

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

Работа допущена к защите
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., проф.
_____ А. М. Кривцов
« » _____ 2017 г.

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание академической степени
МАГИСТРА

Тема:
**Решение задач механики сплошной среды для
слоистых структур**

Направление: 01.04.03 - Механика и математическое моделирование

Выполнил: студент гр. 63604/1 _____ Н. С. Марков
Руководитель: д.ф.-м.н., профессор _____ А. М. Линьков

Санкт-Петербург
2017

Реферат

30 с., 16 рис., 4 табл., 0 приложений, 20 источников

Слоистая среда, функция Грина, метод граничных элементов,
интегральные уравнения

Настоящая работа посвящена решению задач механики сплошной среды для слоистых структур. Реализован численный алгоритм нахождения функции Грина слоистой среды и исследованы его ключевые особенности.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	6
3	Метод решения	7
4	Нахождение функции Грина	7
5	Алгоритм решения типовой задачи	9
6	Нахождение функции Грина слоистой среды для уравнения Лапласа	12
6.1	Формулировка задачи	12
6.2	Нормировка	14
6.3	Функция Грина для периодической структуры	14
6.4	Связь потенциала и потока на границах	17
6.5	Определение потенциала и потока внутри слоя по значениям на границе	18
6.6	Численная реализация	19
6.7	Точность нахождения функции Грина	20
7	Решение краевых задач	24
7.1	Постановка задачи	24
7.2	Комплексное граничное интегральное уравнение	24
7.3	Численное решение комплексного граничного интегрального уравнения комплексным методом граничных элементов	26
8	Круговое отверстие в слоистой среде	27
9	Заключение	31

1 Введение

Исследование слоистых структур имеет важное значение для задач теории упругости, механики материалов, теории поля и механики грунтов. Например, учет слоистости горной породы может увеличить точность получаемых результатов при численном моделировании распространения трещины гидроразрыва (ГРП).

Существует два основных подхода к решению задач для слоистых структур. Оба подхода используют геометрическую особенность слоистой структуры: слои представляют собой систему типа цепочки. Первый подход основан на использовании метода матричного переноса и его модификаций [14, 20]. Суть данного метода заключается в переносе значений усилий и смещений (или их линейной комбинации), заданных на границе между слоями, на соседнюю границу. Основной недостаток данного подхода состоит в физической некорректности одновременного переноса значений смещений и усилий, что ведет к низкой обусловленности квадратных матриц, используемых для связи значений на соседних границах. С увеличением числа слоев в рассматриваемой структуре это приводит к неустойчивости решения и увеличению ошибки, что можно увидеть в работе [16]. Авторы данной работы смогли получить численные результаты не более чем для 11 слоев. В работе [1] автор ограничился рассмотрением трех слоев. В работах [10] и [11] формирование квадратных матриц переноса осуществляется с использованием метода граничных элементов и рядов Фурье. Результаты данных работ доказывают низкую устойчивость решения, основанного на методе матричного переноса.

В работах [12, 13] автор впервые сводит решение задачи для слоистой структуры к решению трехточечных разностных уравнений. Такой подход позволяет использовать детально изученную теорию разностных уравнений и эффективные численные методы их решения [15, 18]. Для получения связи усилий и смещений на границах слоев в работах [12, 13] используется Фурье преобразование. Для упругой трехмерной среды связь усилий и смещений в терминах Фурье преобразования представлена в работе [17] и использована в работе [6] для создания расчетной схемы.

Подробное сравнение основных методов решения задач для слоистых структур представлено в работе [7]. Авторы этой работы заключают, что наиболее эффективный метод решения состоит в сведении исходной задачи к решению трехточечных разностных уравнений. В качестве численного метода решения предлагается использовать устойчивый и эффек-

тивный метод прогонки [19]. В отличие от метода матричного переноса, метод прогонки не теряет устойчивость при увеличении числа слоев.

Особый интерес представляет исследование слоистой среды, содержащей неоднородности. Решение такой задачи можно получить с использованием метода граничных элементов (МГЭ) [2]-[4], или метода конечных элементов (МКЭ). Использование МКЭ приводит к ряду сложностей, таких как высокий порядок конечной алгебраической системы, учет точек сингулярностей и разрывов. Применение МКЭ приводит также к трудностям при рассмотрении очень тонких слоев, так как необходимое сгущение сетки приводит к заметному увеличению порядка конечной алгебраической системы.

Наиболее оптимальным методом решения линейных задач для слоистых структур с неоднородностями является метод граничных элементов, включающий в себя нахождение функции Грина для слоистой структуры без неоднородностей. Такой подход позволяет свести решение исходной задачи к решению интегральных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными ядрами, заданных только на границах неоднородностей. В результате, порядок конечной алгебраической системы равен суммарному числу узлов на границах неоднородностей.

Алгоритм решения задач для слоистых сред с неоднородностями подробно описан в работе [8]. Для трехмерной упругой среды представлены все необходимые соотношения, позволяющие решить исходную задачу с использованием метода прогонки и метода граничных элементов. Несмотря на детальный анализ представленного алгоритма решения, работа [8] не содержит информацию об особенностях его численной реализации.

Цель данной работы состоит в эффективной численной реализации алгоритма решения задач для слоистых структур с неоднородностями, описанного в работе [8], и исследовании его ключевых особенностей. Эффективность численного алгоритма достигается благодаря двум важнейшим факторам:

- Геометрическая особенность слоистой структуры позволяет применять эффективный метод прогонки для нахождения решения. Использование метода прогонки приводит к существенному уменьшению количества операций, необходимых для получения решения ($O(n)$ вместо $O(n^3)$ для метода Гаусса.)
- Рассматриваемые уравнения линейные, а границы слоев плоские и параллельные. Эти два условия позволяют применять преобразование Фурье. В численной реализации использование быстрого преобразования Фурье приводит к уменьшению количества операций и

времени расчета (вместо $O(n^2)$ проводится только $O(n \ln(n))$ операций).

Большой практический интерес также представляют:

- Точность численного нахождения функции Грина слоистой среды
- Особенности использования дискретного преобразования Фурье
- Исследование логарифмической особенности функции Грина

В разделах 2 – 5 данной работы описан алгоритм нахождения функции Грина для слоистой среды. Все приведенные в этих пунктах соотношения записаны в общем виде и применимы для любого линейного дифференциального оператора, описывающего состояние среды. В разделе 6 рассматривается пример нахождения функции Грина слоистой среды для уравнения Лапласа. Также в разделе 6 исследуется логарифмическая особенность функции Грина и особенности численной реализации описанного алгоритма, связанные с использованием дискретного преобразования Фурье. В разделе 7 приводится алгоритм решения краевой задачи в слоистой среде, а в разделе 8 представлен пример расчета для кругового отверстия.

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из n слоев с плоскими параллельными границами (рис. 1). Каждый слой может иметь поры и трещины. Пронумеруем слои снизу вверх от 1 до n , а их границы от 0 до n . Оси x_2 и x_3 декартовой системы координат направим вдоль границ слоев в горизонтальной плоскости, а ось x_1 – перпендикулярно вверх по направлению нормали к границам слоев. Величины, относящиеся к i -ому слою или контакту будем обозначать индексом i . Индексом «t» («b») будем обозначать значения на верхней (нижней) границе слоя. Тогда для смещений, испытывающих разрыв на i -ой границе, $\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{u}_t^i - \mathbf{u}_b^{i+1}$.

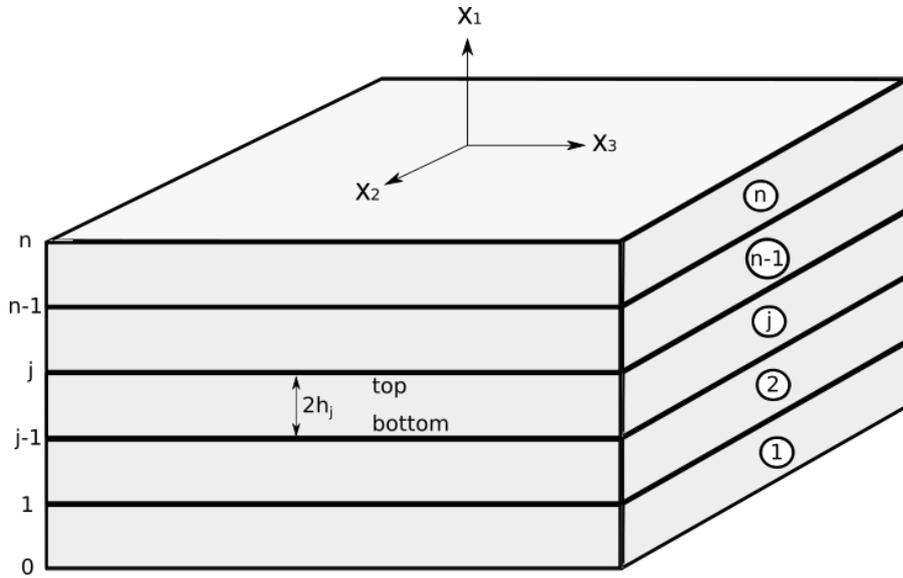


Рис. 1: Слоистая структура

Для системы слоев справедливо уравнение:

$$\mathbf{L}^i \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

где \mathbf{L}^i - линейный дифференциальный оператор для i -ого слоя. В качестве \mathbf{L} может использоваться, например, оператор Ляме или оператор Лапласа.

Условие равновесия на границах имеет вид:

$$\mathbf{q}_t^i = \mathbf{q}_b^{i+1} = \mathbf{q}^i \quad (i = 1, \dots, n - 1) \quad (2)$$

где \mathbf{q}^i – усилие на i -ой границе в направлении оси x_1 .

Если на границах некоторых пор или трещин заданы усилия \mathbf{q}^0 , то:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 \quad (3)$$

Контактное взаимодействие на i -ой границе определяется соотношением:

$$-\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{A}_c^i \mathbf{q}^i \quad (4)$$

где \mathbf{A}_c^i - заданная матрица контактного взаимодействия на границе между i и $i + 1$ слоем. В случае идеального контакта на i -ой границе $\mathbf{A}_c^i = 0$ и $\Delta \mathbf{u}^i = 0$.

