

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф. – м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
« ____ » _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ КОМПЕНСАТОРНОГО УСТРОЙСТВА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

по направлению подготовки
01.03.03 Механика и математическое моделирование
профиль
01.03.03_01 Механика и математическое моделирование сред с
микроструктурой

Выполнил

студент гр. 5030103/90101

Е. А. Свередюк

Руководитель

Доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

А. А. Ле-Захаров

Санкт-Петербург

2023 г.

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Свередюку Евгению Александровичу, гр. 5030103/90101

1. Тема работы: Термомеханический расчёт компенсаторного устройства методом конечных элементов
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: справочная литература, актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): постановка задачи о термомеханическом расчёте компенсаторного устройства, теоретическое обоснование решения задачи, разработка расчётной модели компенсаторного устройства для расчёта методом конечных элементов, анализ результатов расчёта компенсаторного устройства.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: А. Н. Бочаров, руководитель инженерной группы АО «ЦИФРА»
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР: _____ А. А. Ле-Захаров, доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению: 27.02.2023

Студент: _____ Е. А. Свередюк

РЕФЕРАТ

На 49 с., 27 рисунок, 6 таблиц.

СИЛЬФОННЫЙ КОМПЕНСАТОР, НАПРЯЖЕННО-ДВЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ СЕТКА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

В данной работе проводится термомеханический расчёт компенсаторного устройства методом конечных элементов с последующим анализом результатов. В роли компенсаторного устройства выбран сильфонный компенсатор.

Целью работы является получение напряженно-деформируемого состояния компенсаторного устройства для последующего анализа его прочности под определёнными тепловыми и механическими нагрузками.

Для расчёта методом конечных элементов необходима расчётная модель. Разработка расчётной модели происходит в конечно-элементном пакете *ANSYS* в модуле *Steady-State Thermal*, где проходит термический расчёт, и в модуле *Static Structural*, где проходит термоупругий расчёт.

При разработке расчётной модели происходит создание геометрической расчётной модели, задание физико-механических свойств материала и модели поведения материала, создание конечно-элементной сетки, контактных взаимодействий и приложение граничных условия.

Для получения напряженно-деформируемого состояния производится расчёт в двух постановках: линейной и нелинейной. После происходит анализ результатов.

ABSTRACT

49 pages, 27 figures, 6 tables.

BELLOWS COMPENSATOR, STRESS-TWO-FORMED STATE, FINITE ELEMENT METHOD, FINITE ELEMENT MESH, MATHEMATICAL MODELING.

In this paper, a thermomechanical calculation of a compensatory device by the finite element method is carried out, followed by an analysis of the results. A bellows compensator was chosen as a compensatory device.

The aim of the work is to obtain the stress-strain state of the compensatory device for subsequent analysis of its strength under certain thermal and mechanical loads.

For calculation by the finite element method, a calculation model is required. The development of the calculation model takes place in the ANSYS finite element package in the Steady-State Thermal module, where the thermal calculation takes place, and in the Static Structural module, where the thermoelastic calculation takes place.

When developing a calculation model, a geometric calculation model is created, the physical and mechanical properties of the material and the material behavior model are specified, a finite element mesh is created, contact interactions are created, and boundary conditions are applied.

To obtain the stress-strain state, the calculation is carried out in two formulations: linear and nonlinear. Then the results are analyzed.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	8
ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ	10
2.1 Теория упругости	10
2.2 Модель поведения материала	14
2.3 Метод конечных элементов	15
ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА РАСЧЁТНОЙ МОДЕЛИ	17
3.1 Расчётная геометрическая модель	17
3.2 Физико-механические свойства материалов	20
3.3 Сетка конечных элементов	22
3.4 Контактные взаимодействия	26
3.5 Граничные условия	31
ГЛАВА 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ	34
4.1 Тепловой расчёт	34
4.2 Линейный расчёт	34
4.3 Нелинейный расчёт	39
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	46
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	48

ВВЕДЕНИЕ

В современных промышленных процессах во многих отраслях есть необходимость обеспечения прочности и надежности трубопровода. Одна из главных опасностей разрушения труб – это тепловое расширение.

Проблема теплового расширения труб может возникнуть в системах отопления, кондиционирования и других технических системах, где используются трубы для транспортировки жидкостей или газов.

Она, обычно, возникает, когда трубы нагреваются и расширяются из-за тепла. Если трубы закреплены жестко, без возможности свободного расширения, то это может привести к напряжениям в трубах, а в результате – к их деформации или даже разрушению.

Неправильно решенная проблема расширения труб может привести к серьезным последствиям, включая утечку жидкостей или газов, повреждение оборудования и даже пожар. Поэтому важно обращать внимание на эту проблему и предпринимать меры для ее решения.

Проблема расширения труб может быть решена использованием компенсаторных устройств. Компенсаторы являются одним из самых распространенных способов решения проблемы расширения труб. Они могут быть изготовлены из различных материалов и иметь разные типы конструкций в зависимости от условий эксплуатации.

Одни из наиболее эффективных и популярных типов конструкции – это сильфонный компенсатор [10]. Он состоит из металлических или эластомерных сильфонов, которые могут быть сферической, цилиндрической или конической формы. Сильфонный компенсатор работает за счет деформации сильфона, который может расширяться или сжиматься в зависимости от изменения температуры или давления.

Сильфоны – это главная часть сильфонного компенсатора, обычно они изготавливаются из нержавеющей стали, хотя иногда могут использоваться и другие материалы, такие как медь или титан. Они обладают высокой степенью гибкости, что делает их идеальным выбором для компенсации перемещений,

которые могут возникнуть в результате термических циклов или других факторов.

Так как компенсатор является важной частью любого трубопровода, где необходима компенсация теплового расширения, то для обеспечения его надежности и прочности также необходимо обеспечить надежность и прочность компенсаторного устройства. Если рассматривать в роли компенсаторного устройства сильфонный компенсатор, то расчёт его прочности не тривиальная задача, так как данный компенсатор имеет сложную геометрическую форму и как правило испытывает большие нагрузки.

Для оценки прочности исследуемого объекта используется сравнение максимальных напряжений, возникающих в компенсаторе, и пределов прочности его материалов. Напряжения берутся из напряженно-деформируемого состояния компенсатора, а рассчитываются перемещения, деформации и напряжения с помощью метода конечных элементов.

Метод конечных элементов – это численный метод решения уравнений математической физики, который позволяет разбивать сложные структуры на более простые элементы и решать задачи для каждого элемента отдельно, а затем объединять их решения, чтобы получить общее решение задачи.

Таким образом, в данной работе проводится термомеханический расчёт сильфонного компенсатора, который изображен на рисунке 1 методом конечных элементов.



Рисунок 1 – Сильфонный компенсатор

Для решения задачи методом конечных элементов выбран конечно-элементный пакет *ANSYS*. Он позволяет создавать конечно-элементные модели объектов, производить расчеты и анализ, определять характеристики и параметры конструкций и предсказывать их поведение в различных условиях. Он включает в себя различные модули для решения задач в различных областях, таких как механика твердого тела, теплоперенос, что как раз и необходимо для данной задачи.

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью работы является проведение линейного и нелинейного расчётов сильфонного компенсатора для получения информации о его напряженно-деформированном состоянии (НДС) при заданных нагрузках.

Для получения НДС используется метод конечных элементов, этот метод требует наличие расчётной модели. Для разработки разных расчётных моделей существуют методики разработки. Рассмотрим методику разработки модели данной работы, для неё необходимо выполнить следующие шаги:

- Разработать расчётную геометрическую модель. В данной работе этот шаг заключается в упрощении исходной геометрии;

- Задать физико-механические свойства материалов и выбрать модель поведения материала. Необходимые свойства берутся из теоретического обоснования, а модели поведения данная задача имеет две: линейно-упругая модель и модель билинейного упрочнения;

- Создать сетку конечных элементов. Сетка конечных элементов создаётся с использованием методов и инструментов *ANSYS*;

- Установить контактные взаимодействия. Контакты в *ANSYS* делятся на два вида: линейные и нелинейные. В работе используются оба вида и далее рассматриваются более подробно;

- Постановка граничных условий. В данной работе решается как термоупругая задача, так и задача статики, поэтому задать граничные условия необходимы для обеих задач;

- Анализ результатов расчетов, включая оценку значений напряжений, деформаций и перемещений.

Исходная геометрия сильфонного компенсатора представлена на рисунке 2.

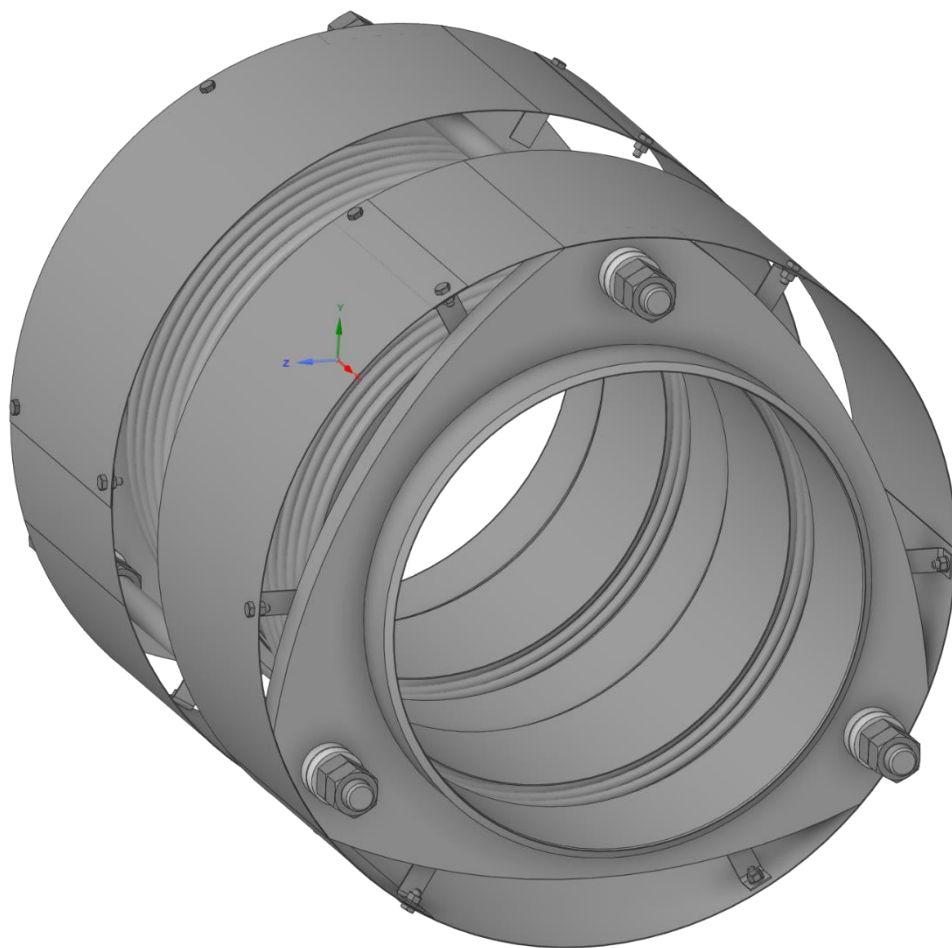


Рисунок 2 – Исходная геометрия

В постановке задачи используются следующие параметры нагрузки:

- Температура внутренней среды компенсатора равняется $500\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- Температура окружающей среды – $22\text{ }^{\circ}\text{C}$;
- Давление внутри компенсатора – 1 МПа ;
- Допустимый рабочий сдвиг компенсатора – 30 мм .

ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

2.1 Теория упругости

Для расчёта напряженно-деформируемого поля сильфонного компенсатора методом конечных элементов, решается две задачи: сначала задача теплопроводности, далее задача термоупругости. Опишем уравнения, решающиеся в каждой из задач.

В первой задаче решается уравнение теплопроводности [4], имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \Delta T = Q \quad (2.1)$$

где T – это температура (поле температур), λ – коэффициент теплопроводности, Q – внешние тепловые потоки

Так как данная задача статическая, то зависимости от времени нет, что означает $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, также в данной задаче нет никаких внешних потоков и поэтому $Q = 0$. Таким образом уравнение теплопроводности примет следующий вид:

$$\lambda \Delta T = 0 \quad (2.2)$$

Чтобы решить уравнение теплопроводности необходимы граничные условия. В данной задаче теплопроводности имеется несколько типов граничных условий [8]:

– Конвекция: $\left(\frac{\partial T}{\partial \underline{n}} + h(T_a - T_s) \right) |_{A,B} = 0$

– Симметрия: $\frac{\partial T}{\partial \underline{n}} |_B = 0$

где \underline{n} – это нормаль к поверхности, T_a – температура поверхности, T_s – температур окружающей среды, h – коэффициент теплопередачи.

Граничные условия прикладываются к поверхностям. Распределение граничных условий на компенсаторе представлено на рисунке 3. Поверхность А изображается синим цветом на компенсаторе, поверхность Б – зелёным, поверхность В – красным.

