ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

ТЕОРМЕХ
Высшая школа теоретической механики

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Моделирование процесса измельчения гранулированных сред

Фомичева Мария

Научный руководитель: **Вильчевская Елена Никитична**
к.ф.-м.н., доцент Высшей школы теоретической механики СПбПУ

г. Санкт-Петербург

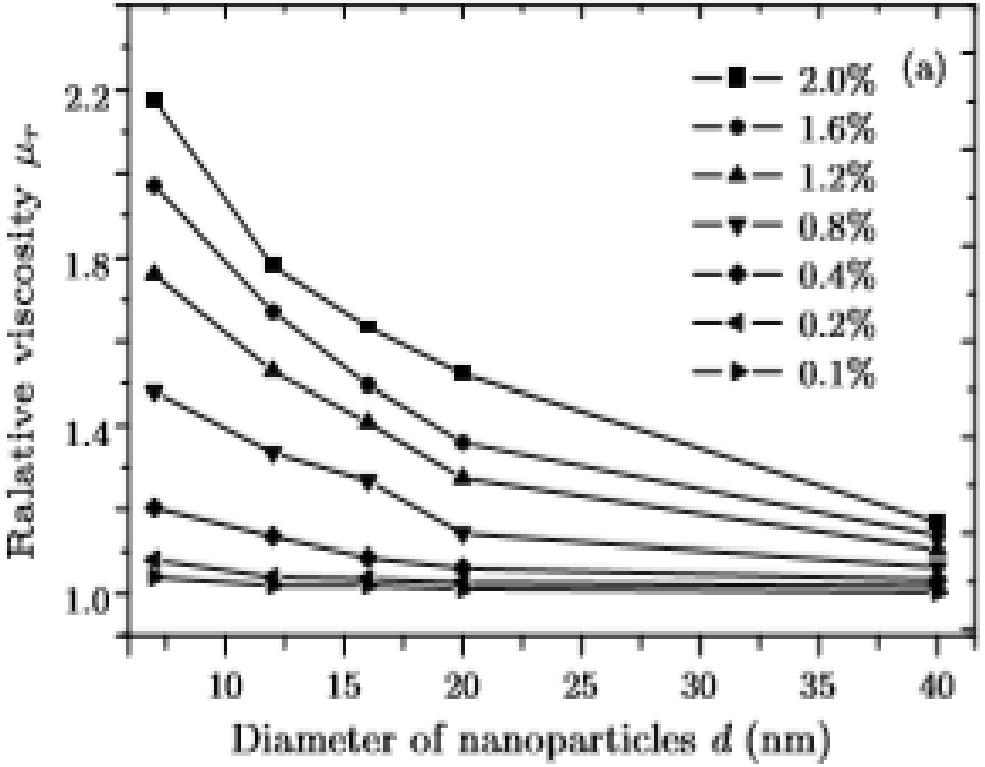
2020 г.

Актуальность темы

- Измельчение гранулированных сред в мельницах различной геометрии широко используются в технологических процессах и экспериментах.
- Измельчение гранулированных сред используется при создании:
  - минеральных удобрений;
  - пластмасс;
  - вяжущих веществ в строительстве (гранулированный шлак);
  - семян, комбикорма;
  - лекарственных средств;
  - угольного и водоугольного топлива (мокрый помол угля);

Коэффициент вязкости

- Существует множество экспериментов, посвященных изучению свойств гранулированных сред.
- Механические свойства гранулированных материалов не являются постоянными, а зависят от состояния, в котором находится материал.
- В работах [1], [2] были рассмотрены задачи измельчения гранулированных сред и исследованы зависимости коэффициента вязкости от температуры и зависел от скорости деформации среды.
- В нашем случае коэффициент вязкости будет зависеть от среднего размера частиц.



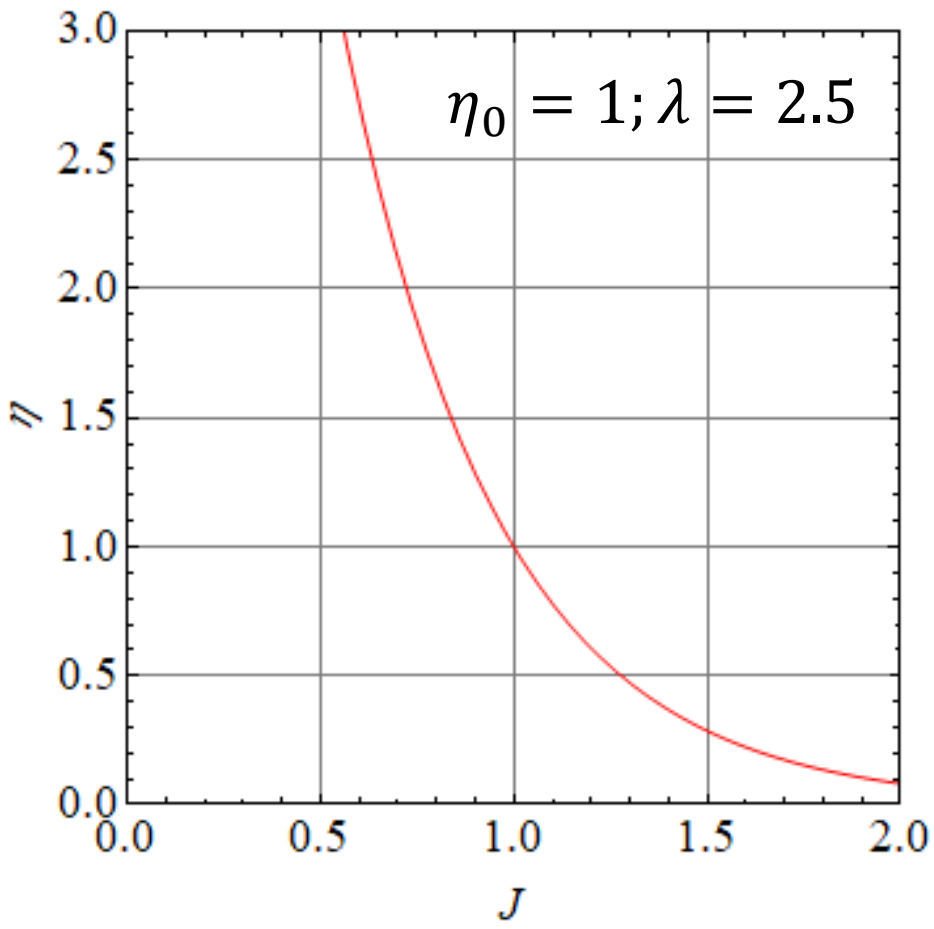
[1]. Volpatoa S. Artonib R., S.A.: Numerical study on the behavior of funnel flow silos with and without inserts through a continuum hydrodynamic approach. Chemical Engineering Research and Design 92(2), 256263 (2014)

[2]. Bertuola D. Volpato S., C.P.S.A.: Prediction of segregation in funnel and mass flow discharge. Chemical Engineering Science 150(-), 1625 (2016)

[3]. ZHAO Jia-Fei, LUO Zhong-Yang, NI Ming-Jiang, CEN Ke-Fa, “Dependence of Nanofluid Viscosity on Particle Size and pH Value” CHIN. PHYS. LETT. Vol.26,No.6(2009)066202.

Микрополярные среды

- Будем использовать для описания гранулированных материалов расширенную теорию микрополярных сред [1].
- В расширенной теории было предложено новое кинетическое уравнение для тензора микроинерции J.
- Новое уравнение – это балансовое соотношение с источниковым членом χ, который отвечает за структурные изменения и позволяет моделировать дополнительные свойства материалов.
- Тогда коэффициент вязкости частиц может зависеть от момента инерции.



$$\eta = \eta_0 exp(-\lambda \frac{(J - J_0)}{J_0}) \quad (1)$$

[1]. Ivanova, E.A., Vilchevskaya, E.N.: Micropolar continuum in spatial description. Continuum Mechanics and Thermodynamics 28(6), 1759-1780 (2016)

Линейно-упругий гранулированный материал

$$\rho \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{C} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}$$

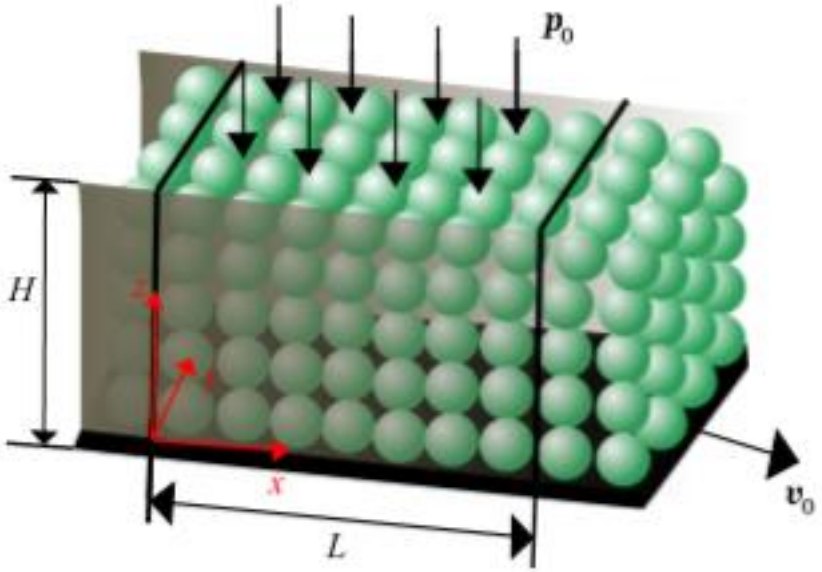
$$\mathrm{C} = k(J)\boldsymbol{EE} + 2\mu(J)(\boldsymbol{I} - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{EE})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\varepsilon_z \mu}{3k+4\mu}((3k-2\mu)e_y e_y + 2(3k+\mu)e_z e_z)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{P_0}{3k+\mu}((3k-2\mu)e_y e_y + 2(3k+\mu)e_z e_z)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z}\left(J\left(k - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{2\mu}{(k+\frac{4}{3}\mu)} + 2\mu J + \frac{\left(k - \frac{2}{3}\mu\right)}{k + \frac{4}{3}\mu}\right) = 0$$

$$\varepsilon_z = \mathrm{C}_1 \frac{(3k+4\mu)}{\mu(3k+\mu)}; \quad \varepsilon_z = P_0 \frac{(3k+4\mu)}{\mu(3k+\mu)}$$

