

УДК 536.24.02

И. А. Новиков

ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. РЕШЕНИЕ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

Решаются первая и вторая краевые задачи, а также линейная граничная ОЗТ с неподвижными теплоприемником и границей. Учет конечной скорости распространения тепла повышает устойчивость граничной ОЗТ.

В настоящее время существуют два подхода к решению граничных обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Первая группа методов решения граничных ОЗТ (прямые методы) используют параболическое уравнение теплопроводности или его интегральные формы [1—6]. Известно [6], что граничная ОЗТ для параболического уравнения теплопроводности некорректна вследствие своей неустойчивости. Это обстоятельство налагает ограничения на параметры вычислительной схемы, используемые при решении задачи (шаг аппроксимации по времени, число итераций и т. д.), и, следовательно, ограничивает точность полученных решений (особенно для быстро протекающих и быстро изменяющихся процессов). Второй подход к решению граничных ОЗТ состоит в использовании регуляризованных методов ее решения [5, 7, 8], в которых используется переход от некорректно поставленной задачи к корректной, что существенно повышает устойчивость граничной ОЗТ. Можно, по-видимому, предложить много способов такого перехода. Очевидно, из всего многообразия этих методов следует выбрать те, которые наилучшим образом соответствуют реальным физическим процессам, происходящим при теплообмене. Ниже показывается, что учет конечной скорости распространения тепла является тем естественным «регуляризирующим» фактором, который повышает устойчивость граничной ОЗТ.

Гиперболическое уравнение теплопроводности [4, 9, 10]

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

более точно описывает нестационарные процессы теплопроводности по сравнению с параболическим. В работе выводятся некоторые интегральные формы для решения линейных обратных граничных задач теплопроводности в одномерном случае и дается метод их решения. Помимо этого, решаются соответствующие прямые краевые задачи при произвольных условиях на границах. В процессе решения ОЗТ предлагаемым методом можно приближенно определить скорость распространения тепла, а следовательно, и постоянную релаксации, что является дополнительным преимуществом метода.

Постановка и решение прямых краевых задач для полуограниченного стержня. Тепловой поток $q(x, t)$ следующим образом связан с температурой $u(x, t)$, подчиняющейся гиперболическому уравнению [4, 9, 10]:

$$\eta \frac{\partial q}{\partial t} + q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \eta = a\beta^2. \quad (2)$$

С учетом нулевого начального условия $q(x, 0) = 0$ уравнение (2) легко интегрируется

$$q(x, t) = -\frac{\lambda}{\eta} \int_0^t \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial x} \exp[-(t-\xi)/\eta] d\xi. \quad (2a)$$

Зная температуру $u(x, t)$, по формуле (2a) можно рассчитать тепловой поток в любой точке тела. При постановке задачи о нагревании полуограниченного стержня ($x \in [0, \infty]$) примем начальные условия однородными

$$u(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

На левой границе стержня (при $x=0$) выберем два типа граничных условий

$$u(0, t) = u_1(t) \quad (4a)$$

или

$$q(0, t) = q_1(t). \quad (4b)$$

Предполагается, что температура $u_1(t)$ среды и тепловой поток $q_1(t)$ на поверхности стержня могут быть произвольными функциями времени. Воспользовавшись формулой (2), заменим граничное условие (4b) эквивалентным ему, но более удобным при решении

$$-\lambda \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = q_1^*(t); \quad q_1^*(t) = \eta \frac{dq_1}{dt} + q_1. \quad (4b')$$

В соответствии с типом граничных условий на бесконечности должно выполняться одно из требований

$$u(\infty, t) = 0; \quad \frac{\partial u(\infty, t)}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Решаются поставленные задачи операционным методом в предположении, что λ, a, β — постоянные величины. Преобразования Лапласа функций $u(x, t), q(x, t), u_1(t), q_1(t)$ и $q_1^*(t)$ обозначаются соответственно $U(x, p), Q(x, p), U_1(p), Q_1(p)$ и $Q_1^*(p)$. В области изображения имеем два решения, соответствующие различным типам краевых условий:

$$U = U_1(p) \exp(-x\beta \sqrt{p^2 + p/\eta}), \quad (6a)$$

$$U = Q_1^*(p) \exp(-x\beta \sqrt{p^2 + p/\eta}) / \lambda\beta \sqrt{p^2 + p/\eta}. \quad (6b)$$

