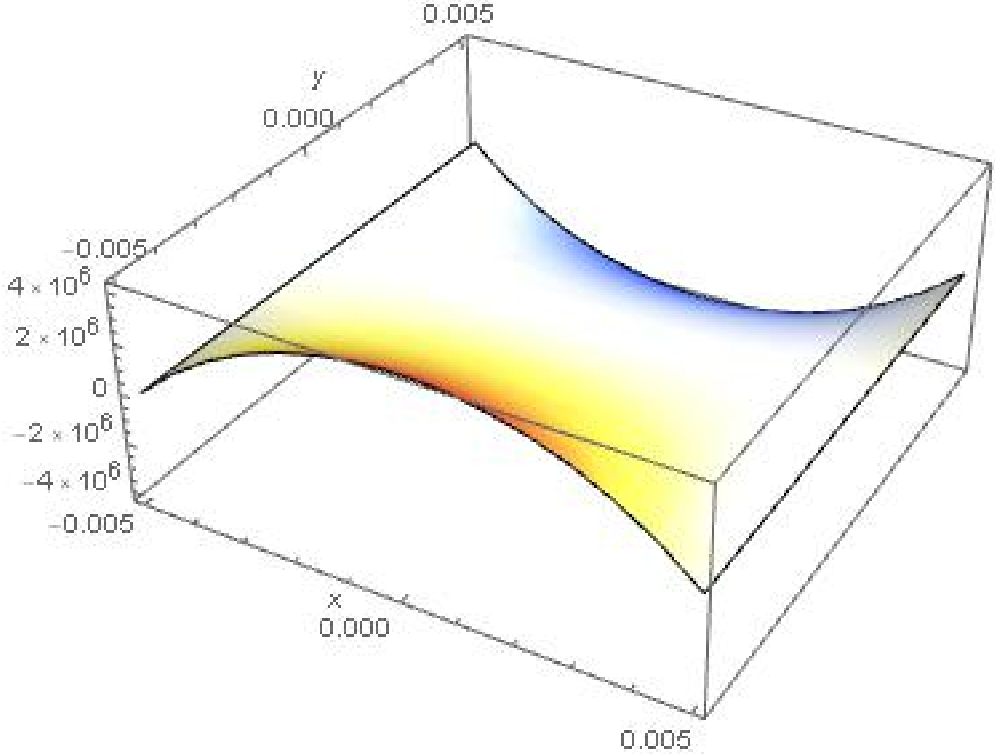

Рис. 2: Поверхность касательного напряжения τ_{xz} (Па). Где область темнее, там по модулю величина его больше.

(а)) и жесткости на кручение (Рис.4 (б)) от числа N констант в полиноме функции напряжений.

Также построена поверхность депланации сечения ω (Рис.5).

Из графика : $\omega_{max} = 20{,}5$ нм.

3 Реализация в ANSYS

Рассмотрим модель данного стержня в конечно-элементном пакете ANSYS. Сделано закреление нижнего сечения стержня, а к верхнему приложен момент 1 Н·м (Рис.6). Взят модуль сдвига $G = 76,9$ ГПа. Найдены касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} в стержне (Рис.7—8 соответственно). Получено значение: $|\tau|_{max} = 4,0696$ МПа. Вычислим погрешность найденного решения:

$$\Delta|\tau| = \frac{||\tau|_{max,true} - |\tau|_{max,numerical}|}{|\tau|_{max,true}} 100\% = 0,5\%.$$