На границах пор и трещин задаются неоднородные граничные условия:

$$-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{V}_c \mathbf{q} + \Delta \mathbf{u}^0 \quad (5)$$

где \mathbf{V}_c и $\Delta \mathbf{u}^0$ - заданная симметричная матрица и заданный вектор разрыва смещений на границе пор(трещин) и среды.

Главная задача состоит в нахождении напряжений и смещений, удовлетворяющих уравнению (1), при условиях (2) и (4) за пределами пор (трещин) и условиям (3) [или (5)] на границах пор (трещин).

3 Метод решения

Метод решения поставленной задачи основан на геометрической особенности системы слоев с плоскими параллельными границами: слои являются системой типа цепочки. Таким образом, исходная задача сводится к решению методом прогонки системы разностных уравнений.

Исходную задачу легко свести к уравнениям, заданным только на поверхностях пор и трещин, если известна функция Грина $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для слоистой структуры без неоднородностей, удовлетворяющая уравнению:

$$\mathbf{L}^i \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{I} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

где \mathbf{I} - единичная матрица; $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака. l -ый столбец функции Грина есть вектор смещений, полученный в результате действия точечного источника, приложенного в точке \mathbf{y} в направлении l .

Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо найти функцию Грина для слоистой среды без неоднородностей.

4 Нахождение функции Грина

Рассмотрим бесконечную однородную среду с упругими свойствами k -ого слоя. Пусть в точке \mathbf{y} этой среды находится точечный источник единичной интенсивности. $\mathbf{U}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ - функция Грина для такой среды. Столбцы матрицы $\mathbf{U}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяют уравнению (1) при $i = k$, но в

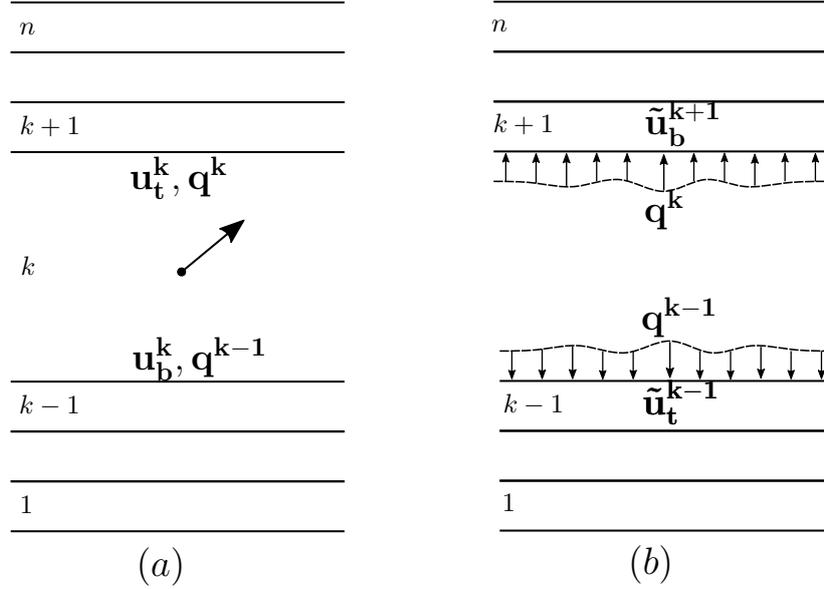


Рис. 2: Геометрическая схема к алгоритму нахождения функции Грина

в общем случае не являются решением при $i \neq k$. Поэтому функция Грина ищется в виде суммы:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{U}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{U}^a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (7)$$

где $\mathbf{U}^a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ - добавка. Функции Грина $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет уравнению (1), а так же условиям (2) и (4) во всей слоистой структуре.

Нахождение $\mathbf{U}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в случае бесконечной изотропной среды не вызывает трудностей. Таким образом, задача нахождения функции Грина сводится к задаче нахождения добавки $\mathbf{U}^a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Рассмотрим алгоритм вычисления $\mathbf{U}^a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. l -ому столбцу матрицы $\mathbf{U}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ соответствует \mathbf{u}_t^k - смещение на верхней границе k -ого слоя, а так же \mathbf{u}_b^k - смещение на нижней границе. Усилия на верхней и нижней границе обозначим \mathbf{q}^k и \mathbf{q}^{k-1} (Рис. 2(a)).

Приложим усилия \mathbf{q}^k к нижней границе пачки $n - k$ слоев, находящихся выше k -ого слоя. На остальных границах пачки действует условие (4). Предположим, что для такой системы слоев найдены смещения $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{up}}$. Обозначим $\tilde{\mathbf{u}}_b^{k+1}$ - смещения на нижней границе пачки. Аналогичные вычисления проводятся для $k - 1$ слоев, находящихся ниже k -ого слоя. К верхней границе пачки прикладываются усилия \mathbf{q}^{k-1} , на остальных границах действует условие (4). Обозначим $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{low}}$ - смещения нижней пачки слоев, $\tilde{\mathbf{u}}_t^{k-1}$ - смещения на верхней границе пачки. (Рис. 2(b)).

В общем случае \mathbf{q}^k и $\Delta \mathbf{u}^k = \tilde{\mathbf{u}}_b^{k+1} - \mathbf{u}_t^k$ не удовлетворяют однородному условию (4) на k -ой границе. Аналогично \mathbf{q}^{k-1} и $\Delta \mathbf{u}^{k-1} = \mathbf{u}_b^k - \tilde{\mathbf{u}}_t^{k-1}$ не удовлетворяют условию (4) на $k - 1$ границе. Запишем соотношение:

$$\begin{aligned}
-\Delta \mathbf{u}_d^k &= \mathbf{A}_c^k \mathbf{q}^k + \Delta \mathbf{u}^k \\
-\Delta \mathbf{u}_d^{k-1} &= \mathbf{A}_c^{k-1} \mathbf{q}^{k-1} + \Delta \mathbf{u}^{k-1}
\end{aligned} \tag{8}$$

где $\Delta \mathbf{u}_d^k$ и $\Delta \mathbf{u}_d^{k-1}$ – найденные в результате решения разрывы смещений на верхней и нижней границах k -ого слоя. Решим задачу для n слоев при неоднородных условиях на k -ой и $k - 1$ -ой границах:

$$\begin{aligned}
-\Delta \mathbf{u}^k &= \mathbf{A}_c^k \mathbf{q}^k - \Delta \mathbf{u}_d^k \\
-\Delta \mathbf{u}^{k-1} &= \mathbf{A}_c^{k-1} \mathbf{q}^{k-1} - \Delta \mathbf{u}_d^{k-1}
\end{aligned} \tag{9}$$

и однородных условиях (4) на всех остальных границах. Найденные смещения обозначим \mathbf{u}^* . В результате решения получается, что точечному источнику, действующему в направлении l , соответствует добавочный столбец $\mathbf{u}^* + \tilde{\mathbf{u}}^{\text{up}} + \tilde{\mathbf{u}}^{\text{low}} = \mathbf{u}^* + \tilde{\mathbf{u}}$.

Проведем аналогичные вычисления для всех столбцов матрицы $\mathbf{U}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда дополнительная матрица имеет вид:

$$\mathbf{U}^a = \mathbf{U}^* + \tilde{\mathbf{U}} \tag{10}$$

где $\tilde{\mathbf{U}} = 0$ внутри k -ого слоя. Функция Грина для системы n слоев имеет вид:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^* + \tilde{\mathbf{U}} \tag{11}$$

где $\mathbf{U}^0 = 0$ вне k -ого слоя, где действует точечный источник, а внутри этого слоя $\tilde{\mathbf{U}} = 0$. Таким образом, для нахождения матрицы Грина слоистой среды необходимо решить три типовые задачи:

1. Для пачки $n - k$ верхних слоев под действием заданных усилий на нижней границе.
2. Для пачки $k - 1$ нижних слоев под действием заданных усилий на верхней границе.
3. Для пачки n слоев при неоднородных условиях (9) на k -ой и $k - 1$ -ой границах и однородных условиях (4) на всех остальных границах.

Решение каждой из этих трех задач можно найти, следуя одному общему алгоритму.

5 Алгоритм решения типовой задачи

Рассмотрим алгоритм решения типовой задачи в общем случае. Пусть имеется система m упругих слоев без неоднородностей. Прону-

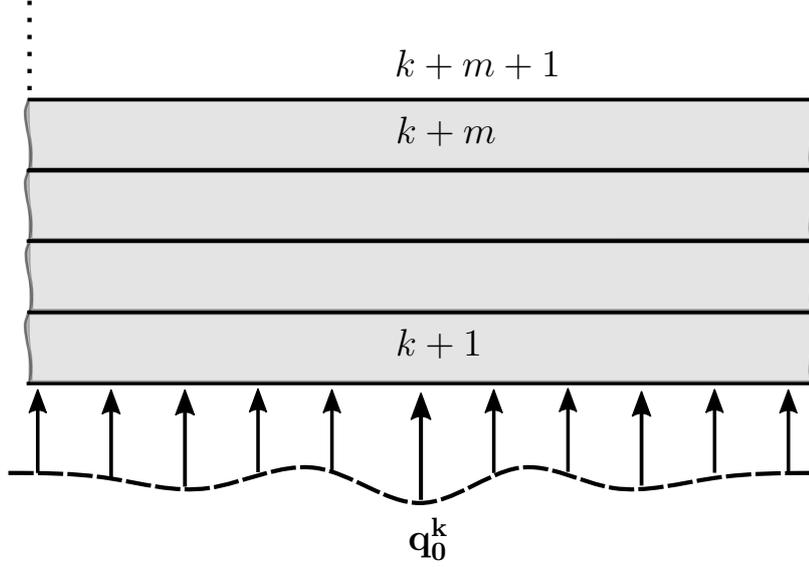


Рис. 3: Первая задача

меруем слои от $k+1$ до $k+m$, а границы от k до $k+m$. Выше $k+m$ -ого и ниже $k+1$ -ого слоя поместим слои $k+m+1$ и k соответственно с бесконечной толщиной. Для такой системы слоев справедливы соотношения:

$$\mathbf{L}^i \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (i = k, \dots, k+m+1) \quad (12)$$

Граничные условия:

$$-\Delta \mathbf{u}^i = \mathbf{A}_c^i \mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{u}_0^i \quad (i = k, \dots, k+m) \quad (13)$$

Условия на границах слоев:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_t^i &= \mathbf{q}_b^{i+1} = \mathbf{q}^i \quad (i = k, \dots, k+m) \\ \mathbf{q}^{k-1} &= \mathbf{q}^{k+m+1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (14)$$

Если на k -ой границе заданы усилия

$$\mathbf{q}^k = \mathbf{q}_0^k \quad (15)$$

то рассматриваем задачу без k -ого слоя (рис. 3). Аналогично, если усилия заданы на $k+m$ -ой границе

$$\mathbf{q}^{k+m} = \mathbf{q}_0^{k+m} \quad (16)$$

то рассматриваем задачу без $k+m+1$ -ого слоя.