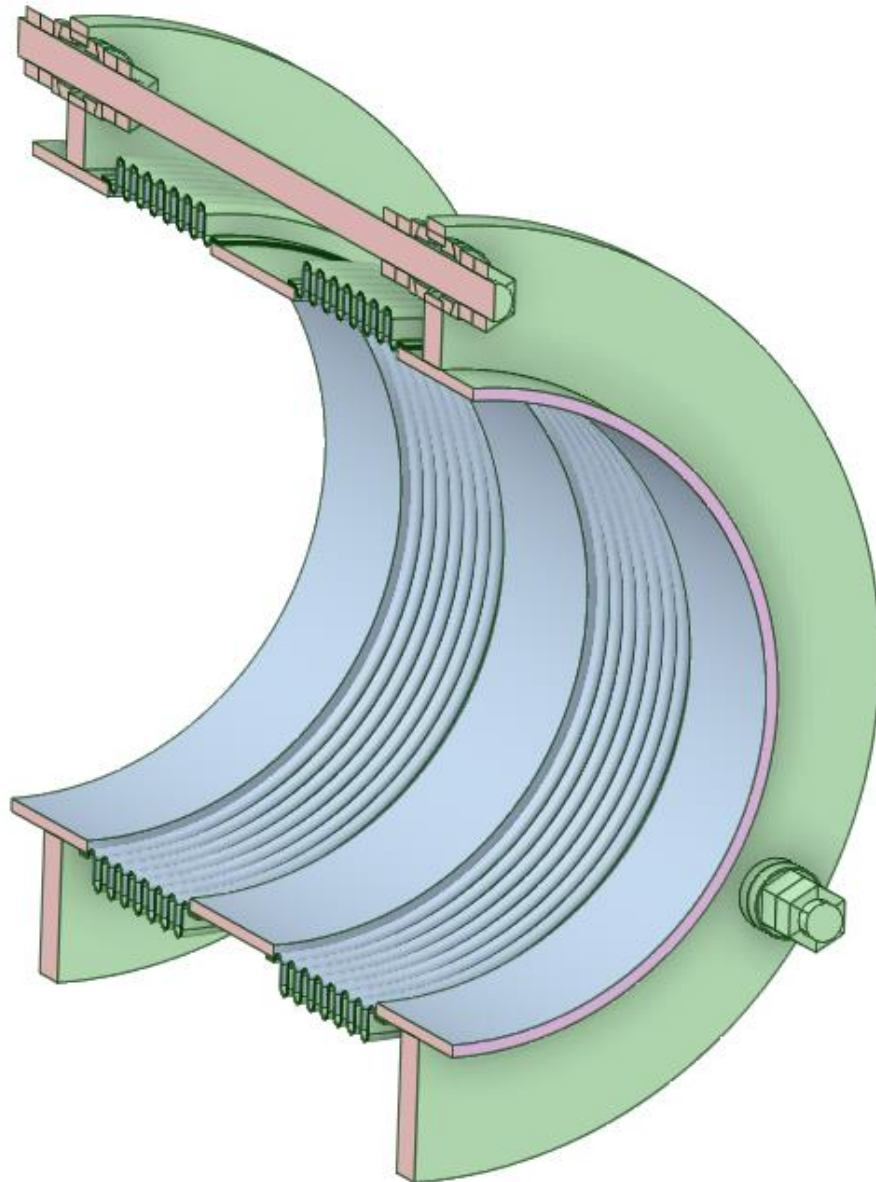


Рисунок 3 – Распределение граничных условий

Во второй задаче решается уравнение равновесия [7], имеющее следующий вид:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{K} + \underline{K}_T = 0 \quad (2.3)$$

где $\underline{\underline{\sigma}}$ – тензор напряжений, \underline{K} – вектор объемных сил, \underline{K}_T – вектор объемных сил от температурного воздействия/

Так как только поле перемещений определяет единственным образом поле напряжений, а не наоборот, то перепишем данное уравнение через тензор деформаций с помощью закона Гука:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{{}^4C}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.4)$$

где $\underline{\underline{{}^4C}}$ – тензор упругих постоянных четвертого ранга, $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_T$ – тензор деформаций, состоящий из упругого слагаемого и температурного.

Тензор упругих постоянных выполняет функцию описания связи между компонентами напряжений и деформаций в упругом материале. Упругие свойства материала определяются двумя постоянными и обе эти постоянные находятся в тензоре упругих деформаций. Данный тензор может определяться через модуль сдвига (μ) и коэффициент Ламе (λ):

$$\underline{\underline{{}^4C}} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Но для данной задачи удобнее взять модуль Юнга (E) и коэффициент Пуассона (ν), которые связаны с модулем сдвига и коэффициентом Ламе через следующие формулы:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.6)$$

$$E = 2\mu(1 + \nu)$$

Для перехода к перемещениям перепишем тензор деформаций через симметричную часть градиента вектора перемещений и тогда уравнение равновесия примет следующий вид

$$\nabla \cdot \left(\underline{\underline{{}^4C}} \cdot (\nabla \underline{u})^s \right) + \underline{K} + \underline{K}_T = 0 \quad (2.7)$$

Когда уравнение равновесия решено результатом является поле перемещений, а в конечном результате необходимо получить поле напряжений. Это происходит путем обратного последовательного перехода от перемещений к напряжениям.

Также как и в задаче теплопроводности в задаче термоупругости необходимы граничные условия:

- Симметрия: $\frac{\partial u}{\partial n}|_B = 0$;
- Поверхностные силы: $(\underline{n} \cdot \underline{\sigma} = \underline{p} + \underline{f}_T)|_{A,B,V,\Gamma}$;
- Перемещения на удаленном объекте: $\underline{u}_r|_\Gamma = \underline{T} \cdot \underline{u}_l$.

где \underline{T} – тензором перехода, \underline{u}_l – поле перемещений в локальной системе координат, \underline{u}_r – поле перемещений в глобальной системе координат, $\underline{f}_T = -3\alpha K T \underline{n}$ – температурное воздействие, \underline{p} – давление на поверхность.

Граничные условия в задаче статической механики также прикладываются к поверхностям. Распределение граничных условий на компенсаторе представлено на рисунке 3. Поверхность А изображается синим цветом на компенсаторе, поверхность Б – зелёным, поверхность В – красным, Г – фиолетовым.

Таким образом, в уравнениях необходимых для решения задачи теплопередачи и термоупругости есть константы, которые необходимо задать. Эти константы — это определенные свойства материалов, которые описывают их поведение в теории упругости. Для расчёта теплопроводности необходимы следующие параметры материала:

- Коэффициент теплопроводности;
- Коэффициент теплопередачи.

Для расчёта задачи в статической механике также необходимы определенные параметры, описывающие свойства материала:

- Модуль Юнга;
- Коэффициент Пуассона;
- Коэффициент теплового расширения;
- Предел текучести.

Для оценки полученных напряжений в линейном расчёте необходимо также иметь предел текучести материала, а в нелинейном расчёте – предел прочности.

2.2 Модель поведения материала

В данной работе решается линейная и нелинейная задача. Одно из различий между этими двумя задачами это модель поведения материала.

Линейная модель поведения материала означает, что материал подчиняется принципу суперпозиции, то есть его ответ на приложенные нагрузки линейно зависит от этих нагрузок. В рамках линейного поведения, напряжения и деформации в материале пропорциональны. В данной задаче для описания линейного поведения материала, как писалось в предыдущем подразделе, берется закон Гука.

Нелинейная модель поведения материала — это модель, которая учитывает нелинейные зависимости между напряжением и деформацией при анализе поведения материала.

Для учитывания пластических деформаций в ANSYS выбрана билинейная модель упрочнения материала. Эта модель предполагает две различные области поведения материала: область упругости и область пластичности. В области упругости материал подчиняется закону Гука и деформация пропорциональна напряжению. Однако, при достижении предела текучести, материал начинает упрочняться, и пропорциональность деформации напряжению перестает быть равно модулю Юнга. В этой области зависимость остаётся всё также линейной, но уже задаётся через тангенциальный модуль упругости:

$$E_{tang} = \frac{(\sigma_{врем} - \sigma_{текуч})}{(\varepsilon_{врем} - \varepsilon_{текуч})} \quad (2.8)$$

где E_{tang} – тангенциальный модуль упругости, $\sigma_{врем}$ – предел временного сопротивления или предел прочности, $\sigma_{текуч}$ – предел текучести, $\varepsilon_{врем}$ и $\varepsilon_{текуч}$ – соответствующие пределам напряжений деформации.

Поэтому для нелинейного расчёта, кроме уже перечисленных параметров материалов, требуются ещё пределы текучести и прочности материала, необходимые для расчёта тангенциального модуля упругости.

2.3 Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) [2] является численным методом решения дифференциальных уравнений и моделирования поведения материалов. Он широко используется в различных областях, включая теорию упругости, теплопроводность, гидродинамику и другие.

Основная идея МКЭ заключается в аппроксимации решения задачи на конечном элементе, то есть разбиении области на более простые подобласти, называемые конечными элементами. Затем на каждом элементе строится локальное приближение решения, используя функции форм.

Функции форм представляют собой математические функции, которые определяют поведение решения внутри каждого элемента. Обычно они выбираются таким образом, чтобы быть непрерывными и достаточно гладкими на каждом элементе. Часто используемой функцией формы является линейная интерполяция, которая определяется по положению узловых точек элемента.

Локальная матрица жесткости [9][6] связывает взаимодействие между узлами внутри каждого элемента. Она представляет собой квадратную матрицу размерности, равной количеству узлов в элементе. Элементы локальной матрицы жесткости зависят от свойств материала и геометрии элемента:

$$[k] \cdot [U] = [f] \quad (2.9)$$

где $[k]$ – локальная матрица жесткости, $[U]$ – матрица перемещений, $[f]$ – локальная матрица усилий.

Глобальная матрица жесткости составляется путем сборки локальных матриц жесткости для всех элементов и учета их взаимодействия внутри системы. Каждый элемент вносит свой вклад в глобальную матрицу жесткости в соответствующих позициях, связанных с его узлами:

$$[K] \cdot [U] = [F] \quad (2.10)$$

где $[K]$ – глобальная матрица жесткости, $[U]$ – матрица перемещений, $[F]$ – глобальная матрица усилий.

Матрица жесткости используется для формирования системы линейных уравнений, которая затем решается для получения численного решения задачи.

ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА РАСЧЁТНОЙ МОДЕЛИ

В главе о постановке задачи говорится, что расчёт методом конечных элементов подразумевает какую-либо методику разработки этой расчётной модели и приводятся шаги методики для данной конкретной задачи. Далее подробнее рассматриваются каждый из перечисленных шагов.

3.1 Расчётная геометрическая модель

Разработка расчётной трёхмерной геометрической модели предполагает упрощения и допущения для проведения расчётов:

- Согласно стандарту [12], допускается упрощать геометрическую модель для ускорения генерации сетки (например, проводить операции по удалению фасок и галтелей, объединению линий и поверхностей);

- Для построения КЭМ надлежащего качества над геометрическими моделями помимо упрощения проведены действия по разделению геометрической модели на объёмы упрощённой формы [12];

- При подготовке к построению КЭМ геометрическая расчётная модель проверена на наличие отклонений в размерах и объёмах от конструктивного облика геометрической модели;

- Сильфон выполнен из отдельных пяти тонкостенных оболочечных конструкций;

- Для снижения ресурсоемкости в модели применено граничное условие симметрии относительно продольной оси (плоскость XY в осях координат модели).

На рисунке 4 представлены элементы, которые попадают под упрощение. Жёлтым выделены металлические пластины, служащие для защиты сильфона от внешних воздействий, которые в данной задаче не рассматриваются, поэтому для экономии ресурсов вычислительной машины, данные детали убираются их расчётной геометрической модели. Элементы геометрии, выделенные красным, являются фасками или скруглениями и также подлежат удалению с геометрии.

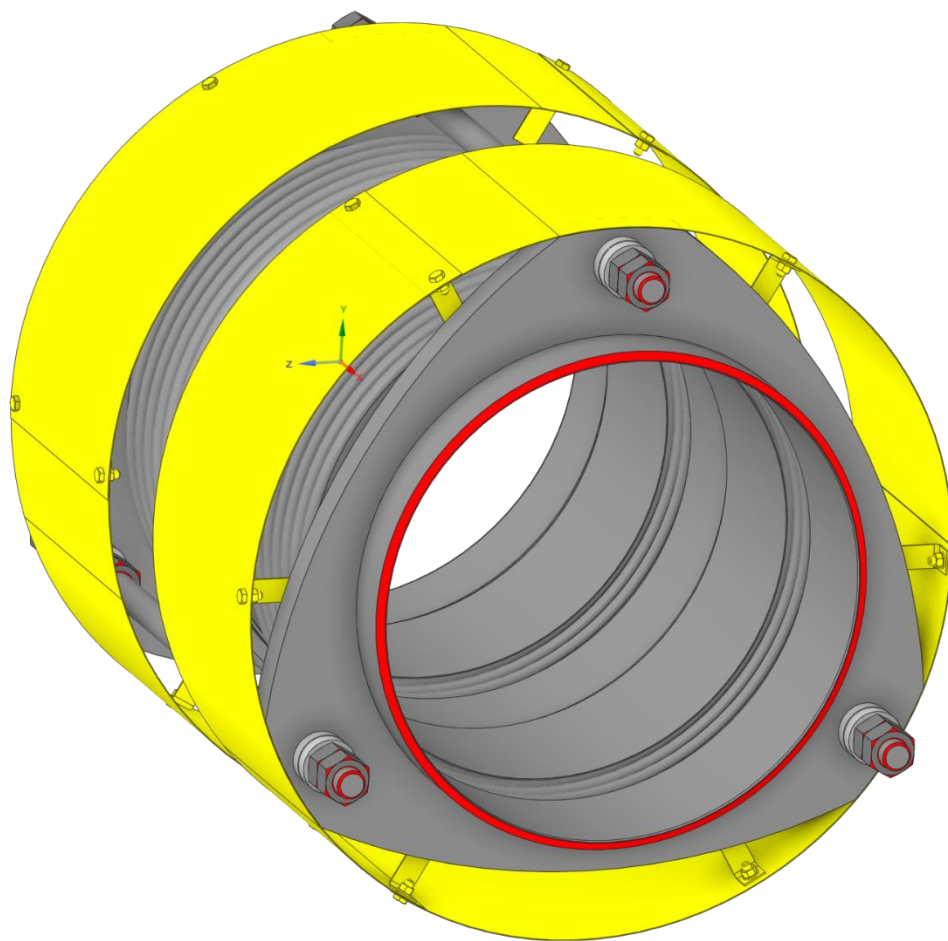


Рисунок 4 – Упрощение геометрической модели

После произведенных действий конечный вид расчётной геометрической модели представлен на рисунке 5, а на рисунке 6 представлены названия элементов сильфонного компенсатора, для упрощенного понимания читателем последующих шагов методики и описания результатов.