Возвращаясь к функции $u(x, t)$, получим для нее соответствующие выражения [11, 12]:

$$u = E(t - \beta x) \left\{ u_1(t - \beta x) \exp(-x/2a\beta) + \frac{\beta x}{2\eta} \int_0^{t-\beta x} u_1(\tau) \times \right. \\ \left. \times \frac{I_1 \left[\frac{1}{2\eta} \sqrt{(t-\tau)^2 - \beta^2 x^2} \right]}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \beta^2 x^2}} \exp[-(t-\tau)/2\eta] d\tau \right\}, \quad (7a)$$

$$u = E(t - \beta x) \frac{1}{\lambda \beta} \int_0^{t - \beta x} q_1^*(\tau) I_0 \left[\frac{1}{2\eta} \sqrt{(t - \tau)^2 - \beta^2 x^2} \right] \exp[-(t - \tau)/2\eta] d\tau. \quad (7б)$$

В формулах (7) $E(\xi)$ — это функция единичного скачка [11], равная 0 при $\xi < 0$ и равная 1 при $\xi \geq 0$, а I_0 и I_1 — бесселевы функции первого рода мнимого аргумента. Интегрирование по частям правой части формулы (7б) с учетом (4в) приводит к другому виду решения $u(x, t)$ для граничного условия (4б):

$$u = E(t - \beta x) \left\{ \frac{\eta}{\lambda \beta} q_1(t - \beta x) \exp(-x/2a\beta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\lambda \beta} \int_0^{t - \beta x} q_1(\tau) \exp[-(t - \tau)/2\eta] \left[I_0 \left(\frac{1}{2\eta} \sqrt{(t - \tau)^2 - \beta^2 x^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(t - \tau)}{\sqrt{(t - \tau)^2 - \beta^2 x^2}} I_1 \left(\frac{1}{2\eta} \sqrt{(t - \tau)^2 - \beta^2 x^2} \right) \right] d\tau \right\}. \quad (7в)$$

В формуле (7в) решение $u(x, t)$ выражается через тепловой поток $q_1(t)$ на стенке, а не через вспомогательную функцию $q_1^*(t)$. Вводя безразмерные критерии

$$Fo = at/x^2, \quad Fo' = a\tau/x^2, \quad \gamma = a\beta/x, \quad (8)$$

формулы (7а) и (7в) можно записать в виде

$$u(\gamma, Fo) = E(Fo - \gamma) \left\{ u_1(Fo - \gamma) \exp(-1/2\gamma) + \right. \\ \left. + \int_0^{Fo - \gamma} K(Fo - Fo', \gamma) u_1(Fo') dFo' \right\}, \quad (9а)$$

где

$$K(Fo, \gamma) = \frac{1}{2\gamma} \cdot \frac{I_1 \left(\frac{1}{2\gamma^2} \sqrt{Fo^2 - \gamma^2} \right)}{\sqrt{Fo^2 - \gamma^2}} \exp(-Fo/2\gamma^2), \quad (9а^*)$$

$$u(\gamma, Fo) = E(Fo - \gamma) \left\{ \frac{\gamma x}{\lambda} q_1(Fo - \gamma) \exp(-1/2\gamma) + \right. \\ \left. + \int_0^{Fo - \gamma} K(Fo - Fo', \gamma) q_1(Fo') dFo' \right\}, \quad (9б)$$

где

$$K(Fo, \gamma) = \frac{x}{2\gamma\lambda} \left\{ I_0 \left(\frac{1}{2\gamma^2} \sqrt{Fo^2 - \gamma^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{Fo}{\sqrt{Fo^2 - \gamma^2}} I_1 \left(\frac{1}{2\gamma^2} \sqrt{Fo^2 - \gamma^2} \right) \right\} \exp(-Fo/2\gamma^2). \quad (9б^*)$$

Полученные интегральные соотношения (9а), (9б) между температурой $u(\gamma, Fo)$ внутри тела и температурой $u_1(Fo)$ на границе стержня или тепловым потоком на поверхности стержня можно использовать для решения различного рода задач. Если функция $u_1(Fo)$ или $q_1(Fo)$ извест-

на, то формулы (9а), (9б) и (9а*), (9б*) представляют собой решения соответствующих прямых краевых задач.