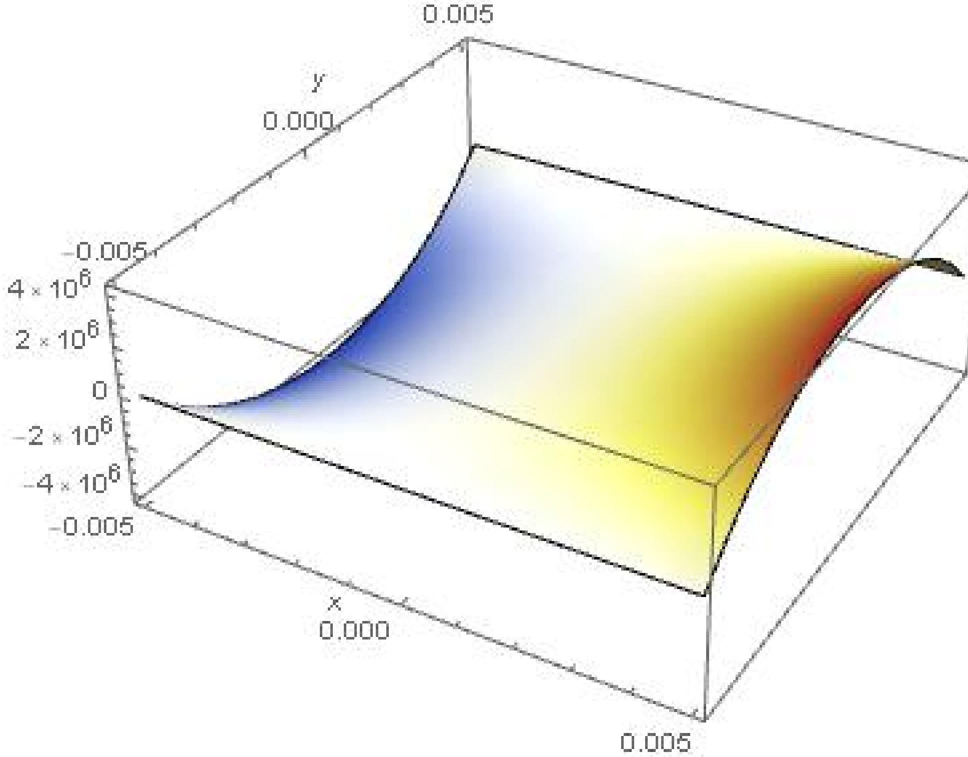

Рис. 3: Поверхность касательного напряжения τ_{yz} (Па).Где область темнее, там по модулю величина его больше.

Также вычислена депланация сечения в рассматриваемом стержне (Рис.9). Сравнив рисунки 5 и 9, можно прийти к выводу, что направления перемещений рассматриваемого сечения при его депланации найдены верно. Однако величина депланации, найденной численно, оказалась заведомо больше той, которая найдена аналитически.

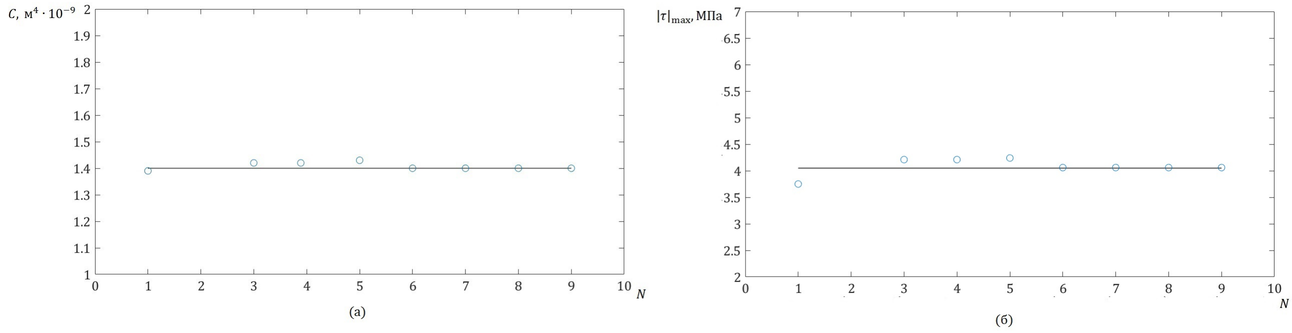

Рис. 4: (а) Сходимость максимального по модулю касательного напряжения от числа констант. Линия – аналитическое решение (5). (б) Сходимость жесткости на кручение от числа констант. Линия – аналитическое решение (6).

Заключение

В данной работе было исследовано кручение стержня прямоугольного поперечного сечения. Было показано, что данную задачу можно решить методом упрощенного приближенного решения: вариационного исчисления и получить решение, фактически совпадающее с решением Сен-Венана. Жесткость на кручение стержня прямоугольного поперечного сечения меньше жесткости на кручение кругового поперечного сечения. Также данная задача решена численно в конечно-элементном пакете ANSYS. Максимальное по модулю касательное напряжение, вычисленное численно, вышло с порешностью 0,5%. Это свидетельствует о том, что данная модель получилась довольно точной.

Список литературы

1. А.И.Лурье. Теория упругости. Москва: Издательство «Наука», главная редакция физико-математической литературы. 1970. 940 с.
2. В.И.Феодосьев. Сопротивление материалов. Москва: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана 1999. 592 с.