Так как границы слоев плоские и параллельные, то к уравнениям (12)-(16) можно применить преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(x_1, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(s_2 x_2 + s_3 x_3)} dx_2 dx_3 \quad (17)$$

Обратное преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x_1, s) e^{i(s_2 x_2 + s_3 x_3)} ds_2 ds_3 \quad (18)$$

Следуя алгоритму, изложенному в работе [7], можно получить уравнения, связывающие усилия $\mathbf{q}_t, \mathbf{q}_b$ и смещения $\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_b$ на границах каждого слоя:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \mathbf{R}_{tt} \mathbf{q}_t + \mathbf{R}_{tb} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{u}_b &= \mathbf{R}_{bt} \mathbf{q}_t + \mathbf{R}_{bb} \mathbf{q}_b \end{aligned} \quad (19)$$

где $\mathbf{R}_{tt}, \mathbf{R}_{tb}, \mathbf{R}_{bt}, \mathbf{R}_{bb}$ – известные матрицы. Из (22) и (14) следует:

$$\mathbf{u}_b^i - \mathbf{u}_t^i = \mathbf{R}_{bt}^{i+1} \mathbf{q}^{i+1} + (\mathbf{R}_{bb}^{i+1} - \mathbf{R}_{tt}^i) \mathbf{q}^i - \mathbf{R}_{tb}^i \mathbf{q}^{i-1} \quad (i = k, \dots, k+m) \quad (20)$$

Подставив (13) в (52) получим систему разностных уравнений:

$$\mathbf{A}^i \mathbf{q}^{i-1} - \mathbf{C}^i \mathbf{q}^i + \mathbf{B}^i \mathbf{q}^{i+1} + \mathbf{F}^i = \mathbf{0} \quad (i = k, \dots, k+m) \quad (21)$$

где $\mathbf{A}^i = -\mathbf{R}_{tb}^i$; $\mathbf{C}^i = -\mathbf{A}_c + \mathbf{R}_{tt}^i - \mathbf{R}_{bb}^{i+1}$; $\mathbf{B}^i = \mathbf{R}_{bt}^{i+1}$; $\mathbf{F}^i = -\Delta \mathbf{u}_0^i$

Для того, чтобы решить (52) необходимы два дополнительных условия, которые можно получить исходя из равенства нулю усилий на границах $k+m+1$ и $k-1$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{k+m} \mathbf{q}^{k+m-1} - \mathbf{C}^{k+m} \mathbf{q}^{k+m} + \mathbf{F}^{k+m} &= \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^k \mathbf{q}^k + \mathbf{B}^k \mathbf{q}^{k+1} + \mathbf{F}^k &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (22)$$

Если усилия заданы на k -ой границе, то

$$\mathbf{C}^k = \mathbf{I}; \quad \mathbf{F}^k = \mathbf{q}^k \quad (23)$$

Если усилия заданы на $k+m$ -ой границе, то

$$\mathbf{F}^{k+m} = \mathbf{q}^{k+m} \quad (24)$$

Метод прогонки, используемый для решения (21), состоит из двух этапов. На первом этапе находятся прогоночные матрицы \mathbf{a}^i и \mathbf{b}^i .

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{k+1} &= (\mathbf{C}^k)^{-1} \mathbf{B}^k; & \mathbf{b}^{k+1} &= (\mathbf{C}^k)^{-1} \mathbf{F}^k \\ \mathbf{a}^{i+1} &= (\mathbf{C}^i - \mathbf{A}^i \mathbf{a}^i)^{-1} \mathbf{B}^i & (i = k+1, \dots, k+m-1) \\ \mathbf{b}^{i+1} &= (\mathbf{C}^i - \mathbf{A}^i \mathbf{a}^i)^{-1} (\mathbf{B}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{b}^i) & (i = k+1, \dots, k+m)\end{aligned}\quad (25)$$

На втором этапе находятся смещения и усилия на границах:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{k+m} &= \mathbf{b}^{k+m+1} \\ \mathbf{q}^{i-1} &= \mathbf{a}^i \mathbf{q}^i + \mathbf{b}^i & (i = k+m, \dots, k+1) \\ \mathbf{u}_t^i &= (\mathbf{R}_{tt}^i + \mathbf{R}_{tb}^i \mathbf{a}^i) \mathbf{q}^i + \mathbf{R}_{tb}^i \mathbf{b}^i & (i = k+m, \dots, k+1) \\ \mathbf{u}_b^i &= (\mathbf{R}_{bt}^i + \mathbf{R}_{bb}^i \mathbf{a}^i) \mathbf{q}^i + \mathbf{R}_{bb}^i \mathbf{b}^i & (i = k+m, \dots, k+1)\end{aligned}\quad (26)$$

6 Нахождение функции Грина слоистой среды для уравнения Лапласа

6.1 Формулировка задачи

Рассмотрим двумерное уравнение Лапласа в декартовой системе координат:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (27)$$

Уравнение Лапласа описывает широкий спектр физических явлений:

- Стационарное распределение температуры в теле
- Антиплоский сдвиг
- Напор в задачах о течении грунтовых вод
- Потенциал в гидромеханике
- Электростатический потенциал в однородном диэлектрике
- Электрический потенциал в теории стационарного течения электрических токов в твердых проводниках.

Будем говорить об уравнении Лапласа в терминах потенциалов u и потоков q . Потоки в направлении осей x_1 и x_2 определяются соотноше-

ниями:

$$\begin{aligned} q_1 &= \kappa \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ q_2 &= \kappa \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (28)$$

где κ – взятая со знаком минус проводимость среды (в дальнейшем будем называть κ проводимостью). Поток q_n в направлении \mathbf{n} определяется соотношением:

$$q_n = \kappa \frac{\partial u}{\partial n} \quad (29)$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos(\mathbf{n}, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, x_2) \quad (30)$$

Фундаментальное решение уравнения (27) для бесконечной изотропной среды имеет вид:

$$U_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (31)$$

где $r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ – расстояние до точечного источника. Решение (31) обладает важным свойством:

$$U_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = U_l(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (32)$$

и удовлетворяет уравнению (27) всюду, за исключением точки $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, в которой решение обращается в бесконечность. Компоненты вектора потока, соответствующие решению (31), определяются соотношением:

$$q_i = -\frac{1}{2\pi} \kappa \frac{(x_i - y_i)}{r^2} \quad (33)$$

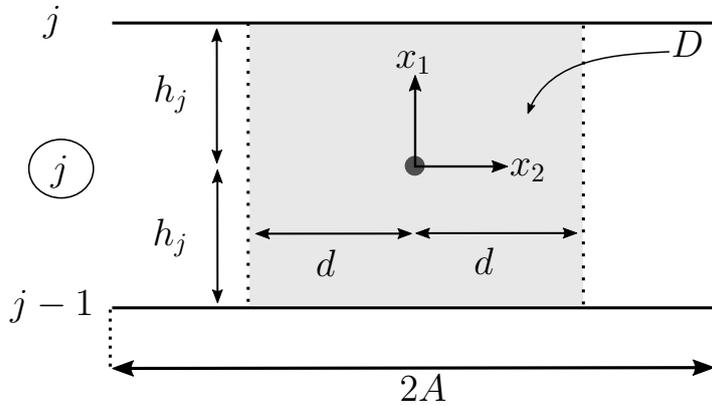


Рис. 4: Точечный источник в j -ом слое

Рассмотрим слоистую структуру длиной $2A$, состоящую из n слоев. Для каждого слоя известны высота $2h_i$ и проводимость κ_i . Центр j -ого слоя обозначим точкой O и введем систему координат с центром в данной точке. Пусть в некоторой точке \mathbf{y} внутри j -ого слоя, расположенной на оси ординат, находится точечный источник единичной интенсивности. Для такого источника общий поток через внешний контур S равен -1 :

$$\int_S \kappa \frac{\partial u}{\partial n} ds = -1 \quad (34)$$

Будем искать решение в прямоугольной области D с центром в точке O (рис. 4). Высота области D не превышает высоту j -ого слоя ($2h_d \leq 2h_j$), а полуширина d удовлетворяет неравенству: $h_d \leq d < A$.

6.2 Нормировка

Проведем нормировку параметров. Величины с размерностью длины будем нормировать на h_j

$$\hat{h}_i = \frac{h_i}{h_j} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \hat{h}_d = \frac{h_d}{h_j}, \quad \hat{A} = \frac{A}{h_j}, \quad \hat{d} = \frac{d}{h_j} \quad (35)$$

Проводимость каждого слоя будем нормировать на проводимость j -ого слоя:

$$\hat{\kappa}_i = \frac{\kappa_i}{\kappa_j} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (36)$$

В дальнейшем будем считать, что все величины являются безразмерными, и для удобства записи не будем вводить специальные обозначения.