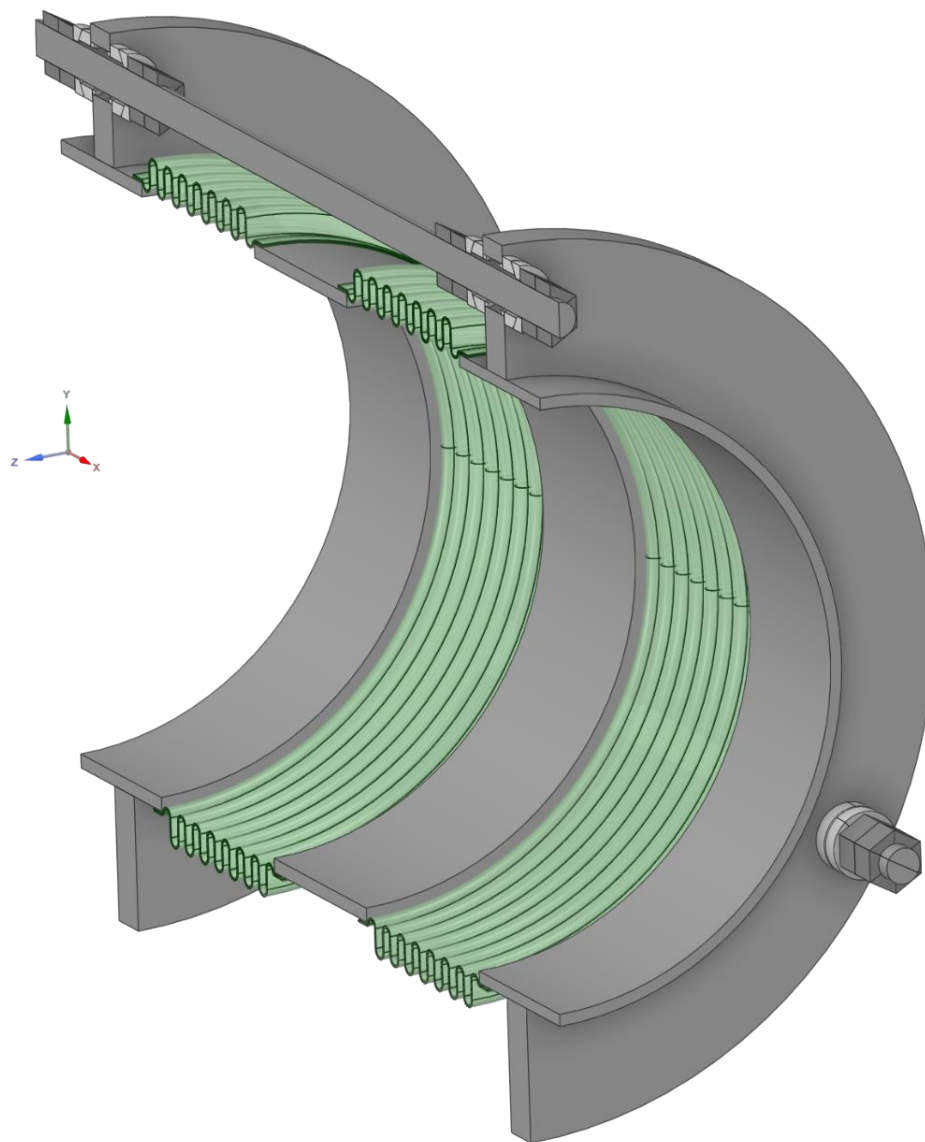


Рисунок 5 – Конечный вид расчётной геометрической модели

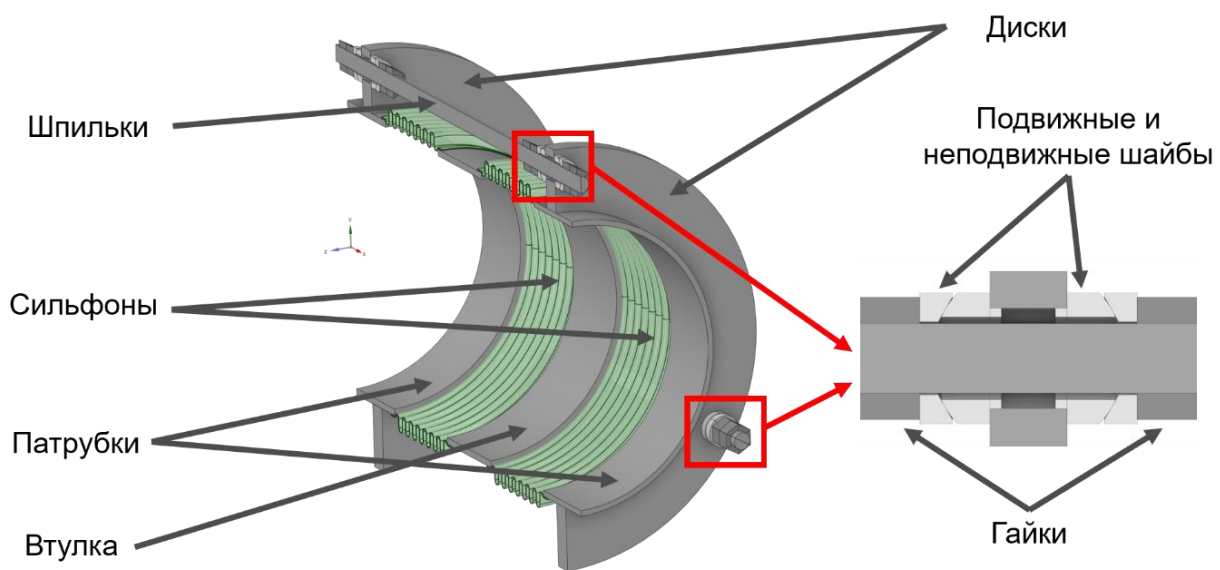


Рисунок 6 – Наименование частей компенсатора

3.2 Физико-механические свойства материалов

Все материалы в данной работе изотропны и имеют температурозависимые характеристики. В модели сильфонного компенсатора используются такие виды стали как [11]:

- 08X18H10T – для сильфонов;
- 17Г1С – для втулки и патрубков;
- 09Г2С для дисков – для дисков;
- 35 – для гаек;
- 40Х13 – для всех шайб;
- 40Х – для шпилек.

Из уравнения теплопроводности, уравнения равновесия и модели поведения материала можно выделить необходимые для расчёта параметры материала: плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент теплопроводности и коэффициент термического расширения.

Некоторые параметры одинаковы для всех материалов:

- Плотность – $7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
- Коэффициент Пуассона – 0,3.

Остальные физико-механические свойства каждого материала отображены в таблицах 1-6.

Таблица 1 – Механические свойства материала сталь 08X18H10

Модуль Юнга	174, ГПа
Тангенциальный модуль	1167, МПа
Коэффициент теплового расширения	$18 \cdot 10^{-6}, 1/K$
Коэффициент теплопроводности	21, Вт/(м · К)
Предел текучести	142,5, МПа
Предел прочности	383, МПа

Таблица 2 – Механические свойства материала сталь 17Г1С

Модуль Юнга	140, ГПа
Тангенциальный модуль	1798, МПа

Коэффициент теплового расширения	$14.1 \cdot 10^{-6}, 1/K$
Коэффициент теплопроводности	36, Вт/(м · К)
Предел текучести	138, МПа
Предел прочности	425, МПа

Таблица 3 – Механические свойства материала сталь 09Г2С для дисков

Модуль Юнга	140, ГПа
Тангенциальный модуль	1602, МПа
Коэффициент теплового расширения	$14.1 \cdot 10^{-6}, 1/K$
Коэффициент теплопроводности	36, Вт/(м · К)
Предел текучести	183, МПа
Предел прочности	425, МПа

Таблица 4 – Механические свойства материала сталь 35

Модуль Юнга	167, ГПа
Тангенциальный модуль	1602, МПа
Коэффициент теплового расширения	$13.8 \cdot 10^{-6}, 1/K$
Коэффициент теплопроводности	42, Вт/(м · К)
Предел текучести	735, МПа
Предел прочности	910, МПа

Таблица 5 – Механические свойства материала сталь 40Х13

Модуль Юнга	173, ГПа
Тангенциальный модуль	
Коэффициент теплового расширения	$12.5 \cdot 10^{-6}, 1/K$
Коэффициент теплопроводности	29, Вт/(м · К)
Предел текучести	785, МПа
Предел прочности	980, МПа

Таблица 6 – Механические свойства материала сталь 40Х

Модуль Юнга	185, ГПа
Тангенциальный модуль	691, МПа
Коэффициент теплового расширения	$13.8 \cdot 10^{-6}, 1/K$
Коэффициент теплопроводности	36, Вт/(м · К)

Предел текучести	785, МПа
Предел прочности	980, МПа

3.3 Сетка конечных элементов

Разработка сетки конечных элементов играет ключевую роль в численном моделировании. Она влияет на точность и надежность решения, а также на вычислительные затраты. Неправильно разработанная сетка может привести к неточным результатам, недооценке или переоценке напряжений и деформаций, а также к неустойчивости численного решения. Следовательно, правильный выбор и разработка сетки являются критическими для достижения точных и достоверных результатов.

Существует несколько типов сеток, которые могут быть использованы в методе конечных элементов. Вот некоторые из наиболее распространенных типов сеток:

– Структурированные сетки – это сетки, в которых элементы имеют регулярную и упорядоченную структуру, такую как квадраты или параллелограммы в двумерном пространстве и кубы или параллелепипеды в трехмерном пространстве. Они обеспечивают простоту и эффективность в построении и вычислениях, но ограничены в своей способности моделировать сложные геометрии;

– Неструктурированные сетки – отличие от структурированных сеток, неструктурированные сетки не имеют строгой регулярной структуры. Они позволяют более гибкое моделирование сложных геометрий, таких как неоднородные или нелинейные области. Неструктурированные сетки могут быть триангуляционными (треугольники или тетраэдры) или полигональными (многоугольники или полиэдры);

– Сетки смешанного типа – это комбинация структурированных и неструктурированных сеток, которые используются для эффективного моделирования сложных геометрий, сохраняя при этом преимущества обоих типов.

Кроме типов сеток, также существует разнообразие элементов конечных элементов, которые используются для аппроксимации деформаций и напряжений внутри области. Некоторые из наиболее распространенных элементов включают линейные и квадратичные элементы, треугольники и тетраэдры, а также специализированные элементы для конкретных типов задач.

В данной работе сетка конечных элементов имеет структурированный характер. Сильфон построен из оболочечных элементов второго порядка, а остальные объекты – из гексаэдров второго порядка. Общее количество узлов в конечно-элементной сетке – 433 812, а общее количество элементов – 132 158.

Разработка сетки конечных элементов модели происходила также со следующими рекомендациями [12]:

- Рекомендуется использование гексаэдров второго порядка при проведении численного моделирования в 3D постановки;

- Для построения КЭМ надлежащего качества допускается использование оболочечных элементов;

- В местах соединения диска и патрубков строится конечно-элементная сетка с совпадающими узлами, так как эти элементы являются одной деталью и разделены лишь для упрощения построения на них сетки КЭ.

Конечный вид КЭ сетки представлен на рисунке 7, а на рисунке 8 представлен приближенный вид сетки в области соединения шпильки с диском через шайбы и гайки.

