«Влияние предварительно напряжённого состояния в среде Кельвина на распространение волн»

Защита выпускной квалификационной работы

студент: Михаил Дрепин (гр.5040103/00201),
руководитель: к.ф-м.н. Елена Фёдоровна Грекова

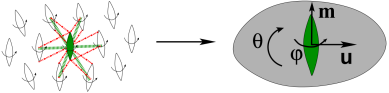
"Высшая школа теоретической механики и математической физики"
Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого

14 июня 2022 г.

Введение

Упругая среда Кельвина - это такая среда, в которой тела-точки осесимметричны и обладают конечным динамическим спином. Среда не препятствует поворотам тел-точек вокруг своих осей и градиентам таких поворотов.

Редуцированная среда Кельвина — среда, чьи тела-точки обладают вращательными степенями свободы, но усилия в среде не совершают работу на градиенте поворота.

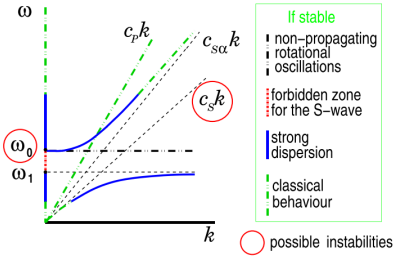


Моментных напряжений нет, но тензор силовых напряжений $\boldsymbol{\tau}$ не симметричен.

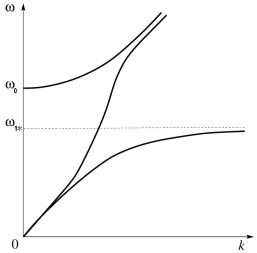
E., F. Cosserat (1909) Théorie des corps déformables,
Е.Ф.Грекова, П.А.Жилин (2001) — Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets,
Ж. Можен (1991) Механика электромагнитных сплошных сред

Среда Кельвина	Ферромагнетики
$\mathbf{u}$ – вектор трансляционных перемещений	
$\boldsymbol{\tau}$ – тензор напряжений	
$\mathbf{m}$ – единичный вектор...	
оси тела-точки	магнитного момента $\mathbf{S}$
$\rho I \dot{\varphi} \mathbf{m}$, где $\dot{\varphi}$ – угловая скорость собственного вращения тела точки, I – плотность осевого момента инерции	$\rho \mathbf{S}/\gamma = M\mathbf{m}/\gamma$, где $M = \rho\lvert\mathbf{S}\rvert$ – намагниченность, $\lvert\mathbf{S}\rvert = const$ для состояния магнитного насыщения, γ – гиромагнитное отношение
τ^A связан с моментами	τ^A связан со спин-решёточным взаимодействием
$\boldsymbol{\mu}$ $\boldsymbol{\mu}$ – тензор моментных напряжений	$-\mathbf{B} \times \mathbf{S}$ $\mathbf{B}$ – тензор обменных взаимодействий
$\mathbf{L}$ $\mathbf{L}$ – объёмная плотность внешнего момента	$\mathbf{B}^e \times \mathbf{S}$ $\mathbf{B}^e$ – внешняя магнитная индукция

Мотивация



Дисперсионные кривые для упругой редуцированной среды Коссера при всестороннем однородном растяжении/сжатии (Е.Ф. Грекова 2019)



Дисперсионные кривые для линейной редуцированной среды Кельвина (Е.Ф. Грекова 2018)

Как всестороннее однородное растяжение/сжатие влияет на среду Кельвина?

E.F.Grekova (2018) – Harmonic waves in the simplest reduced Kelvin's and gyrostatic media under an external body follower torque,
E.F.Grekova (2019) – Nonlinear isotropic elastic reduced and full Cosserat media: waves and instabilities

Упругая простейшая редуцированная среда Кельвина

$$\mathbf{R} - \text{радиус} - \text{вектор}, \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}_\perp \cdot \mathbf{P}_\varphi(\varphi \mathbf{m}_0), \qquad \dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \qquad \mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_0$$

При нулевых внешних нагрузках:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \rho \ddot{\mathbf{R}}, \qquad \boldsymbol{\tau}_\times = \boldsymbol{\omega} \times \rho I \dot{\varphi} \mathbf{m}.$$

$\mathbf{u}$ — перемещение, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, ρ — плотность, ρI — плотность момента инерции, $\mathbf{m}$ — вектор оси тела-точки. Зададим энергию деформации в форме:

$$\rho_0 U = \frac{1}{2} \mathbf{G} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{G} + 2\alpha \tilde{\gamma}^2$$