6.3 Функция Грина для периодической структуры

Преобразование Фурье позволяет получить связь между потенциалом и потоком на границах между слоями. Применим преобразование Фурье к уравнению Лапласа по координате x_2 :

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} - s^2 \tilde{u} = 0 \quad (37)$$

где

$$\tilde{u}(x_1, s) = \int_{-A}^{+A} u(x) e^{-isx_2} dx_2 \quad (38)$$

Применение преобразования Фурье к рассматриваемой слоистой структуре длиной $2A$ изменяет граничные условия исходной задачи по оси x_2 на периодические граничные условия:

$$u|_{x_2=-A} = u|_{x_2=A} \quad (39)$$

Функция Грина для уравнения Лапласа с периодическими граничными условиями имеет вид:

$$U_p(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2A} r \right) \right) \quad (40)$$

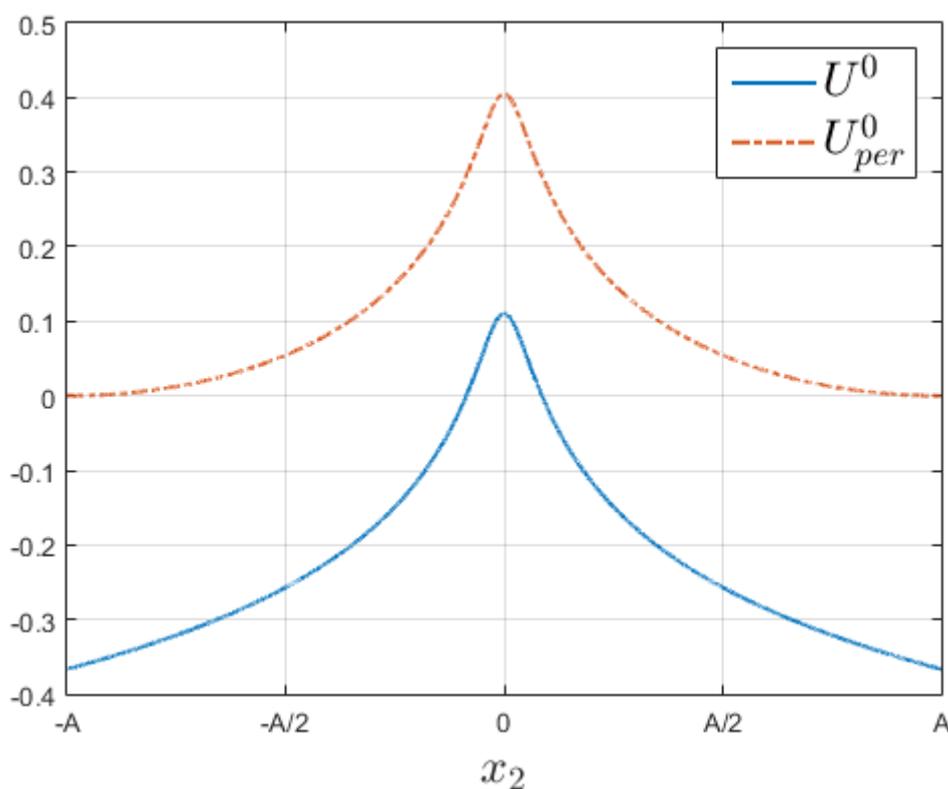


Рис. 5: Фундаментальное решение при $\eta = 20, x_1 = \frac{h_k}{2}$

Важное отличие (40) от (37) (рис. 5) состоит в том, что

$$U_p|_{x_2=-A} = U_p|_{x_2=A} = 0 \quad (41)$$

тогда как

$$U_l|_{x_2=-A} = U_l|_{x_2=A} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \infty \quad (42)$$

Основная задача состоит в нахождении потока в области D . Так как поток выражается через производные $\partial u / \partial x_i$ ($i = 1, 2$), то значение u в

рассматриваемой области может быть найдено с точностью до константы. В дальнейшем будет показано, что наличие константы не влияет на конечный результат.

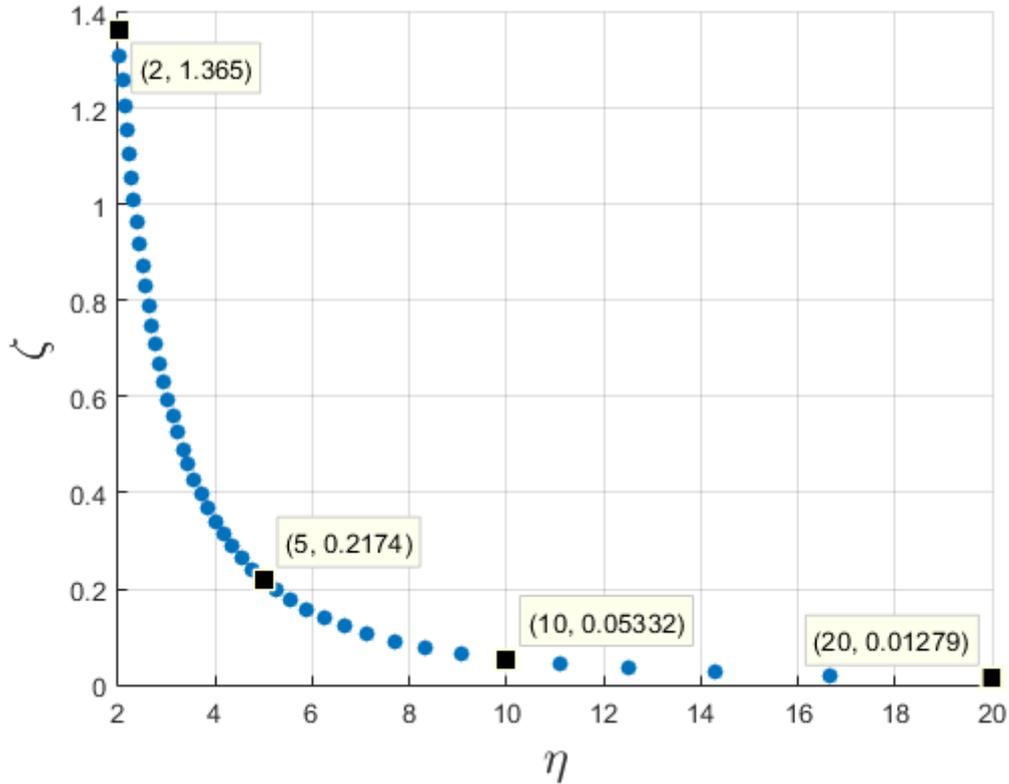


Рис. 6: $\zeta(\eta)$

Покажем, что существует область D , в которой решение U_l может быть использовано для задачи с периодическими граничными условиями. Для этого необходимо показать, что существует такая область D , в которой оба решения отличаются на константу. Введем функцию

$$U_l - U_p = C(x_1, x_2) \quad (43)$$

где $(x_1, x_2) \in D$, и рассмотрим

$$\zeta = \frac{\max_D |C(x_1, x_2)| - \min_D |C(x_1, x_2)|}{\max_D |C(x_1, x_2)|} \cdot 100\% \quad (44)$$

Величина ζ определена таким образом, что если в некоторой области D выполняется соотношение $C(x_1, x_2) = const$, то $\zeta \rightarrow 0$ в данной области.

Для удобства введем в рассмотрение величину, характеризующую удаленность области D от границ периодичности:

$$\eta = \frac{A}{d} \quad (45)$$

Из графика, представленного на рис.6, видно, что $\zeta \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0$. Этот результат объясняется тем, что при увеличении η границы периодичности оказывают на область D меньшее влияние. Поэтому в области, достаточно удаленной от границ периодичности, можно использовать U_l вместо U_p .

6.4 Связь потенциала и потока на границах

Рассмотрим общее решение уравнения (37):

$$\tilde{u} = c_1 \sinh(sx_1) + c_2 \cosh(sx_1) \quad (46)$$

Соответствующие образы потока для каждого слоя определяются соотношением:

$$\tilde{q}_i = \kappa_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (47)$$

Далее для краткости изложения Фурье-образы потенциала и потока будем называть потенциалами и потоками. Решение может быть представлено как сумма симметричной и антисимметричной части:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}_s + \tilde{u}_a \\ \tilde{q} &= \tilde{q}_s + \tilde{q}_a \end{aligned} \quad (48)$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} \tilde{u}_s &= c_2 \cosh(sx_1) \\ \tilde{u}_a &= c_1 \sinh(sx_1) \\ \tilde{q}_s &= c_2 \frac{\kappa s}{2} \sinh(sx_1) \\ \tilde{q}_a &= c_1 \frac{\kappa s}{2} \cosh(sx_1) \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{u}_s &= R_s \tilde{q}_s \\ \tilde{u}_a &= R_a \tilde{q}_a \end{aligned} \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} R_s &= \frac{2}{\kappa s} \coth(sx_1) \\ R_a &= \frac{2}{\kappa s} \tanh(sx_1) \end{aligned} \quad (51)$$

Для верхней и нижней границы можно записать:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= R_{tt}\tilde{q}_t + R_{tb}\tilde{q}_b \\ \tilde{u}_b &= R_{bt}\tilde{q}_t + R_{bb}\tilde{q}_b \end{aligned} \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{1}{2}(R_s + R_a) \\ R_{tb} &= -\frac{1}{2}(R_s - R_a) \\ R_{bt} &= \frac{1}{2}(R_s - R_a) \\ R_{bb} &= -\frac{1}{2}(R_s + R_a) \end{aligned} \quad (53)$$

Зная значения $R_{tt}, R_{tb}, R_{bt}, R_{bb}$ для каждого слоя можно использовать описанный ранее алгоритм нахождения функции Грина для слоистой структуры.

6.5 Определение потенциала и потока внутри слоя по значениям на границе

Результатом решения трех типовых задач, описанных ранее, являются значения дополнительного потока и потенциала на верхней и нижней границе j -ого слоя, в котором находится точечный источник. Ранее было отдельно отмечено, что точка, в которой находится источник, находится на оси ординат.

Пусть теперь источник находится в произвольной точке $\mathbf{y} \in D$. Рассмотрим алгоритм действий, который позволит получить значение функции Грина в любой точке \mathbf{x} внутри j -ого слоя.

Как было показано ранее, функция Грина для слоистой среды имеет вид (7). Значение потенциала u^0 и потока q^0 от U^0 известны в любой точке слоя. Необходимо найти лишь дополнительные значения потока и потенциала от добавочного слагаемого U^a .