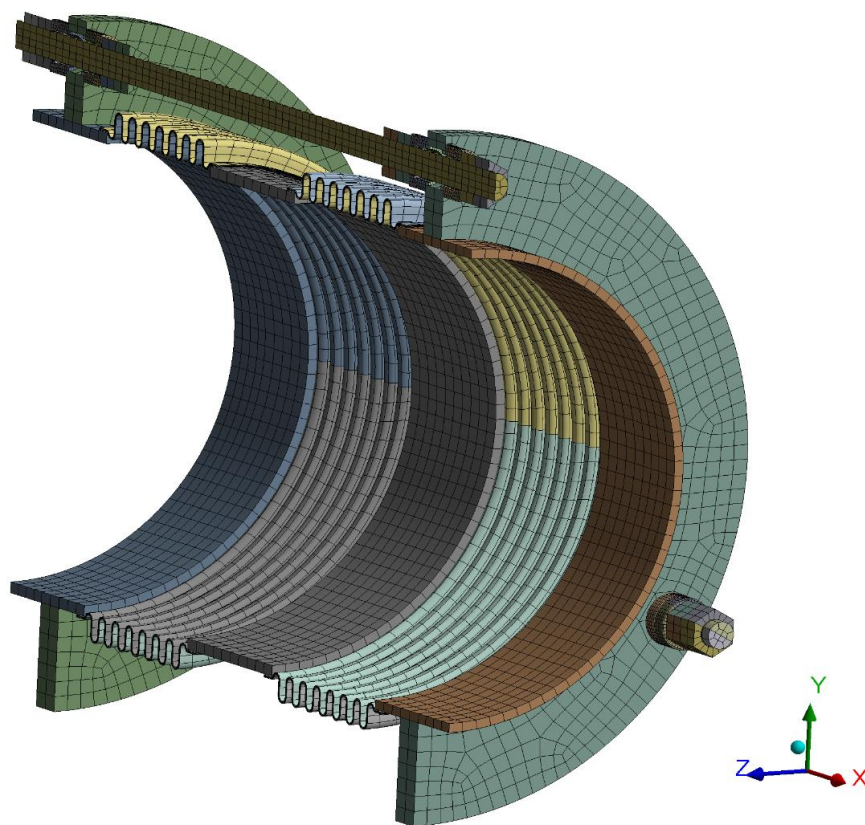


Рисунок 7 – Конечно-элементная сетка

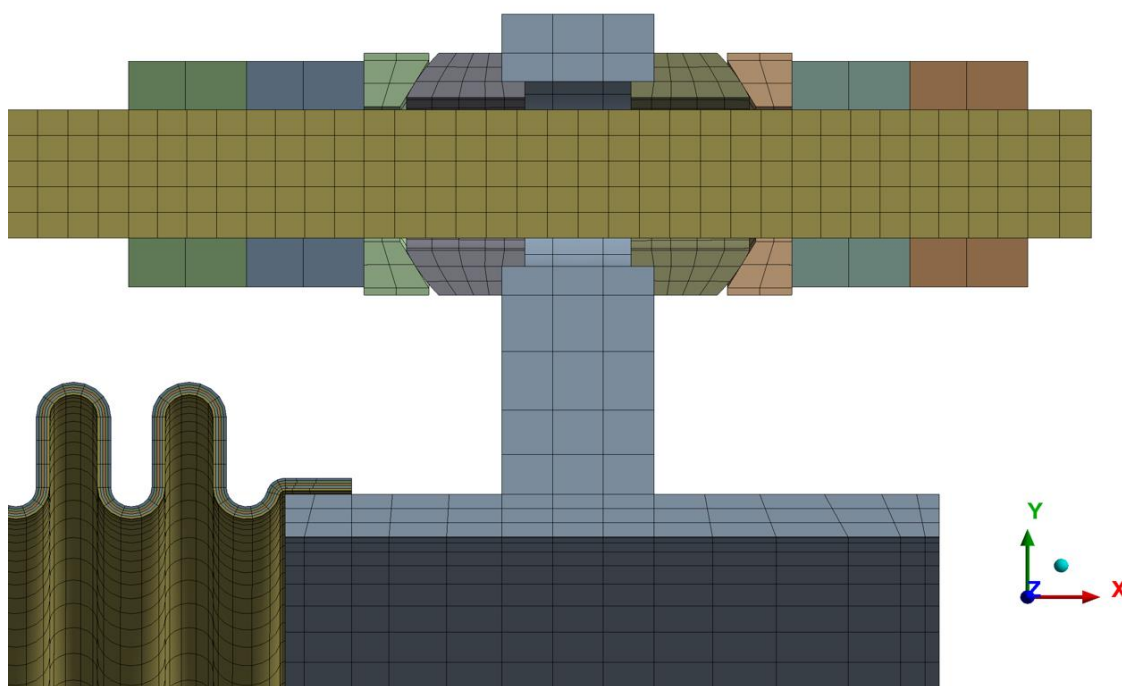


Рисунок 8 – Конечно-элементная сетка соединения шпильки и диска

Сеточная сходимость является важным аспектом численного моделирования с использованием метода конечных элементов. Она представляет собой процесс анализа влияния размера и плотности сетки на точность и сходимость численного решения.

Для сеточной сходимости изменялся глобальный размер элементов от 40 мм до 10 мм с шагом в 5 мм. График сеточной сходимости представлен на рисунке 9. Как правило, считается, что если результаты на соседних шагах отличаются в пределах 5%, то значит сеточная сходимость произведена и глобальный размер элементов не должен превышать данного размера. По графику сеточной сходимости видно, что при размере сетки 10 – 20 мм результаты отличаются незначительно, поэтому данные размеры оптимальны для размера КЭ сетки.

Из исследования на сеточную сходимость исключены сильфоны и шайбы, так как там есть концентраторы напряжения [14][15] и с уменьшением глобального размера элемента напряжения в данных областях постоянно возрастают, что мешает оценке сходимости на остальных элементах сильфонного компенсатора.

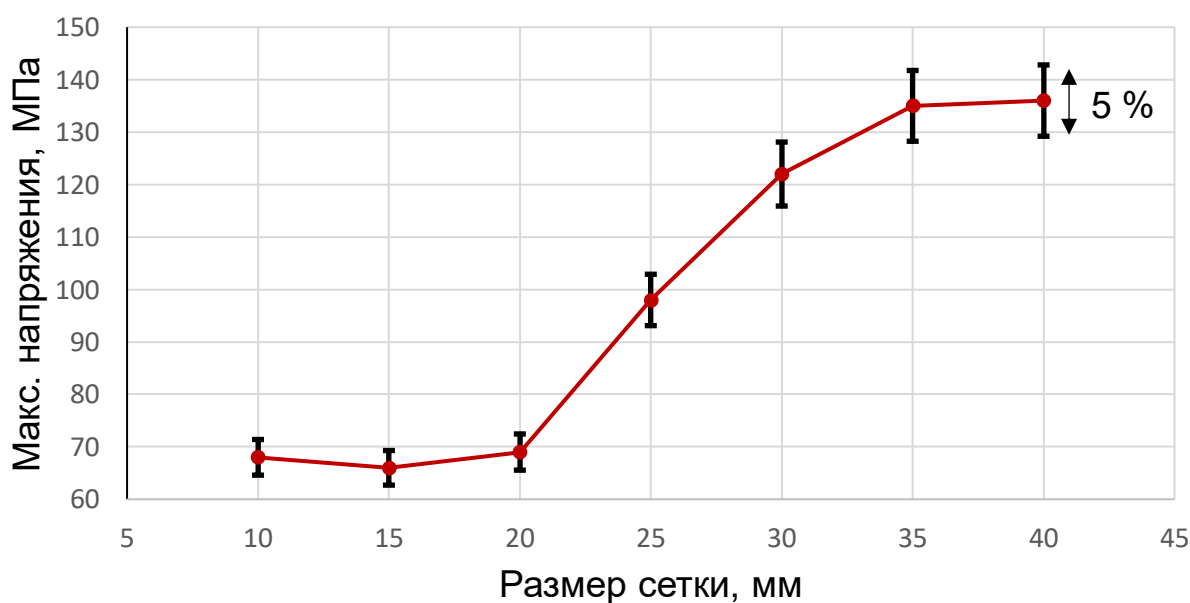


Рисунок 9 – График сеточной сходимости

3.4 Контактные взаимодействия

Контактные взаимодействия в *ANSYS* используются для моделирования взаимодействия различных компонентов или объектов в анализируемой системе. Они позволяют учесть влияние силы трения, соприкосновение поверхностей, передачу нагрузок и другие аспекты взаимодействия.

В *ANSYS* существует несколько типов контактных взаимодействий [5], которые можно использовать в зависимости от типа проблемы, которую вы моделируете. Рассмотрим некоторые из них:

– Контакт типа «Нет разделения» (*No separation*): Этот тип контакта связывает две поверхности таким образом, что они перемещаются вместе без относительного смещения друг относительно друга. Это полезно, когда взаимодействие между поверхностями происходит без проскальзывания или разъединения. Линейный контакт, от тела к телу передаются 4 степени свободы (1 поступательная и 3 вращательных);

– Контакт типа «шарнир» (*Joint spherical*): Этот тип контакта моделирует взаимодействие между поверхностями в виде разных шарнирных соединений. Линейный контакт, от тела к телу передаются 3 степени свободы (3 вращательных);

– Контакт типа «сопряжение» (*Bonded contact*): Этот тип контакта связывает две поверхности таким образом, что они перемещаются вместе без относительного смещения или разъединения. Он не учитывает силу трения и полезен, когда необходимо представить полное сопряжение между поверхностями. Это линейный контакт, от тела к телу передаются все 6 степеней свободы (3 поступательных и 3 вращательных);

– Контакт типа «трение» (*Frictional contact*): Этот тип контакта моделирует взаимодействие между поверхностями с учетом силы трения. Он позволяет поверхностям разделяться, скользить и вращаться друг относительно друга. Нелинейный контакт, от тела к телу передаются 6 степени свободы (3 поступательная и 3 вращательных).

Это лишь несколько примеров контактных взаимодействий, доступных в ANSYS. Выбор подходящего типа контакта зависит от физических свойств системы, требуемого уровня детализации и точности моделирования.

Из тепловой задачи важно получить распределение температуры по сильфонному компенсатору, чтобы потом получить из температуры тепловое расширение элементов компенсатора. Поэтому между всеми элементами компенсатора ставится контакт «Bonded» и также данное решение сэкономит ресурсы мощности вычислительной машины.

В задаче статической механики две постановки задачи: линейная и нелинейная и в двух постановках используются разные наборы контактов. Рассмотрим подробнее контакты каждой из постановок.

В линейном расчёте используются контакты типа *Bonded contact* и *No separation*, изображенные на рисунках 10 и 11.

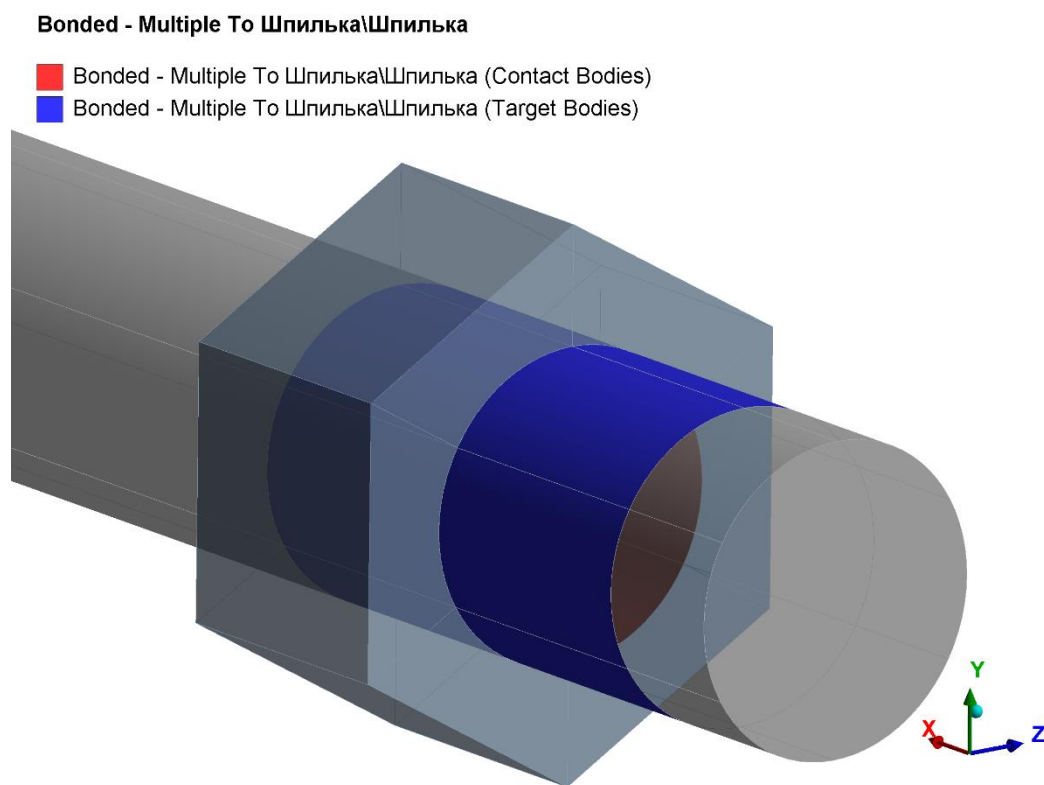


Рисунок 10 – Контакт типа «Bonded»

No Separation - Сильфон\Сильфон 1 To Сильфон\Сильфон 2

■ No Separation - Сильфон\Сильфон 1 To Сильфон\Сильфон 2 (Contact Bodies)

■ No Separation - Сильфон\Сильфон 1 To Сильфон\Сильфон 2 (Target Bodies)

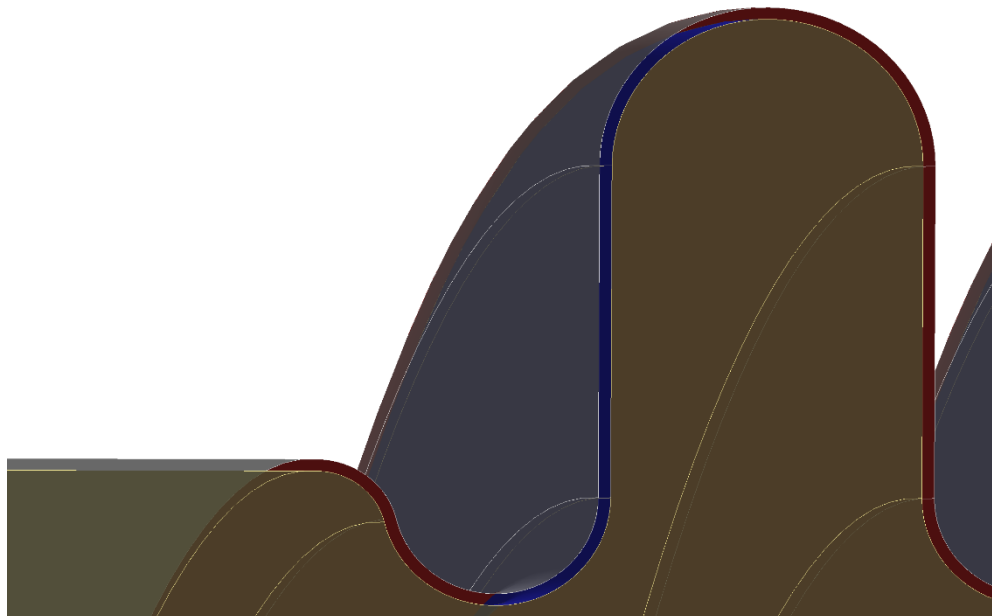


Рисунок 11 – Контакт типа «No Separation»

В нелинейной постановке контакты типа *Bonded contact* остаются. Контакты между сильфонами заменяются на *Frictional contact* вместо *No separation*, так как данный контакт моделирует более физическое взаимодействие между двумя соприкасающимися телами. Для использования контакта с трением необходимо задать коэффициент трения, между сильфонами коэффициент трения берётся равным 0,2. Данный контакт представлен на рисунке 12.