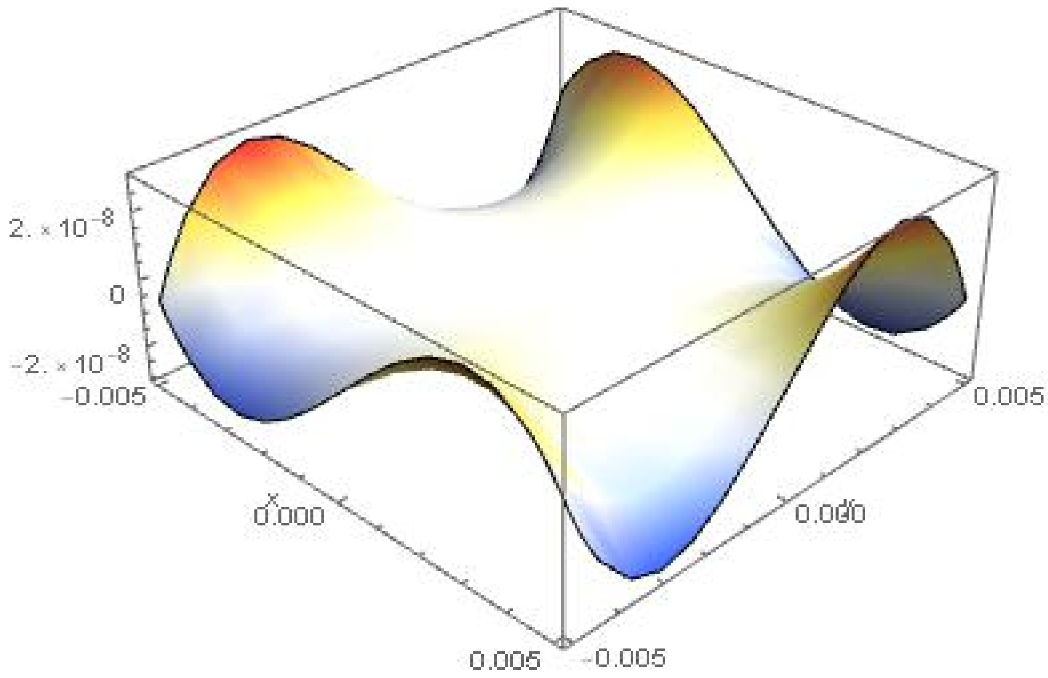

Рис. 5: Поверхность ω (мм) депланации сечения. Где темнее, Там депланация по модулю больше.

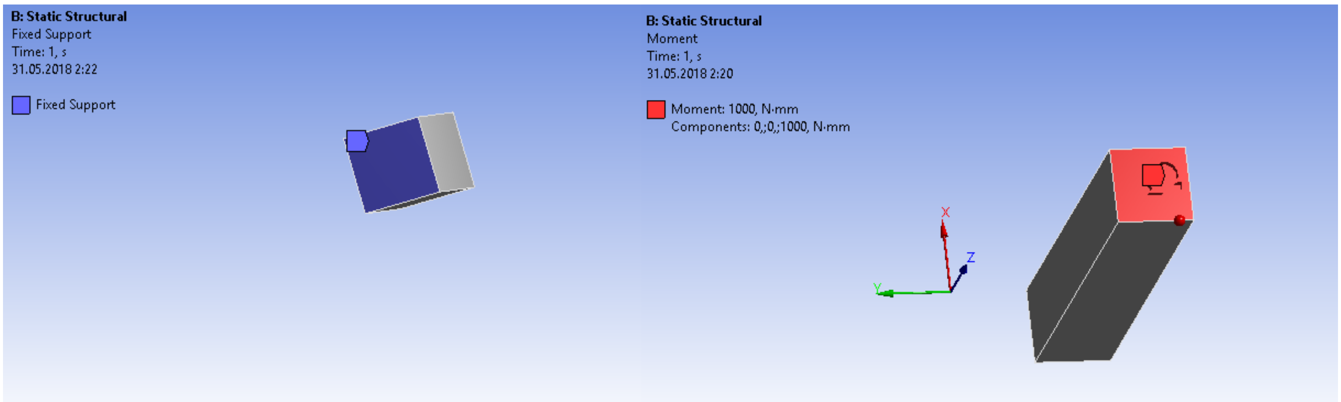

Рис. 6: Постановка рассматриваемой задачи в ANSYS.