Используя главный член асимптотики бесселевых функций I_0 и I_1 , можно показать, что при условии $(Fo - Fo') > \gamma$ предельный переход $\beta \rightarrow 0$ в формулах (9) приводит к соответствующим решениям краевых задач для параболического уравнения теплопроводности. Если β мало, но $\beta \neq 0$, то при малых Fo решения (9) могут отличаться от соответствующих решений параболического уравнения; с увеличением Fo это отличие уменьшается. Задача о нагреве полуограниченного стержня с граничным условием первого рода $u_1 = \text{const}$ рассматривалась в работе [10]. Там же подробно анализировались физические эффекты, появляющиеся при переходе от параболического к гиперболическому уравнению теплопроводности (наличие распространяющейся ударной тепловой волны, ограничение на максимальный тепловой поток и коэффициент теплоотдачи и т. д.). По-видимому, заметное отличие решений при малых Fo может наблюдаться в быстро протекающих интенсивных тепловых процессах и процессах при сверхнизких температурах.

Решение линейных граничных ОЗТ. Интегральные соотношения (9) можно использовать для решения обратных задач о восстановлении температуры $u_1(Fo)$ или теплового потока $q_1(Fo)$ на границе стержня по температуре $u(Fo)$, измеренной во внутреннем сечении стержня на расстоянии x от конца. В этом случае формулы (9) представляют собой линейные интегральные уравнения Вольтерра второго рода для искомой функции $z_\gamma(Fo) = \{u_1(Fo), q_1(Fo)\}$:

$$u(Fo^* + \gamma) = \int_0^{Fo^*} K(Fo^* - Fo' + \gamma, \gamma) z_\gamma(Fo') dFo' + \eta_0 z_\gamma(Fo^*) \exp(-1/2\gamma). \quad (10)$$

Здесь

$$Fo^* = Fo - \gamma; \quad \eta_0 = 1 \quad \text{и} \quad \eta_0 = x\gamma/\lambda \quad (10a)$$

при краевых условиях первого и второго рода соответственно, а ядра $K(Fo, \gamma)$ уравнения (10) определяются формулами (9а*) и (9б*). Для решения уравнения (10) могут быть использованы известные численные и аналитические методы [13], такие, как ряд Неймана, метод коллокаций, применение квадратурных формул и т. д.

В интегральном уравнении (10) параметр γ может быть или заданным, или неизвестным. В последнем случае при каком-то определенном значении γ_0 параметра γ функция $z_{\gamma_0}(Fo)$ будет близка к реальной температуре или тепловому потоку на стенке, поэтому ее можно принять за приближенное решение граничной ОЗТ. Величину $1/\beta_0$ можно рассматривать как приближенное значение скорости распространения тепла в теле. Определить величину γ_0 проще всего следующим образом. Положив в уравнении (10) $Fo^* = 0$, получим простое соотношение между начальным значением $z_\gamma(0)$ и измеряемой температурой $u(Fo)$

$$z_\gamma(0) = u(\gamma) \exp(1/2\gamma)/\eta_0. \quad (11)$$

Вследствие конечности скорости распространения тепла функция $u(Fo)$ должна иметь разрыв первого рода при $Fo = \gamma_0$, поэтому и величина $z_\gamma(0)$ как функция γ имеет разрыв первого рода при $\gamma = \gamma_0$. На рис. 1 представлена кривая $u(Fo)$, использованная в численном эксперименте. Значение γ_0 принималось равным $\gamma_0 = 0,06$. На этом же рисунке изображена зависимость начального значения $z_\gamma(0)$ от γ . Использование экспериментальных кривых $u(Fo)$ для построения зависимости $z_\gamma(0)$ приведет к тому, что, начиная с некоторого значения γ , величина $z_\gamma(0)$ быстро возрастает.