Frictional - Сильфон 1 To Сильфон 2

- Frictional - Сильфон 1 To Сильфон 2 (Contact Bodies)
- Frictional - Сильфон 1 To Сильфон 2 (Target Bodies)

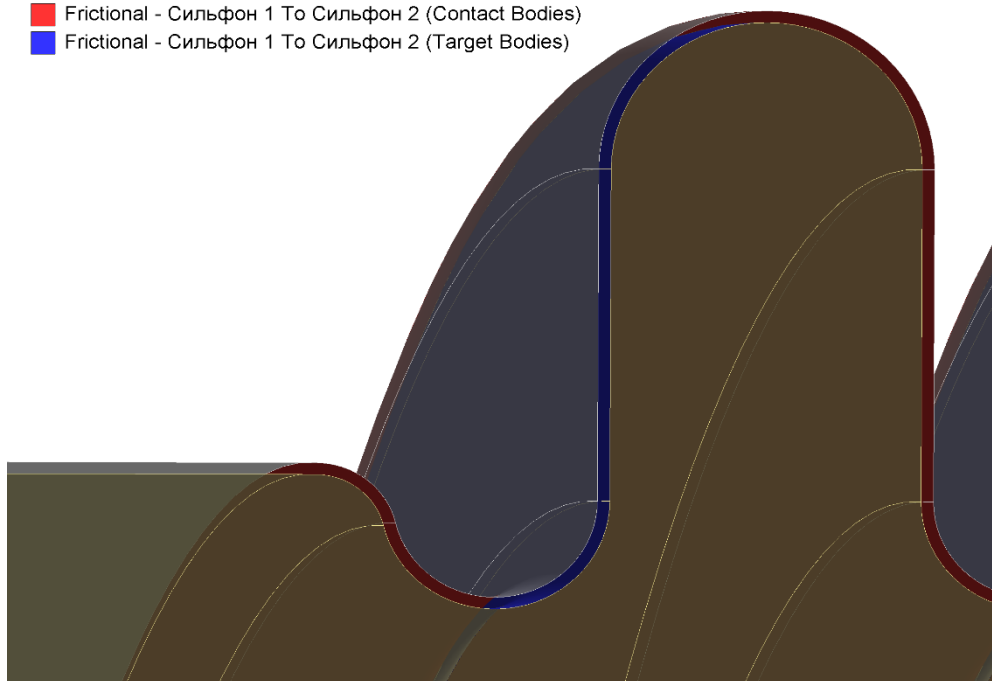


Рисунок 12 – Контакт типа «Frictional»

Контакты между шайбами изменяются на сферический шарнирный контакт, который моделирует полное вращение подвижной шайбы вокруг неподвижной, что является более верным моделированием поведения реальной модели шпильки и шайб в сильфонном компенсаторе. Данный контакт изображается на рисунке 13, где красной поверхностью отмечена поверхность неподвижной шайбы, по которой происходит скольжение подвижной шайбы, множество черных линий, это связи контактных поверхностей с центром сферы, которая получится, если продлить выделенную красную поверхность.

Spherical - Неподвижная шайба To Подвижная шайба

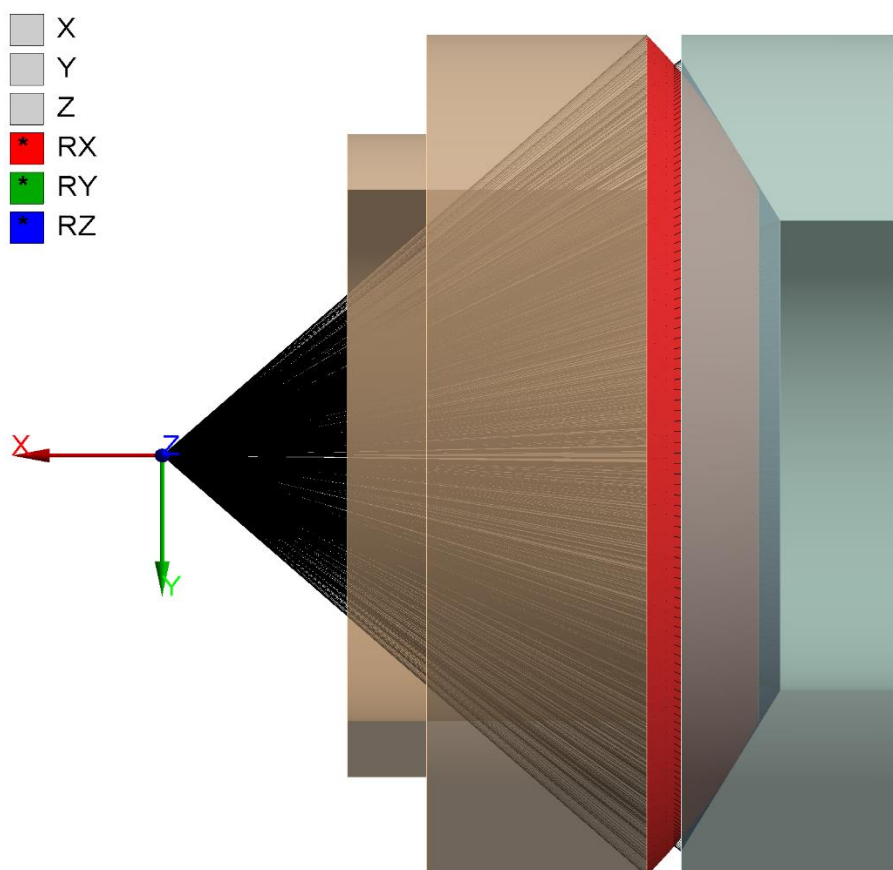


Рисунок 13 – Контакт типа «Joint Spherical»

Отличия в характере движения шпильки в результате изменения контакта шайб представлены на рисунке 14. На данном рисунке представлены деформированные шпильки обоих расчётов и прямые черные линии для более наглядного сравнения. В результате имеем, что в линейном расчёте шпилька изгибается в S-образную, из-за чего в шпильках возникают большие напряжения. В нелинейном расчёте шпилька остаётся практически прямой, что уменьшает напряжения в шайбах.

Линейная постановка



Нелинейная постановка

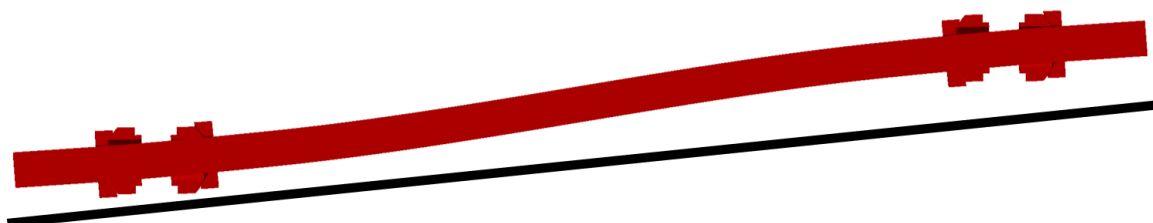


Рисунок 14 – Сравнение перемещения шпилек в разных постановках

3.5 Граничные условия

Так как решаются две задачи, сначала задача теплопроводности, а потом задача термоупругая, то граничные условия также требуются для обеих постановок.

Рассмотрим граничные условия первой задачи. Она решалась в *ANSYS* в модуле *Steady-State Thermal*. В данном модуле три основных граничных условия: температура, конвекция, излучение. Температура не используется как ГУ, так как это условие первого рода и не отображает действительное поведение тепла в модели, в отличие от конвекции, которая лучше моделирует распределение тепла в компенсаторе, а излучение не учитывается в данной расчётной модели.

Условие конвекции требует задания коэффициента конвекции. Данные граничные условия изображены на рисунках 15 и 16. Для внешней конвекции данный коэффициент равен $5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а для внутренней – $1000 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$.

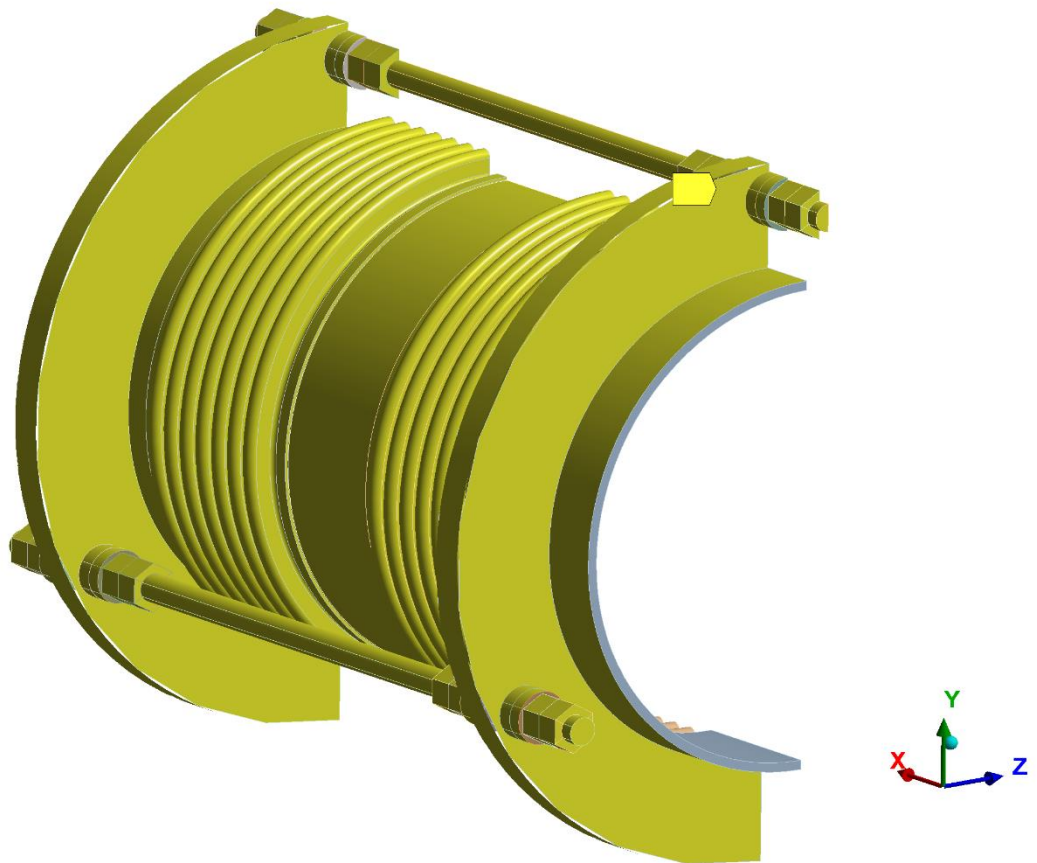


Рисунок 15 – Конвекция на внешние поверхности

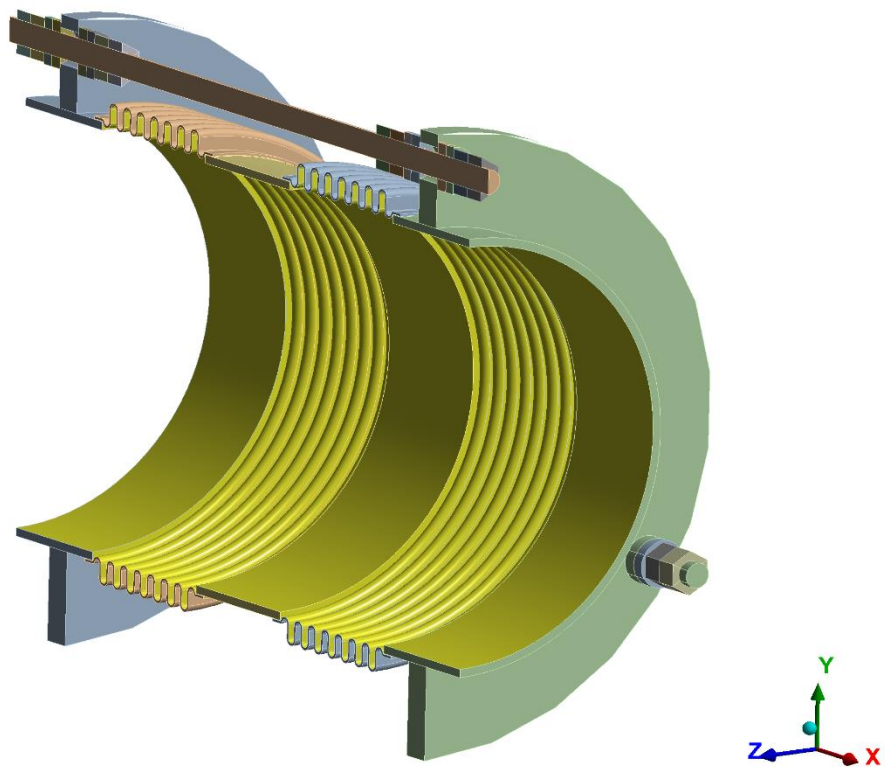


Рисунок 16 – Конвекция на внутренние поверхности

Второй решается термоупругая задача в модуле *Static Structural*. В данном модуле есть множество разных граничных условий. В данном расчёте используются следующие ГУ: гравитация, давление на внутренние поверхности, тепловая нагрузка на все поверхности, удаленное закрепление на одном из торцов и удалённое смещение на другом торце. Удалённое закрепление или смещение выбирается, так как данное граничное условие связывает торцы с осью трубы с помощью деформируемых балочных элементов и таким образом запрещается перемещение только по одной из осей, в данной задаче по оси X, моделируя этим трубы, которые закрепляются к торцам компенсатора. Расширение торцов и смещение по двум другим осям не запрещается. Граничные условия статической задачи изображены на рисунке 17.