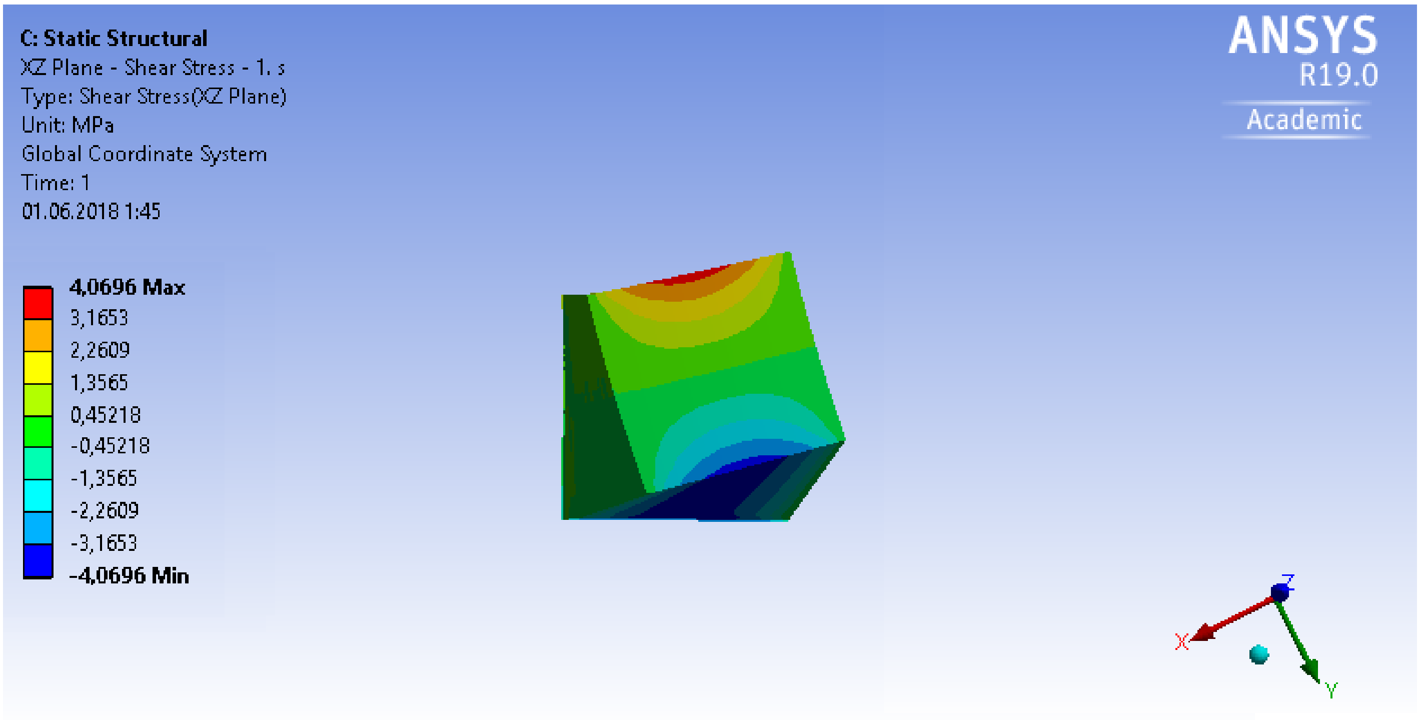

Рис. 7: Распределение τ_{xz} в модели стержня.