где

$$\mathbf{G} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top - \mathbf{E})/2, \qquad \tilde{\gamma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_0 - \mathbf{G} \cdot \mathbf{m}_0.$$

$$\mathbf{A} = \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} \cdot \mathbf{P},$$

Е.Ф.Грекова, П.А.Жилин (2001) — Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets

Упругая простейшая редуцированная среда Кельвина

Получим определяющие соотношения:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{P}^\top,$$

$$\boldsymbol{\tau} = \rho \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot \left(\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{G}} - \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m}_0 \right)^S \right) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} + \frac{\partial U}{\partial \tilde{\gamma}} \mathbf{m} \right),$$

Возьмём изотропный ${}^4\mathbf{C}$:

$${}^4\mathbf{C} = \lambda \mathbf{E}\mathbf{E} + 2\mu (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n)^S (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n)^S$$

Подстановка энергии, выраженной через константы λ,μ,α, в определяющие соотношения даёт:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho}{\rho_0} \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R}^\top \cdot ((\lambda \operatorname{tr} \mathbf{G}\mathbf{E} + 2\mu \mathbf{G} - 4\alpha (\tilde{\gamma} \mathbf{m}_0)^S) \cdot \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{R} + 4\alpha \tilde{\gamma} \mathbf{m}),$$

Среда Кельвина вблизи однородного нелинейного сферически деформированного состояния

Описание растяжения-сжатия среды

$$\mathbf{R}_s = A\mathbf{r}, \quad \mathbf{P}_{\perp s} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}_s = A\mathbf{E}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_0,$$

где $\mathbf{R}_s$ — радиус вектор, $\mathbf{P}_{\perp s}$ — независящая от спина часть тензора вращения, $\mathbf{A}_s$ — тензор деформации $\mathbf{m}$ — вектор, обозначающий направление спина, при однородной шаровой деформации.

Мы будем использовать оператор градиента в преднапряжённом состоянии:

$$\overset{s}{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_s} = A^{-1}\overset{\circ}{\nabla}.$$

Рассмотрим малые отклонения от данного состояния :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_s + \mathbf{u}, \qquad \mathbf{P}_\perp = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$$

Среда Кельвина вблизи однородного нелинейного сферически деформированного состояния

Баланс сил в перемещениях

$$A\overset{s}{\nabla}\cdot(\mathbf{C}_1\cdot\overset{s}{\nabla}\mathbf{u})+A^4((\lambda+2\mu)\overset{s}{\nabla}\overset{s}{\nabla}\cdot\mathbf{u}-\mu\overset{s}{\nabla}\times(\overset{s}{\nabla}\times\mathbf{u}))$$
$$+2\alpha A^3\overset{s}{\nabla}\times(\mathbf{m}_0\times(\overset{s}{\nabla}\mathbf{u}-A\overset{s}{\nabla}\mathbf{u}^S)\cdot\mathbf{m}_0)+4\alpha(1-A)A(\overset{s}{\triangle}\mathbf{u}-A\overset{s}{\nabla}\cdot(\overset{s}{\nabla}\mathbf{u}^S))\cdot\mathbf{m}_0\mathbf{m}_0$$
$$+A\overset{s}{\nabla}\cdot(\mathbf{C}_2\times\boldsymbol{\theta})+4\alpha(A-1)A\overset{s}{\nabla}\cdot(\mathbf{m}_0\times\boldsymbol{\theta})\mathbf{m}_0=\rho_0\ddot{\mathbf{u}}.$$

где

$$\mathbf{C}_1=A(A^2-1)(\frac{3}{2}\lambda+\mu)\mathbf{E}+4\alpha(A-1)^2(A-1/2)\mathbf{m}_0\mathbf{m}_0,$$
$$\mathbf{C}_2=2\alpha(A^2\mathbf{E}+(A-1)^2\mathbf{m}_0\mathbf{m}_0)$$

Среда Кельвина вблизи однородного нелинейного сферически деформированного состояния

Баланс моментов в перемещениях

$$-\mathbf{m}_0 \cdot (\omega_s \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^S + \omega_0 \overset{s}{\nabla} \mathbf{u}^A) \times \mathbf{m}_0 = \omega_0 \boldsymbol{\theta} + \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{m}_0$$

здесь и далее:

$$\omega_0 = \frac{2\alpha A(A^2+1)}{\rho_0 I \dot{\varphi}} > 0, \qquad \omega_s = \frac{2\alpha A(3A-1)(A-1)}{\rho_0 I \dot{\varphi}}.$$