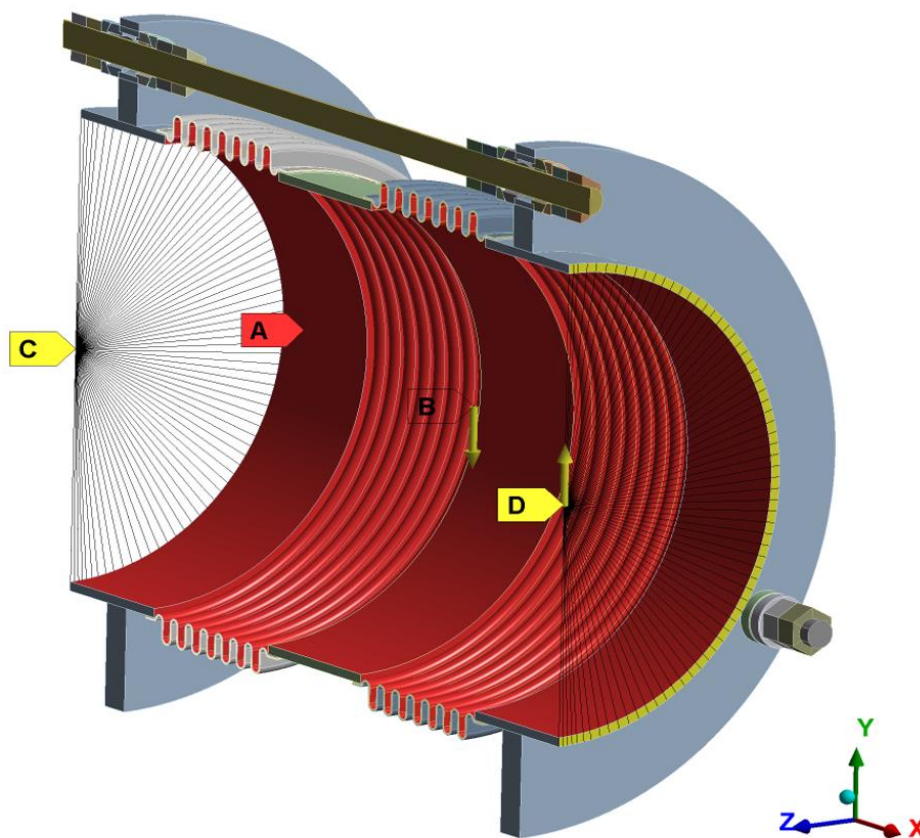


Рисунок 17 – Граничные условия в прочностном расчёте

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

4.1 Тепловой расчёт

Для использования тепловой нагрузки в задаче термоупругости необходимо передать температурное поле из первого расчёта. Рассмотрим полученные результаты теплового расчёта, представленные на рисунке 18.

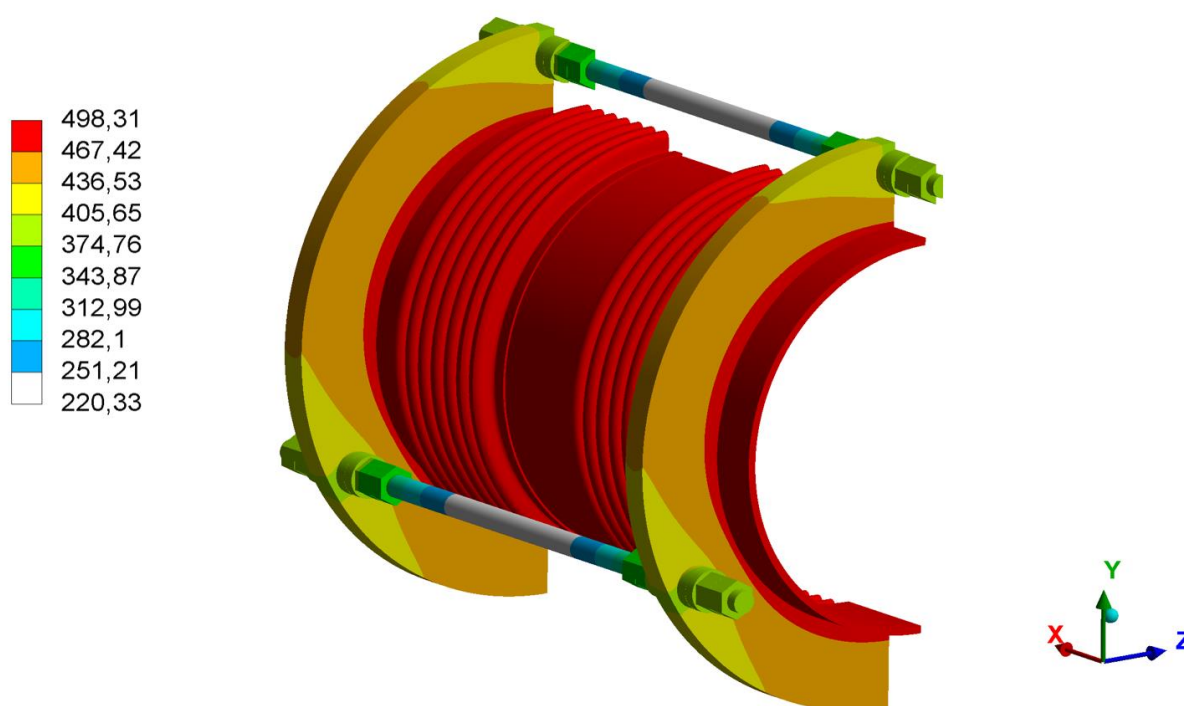


Рисунок 18 – Температурное поле

Максимальная температура равняется 498.31 градуса и находится на сильфонах и трубах, а минимальная температура равняется 220.33 градуса на шпильках, что соответствует распространению тепла от нагреваемых частей к охлаждаемым. Поле температур имеет равномерный характер без концентраторов.

4.2 Линейный расчёт

Далее рассмотрим линейный расчёт статической задачи. Поле перемещений представлено на рисунке 19.

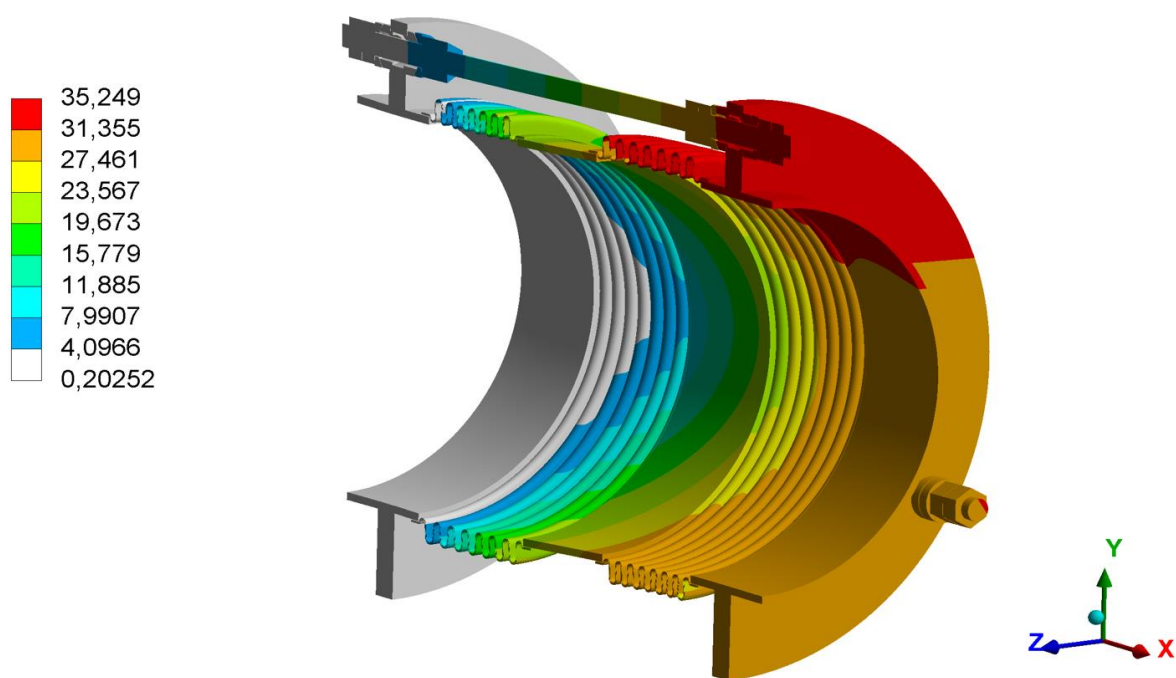


Рисунок 19 – Поле перемещений линейной постановки

Максимум наблюдается на перемещаемом конце сильфона в районе соединения шпильки и диска и равняется 35,249 мм, что соответствует граничному условию перемещению на данный конец компенсатора, а минимум находится на противоположном конце, где как раз приложено ГУ на закрепление. Поле перемещений также имеет равномерный характер без концентраторов.

Далее рассматривается самый важный результат расчётов на прочность – поле напряжений, представленное на рисунке 20.

Но перед этим стоит описать, как оцениваются напряжения в данном расчёте. Существует множество теорий оценивания напряжений, есть которые учитывают только касательные напряжения, есть которые учитывают только главные напряжения, а существуют теории, которые учитывают оба компонента тензора напряжений. В данной же работе для оценивания

напряжений используется теория Мизеса [13][3], где напряжения высчитываются по формуле (2.11):

$$\sigma_{Von Mises} = \sqrt{\frac{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2))}{2}} \quad (2.11)$$

где σ_i – главные напряжения, τ_{ij} – касательные напряжения.

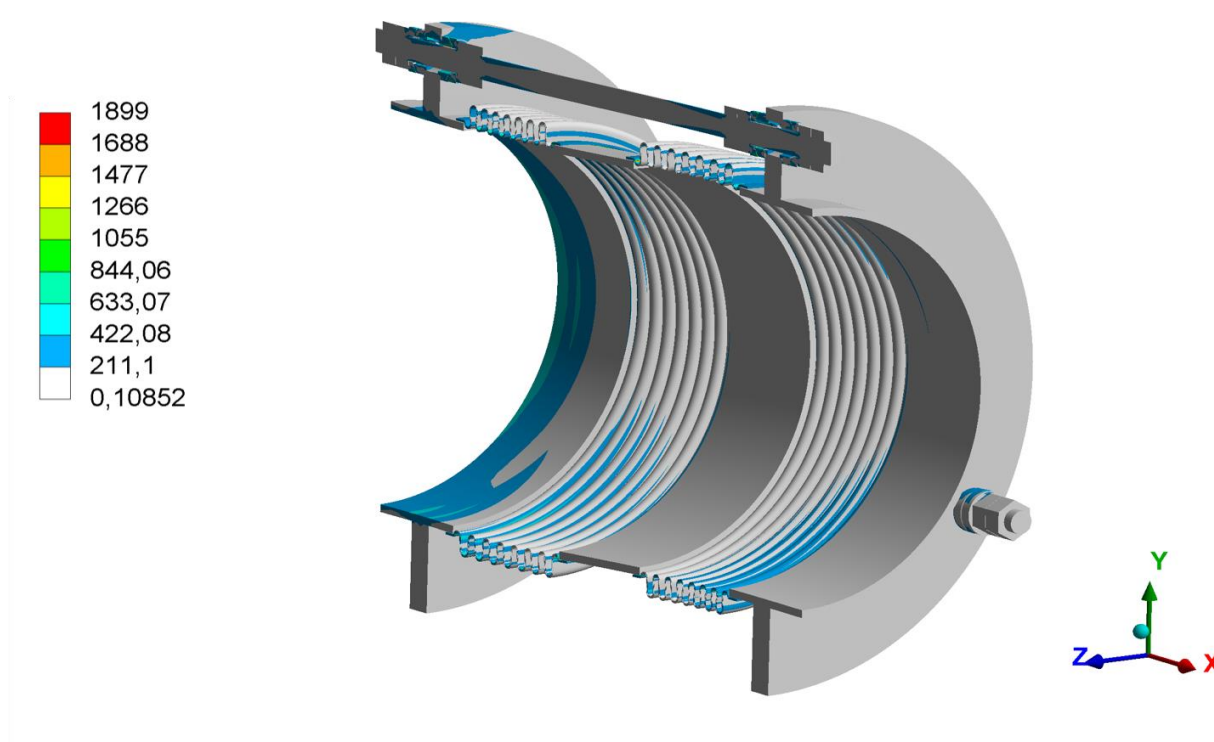


Рисунок 20 – Поле напряжений линейной постановки

Максимальные напряжения равняются 1899 МПа и находятся в сальфонах, а минимальные значения напряжений имеют значения практически равные 0. Поле напряжений имеет не равномерный характер и концентраторы напряжений в сальфонах и в шайбах.