Поместим источник в точку с координатой $(y_1, 0)$. Значения дополнительного потока на верхней и нижней границе от такого источника обозначим \tilde{q}_t^a и \tilde{q}_b^a . Из (46) и (47) и с учетом того, что $\kappa_j = 1$ и $h_j = 1/2$ получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\tilde{q}_t^a &= s(c_1 \cosh(s/2) + c_2 \sinh(s/2)) \\ \tilde{q}_b^a &= s(c_1 \cosh(s/2) - c_2 \sinh(s/2))\end{aligned}\tag{54}$$

тогда

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{\tilde{q}_t^a + \tilde{q}_b^a}{2s \cosh(s/2)} \\ c_2 &= \frac{\tilde{q}_t^a - \tilde{q}_b^a}{2s \sinh(s/2)}\end{aligned}\tag{55}$$

Значения дополнительного потенциала и потока внутри j -ого слоя имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{u}^a &= \frac{\tilde{q}_t^a + \tilde{q}_b^a}{2s \cosh(s/2)} \sinh(sx_1) + \frac{\tilde{q}_t^a - \tilde{q}_b^a}{2s \sinh(s/2)} \cosh(sx_1) \\ \tilde{q}^a &= \frac{\tilde{q}_t^a + \tilde{q}_b^a}{2 \cosh(s/2)} \cosh(sx_1) - \frac{\tilde{q}_t^a - \tilde{q}_b^a}{2 \sinh(s/2)} \sinh(sx_1)\end{aligned}\tag{56}$$

В итоге значения потенциала и потока внутри j -ого слоя, соответствующие функции Грина для слоистой среды, имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{u}^0 + \tilde{u}^a \\ \tilde{q} &= \tilde{q}^0 + \tilde{q}^a\end{aligned}\tag{57}$$

Для того, чтобы найти соответствующие значения для источника, расположенного в точке \mathbf{y} достаточно применить теорему запаздывания к (57). Важно помнить, что результатом обратного преобразование Фурье от \tilde{q} будет значение компоненты вектора потока q_1 . Значение компоненты q_2 получается путем обратного преобразования Фурье от \tilde{q}_2 :

$$\tilde{q}_2 = -is\tilde{u}\tag{58}$$

6.6 Численная реализация

Важная особенность численной реализации изложенного выше алгоритма состоит в использовании дискретного преобразования Фурье:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} f_l \exp(-i2\pi tl/N)\tag{59}$$

где N – количество значений функции, измеренных с периодом, f_l – значения функции в l -ом узле, t – индекс частоты. Тогда частота s удовлетворяет соотношению:

$$s = \frac{2\pi}{A}t \quad (60)$$

где A – полупериод. Из формулы (60) видно, что частота может принимать нулевое значение. Такую частоту будем называть нулевой частотой и обозначать s_0 . Возникает проблема, так как частота s находится в знаменателе в некоторых соотношениях, например в (51) и (56). Данную проблему легко решить, если в качестве значения нулевой частоты использовать любое целое число. Покажем, почему такая замена возможна.

Рассмотрим любую непрерывную функцию $\varphi(x)$ на отрезке $[-A, A]$. Отрезок $[-A, A]$ разобьем на $N - 1$ равных элементов. Значения в узлах этих элементов будем обозначать φ_l , где $l = -N/2 \dots N/2 - 1$. Проведем дискретное преобразование Фурье. Тогда справедливо соотношение:

$$\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}(s_0) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \varphi_l \quad (61)$$

Домножим значение функции, соответствующее нулевой частоте, на целое число c_0 :

$$\tilde{\varphi}_0 = \tilde{\varphi}_0 c_0 \quad (62)$$

Проведем обратное преобразование Фурье:

$$\phi_l = \sum_{t=-N/2}^{N/2-1} \tilde{\varphi}(t) \exp(i2\pi tl/N) \quad (63)$$

Легко показать, что

$$\phi_l = \varphi_l + \tilde{\varphi}_0 \left(1 - \frac{1}{c_0}\right) \quad (64)$$

Из формулы (64) видно, что функции отличаются на известную константу. Таким образом, изменение значения нулевой частоты приводит к тому, что значения потенциала для всей рассматриваемой слоистой структуры, находится с точностью до известной константы.

6.7 Точность нахождения функции Грина

Для определения точности нахождения функции Грина слоистой структуры рассмотрим три тестовые задачи, для каждой из которых

известно аналитическое решение. Будем исследовать значение ошибки в зависимости от N – количества узлов сетки на границе и от η

Задача 1. Пусть имеются два однородных слоя с бесконечной толщиной, между которыми находится пачка, состоящая из n однородных слоев. Все слои обладают одинаковой проводимостью и идеальными контактами на границах. Такую структуру можно рассматривать как бесконечную однородную изотропную среду. Функция Грина для такой структуры должна иметь добавку, близкую к нулю. В качестве погрешности будем рассматривать максимальную относительную ошибку в области D :

$$\zeta = \max_D \left[\frac{q_{k+1}^a}{q_{k+1}^0} \right] \cdot 100\% \quad (65)$$

где q_{k+1}^a – добавка к потоку на $k + 1$ -ой границе, q_{k+1}^0 – точное значение потока на $k + 1$ -ой границе.

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	0.605	0.588	0.58	0.576
$\eta = 16$	0.402	0.388	0.382	0.379
$\eta = 32$	0.143	0.134	0.131	0.129
$\eta = 64$	0.104	0.04	0.038	0.037

Таблица 1: Относительная погрешность (в %) в области D в зависимости от N и η для однородной среды.

Из таблицы (1) видно, что точность возрастает с увеличением N и η . Большая точность при больших значениях η объясняется тем, что с увеличением η граничные условия оказывают меньшее влияние на область D , в которой ищется решение.

Результаты, представленные в таблице (1), получены для структуры, состоящей из пяти слоев ($n = 5$), но количество слоев может быть сколь угодно большим, при этом величина ошибки не изменится (таблица (2)).

	$n = 3$	$n = 20$	$n = 40$
$\eta = 8$	0.58	0.58	0.58
$\eta = 16$	0.382	0.382	0.382
$\eta = 32$	0.131	0.131	0.131
$\eta = 64$	0.038	0.038	0.038

Таблица 2: Относительная погрешность (в %) в области D в зависимости от n и η для однородной среды.

Задача 2.

Рассмотрим систему из n слоев, находящуюся между двумя слоями с бесконечной толщиной. Проводимость нижней пачки слоев $i \leq k$ возьмем одинаковой. Для слоев из верхней пачки $i > k$ проводимость устремим к нулю. Такую структуру можно рассматривать как полупространство с непроницаемой границей (Рис. 7).

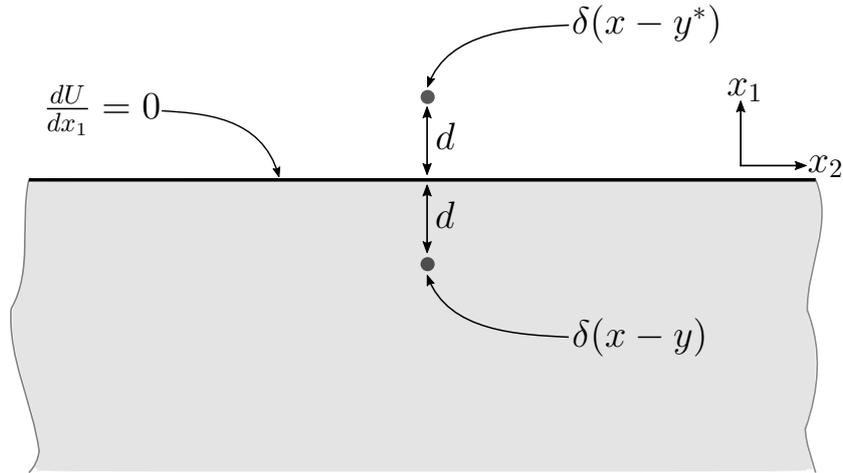


Рис. 7: Точечный источник в полупространстве.

Аналитическое решение такой задачи имеет вид:

$$U = U^0 + U^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) - \frac{1}{2\pi} \ln(r^*) \quad (66)$$

где r^* - расстояние до отраженного источника. Функция Грина, найденная в результате численного расчета, должна иметь добавку, близкую к слагаемому, соответствующему отраженному источнику. В качестве погрешности будем рассматривать максимальную относительную ошибку в области D :

$$\zeta = \max \left[\frac{q_{k+1}^a - q_{k+1}^*}{q_{k+1}^*} \right] \cdot 100\%, \quad x_2 \in D \quad (67)$$

где q_{k+1}^a - добавка к потоку на $k+1$ -ой границе, q_{k+1}^* - поток на $k+1$ -ой границе от отраженного источника.

Анализ данных, представленных в таблице (3), позволяет заключить, что для данной задачи высокая точность достигается даже при относительно небольших значениях η и N .

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	2.5755	2.575	2.5748	2.5747
$\eta = 16$	2.5703	2.57	2.5698	2.5697
$\eta = 32$	2.5637	2.5635	2.5633	2.5632
$\eta = 64$	2.562	2.561	2.561	2.5609

Таблица 3: Относительная погрешность (в %) ($\times 10^{-4}$) в области D в зависимости от N и η в случае полупространства с непроницаемой границей.

Задача 3.

Рассмотрим систему из n слоев, находящуюся между двумя слоями с бесконечной толщиной. Упругие свойства нижней пачки слоев $i \leq k$ возьмем одинаковыми. Для слоев из верхней пачки $i > k$ проводимость устремим к бесконечности. Такую структуру можно рассматривать как полупространство с сильно проводящей границей. Аналитическое решение такой задачи имеет вид:

$$U = U^0 + U^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) + \frac{1}{2\pi} \ln(r^*) \quad (68)$$

где r^* - расстояние до отраженного источника. Матрица Грина, найденная в результате работы программы, должна иметь добавку, близкую к слагаемому, соответствующему отраженному источнику. Погрешность будем считать по формуле (67).

	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
$\eta = 8$	1.212	1.177	1.16	1.152
$\eta = 16$	0.804	0.777	0.764	0.758
$\eta = 32$	0.286	0.269	0.261	0.257
$\eta = 64$	0.21	0.08	0.076	0.074

Таблица 4: Относительная погрешность (в %) в области D в зависимости от N и η в случае полупространства с сильно проводящей границей.