Рассмотрим линейные гармонические свободные волны в трехмерной безграничной среде. Мы можем выразить из баланса моментов $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathbf{u}$:

$$\boldsymbol{\theta} = (\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2} - 1)^{-1}(\mathbf{E} + i\frac{\omega}{\omega_0}\mathbf{m}_0 \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{m}_0 \cdot (\frac{\omega_s}{\omega_0}\overset{s}{\nabla}\mathbf{u}^S + \overset{s}{\nabla}\mathbf{u}^A) \times \mathbf{m}_0).$$

Рассмотрим два случая: волна распространяется параллельно спину и ортогонально ему

Редуцированная спектральная задача для волн, параллельных спину

$$\mathbf{m}_0\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{u}(\rho_0\omega^2 - \rho_0 k^2 c_p^2) - ik^2\alpha_{eff}\frac{\omega\omega_0}{\omega^2 - {\omega_0}^2}\mathbf{m}_0 \times \mathbf{u}$$
$$+ (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0\mathbf{m}_0) \cdot \mathbf{u}(\rho_0\omega^2 - k^2\left(\mu_{eff} + \alpha_{eff}\left(1 + \frac{{\omega_0}^2}{\omega^2 - {\omega_0}^2}\right)\right) = \mathbf{0}.$$

где эффективные константы зависят от приложенной деформации A:

$$c_p^2 = \frac{A}{\rho_0}\left(\lambda A(5A^2 - 3)/2 + \mu A(3A^2 - 1) + 2\alpha(A - 1)^2(2A + 1)\right)$$

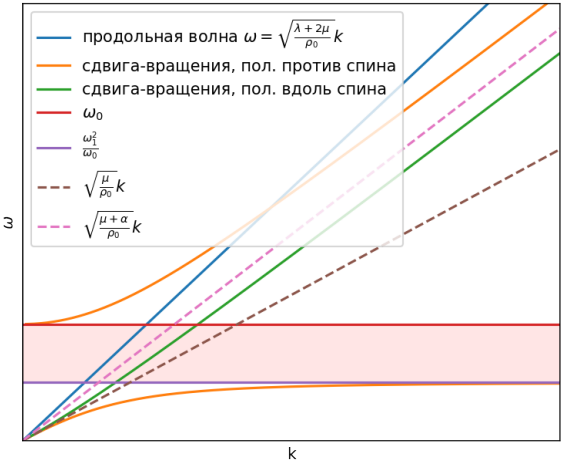
$$\alpha_{eff} = 2\alpha A\frac{(2A^2 - 2A + 1)^2}{A^2 + 1} > 0$$

$$\mu_{eff} = 3\lambda A^2(A^2 - 1)/2 + 2\mu A^2(A^2 - 1/2) + \alpha A(4(A - 1)^2(A - 1/2) + A^3) - \alpha_{eff}$$

Уравнение такое же, как для линейной среды, с точностью до замены μ_{eff} на μ, α_{eff} на α, c_p^2 на $\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}$, ω_0 на $\frac{4\alpha}{\rho_0 I\dot{\varphi}}$.

Вспомним линейный случай

Дисперсионные кривые в недеформированной среде Кельвина



$$\rho_0 U = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u}^S \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, \nabla \mathbf{u}^S + 4\alpha((\boldsymbol{\theta} - \nabla \times \mathbf{u}/2) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{m}_0\mathbf{m}_0))^2\right)$$

Продольные волны, распространяющиеся вдоль спина

Для продольных волн, распространяющихся вдоль спина, дисперсионное соотношение примет вид:

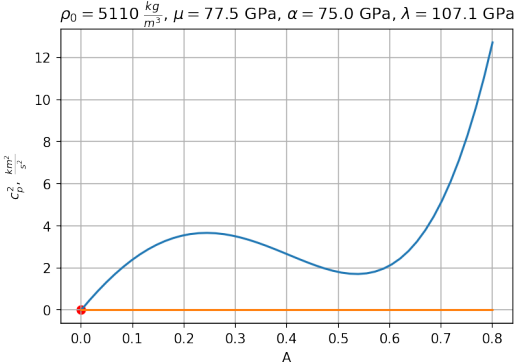
$$\omega = c_p k,$$

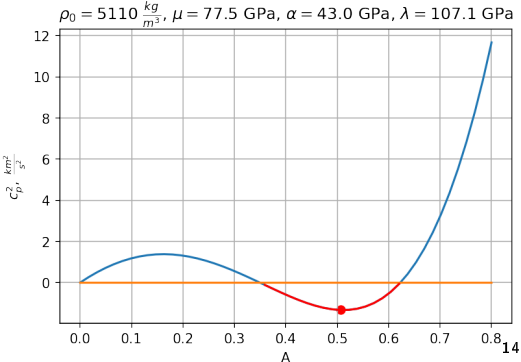
В зависимости от упругих констант λ, μ, α среда может иметь участок потери устойчивости по продольным возмущениям, параллельным спину, или не иметь. Увеличение константы α повышает эту устойчивость.
При α=0 критическое значение сжатия соответствует $A = \frac{3\lambda+2\mu}{5\lambda+6\mu}$.
Рассмотрим данные случаи.

Продольные волны, распространяющиеся вдоль спина

Примеры кривых

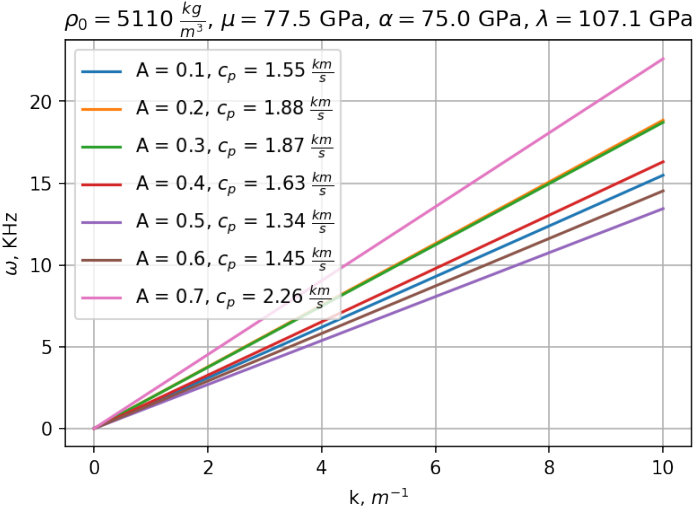
Несмотря на то, что левый график зависимости c_p^2 от степени растяжения-сжатия материала имеет падающий участок, на нём точка минимума выше 0. Для правого графика точка минимума находится ниже 0. Это означает, что на интервале для A [0.35,0.62] наша среда теряет устойчивость при сжатии. Это новый характер потери устойчивости для продольных волн.





Продольные волны, распространяющиеся вдоль спина

Примеры кривых



В остальном дисперсионные волны имеют тот же вид, что и в линейном случае. И при A=1 совпадают с ним

Волны сдвига-вращения, распространяющиеся параллельно спину

Обозначения:

Будем использовать:

$$\omega_1^2 = {\omega_0}^2 \frac{\mu_{eff}}{\mu_{eff} + \alpha_{eff}},$$

$$c_{s\alpha}^2 = \frac{\mu_{eff} + \alpha_{eff}}{\rho_0}.$$

Эти константы могут быть отрицательными

$\mu_{eff} < 0$ - неустойчивость по низкочастотным сдвиговым возмущениям

$\mu_{eff} + \alpha_{eff} < 0$ - неустойчивость по высокочастотным сдвиговым возмущениям

В данном случае первое условие неустойчивости достигается раньше

Волны сдвига-вращения, распространяющиеся параллельно спину

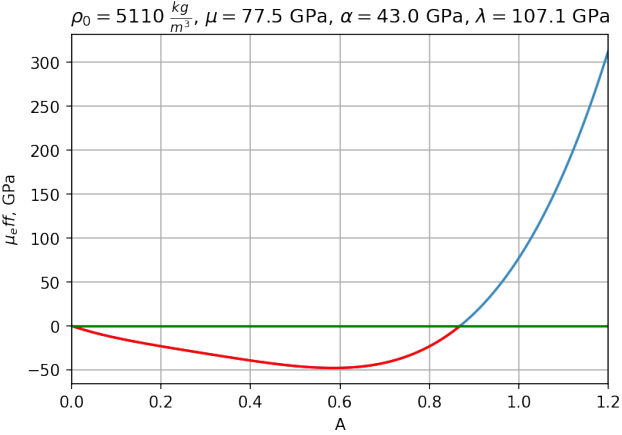
Волны, поляризованные вдоль спина:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2} \frac{\omega + \omega_0}{\omega + \omega_1^2/\omega_0},$$

Волны, поляризованные против спина:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2} \frac{\omega - \omega_0}{\omega - \omega_1^2/\omega_0},$$