Концентратор напряжений – это область в материале или конструкции, где напряжения сосредоточены и усилены по сравнению с окружающей областью. Он часто возникает в механических системах из-за геометрических особенностей, наличия острых углов, отверстий, включений или других

дефектов. Рассмотрим концентратор напряжений в сильфоне и в шайбах, изображенных на рисунках 21 и 22 более подробно.

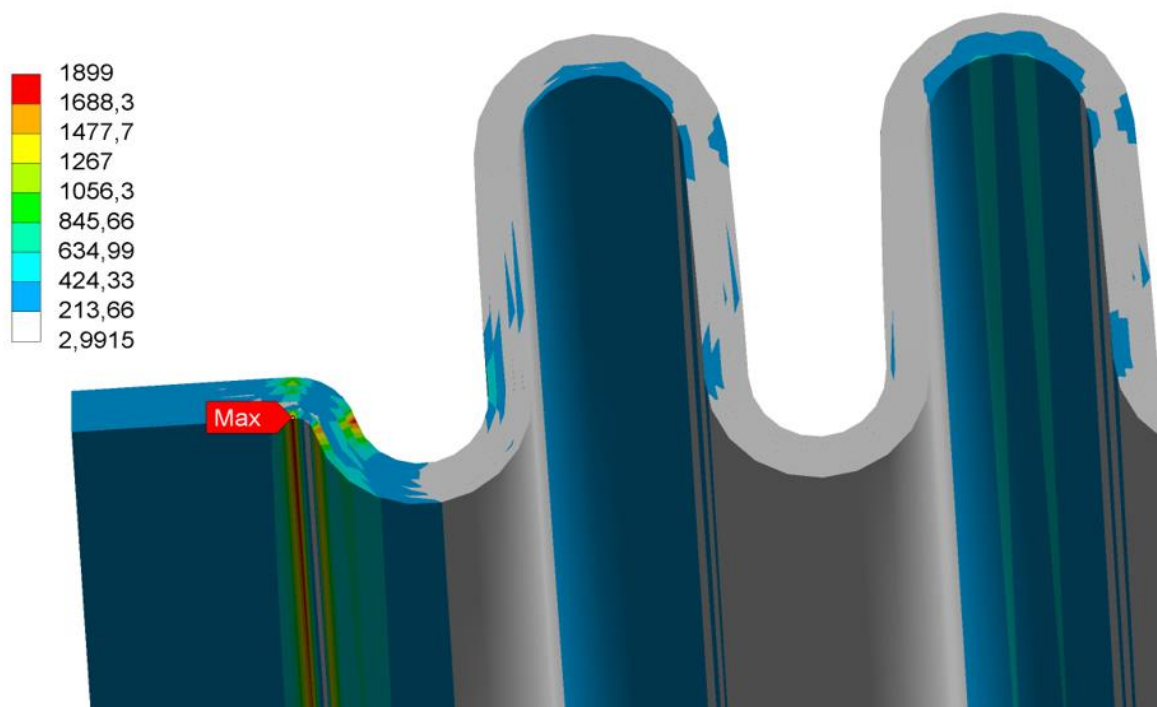


Рисунок 21 – Концентратор напряжений в линейной постановке в сильфоне

Один из концентраторов напряжений находится в сильфоне у мест крепления к трубам компенсатора, что является физически верным, ведь эти места жестко закреплены и поэтому там возникают бóльшие напряжения, также складка рядом с закреплением деформируется сильнее всего и вследствие этого напряжения там тоже выше, чем в остальных сильфонах.

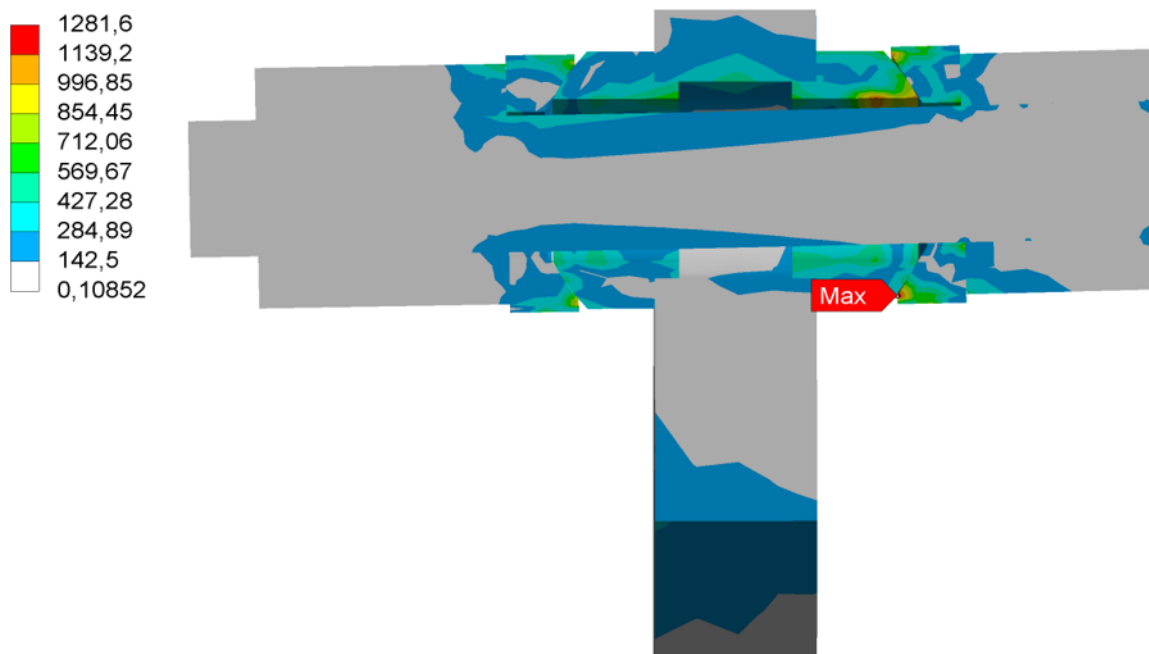


Рисунок 22 – Концентратор напряжений в линейной постановке в шайбах

Другой концентратор напряжений находится в соединении шайб, шпилек и диска. Находится данный концентратор в области контакта подвижных и неподвижных шайб. Возникает он по причине контакта между шайбами, который не передаёт достаточно точно механику движения шайб друг относительно друга, и по причине линейной модели материала.

Таким образом, имеются следующие выводы: напряжения по Мизесу больше предела текучести материала, из которого сделаны сильфоны компенсатора, т.к. максимальные напряжения равны 1899 МПа, а предел текучести материала «08Х18Н10» равен 143 МПа. Из этого результата делается вывод, что в сильфонном компенсаторе, возникают пластические деформации от нагрузки и расчёт выходит за пределы области применения линейной теории упругости, поэтому в задаче необходимо учесть следующие уточнения расчётной модели.

Уточнения расчётной модели для нелинейного расчёта:

– Так как поперечные перемещения в тонкостенной структуре составляют более 10% толщины, то нужно учесть в расчёте **геометрическую нелинейность** – изменение жесткости, вызванные изменением формы и ориентации элементов из-за большого отклонения, большого вращения и большой нагрузки;

– Необходимо учесть пластические свойства материалов;

– Также необходимо учесть нелинейные контакты между сальфонами.

Последние два уточнения расчетной модели описаны в разделах про контактные взаимодействия и в разделе про физико-механические свойства материалов.

4.3 Нелинейный расчёт

Для учитывания нелинейности геометрии в настройках параметров расчёта в подразделе *Solver Output* раздела *Analysis Settings* необходимо включить настройку *Large Deflection* [1].

Нелинейный расчет требует процесса сходимости, в отличие от линейного расчета, где решение может быть получено непосредственно. Это связано с нелинейным поведением материалов и/или геометрии системы, которые могут вызвать изменения внутренних сил и деформаций в процессе расчета.

При нелинейном анализе используется итерационный процесс, чтобы достичь сходимости. Процесс обычно начинается с некоторого начального приближения решения и последовательно обновляется до тех пор, пока не происходит сходимость. Каждая итерация включает решение уравнений равновесия и обновление матриц жесткости и сил.

В нелинейном расчете нагрузка обычно прикладывается пошагово или постепенно для учета нелинейных эффектов, таких как пластичность, вязкость или временные эффекты. Этот процесс называется инкрементным нагружением или методом пошаговой нагрузки.

Применение нагрузки пошагово имеет несколько причин:

– Учет необратимых деформаций: Во многих материалах есть необратимые эффекты, такие как пластичность или вязкость. При постепенном нагружении, сначала малые значения нагрузки применяются к материалу, позволяя ему пройти через упругую область. Затем, постепенно увеличивая нагрузку, материал начинает проявлять необратимые деформации, и эти эффекты могут быть учтены в расчете;

– Учет нелинейных свойств: Материалы могут иметь нелинейные свойства, которые проявляются только при определенных уровнях нагрузки. Применение нагрузки постепенно позволяет учесть такие нелинейности и предсказать поведение материала или конструкции на различных стадиях нагружения;

– Сходимость: Постепенное приложение нагрузки облегчает процесс сходимости в нелинейном расчете. Материалы и геометрия могут реагировать на нагрузку нелинейно, и сходимость требует перерасчета равновесия на каждом шаге. Постепенное нагружение помогает контролировать изменения внутренних сил и деформаций в процессе расчета, что улучшает сходимость.

Инкрементное загрузке позволяет получить более точные результаты, учитывая нелинейные эффекты, и обеспечивает более стабильный процесс расчета. Однако это также увеличивает время расчета, поскольку требуется выполнение нескольких шагов нагрузки. Выбор оптимального числа и размера шагов загрузки зависит от конкретной задачи и требуемой точности результатов.

В данной задаче имеется 3 шага нагрузки. На первом шаге прикладываются ГУ гравитации и давления, на втором шаге – температурная нагрузка, а на третьем шаге – перемещение торца компенсатора. При этом граничное условие на закрепление действует на всех шагах.

Рассмотрим поле перемещений в нелинейной постановке задачи, изображенное на рисунке 23.

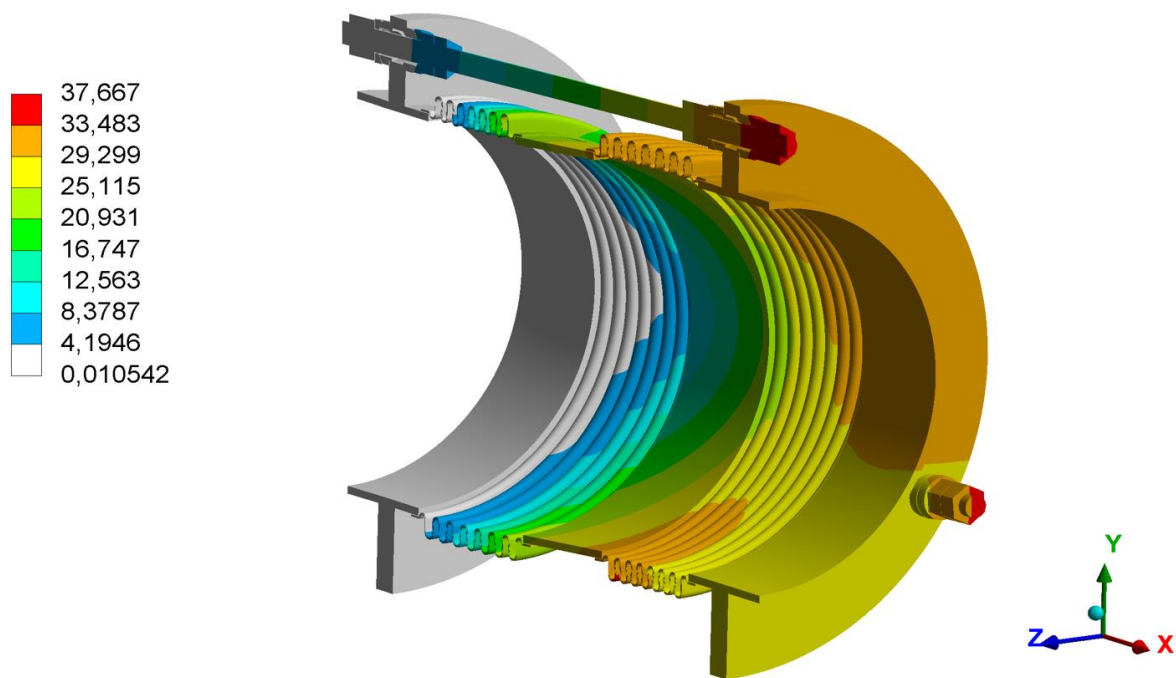


Рисунок 23 – Поле перемещений нелинейной постановки

Поле перемещений в нелинейном постановке имеет схожий характер с полем перемещений в линейной постановке. Но максимальные перемещения равны 37.667 мм в отличие от 35.249 мм в линейном расчёте и область максимальных перемещений находится только на конце шпильки. Данные различия заключаются в различии контактных взаимодействий подвижных и неподвижных шайб в линейном и нелинейном расчёте.