тает от первоначального нулевого значения. Это граничное значение γ приближенно можно принять за γ_0 .

Составим функционал $\Phi(\gamma)$, учитывающий поведение решения $z_\gamma(Fo)$ и его производной $dz_\gamma(Fo)/dFo$:

$$\Phi(\gamma) = \left\| u(Fo^* + \gamma) - \int_0^{Fo^*} K(Fo^* - Fo' + \gamma, \gamma) z_\gamma(Fo') dFo' - \right. \\ \left. - \eta_0 z_\gamma(Fo^*) \exp(1/2\gamma) \right\| + b_0 \|z_\gamma(Fo)\| + b_1 \left\| \frac{dz_\gamma(Fo)}{dFo} \right\|. \quad (12)$$

В формуле (12) нормы всех функций берутся в пространстве L_2 , а b_0 и b_1 — весовые коэффициенты. Так как при значениях параметра γ , близ-

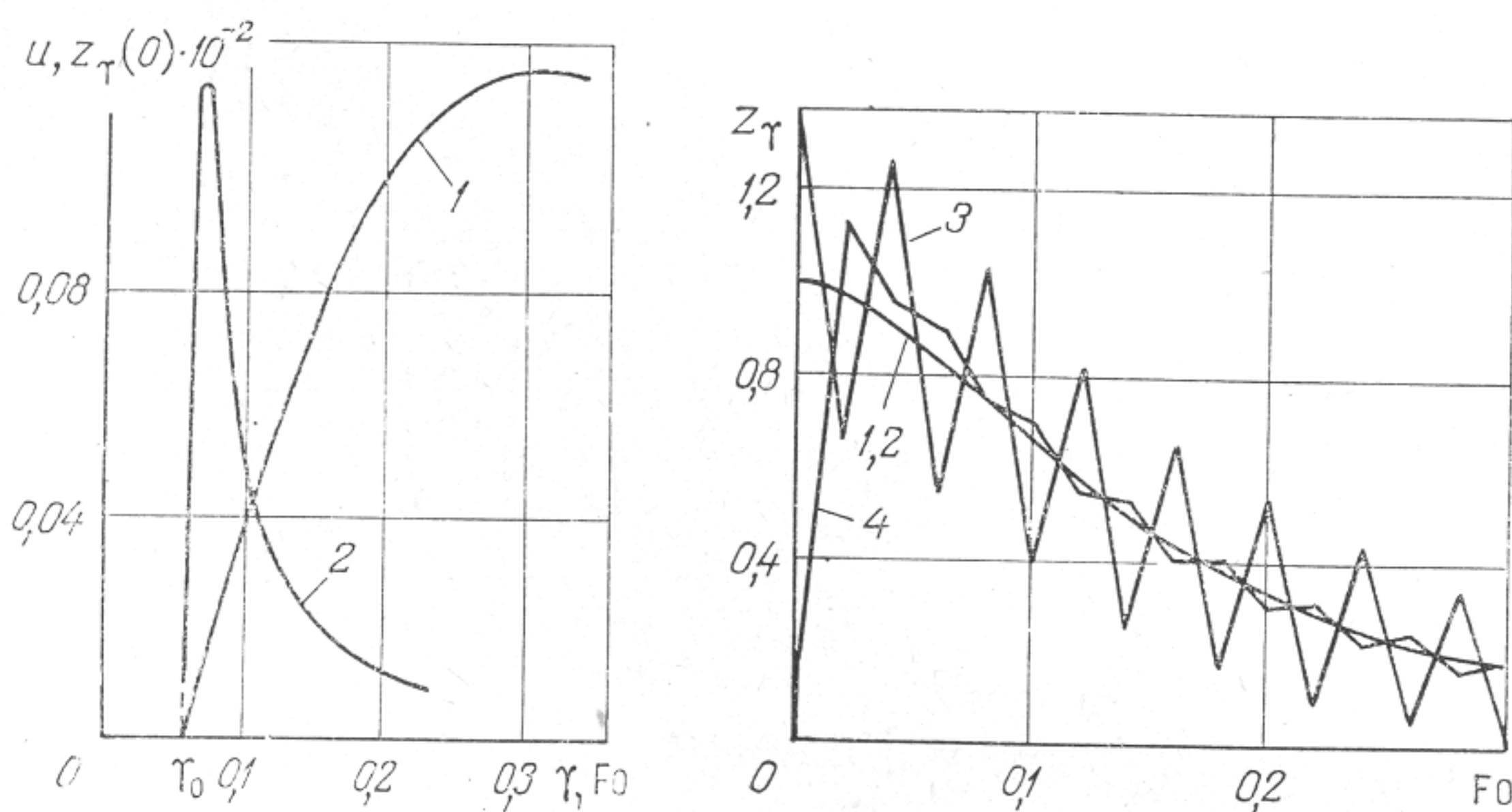


Рис. 1. Относительная температура $u(Fo)$ на расстоянии x от конца стержня и соответствующая ей величина $z_\gamma(0)$: 1 — зависимость $u(Fo)$; 2 — зависимость начального значения $z_\gamma(0)$ на конце стержня, построенная по формуле (11)

Рис. 2. Зависимости восстановленной относительной температуры $z_\gamma(Fo)$ на конце стержня при различных значениях γ : 1, 2 — точная и расчетная кривые $z_{\gamma_0}(Fo)$; 3 — осциллирующая кривая $z_\gamma(Fo)$ при $\gamma=0,0601$; 4 — зависимость $z_\gamma(Fo)$ при $\gamma=0,05$

ких к γ_0 решение $z_\gamma(Fo)$ осциллирует, то при подходящем выборе коэффициентов b_0 и b_1 минимум функционала Φ будет достигаться при гладком решении, соответствующем $\gamma=\gamma_0$. Поэтому параметр γ_0 можно выбирать из условия

$$\Phi(\gamma_0) = \min_{\gamma} \Phi(\gamma). \quad (12a)$$