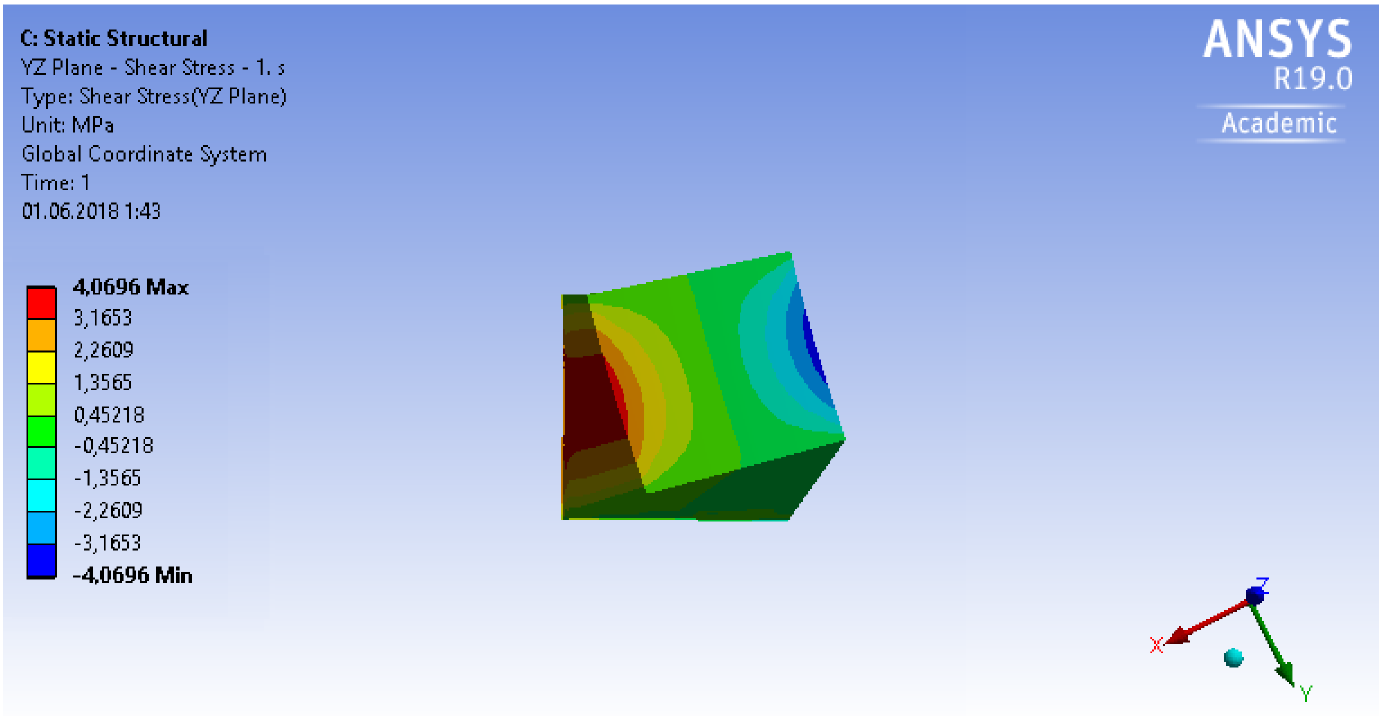

Рис. 8: Распределение τ_{yz} в модели стержня.

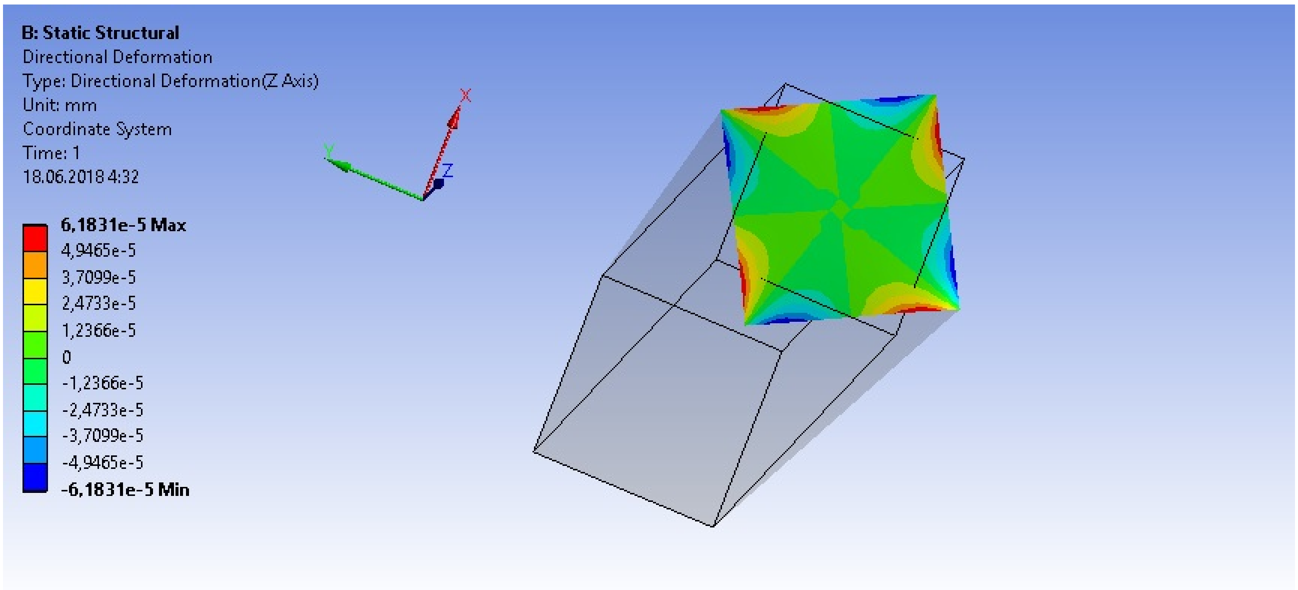

Рис. 9: Депланация сечения в модели рассматриваемого стержня.