В отличие от задачи 2, результаты, представленные в таблице (4), сильно зависят от η и N . Минимальное значение относительной ошибки достигается при максимальных значениях η и N .

7 Решение краевых задач

7.1 Постановка задачи

Пусть в области D j -ого слоя находится отверстие, ограниченное замкнутым контуром L_s . Область внутри отверстия будем обозначать D_s , а область слоистой структуры вне отверстия обозначим D^* (рис. 8). Направление обхода контура L_s выбирается таким образом, чтобы область D^* оставалась слева. Нормаль \mathbf{n} направлена вправо от направления движения. Верхний индекс плюс(минус) отвечает значением области, для которой нормаль внешняя (внутренняя). Пусть на контуре L_s задан поток q_n^+ . Задача состоит в нахождении потенциала в области D^* .

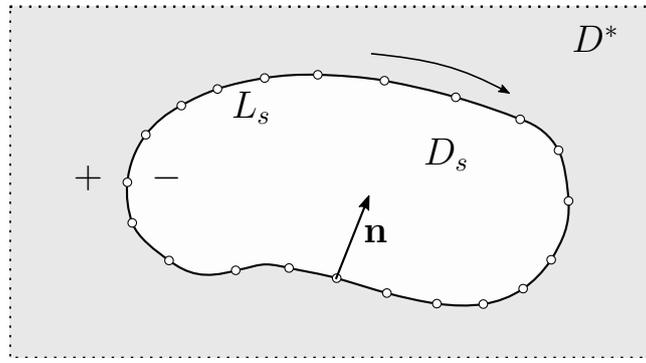


Рис. 8: Геометрическая схема задачи об отверстии в слоистой среде.

7.2 Комплексное граничное интегральное уравнение

Для нахождения решения будем использовать комплексные граничные интегральные уравнения (К-ГИУ), теория которых применительно к уравнению Лапласа представлена в работе [8]. Для отверстия в бесконечной изотропной среде такое уравнение имеет вид:

$$\operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{L_s} \left[q_n^+ \ln(\tau - z) ds + i \frac{\kappa^+ U^+}{\tau - z} ds \right] \right\} = \begin{cases} \kappa U(z), & z \in D^* \\ \frac{1}{2} \kappa^+ U^+, & z \in L_s \\ 0, & z \notin D^* + L_s \end{cases} \quad (69)$$

где τ, z – координаты точек в комплексной плоскости, $i = \sqrt{-1}$. Для того, чтобы обобщить уравнение (69) на случай слоистой среды, необходимо добавить дополнительные слагаемые к логарифмическому и сингулярному ядру:

$$\operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{L_s} [q_n^+ U_* ds + U^+ Q_* ds] \right\} = \begin{cases} \kappa U(z), & z \in D^* \\ \frac{1}{2} \kappa^+ U^+, & z \in L_s \\ 0, & z \notin D^* + L_s \end{cases} \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned} U_* &= \ln(\tau - z) + U^a(\tau, z) \\ Q_* &= i \frac{\kappa^+}{\tau - z} + Q^a(\tau, z) \end{aligned} \quad (71)$$

здесь $U^a(\tau, z)$, $Q^a(\tau, z)$ – дополнительные значения, вычисляемые по изложенному выше алгоритму.

Уравнение (69) было получено при условии

$$\int_{L_s} q_n^+ ds = 0 \quad (72)$$

В случае заданного на границе отверстия потока данное условие, очевидно, выполняется не всегда. Рассмотрим алгоритм действий, позволяющий обойти данное ограничение. Найдем суммарный поток на конуре отверстия:

$$\int_{L_s} q_n^+ ds = q_0 \quad (73)$$

и поместим точечный источник интенсивности q_0 в точку $y_0 \in D_s$ слоистой структуры без неоднородностей. Найдем индуцированный источником потенциал и поток в области $D^* + L_s$, а так же дополнительный поток q_n^{a+} в точках контура L_s . Найденный дополнительный поток на контуре отверстия самоуравновешен, то есть

$$\int_{L_s} q_n^{a+} ds = 0 \quad (74)$$

Решение уравнения (70) с потоком q_n^{a+} на контуре L_s позволяет получить дополнительные значения потенциала в области D^* . Суммарное значение потенциала от точечного источника и контура с самоуравновешенной нагрузкой дают искомое значение потенциала в области D^* .

7.3 Численное решение комплексного граничного интегрального уравнения комплексным методом граничных элементов

Подробное описание комплексного метода граничных элементов (К-МГЭ) представлено в работе [9]. Для вычисления интегралов, входящих в (70), контур L_s представляется набором прямолинейных элементов, каждый из которых преобразуется в отрезок $[-1, 1]$ с помощью линейного преобразования. Затем производится аппроксимация функции на каждом элементе, после чего интеграл вычисляется на базисных функциях с использованием рекуррентных формул. Далее происходит решение алгебраической системы, порядок которой равен числу узлов на границе L_s . Конечный этап состоит в вычислении искомых значений во внутренних точках исследуемой области.

Все необходимые формулы для вычисления (69) представлены в работах [5] и [9]. В случае слоистой среды необходимо получить аналогичные формулы для вычисления интегралов от добавочных слагаемых.

Рассмотрим прямолинейный элемент с началом в точке a и концом в точке b в системе координат, в которой комплексная координата определяется соотношением $z = x_2 + ix_1$. Преобразуем данный элемент в отрезок $[-1, 1]$ с комплексной координатой $z' = x'_2 + ix'_1$, связанной с исходной координатой соотношением

$$z = \frac{a+b}{2} + \frac{|a+b|}{2} z' e^{i\alpha} \quad (75)$$

где α – угол элемента с осью x_2 .

Для аппроксимации функции, определенной в узлах элемента $[a, b]$, используются полиномы Лагранжа:

$$P_k(\tau') = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{\tau' - \tau'_i}{\tau'_k - \tau'_i} = \sum_{s=0}^{n-1} c_{ks} \tau'^s, \quad k = 1, \dots, n \quad (76)$$

тогда функцию, определенную в точках рассматриваемого элемента, можно представить в виде

$$f(\tau') = \sum_{k=1}^n f_k \sum_{s=0}^{n-1} c_{ks} \tau'^s, \quad k = 1, \dots, n \quad (77)$$

где c_{ks} – известные постоянные. В данной работе используется аппроксимация полиномами второго порядка ($n-1 = 2$) при расположении одного

из узлов в центре элемента, а двух других на расстоянии $1/3$ от его концов. Такое расположение узлов позволяет получить разбиение контура, близкое к равномерному. Применение аппроксимации (77) позволяет свести вычисление интегралов от регулярных функций к вычислению трех простых интегралов:

$$\int_{-1}^1 \tau^0 = 2, \quad \int_{-1}^1 \tau^1 = 0, \quad \int_{-1}^1 \tau^2 = 2/3 \quad (78)$$

Вычисление интегралов с логарифмическими и сингулярными ядрами выполняется аналогично с использованием рекуррентных соотношений, представленных в работе [9].

8 Круговое отверстие в слоистой среде

Пусть в области D j -ого слоя находится круговое отверстие радиуса $R \leq h_d$. На границах полости зададим поток q_n^0 .

Рассмотрим круговое отверстие радиуса $R \ll h_d$. Если заданный поток на границе удовлетворяет соотношению

$$\int_{L_s} q_n^0 ds = -1 \quad (79)$$

то такое отверстие можно рассматривать как точечный источник единичной интенсивности. Тогда потенциал, удовлетворяющий решению для данного отверстия, должен отличаться от функции Грина для слоистой среды на константу. В терминах изложенного выше алгоритма это означает, что дополнительный потенциал в области D^* должен быть одинаковым в любой точке данной области.

Выше, при определении точности нахождения функции Грина, было показано, что точность результатов не зависит от числа слоев. Поэтому для упрощения изложения рассмотрим слоистую структуру, состоящую из трех слоев. Поместим круговое отверстие в центр второго слоя. Параметры модели зададим следующим образом:

- Полувысота слоев: $h_1 = h_3 = 2h_2$
- Проводимость слоев: $\kappa_1 = 25\kappa_2$, $\kappa_3 = 2\kappa_2$
- Полудлина каждого слоя $A = 20h_2$
- Радиус кругового отверстия $R = 10^{-4}h_2$
- Количество узлов на контуре отверстия $N_s = 90$
- Количество узлов на границе между слоями $N = 1024$

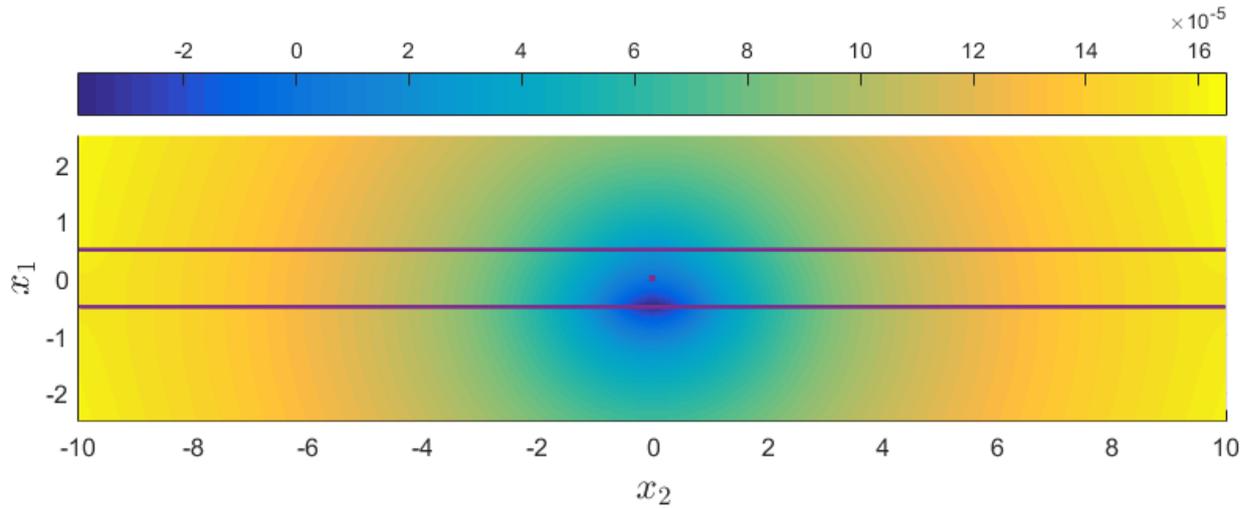


Рис. 9: Дополнительный потенциал от кругового отверстия малого радиуса

На рис.9 представлен дополнительный потенциал от кругового отверстия малого радиуса. Из рисунка видно, что значения дополнительного потенциала равны нулю с точностью до четвертого знака после запятой. Полный потенциал для отверстия малого радиуса представлен на рис.10.