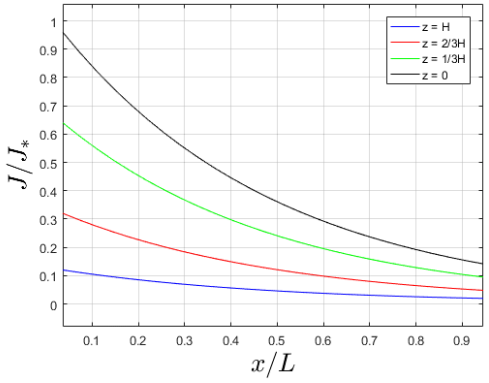


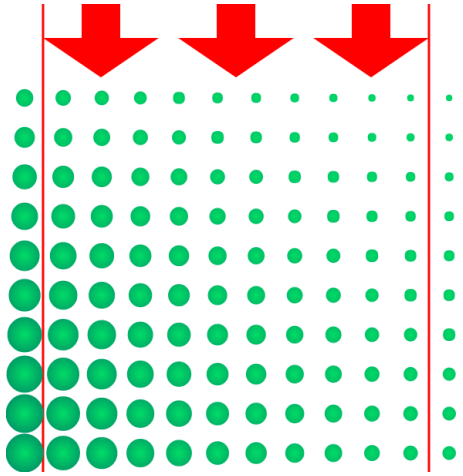
$$\frac{\delta \boldsymbol{J}}{\delta t} = \boldsymbol{\chi}$$

$$\chi = -\alpha_0 tr(\boldsymbol{\sigma})(J - J_*)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \boldsymbol{v_0} \cdot \nabla J = \alpha_0 tr(\boldsymbol{\sigma}) * (J - J_*)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + v_0 \frac{\partial J}{\partial y} = \frac{9\alpha_0 P_0 k}{3k+\mu}(J - J_*)$$





где J_* - минимальный момент инерции, который могут достигнуть частицы, k_* – модуль объемного сжатия, соответствующий минимальному моменту инерции, μ_* –модуль сдвига, соответствующий минимальному моменту инерции, α_0 - твердость частиц, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, C – тензор упругих характеристик, $\mathbf{E}$ – единичный тензор, $\mathbf{I}$ – единичный тензор 4 ранга, где ε_z – деформации в материале вдоль оси z.

Линейно-вязкий гранулированный материал. Одномерное решение

$$\rho \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{E} + 2\eta \boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{v} = v(y)\boldsymbol{e_x}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{E} + \eta(J)\frac{\partial v}{\partial y}(\boldsymbol{e_x}\boldsymbol{e_y} + \boldsymbol{e_y}\boldsymbol{e_x})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{e_y}\big|_H = p_0\boldsymbol{e_y} = -p\boldsymbol{e_y} + \eta(J)\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{e_x}$$

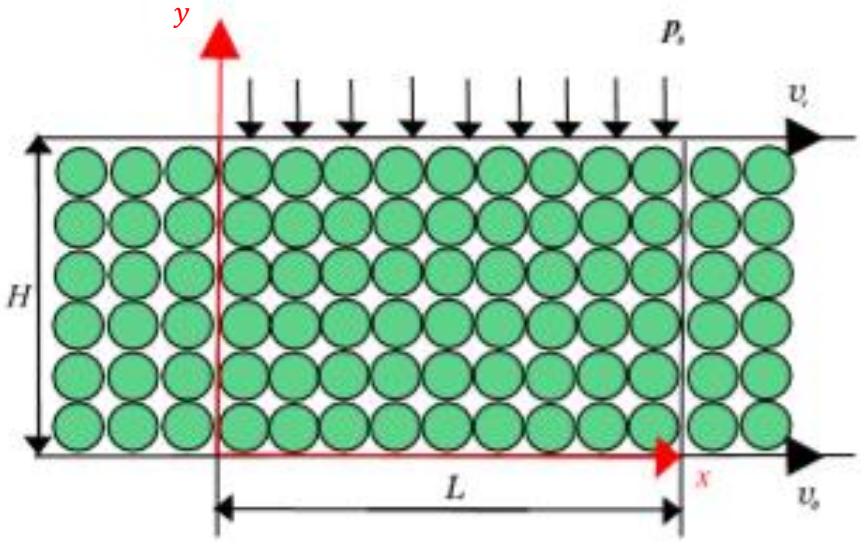
$$\eta(J) = 0 \text{ или } \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

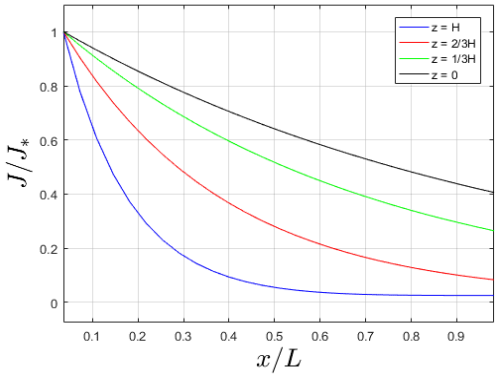
$$\chi = -\alpha_0 tr(\boldsymbol{\sigma})(J - J_*)$$

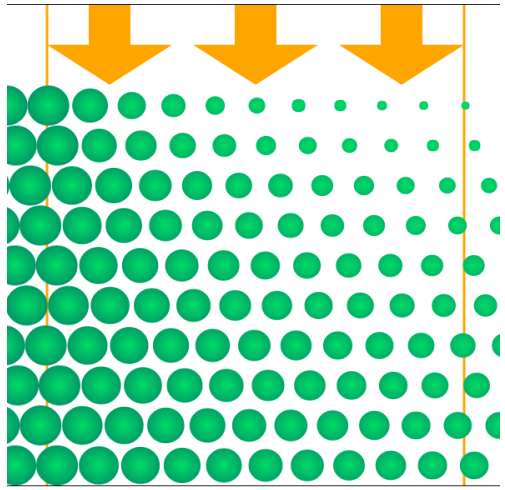
$$\frac{\partial J}{\partial t} + \boldsymbol{v_0} \cdot \nabla J = \alpha_0 tr(\boldsymbol{\sigma}) * (J - J_*)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + v\frac{\partial J}{\partial x} = \alpha_0 P_0 (J - J_*)$$

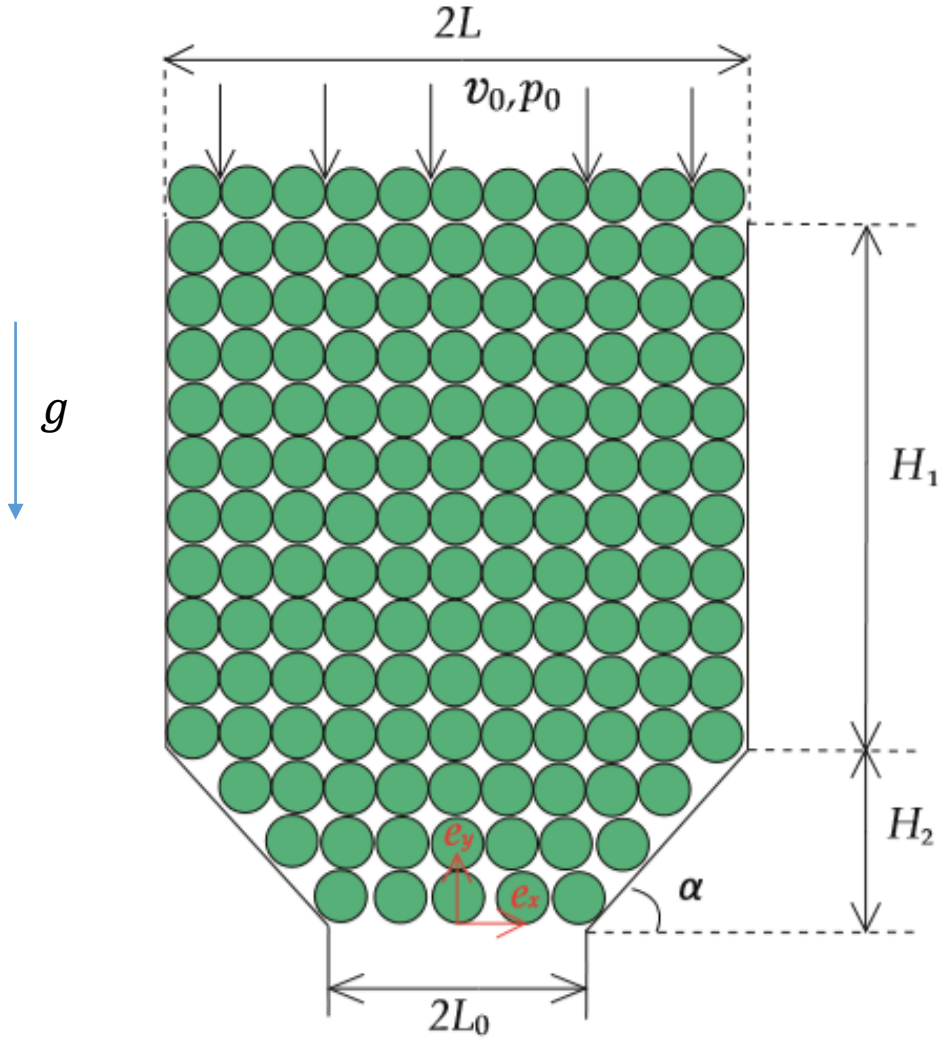
$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

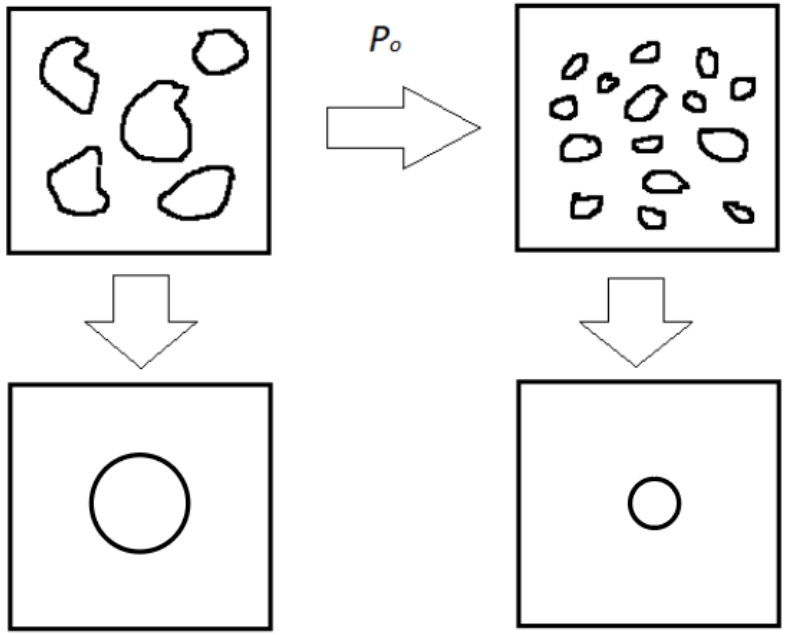






Постановка задачи и процесс осреднения





Постановка задачи

Рассмотрим связанную систему уравнений - баланс количества движения (5) и кинетическое уравнение для тензора инерции (6):

$$\boxed{\rho \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{g}} \qquad (5)$$

$$\boxed{\frac{\delta \boldsymbol{J}}{\delta t} = \boldsymbol{\chi}} \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений в материале, $\boldsymbol{g}$ – объемные силы,

$\boldsymbol{J}$ – тензор инерции, $\boldsymbol{\chi}$ - источниковый член, $\frac{\delta}{\delta t}$ – материальная производная,

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla} \qquad (7)$$

Определяющие уравнения

Линейно – вязкий несжимаемый материал,

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{E} + 2\eta\boldsymbol{d}$$
$$\eta = \eta(J)$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad (8)$$

Где p – давление в материале, $\boldsymbol{E}$ – единичный тензор,
$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2} dev\,(\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\nabla)$ – девиатор градиента скорости, η – коэффициент вязкости.
Источниковый член для данного материала будет определятся уравнением:

$$\chi = -\,\alpha_0\, p(J - J_*) \qquad (9)$$

где α_0 - величина, обратная твердости частиц, J_* - минимальный момент инерции частиц.