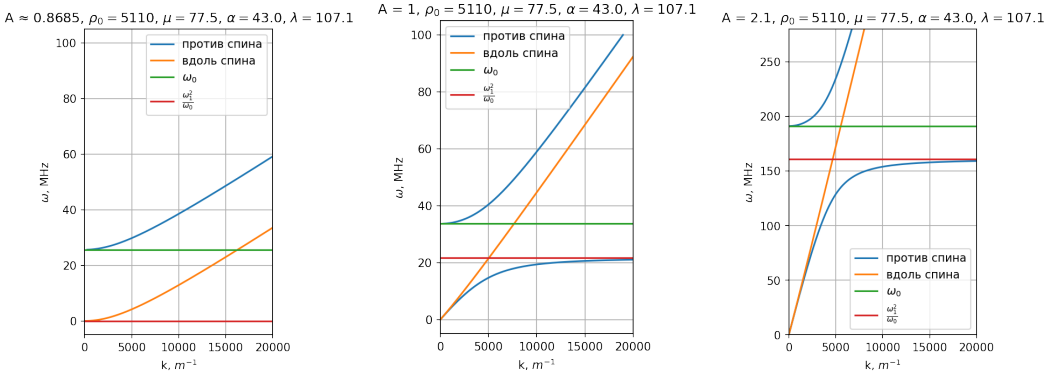
Волны сдвига-вращения, распространяющиеся параллельно спину



Красным выделен участок неустойчивости $\mu_{eff} < 0$. Синий участок - устойчивость по данному возмущению.

Волны сдвига-вращения, распространяющиеся параллельно спину

Участки: малого сжатия, недеформированный и растяжения

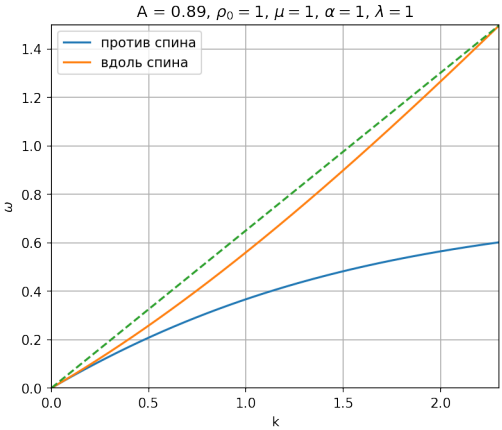


Таким образом, мы регулируем запрещенную для одной из волн зону при помощи начальной деформации.

Волны сдвига-вращения, распространяющиеся параллельно спину

Малая дисперсивность волны вдоль спина

Для всех трёх случаев (малого сжатия, недеформированная среда и растянутая) ветка дисперсионной кривой для волны, поляризованной по спину, будет малодисперсивной:



Редуцированная спектральная задача для волн, идущих ортогонально спину

$$\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{u}(\omega^2-c_p^2k^2)+\mathbf{l}\mathbf{l}\cdot\mathbf{u}(\omega^2-c_{sp}^2k^2)+\mathbf{m}_0\mathbf{m}_0\cdot\mathbf{u}(\rho_0\omega^2-k^2\left(\mu_{eff}+\alpha_{eff}\left(1+\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2-{\omega_0}^2}\right)\right))=\mathbf{0}$$

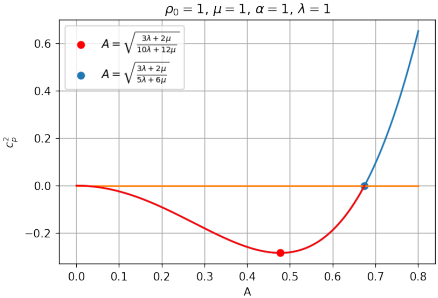
где:

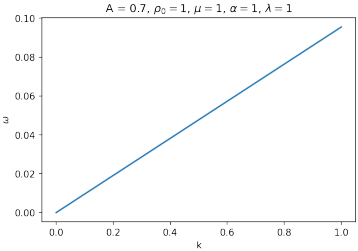
$$c_p^2=\frac{A^2}{2\rho_0}(A^2(5\lambda+6\mu)-(3\lambda+2\mu)),\quad c_{sp}^2=\frac{A^2(A^2-1)(\frac{3}{2}\lambda+\mu)+A^4\mu}{\rho_0}$$

$$\mu_{eff}=3\lambda A^2(A^2-1)/2+2\mu A^2(A^2-1/2)+\alpha A(A^2-2A+2)(2-A)-\alpha_{eff}$$

$$\alpha_{eff}=2\alpha A^2(A^2-2A+2)\frac{2-A}{A^2+1}$$

Продольные волны, распространяющиеся ортогонально спину





Для продольных волн, распространяющихся ортогонально спину, дисперсионное соотношение примет вид:

$$\omega = c_p k,$$

Что при $A = 1$ даёт линейный случай:

$c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}}$

Есть неустойчивость при

$A < \sqrt{\frac{3\lambda+2\mu}{5\lambda+6\mu}}$

Неустойчивость по такому возмущению достигается раньше, чем в случае продольной волны, бегущей вдоль спина.