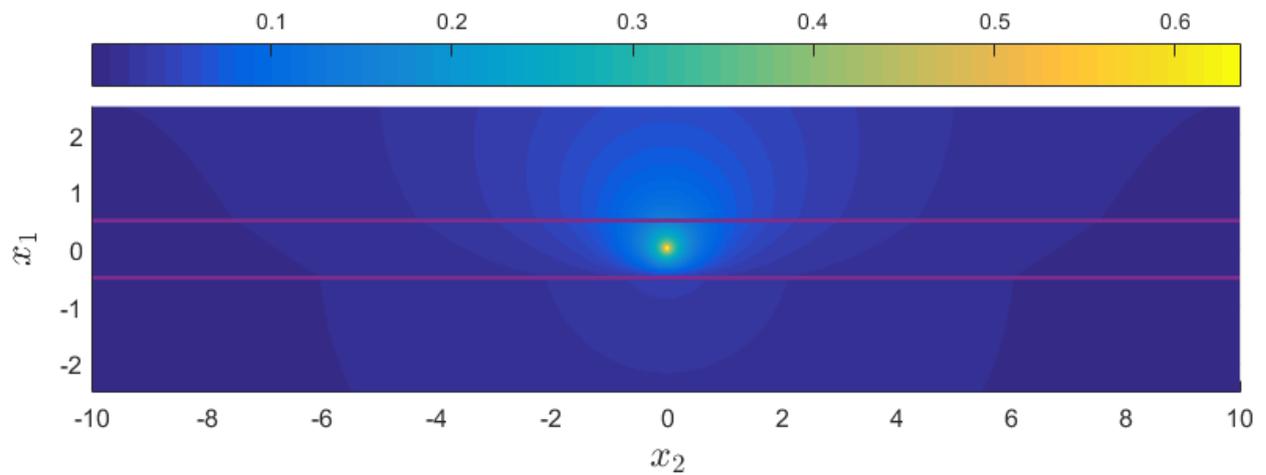


Рис. 10: Потенциал от кругового отверстия малого радиуса

Посмотрим, как влияет на результат радиус кругового отверстия. Этот анализ важен с практической точки зрения, так как замкнутый контур с заданными на нем потоком можно с известной точностью заменить на точечный источник. Такая замена может существенно увеличить скорость расчета.

Проведем три дополнительных расчета для $R = 0.1h_2$, $R = 0.5h_2$ и $R = 0.9h_2$. Остальные параметры оставим такими же, как и в предыдущем расчете.