Решаемые уравнения

Подставим (8) в (5):

$$\rho \frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} = -\nabla p + 2\nabla \cdot (\eta \boldsymbol{d}) + \rho \boldsymbol{g}$$

$$2\nabla \cdot (\eta \boldsymbol{d}) = 2\eta \nabla \cdot \boldsymbol{d} + 2(\nabla \cdot \eta)\boldsymbol{d}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{e_x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{e_y}$$

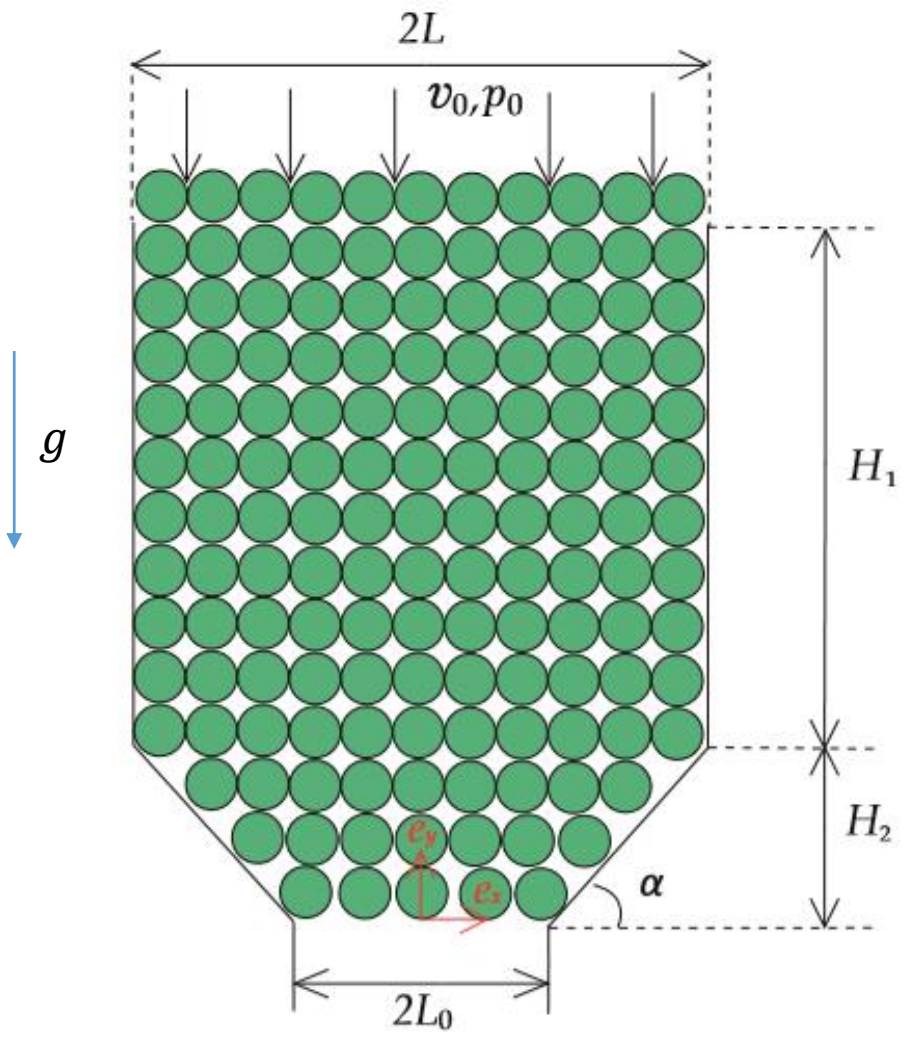
$$2(\nabla \cdot \eta)\boldsymbol{d} = \left(\mathbf{2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right)\boldsymbol{e_x} + 2\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right)\boldsymbol{e_y}$$

$$\eta = \eta_0 exp(-\lambda \frac{(J - J_0)}{J_0})$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_0\, exp\left(-\lambda\frac{J - J_0}{J_0}\right)\left(2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y}\right) - 2\eta_0\left(\frac{\lambda}{J_0}\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial J}{\partial x} exp\left(-\lambda\frac{J - J_0}{J_0}\right) + \frac{\lambda}{J_0}\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial J}{\partial y} exp\left(-\lambda\frac{J - J_0}{J_0}\right) + \frac{\lambda}{J_0}\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial J}{\partial y} exp\left(-\lambda\frac{J - J_0}{J_0}\right)\right)$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_0\, exp\left(-\lambda\frac{J - J_0}{J_0}\right)\left(2\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y}\right) - 2\eta_0\left(\frac{\lambda}{J_0}\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial J}{\partial y} exp\left(-\lambda\frac{J - J_0}{J_0}\right) + \frac{\lambda}{J_0}\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\partial J}{\partial x} exp\left(-\lambda\frac{J - J_0}{J_0}\right) + \frac{\lambda}{J_0}\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial J}{\partial x} exp\left(-\lambda\frac{J - J_0}{J_0}\right)\right) + \rho_0 g$$

Граничные и начальные условия



Г.У.

$$v_x(\pm L, y, t) = 0$$
$$v_y(\pm L, y, t) = 0$$
$$v_x(\pm(L_0 + y ctg\alpha), y, t) = 0$$
$$v_y(\pm(L_0 + y ctg\alpha), y, t) = 0$$
$$J(x, H, t) = J_0$$
$$P(x, 0, t) = 0$$
$$P(x, H, t) = P_0$$

Н.У.

$$J(x, y, 0) = 0$$
$$v_x(x, y, 0) = 0$$
$$v_y(x, H, 0) = v_0$$

Решаемые уравнения

Уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \qquad (11)$$

Кинетическое уравнение для тензора инерции

$$\frac{\partial J}{\partial t} + v_x \frac{\partial J}{\partial x} + v_y \frac{\partial J}{\partial y} = \alpha_0 P_0 (J - J_*) \qquad (12)$$

Баланс количества движения

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta(J) \left(2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \qquad (13)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta(J) \left(2 \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \right) + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \rho_0 g \qquad (14)$$

Navie-Stokes New.ns1 simulation time = 0

File

Run MyDir

New

Computational Domain

X x Y = 1 x 1

I x J = 201 x 201

K= 60 Show mesh fixed

Re= 100 Show sel node

pressure0= 0

pressureN= 0

J0= 1

JN= 0

Gravity= 1

Create

time=0 sec

Run

Selected Node

STREAM_L X = 1

Isolines= 33 Y = 0

Iso Color STREAM_LINES=0, (200,0)