Волны сдвига, распространяющиеся ортогонально спину

Для волн сдвига, распространяющихся ортогонально спину, дисперсионное соотношение для компоненты по спину примет вид:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_{s\alpha}^2} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2 - \omega_1^2},$$

Для волн сдвига, распространяющихся ортогонально спину, дисперсионное соотношение для компоненты ортогональной спину и волновому вектору:

$$\omega^2 = c_{sp}^2 k^2,$$

Волны сдвига, распространяющиеся ортогонально спину

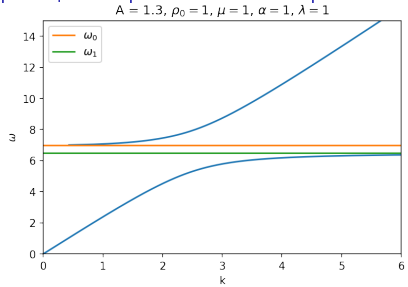
Недисперсивная волна сдвига, распространяющаяся ортогонально спину, с перемещением, ортогональным спину, становится растущим решением при сжатии

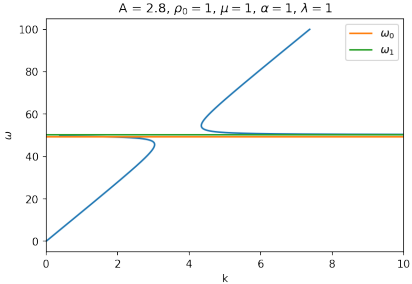
$$A^2 < \frac{3\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu}$$

Точно такое же сжатие ведет к неустойчивости по сдвигу в классической среде (Тупин-Бернштейн). В редуцированной и полной средах Коссера с квадратичной энергией это - критическое значение для A, так как вместо квадратичности по $\mathbf{G}$ там предполагается квадратичность по $\mathbf{A} - \mathbf{E}$

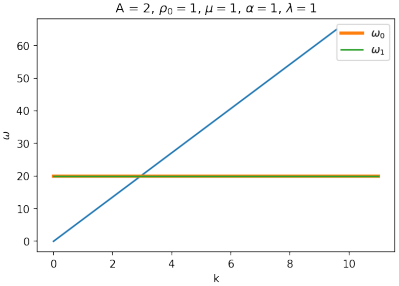
Волны сдвига, распространяющиеся ортогонально спину

Особая реакция на растяжение материала





При стремлении степени растяжения A к 2, расстояние между ω_0 и ω_1 уменьшается. При достижении $A = 2$ размер запрещённой зоны становится равным 0 (также при $A = 2$: $\alpha_{eff} = 0$). При $A > 2$ происходит смена типа метаматериала относительно поворотных высокочастотных возмущений (требует проверки).



Заключение

По результатам работы был сделан доклад на Advanced Problems in Mechanics (APM) 2021 и принят доклад на APM 2022.
Планируется публикация в Mathematics and Mechanics of Solids.

- Получены дисперсионные соотношения для продольных и поперечных волн, распространяющихся параллельно и ортогонально спину в простейшей редуцированной среде Кельвина в окрестности однородного всестороннего растяжения / сжатия;
- При растяжении среды **в два раза**, тип метаматериала меняется относительно волн сдвига, распространяющихся ортогонально спину.
- Получен новый тип неустойчивости: для продольных волн при сжатии среда теряет устойчивость, но в случае волн, **распространяющихся вдоль спина**, может снова её обрести при достаточно высокой степени этого сжатия, а также для них можно избежать потери устойчивости при увеличении α.
- Получены примеры потери устойчивости при сжатии, соответствующие потере устойчивости в средах Коссера и классических средах.
- Получено, что при сжатии первой приобретается неустойчивость по сдвиговым возмущениям.
- При большом растяжении для волн, ортогональных спину, среда будет неустойчива по высокочастотным сдвиговым возмущениям, если $3\lambda + 2\mu < \alpha$