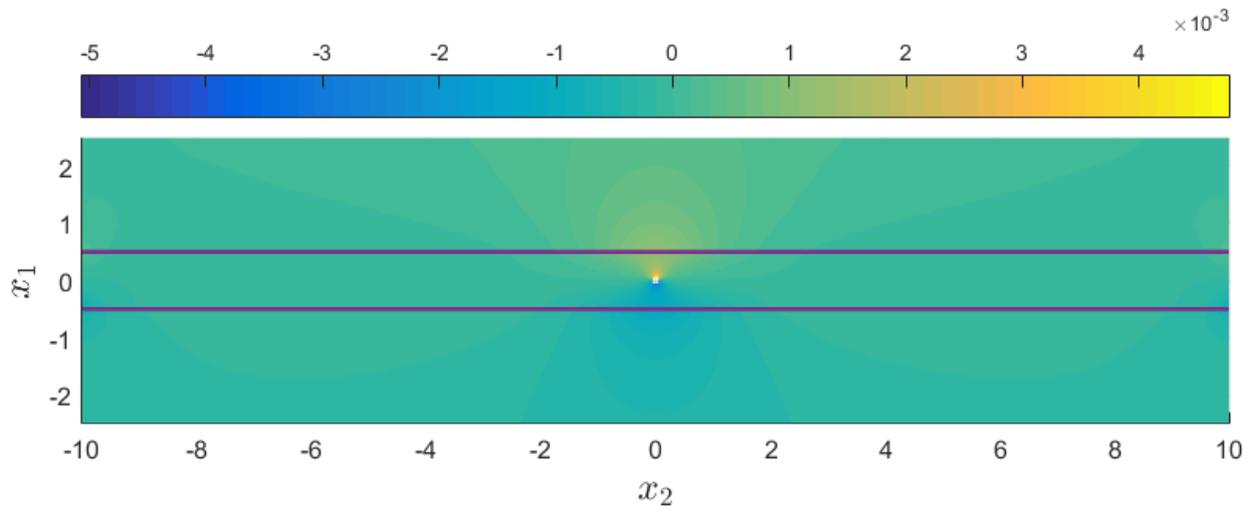


Рис. 11: Дополнительный потенциал от кругового отверстия $R = 0.1h_2$

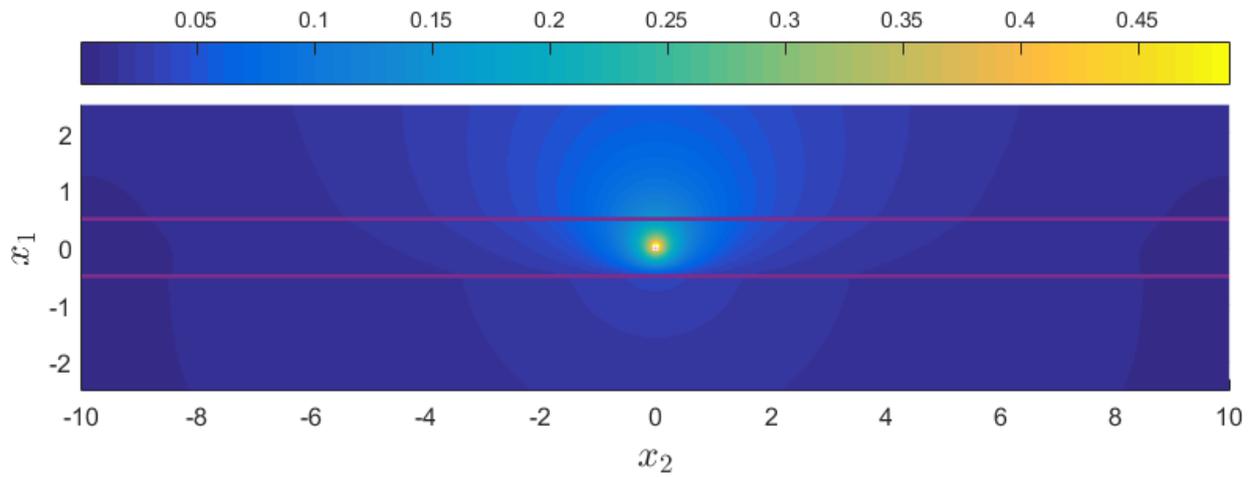


Рис. 12: Потенциал от кругового отверстия $R = 0.1h_2$

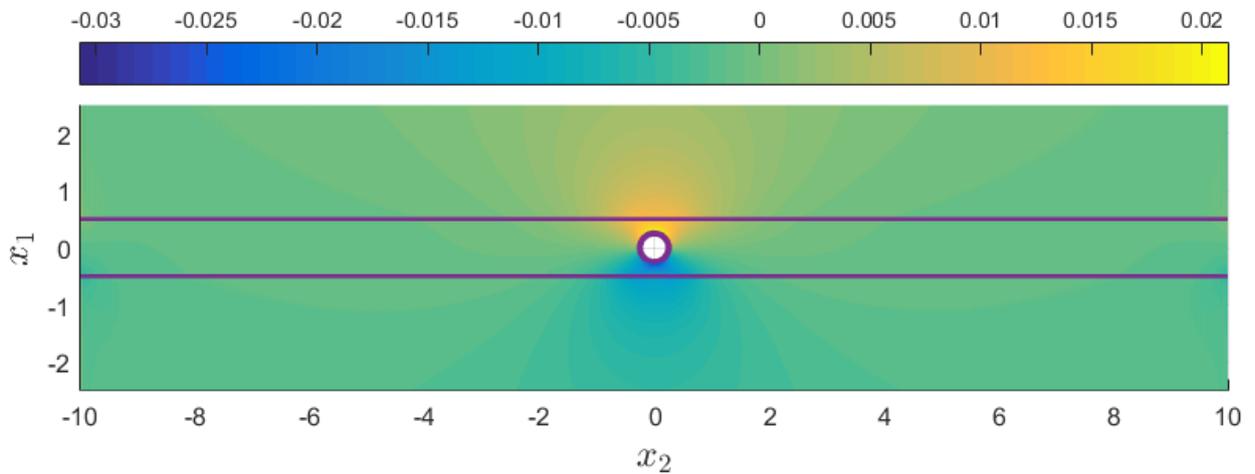


Рис. 13: Дополнительный потенциал от кругового отверстия $R = 0.5h_2$

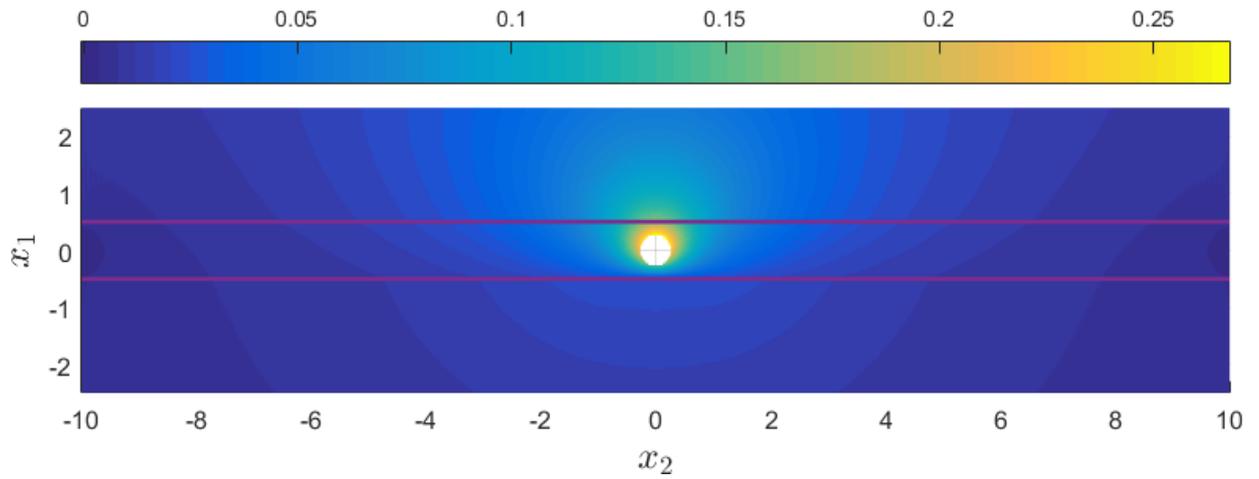


Рис. 14: Потенциал от кругового отверстия $R = 0.5h_2$

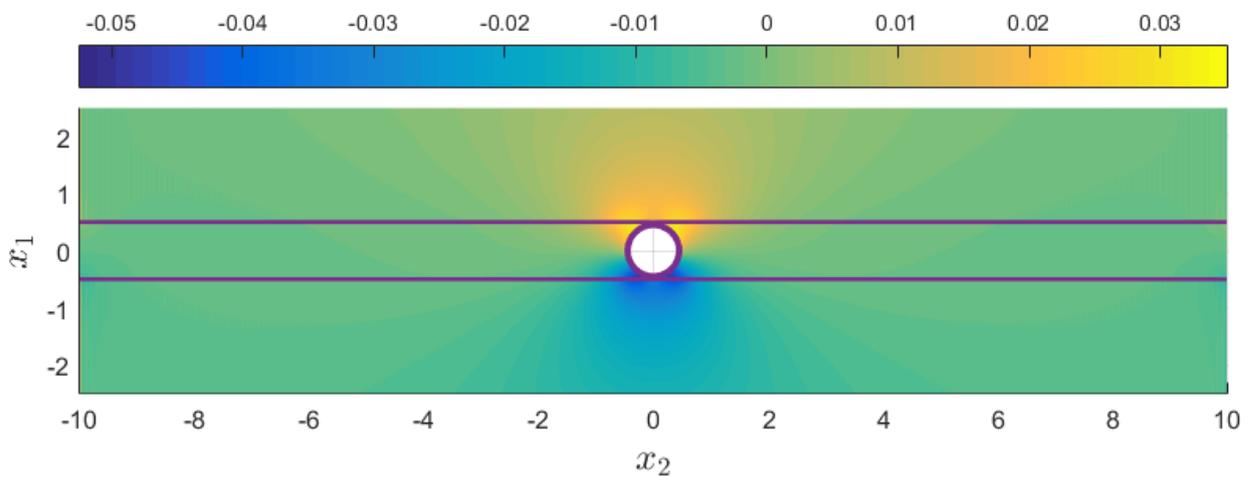


Рис. 15: Дополнительный потенциал от кругового отверстия $R = 0.9h_2$

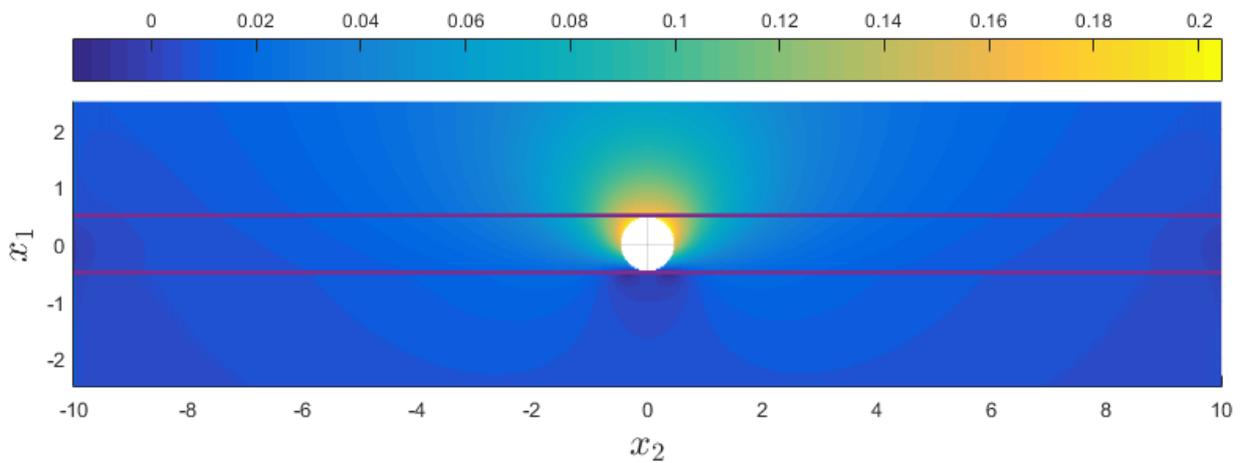


Рис. 16: Потенциал от кругового отверстия $R = 0.9h_2$

Из результатов, представленных на рис. 11–16 видно, что с увеличением радиуса кругового отверстия увеличивается максимальное значение дополнительного потенциала. Чем больше значение дополнительного потенциала, тем меньше точность, с которой действие неоднородности можно заменить на действие точечного источника. Для структур, содержащих большое количество неоднородностей, возможность такой замены может существенно увеличить скорость расчета.

Важно отметить высокую эффективность программного кода, реализующего описанный выше алгоритм. Анализ кода показал, что большая часть ресурсов расходуется на второстепенные задачи (например, запись значений и построение графиков), тогда как работа основных вычислительных модулей осуществляется довольно быстро даже на относительно слабых вычислительных машинах.

9 Заключение

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом:

- Разработан максимально эффективный алгоритм решения задач для слоистых структур. Эффективность алгоритма достигается применением метода прогонки и быстрого преобразования Фурье.
- Для плоских слоистых структур исследована логарифмическая особенность функции Грина. Показано, что наличие логарифма добавляет к функции Грина константу, значение которой может быть получено численно.
- Показано, что использование дискретного преобразования Фурье добавляет к функции Грина константу, значение которой может быть получено аналитически.
- Для определения точности нахождения функции Грина представлены 3 тестовые задачи. На их примере показано, что точность нахождения функции Грина не зависит от числа слоев в рассматриваемой структуре, а зависит от изменяемых параметров. Это позволяет контролировать точность результатов.
- Применение функции Грина для решения краевой задачи показало сильное влияние границ слоев на конечный результат при увеличении размера кругового отверстия.

Список литературы

- [1] Aleynikov S.M., «Spatial Contact Problems in Geotechnics », *Foundations of Engineering Mechanics*, 2011.
- [2] Brebbia C.A., «Boundary Element Techniques in Computer-Aided Engineering», 1984
- [3] Brebbia C.A., Tells J.C.F., Wrobel L.C., «Boundary Element Techniques», *Springer*, 1984
- [4] Crouch S.L., Starfield A.M., «Boundary Element Method in Solid Mechanics», 1983
- [5] Dobroskok A.A., Linkov A.M., «Complex variable equations and the numerical solution of harmonic problems for piecewise-homogeneous media», *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 73 (2009) 313-325
- [6] Filippov N.A., Linkov A.M., Milova L.A., Zoubkov V.V., «A Method to Calculate Stresses and Deformations in 3D Layered Strata», *Advances in Rock Mechanics*, 1998
- [7] Linkov A.M., Filippov N.A., «Difference Equations Approach to the Analysis of Layered Systems», *Meccanica*, 26:195-209
- [8] Linkov A.M., Linkova A.A., Savitski A.A., «An Effective Method for Multi-Layered Media with Cracks and Cavities», *International Journal of Damage Mechanics*, 1994.
- [9] Linkov A.M. «Boundary Integral Equations in Elasticity Theory», *SOLID MECHANICS AND ITS APPLICATIONS*, Vol.99, 2002
- [10] Maier G., Novati G., «On boundary element-transfer matrix analysis of layered elastic systems», *7th Internat. Conf. on Boundary Elements in Engineering, Como (Italy)*, pp. 1-28, 1985.
- [11] Novati G., «On the analysis of elastic layers by a Fourier series, Green's function approach», *Atti Accad. Naz. Lincei*, 293-304, 1987.
- [12] Ruppoport R.M., «To the question of finding the solution of axisymmetric and plane elasticity problems for multilayered media», *Proc. Hydrotechnical Institute, Leningrad*, 1963.

- [13] Ruppoport R.M., «To the question of finding the solution for displacements of three-dimensional elasticity problem for multilayered half-space», *Proc. Hydrotechnical Institute, Leningrad*, 1966.
- [14] Вигдерович И.Е., Ламзюк В.Д., Приварников А.К., «Об использовании метода функций податливости при решении граничных задач для многослойных оснований», 1979.
- [15] Годунов С.К., Рябенский В.С., «Разностные схемы: введение в теорию», *Наука*, 1977
- [16] Никишин В.С., Шапиро Г.С., «Пространственные задачи теории упругости для многослойных сред», 1970.
- [17] Оболашвили Е.И., «Преобразование Фурье и его применения в теории упругости », *Тбилиси, Мецниереба*, 1979.
- [18] Самарский А.А., Гулин А.В., «Численные методы», *Наука, Москва*, 1989.
- [19] Самарский А.А., Николаев Е.С., «Методы решения сеточных уравнений», *Наука, Москва*, 1978.
- [20] Шевляков Ю.А., «Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред», 1977.