screen any 1 *.bmp any 0 steps

dialog any 1 Iters any 100 steps

TauV= 0.001 TauP= 0.01

JSTAR= 0.05 TauJ= 0.01

alpha= 1.5 lambda= 4

KsiV = 0 < 0.01

KsiP = 0 < 0.001

Iters=0(0) < 1000000

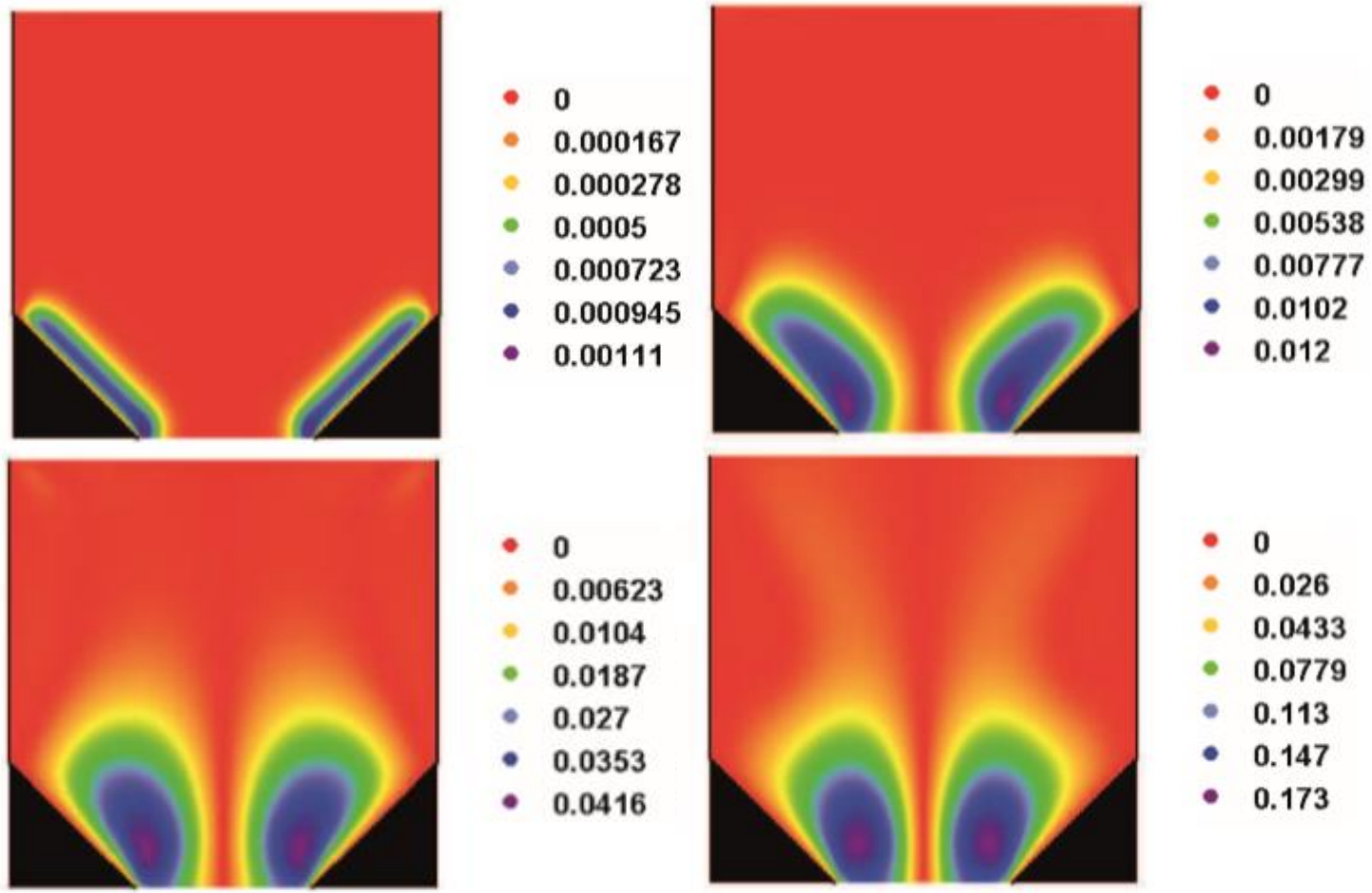
time = 0 < 1e+020

Steps = 0 < 200000000

dt= 1 RUN (Ctrl+Q - stop)

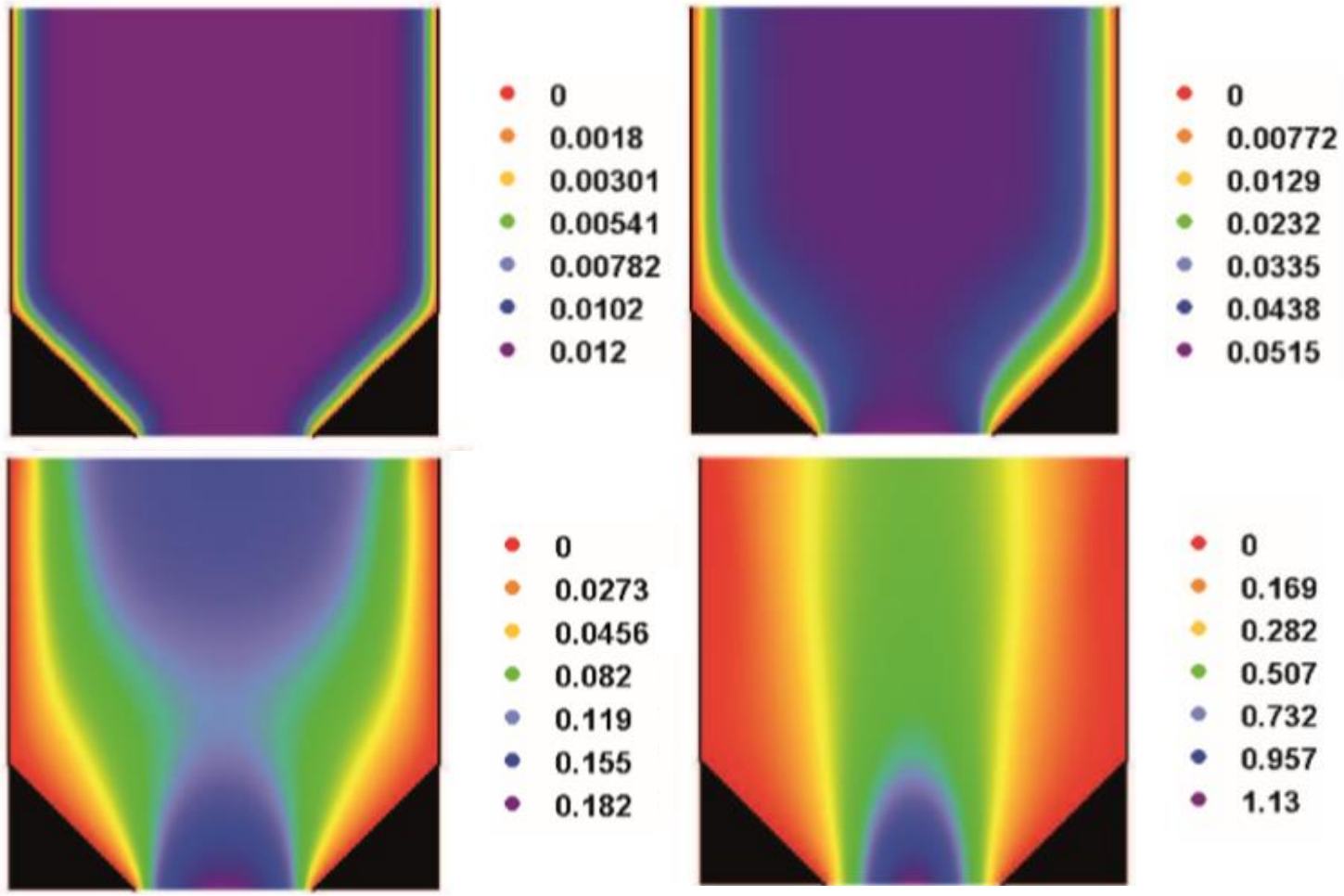
$g = 1, J_0 = 1, J_* = 0.05, H = 1, \alpha = 1.5$
$\lambda = 2.5, \Delta x = 0.005, \Delta y = 0.005, \Delta t = 0.001$

Нестационарное решение



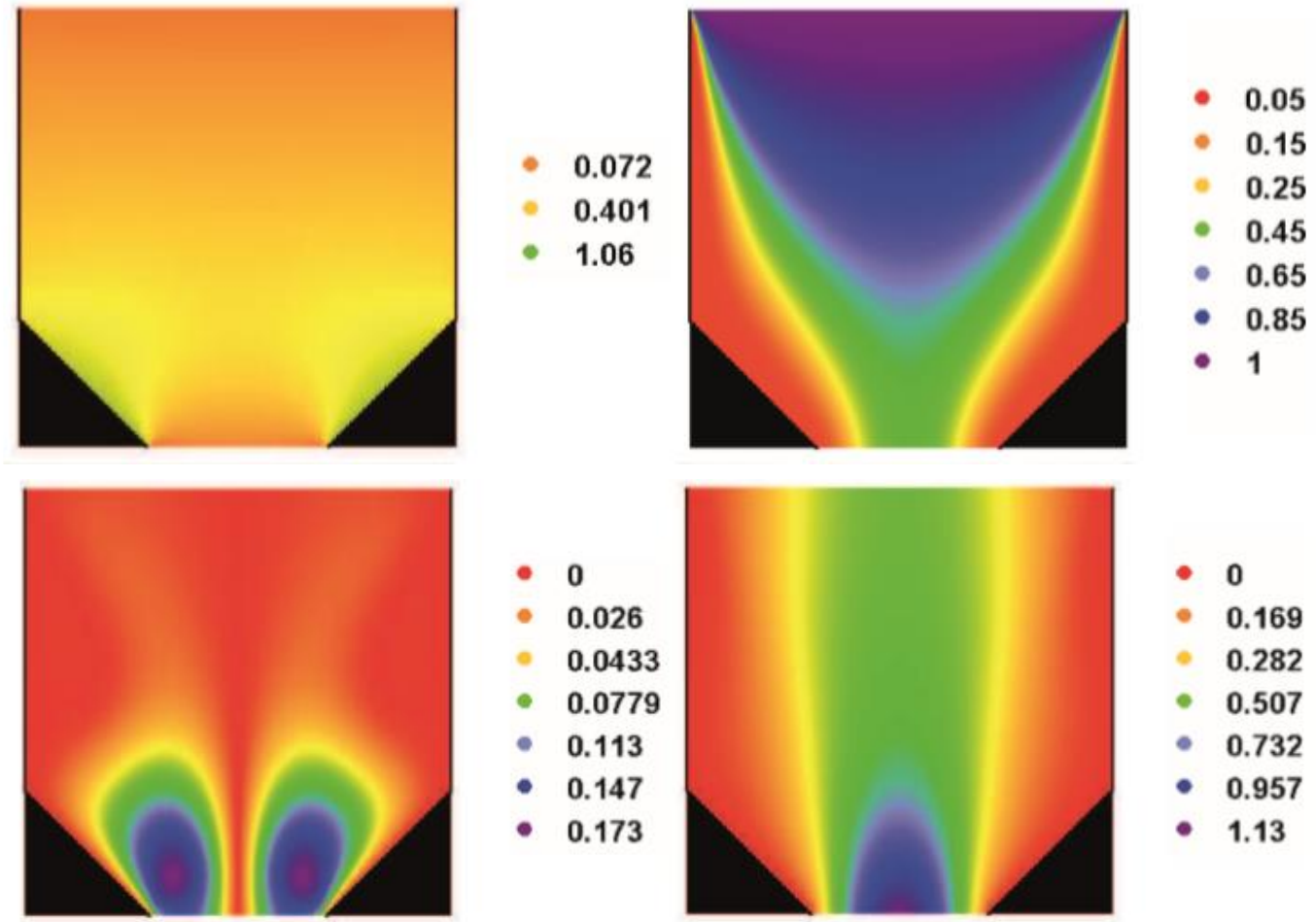
Изменение изолиний <u>модуля горизонтальной скорости</u> в разные моменты времени:
$t_1 = 0.0001, t_2 = 0.005, t_3 = 0.01, t_4 = 10$ (слева направо, сверху вниз).

Нестационарное решение



Изменение изолиний вертикальной скорости в разные моменты времени:
$t_1 = 0.0001, t_2 = 0.005, t_3 = 0.01, t_4 = 10$ (слева направо, сверху вниз).

Установившееся решение



Распределение изолиний давления, момента инерции, модуля горизонтальной скорости и вертикальной скорости в сосуде (слева направо, сверху вниз).