Проведенные численные расчеты о восстановлении температуры на конце стержня по функции $u(Fo)$, изображенной на рис. 1, показали эффективность выбора параметра γ_0 по формулам (12), (12a). Так, в результате расчета получили величину $\gamma_0=0,060001$ вместо точного значения $\gamma_0=0,06$. При расчетах принималось, что весовые коэффициенты $b_0=b_1=1$, а функционал Φ заменялся соответствующей суммой по равномерному разбиению точек Fo с шагом $H=0,02$. Интегральное уравнение (10) решалось посредством описанного ниже метода. На рис. 2 (кривые 1 и 2) приведены практически совпадающие точное решение и результаты расчета по формулам (10), (12), (12a). На кривых 3 и 4 показаны осциллирующие кривые $z_\gamma(Fo)$ для $\gamma=0,0601 > \gamma_0$ и $\gamma=0,05 < \gamma_0$.

В инженерной практике широко используется метод решения ин-

тегрального уравнения, основанный на аппроксимации решения разрывной ступенчатой функцией. Применим этот метод для решения интегрального уравнения (10). Разобьем рабочий промежуток $I \equiv [0, Fo_{\max}^*]$ на N подпромежутков $I_k \equiv [(k-1)H, kH]$ точками $Fo_k = kH$, где $H = Fo_{\max}^*/N$. Будем решать уравнение (10), считая, что на каждом подпромежутке I_k решение $z_\gamma(Fo)$ аппроксимируется функцией

$$z_\gamma(Fo) = \{z_\gamma(kH) + z_\gamma[(k-1)H]\}/2; Fo \in I_k. \quad (13)$$

При этом интегральное уравнение (10) сводится к системе алгебраических уравнений с треугольной матрицей для определения значений $z_\gamma(kH)$

$$\sum_{l=1}^k d_{k-l} z_\gamma(lH) = u(kH + \gamma) - d_k^* z_\gamma(0), \quad (14)$$