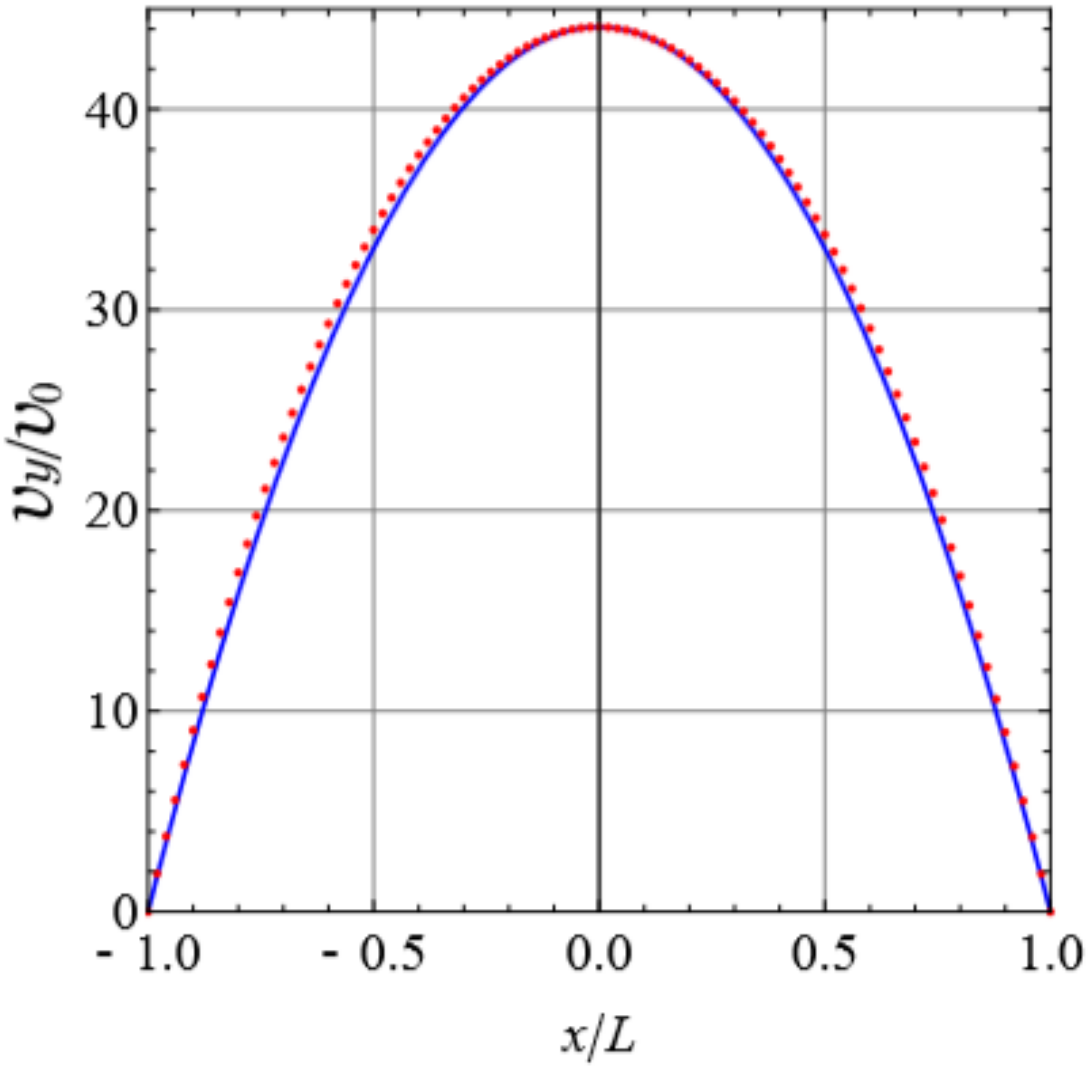
Сравнение решения с аналитическим

Решение Пуазейля:

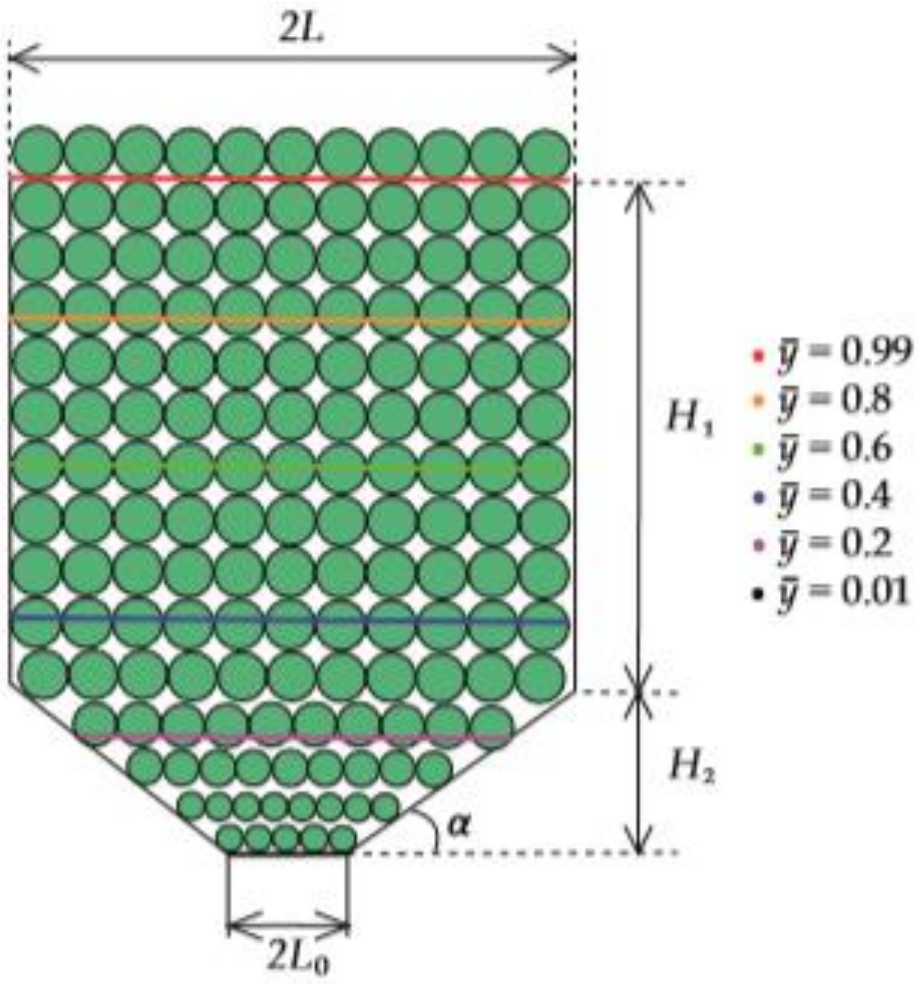
- Установившееся течение;
- Несжимаемая жидкость;
- С постоянной вязкостью;
- В тонкой цилиндрической трубке;
- Под действием постоянной разности давлений.

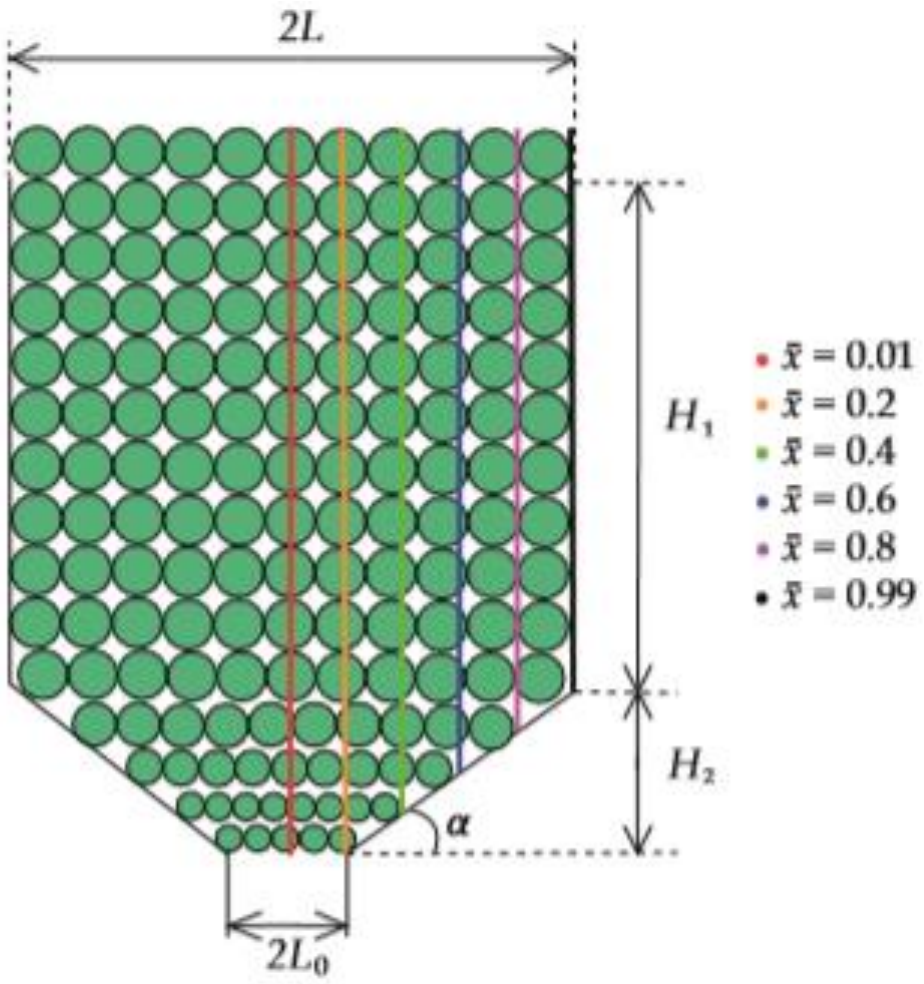
$$\boxed{v_y = -(q + \rho_0 g)\frac{1}{2\eta}(L^2 - x^2)}$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = const = q}$$

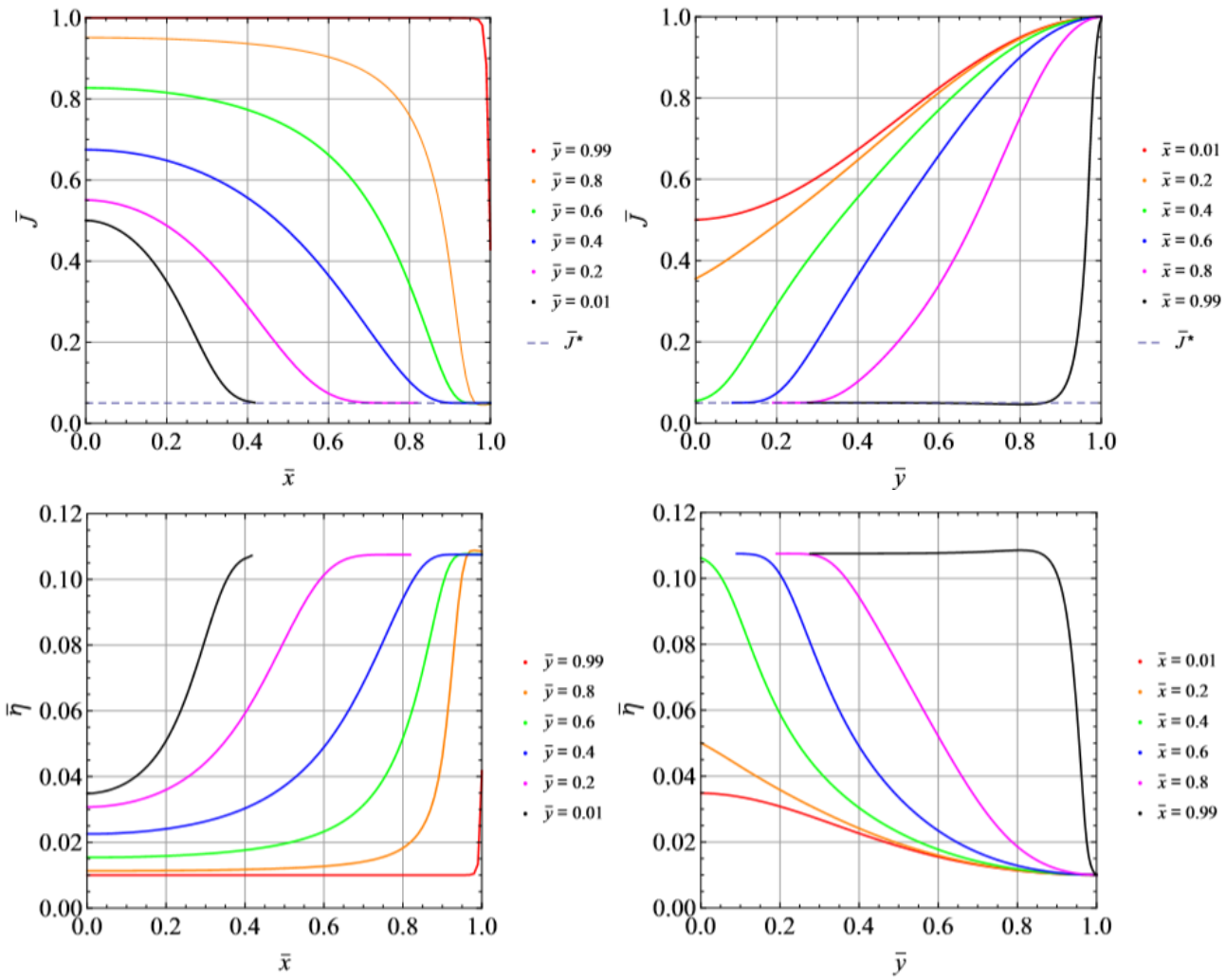


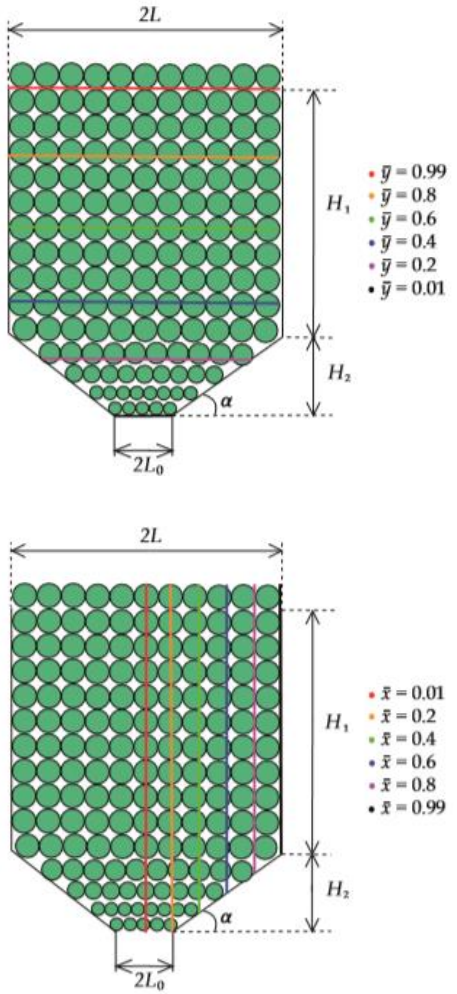
Рассматриваемые сечения





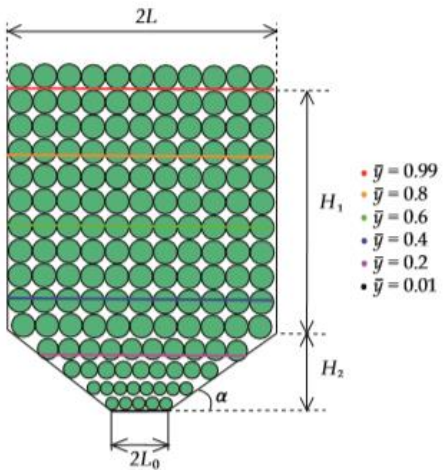
Момент инерции и коэффициент вязкости

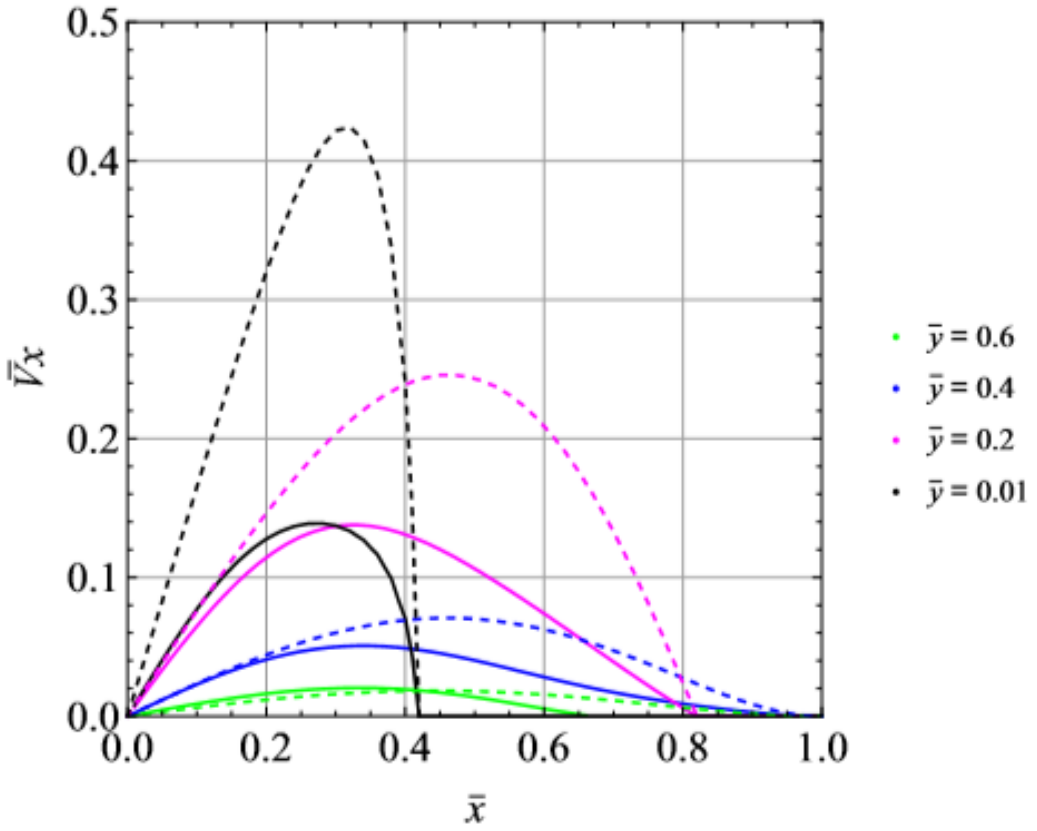


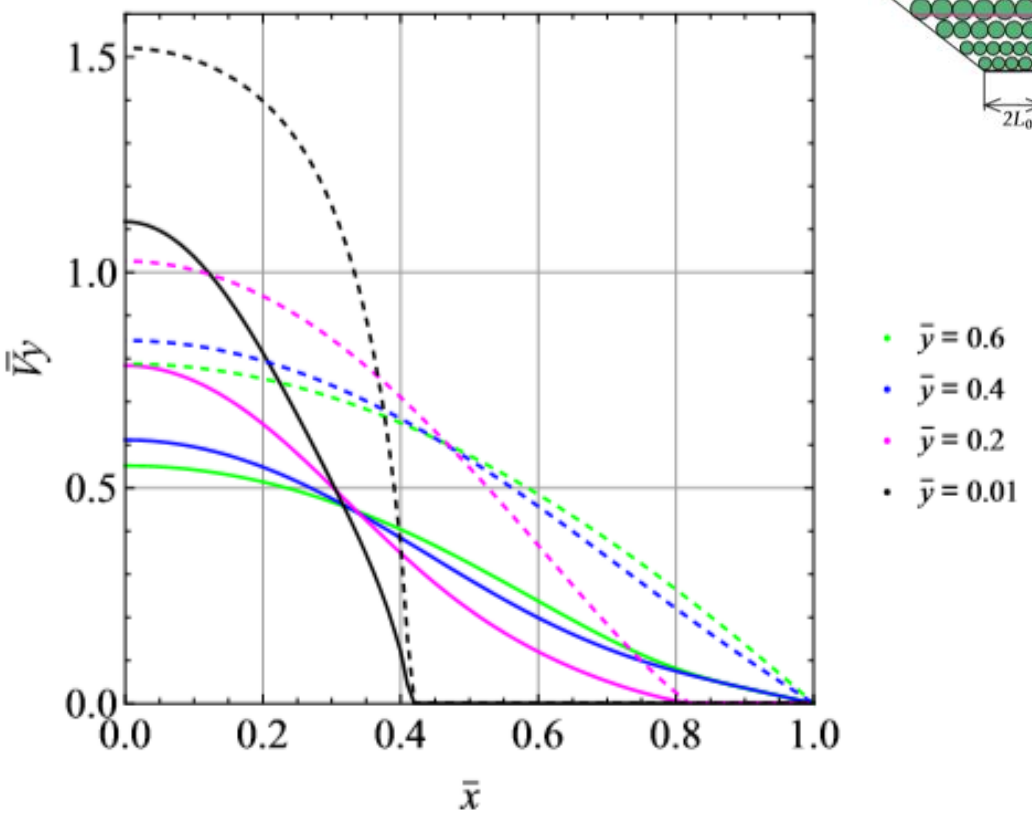


$$\eta = \eta_0 exp(-\lambda \frac{(J - J_0)}{J_0})$$