где

$$d_0 = \eta_0 \exp(-1/2\gamma) + \frac{1}{2} \int_0^H K(H + \gamma - \xi) d\xi, \quad (14a)$$

$$d_k^* = \frac{1}{2} \int_0^H K(kH + \gamma - \xi) d\xi, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (14b)$$

$$d_{k-l} = d_{k-l}^* + d_{k-l+1}^*, \quad k-l \geq 1, \quad (14b)$$

а величина $z_\gamma(0)$ определяется по формуле (11). Значения $z_\gamma(kH)$ удобно вычислять, используя рекуррентную формулу:

$$z_\gamma(kH) = \frac{1}{d_0} \left\{ u(kH + \gamma) - d_k^* z_\gamma(0) - \sum_{l=1}^{k-1} d_{k-l} z_\gamma(lH) \right\}. \quad (15)$$

Проведенные численные расчеты показали, что погрешность решения интегрального уравнения (10) предложенным методом мала. Ее можно оценить обычным образом [14]. Чтобы получить решение $z_\gamma(Fo)$, обладающее большей гладкостью, можно применить метод сплайнов. Отметим, что для преобразований Лапласа $U_1(p)$ и $Q_1(p)$, полученных из формул (6) с учетом выражения (4b), выполняется лемма Жордана. Поэтому для отыскания оригиналов $u_1(Fo)$ и $q_1(Fo)$ можно использовать методы операционного исчисления.

Таким образом, учет конечной скорости распространения тепла посредством гиперболического уравнения дает возможность достаточно точно и с малым шагом аппроксимации по времени решать линейную граничную ОЗТ. Предложенный метод решения ОЗТ позволяет одновременно определить и скорость распространения тепла.

Обозначения

λ — коэффициент теплопроводности; a — коэффициент температуропроводности; β — величина, обратная скорости распространения тепла; p — переменная Лапласа; Fo_{\max} — максимальное значение критерия Fo .

Nomenclature

λ , thermal conductivity; a , thermal diffusivity; β , reciprocal of heat propagation; p , Laplace variable; Fo_{\max} , maximum Fo .

Figure Captions

Fig. 1. Relative temperature $u(Fo)$ at a distance of x from the rod end and corresponding value of $z_\gamma(0)$; 1, $u(Fo)$; 2, $z_\gamma(0)$ for the rod end by formula (11).

Fig. 2. $z_\gamma(Fo)$ for relative recovery temperature at the rod end with different γ ; 1, 2, accurate and predicted curves $z_\gamma(Fo)$; 3, oscillating curve $z_\gamma(Fo)$ at $\gamma=0.0601$; 4, $z_\gamma(Fo)$ at $\gamma=0.05$.

Summary

The first and second boundary-value problems as well as a linear boundary-value inverse heat conduction problem with fixed heat sensor and boundary have been solved. A use of the hyperbolic equation allows the simultaneous determination of heat propagation velocity in a body and recovery of a boundary condition. An account of the finite heat propagation velocity increases the boundary-value inverse heat conduction problem stability. This is confirmed by numerical experiment.

Литература

1. Шумаков Н. В. ЖТФ, 27, № 4, 1957.
2. Калинин Л. Д., Шумаков Н. В. ТВТ, 9, № 4, 1971.
3. Жук В. И., Голосов А. С. ИФЖ, 29, № 1, 1975.
4. Темкин А. Г. Обратные методы теплопроводности. М., «Энергия», 1973.
5. Алифанов О. М. ИФЖ, 29, № 1, 1975.
6. Алифанов О. М. ИФЖ, 25, № 3, 1973.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
8. Алифанов О. М. ИФЖ, 24, № 2, 1973.
9. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
10. Baumeister K. J., Hamill T. D. Trans. ASME, ser. C, 91, № 4, 1969.
11. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z -преобразования. М., «Наука», 1971.
12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1. М., «Наука», 1969.
13. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., «Наука», 1965.
14. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. М., «Наука», 1977.
15. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., «Мир», 1972.

[25.X 1977 г.]

НИИ резиновой промышленности,
г. Ленинград