Распределение скоростей при разной вязкости среды

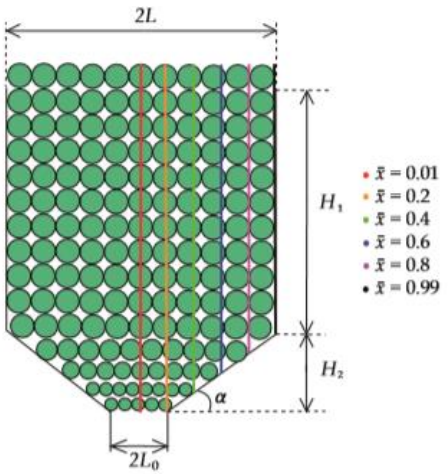


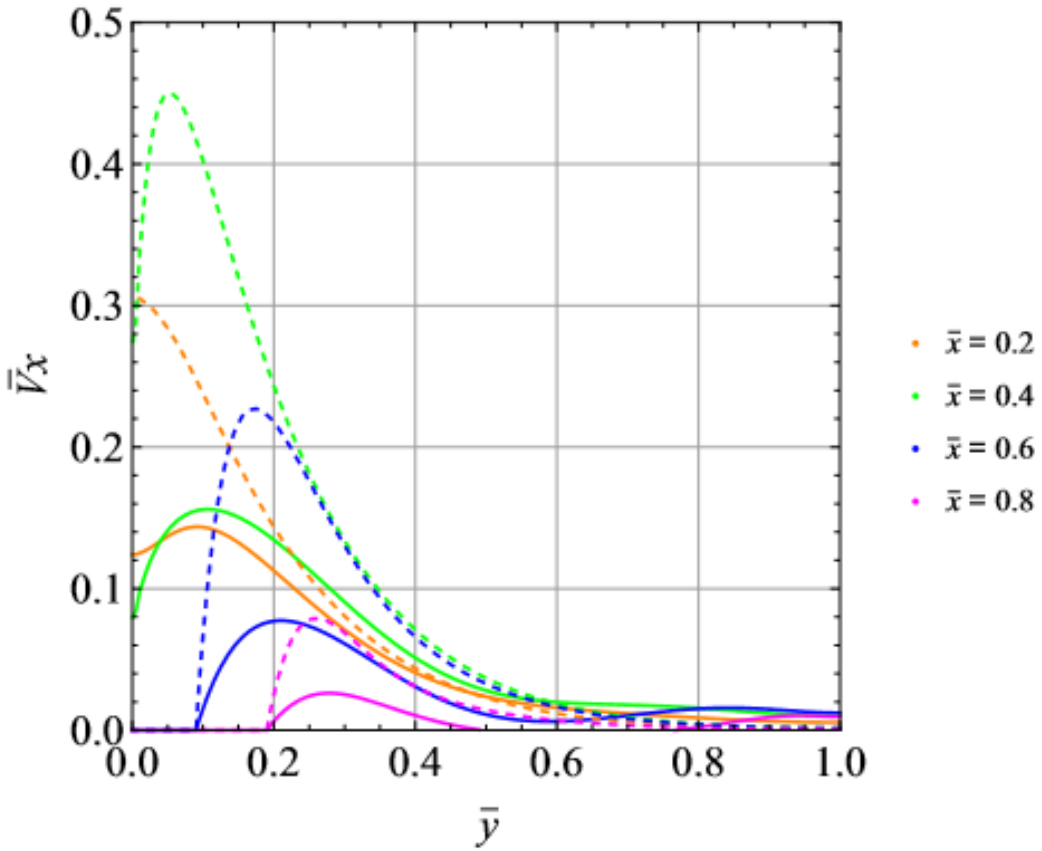


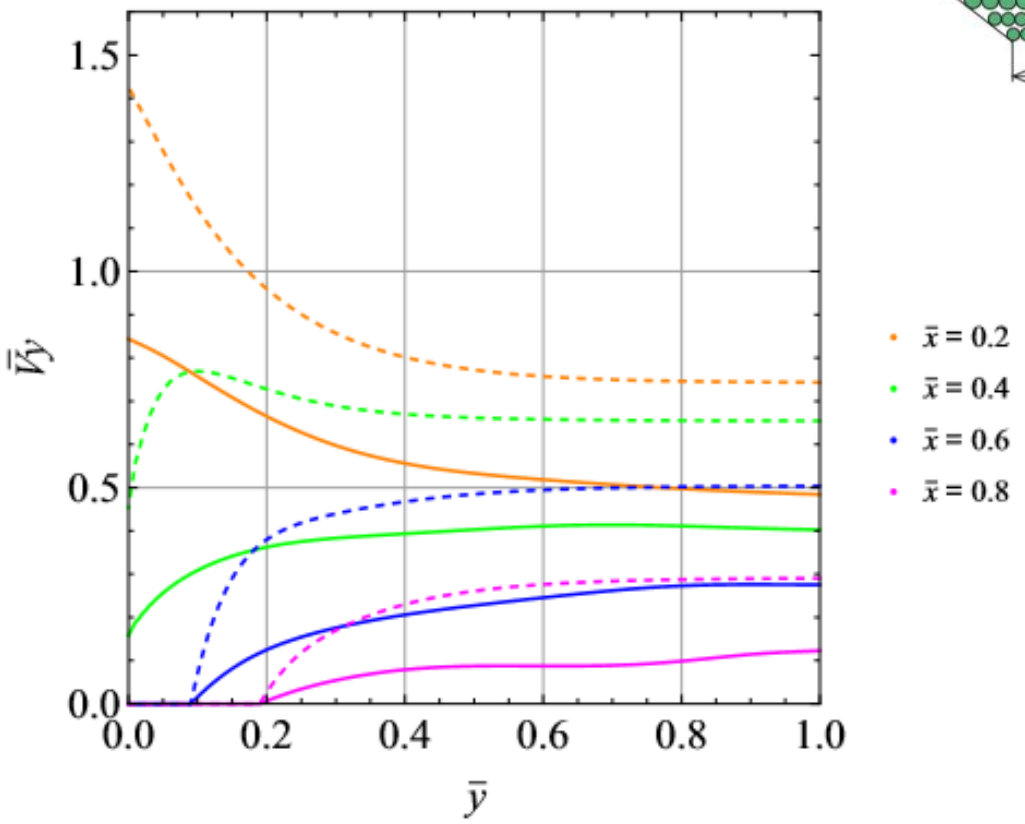


Распределение горизонтальной и вертикальной скоростей (слева направо) в различных горизонтальных сечениях при постоянном коэффициенте вязкости (пунктирная линия) и при переменном (сплошная линия).

Распределение скоростей при разной вязкости среды

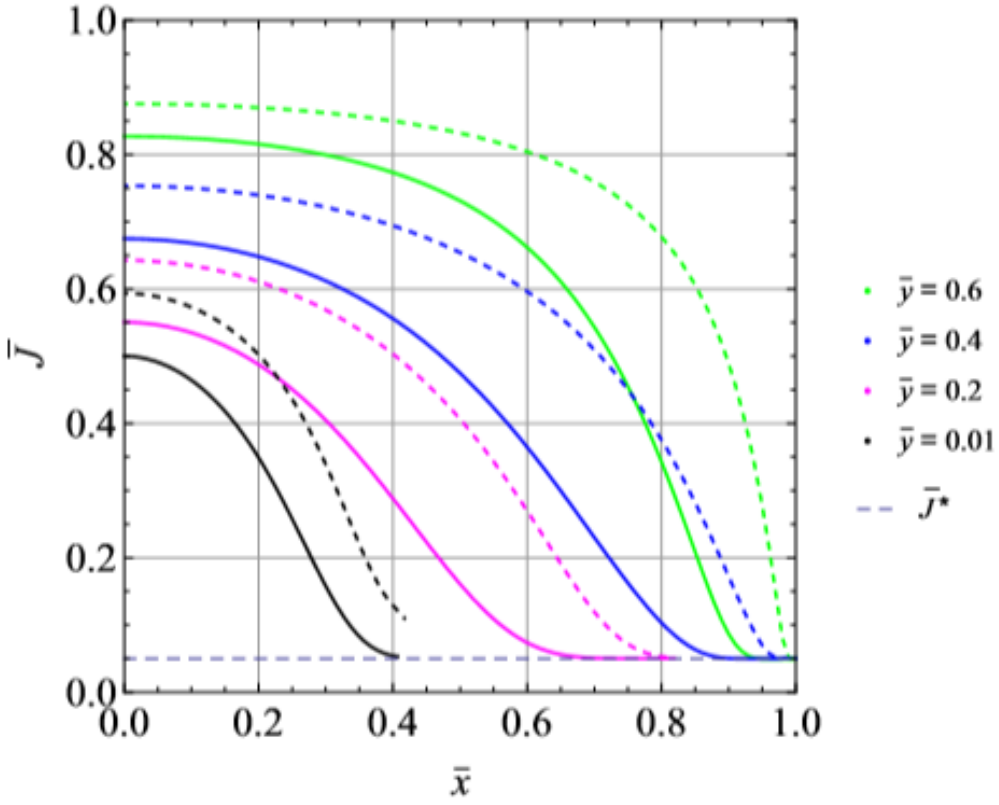


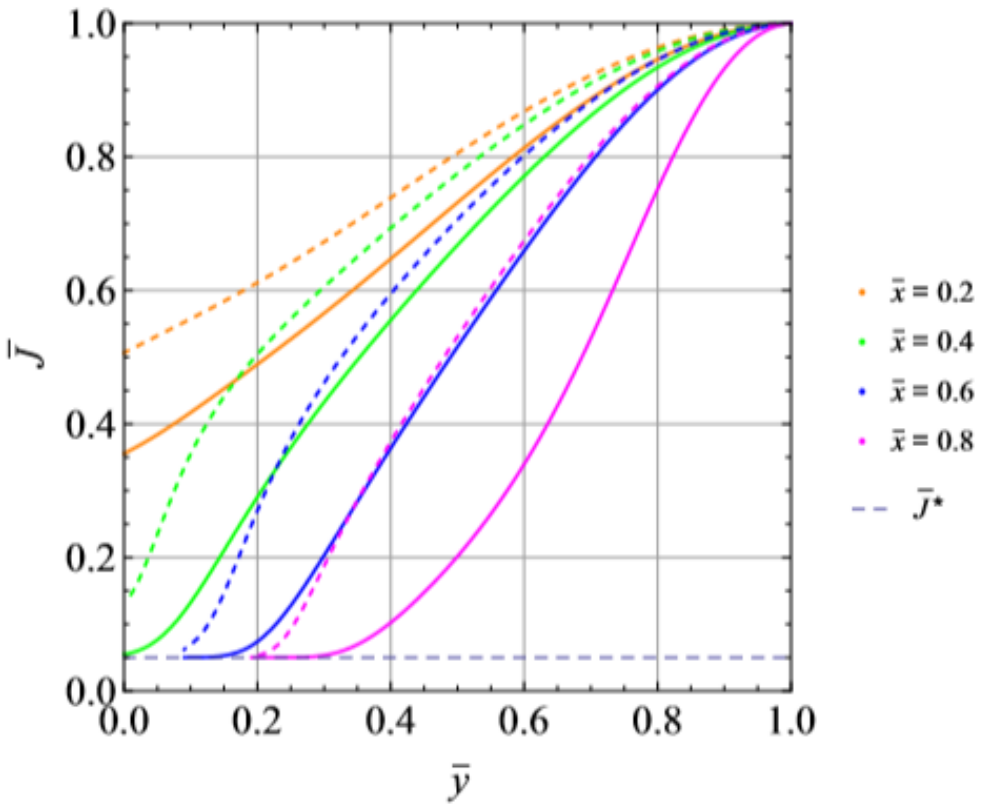


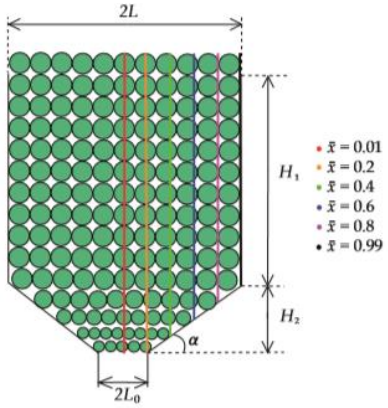


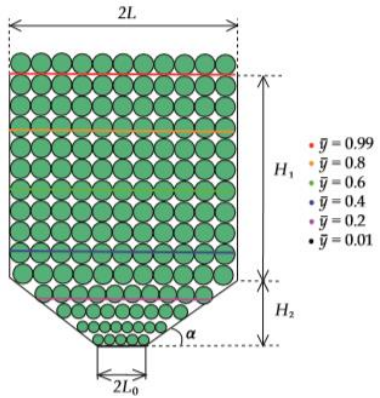
Распределение горизонтальной и вертикальной скоростей (слева направо) в различных вертикальных сечениях при постоянном коэффициенте вязкости (пунктирная линия) и при переменном (сплошная линия).

Распределение момента инерции при разной вязкости среды





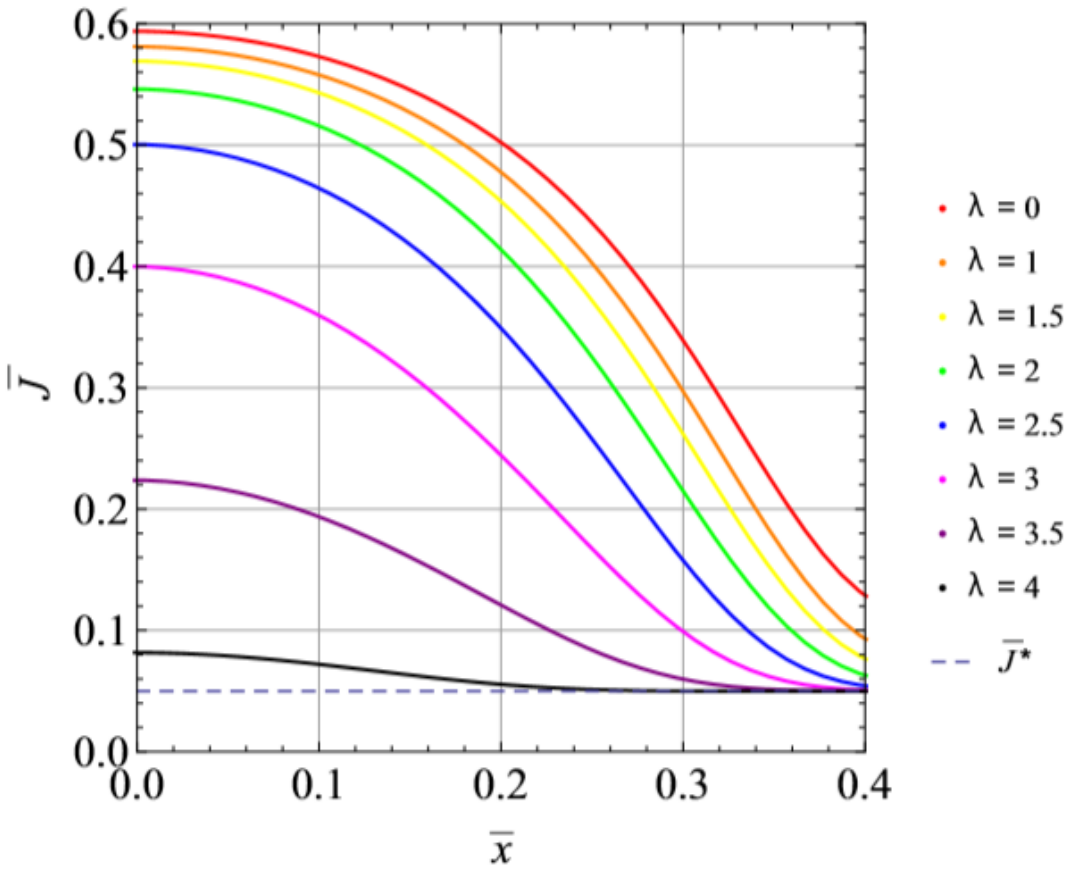


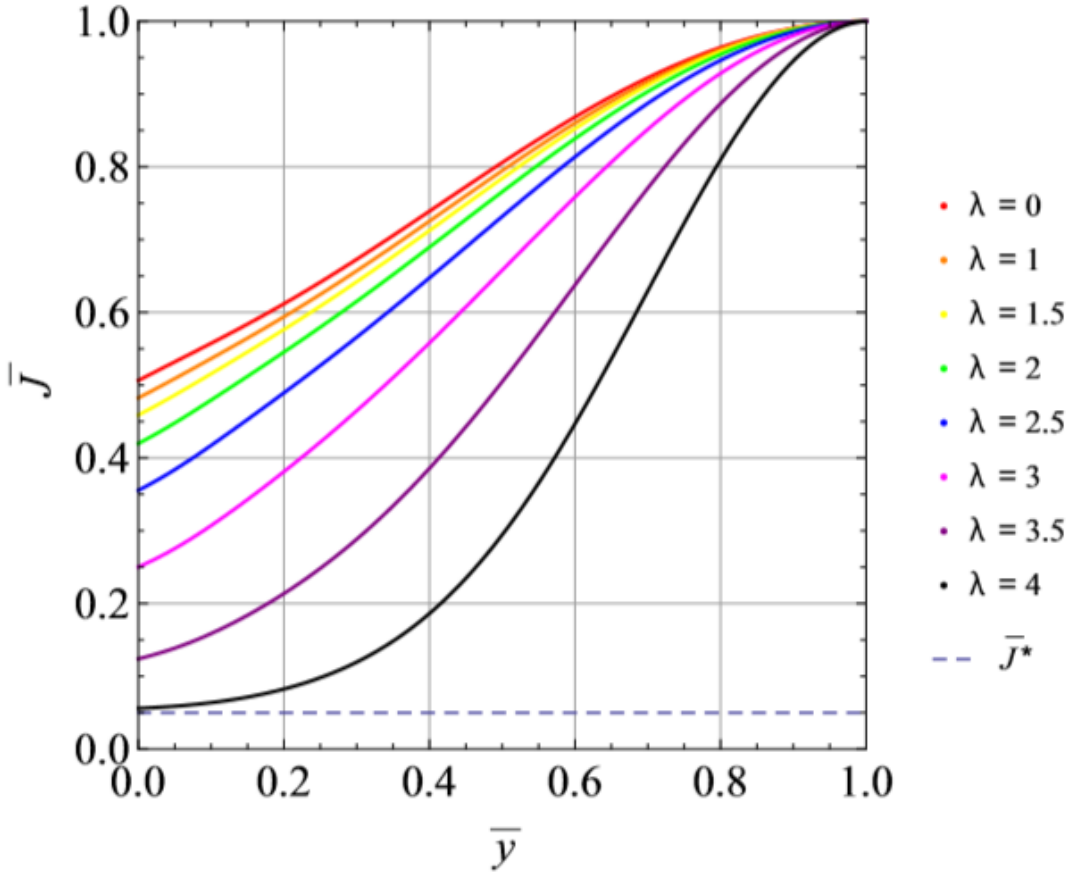


Распределение <u>момента инерции</u> в различных горизонтальных и вертикальных сечениях (слева направо) при постоянном коэффициенте вязкости (пунктирная линия) и при переменном (сплошная линия).

Распределение момента инерции при разной вязкости среды

$$\eta = \eta_0 exp(-\lambda \frac{(J - J_0)}{J_0})$$





Распределение <u>момента инерции</u> в горизонтальном $y = 0.01\ H$ и в вертикальном сечении $x = 0.2H$.

Заключение

1. На примере измельчения гранулированной среды было проведено математическое моделирование микрополярной вязкой среды с коэффициентом вязкости, зависящим от момента инерции.
2. Было показано, что решение задачи об измельчении гранулированной среды с переменным коэффициентом вязкости невозможно для случая с одномерным профилем скоростей, и данную задачу необходимо решать в двумерной постановке.
3. Предложена аналитическая зависимость коэффициента вязкости от момента инерции на основе эмпирических данных, а также вид для источникового члена из кинетического уравнения для момента инерции среды.
4. Числено решена полностью связанная задача об измельчении и движении гранулированного материала в конусообразной дробилке. Моделирование проводилось с использованием языка программирования C++.
5. Получено стационарное распределение компонент скорости, давления, момента инерции и коэффициента вязкости среды.
6. Была проведена верификация частного случая полученного решения с аналитическими. Было показано, что точность решения высока, а именно составляет менее 1%.
7. Исследован учет влияния зависимости коэффициента вязкости от размера частиц на эффективность дробилки.
8. Установлено, что учет зависимости коэффициента вязкости среды от момента инерции, а значит и от диаметра частиц среды, играет большую роль, значительно влияет на результаты моделирования и на точность описания процесса.

ВЫСШАЯ ШКОЛА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Спасибо за внимание!