В задачах, где присутствуют пластические деформации, необходимо проводить оценку данных деформаций, ведь эта оценка имеет большое значение в нелинейном расчёте, поскольку пластичность является необратимым процессом, который проявляется во многих материалах под действием нагрузки. Пластические деформации возникают, когда материал достигает своего предела текучести и начинает пластично деформироваться без восстановления своей первоначальной формы при снятии нагрузки. Это

особенно важно в расчёте структур и компонентов, где пластичность может привести к нежелательным деформациям, разрушению или потере прочности.

Пластические деформации представлены на рисунке 24.

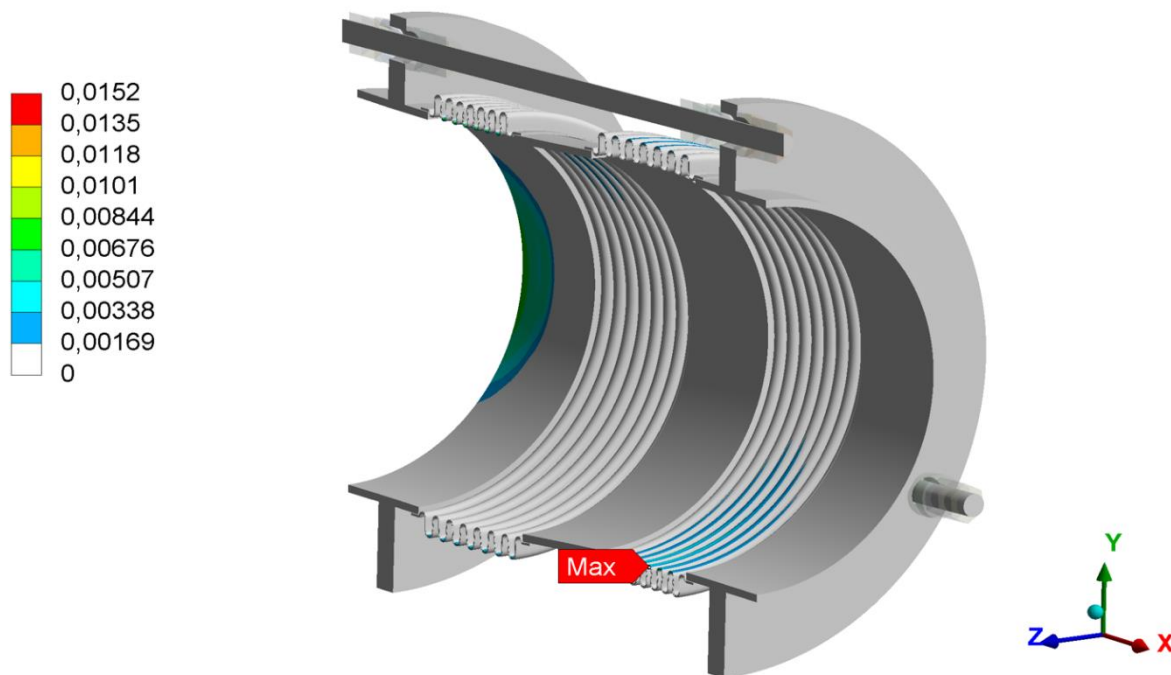


Рисунок 24 – Поле пластических деформаций

В данной задаче для материалов, из которых сделан сильфонный компенсатор пластические деформации не должны превышать 5 % от общих деформаций. Умножив максимальное значение пластических деформаций на 100, получится процентное количество пластических деформаций от общих. Таким образом, максимальный процент пластических деформаций в данной задаче не превышает 1.5 %, что является допустимым для критерия в 5 %.

Далее рассматривается распределение напряжений в сильфонном компенсаторе, представленное на рисунке 25.

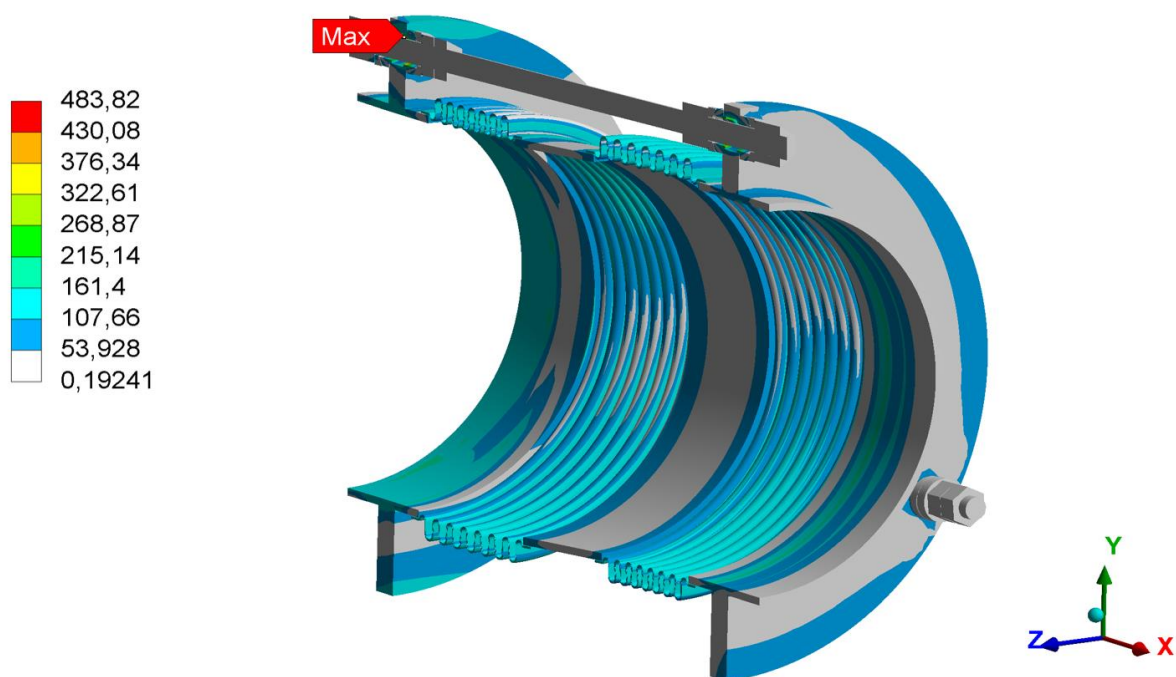


Рисунок 25 – Поле напряжений нелинейной постановки

Максимальные напряжения равны 484 МПа и находятся в соединении шайб, шпилек и диска, а минимальные значения напряжений имеют значения практически равные 0. Поле напряжений имеет более равномерный характер и менее выраженные концентраторы напряжений в шайбах, чем в линейном расчёте.

Для сравнения напряженного поля двух постановок задач на рисунках 26 и 27 представлены области, уже рассматриваемые в линейной постановке.

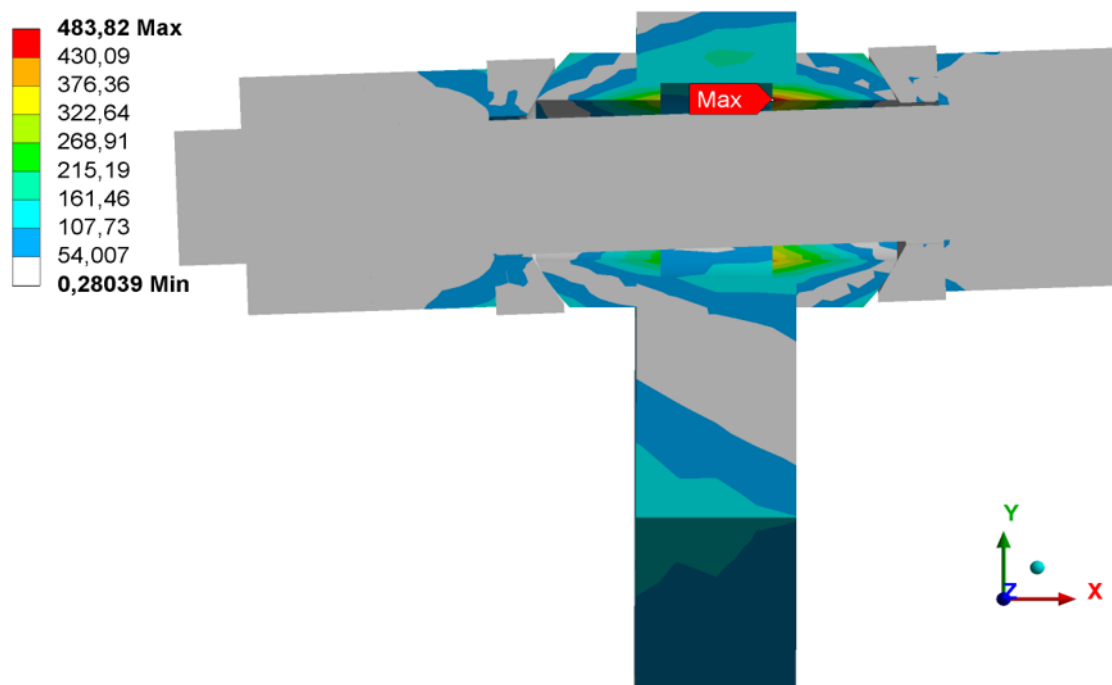


Рисунок 26 – Максимальные напряжения в нелинейной постановке

Максимальные напряжения находятся в неподвижных шайбах. Напряжения по Мизесу меньше предела прочности материалов из которого сделаны шайбы, т.к. максимальные напряжения в шайбах равны 483 МПа, а предел прочности материала «40Х13» равен 980 МПа.

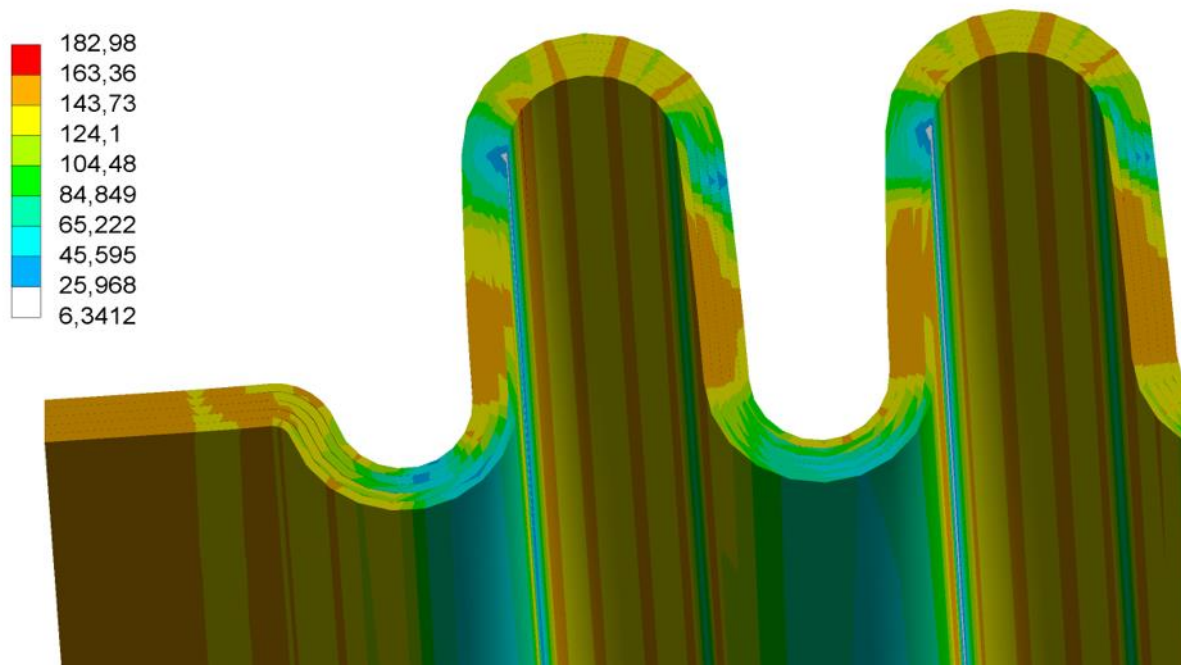


Рисунок 27 – Напряжения в нелинейной постановке в сильфонах

Максимальные напряжения по Мизесу в складках сильфона меньше предела прочности материалов из которого сделан сильфон компенсатора, т.к. максимальные напряжения в сильфоне равны 163 МПа, а предел прочности материала «08Х18Н10» равен 383 Мпа.

Из этого результата делается вывод, что хотя в сильфонном компенсаторе и возникают пластические деформации от нагрузки, используя нелинейный расчёт, делается вывод, что сильфонный компенсатор способен выдержать нагрузку, данную в постановке задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной дипломной работе проведен термомеханический расчет сильфонного компенсатора методом конечных элементов. Расчет выполнен в двух постановках: теплопроводной и термоупругой, включающей как линейную, так и нелинейную модели. Целью работы является оценка напряженно-деформируемого состояния сильфонного компенсатора и его способности выдерживать заданную нагрузку.

В результате проведенного расчета получены следующие основные выводы:

а) В теплопроводной задаче рассмотрено влияние температурных изменений на компенсатор и его деформации под действием тепловых нагрузок. Расчет показал, что компенсатор способен эффективно нивелировать тепловое расширение и сохранять свою структурную целостность в условиях заданной температурной нагрузки;

б) В задаче термоупругости рассмотрены две постановки: линейная, которая позволила получить первоначальные оценки напряжений и деформаций в компенсаторе, а также нелинейная, показавшая, что компенсатор способен выдержать заданную нагрузку без необратимых деформаций или разрушений. Причём при использовании второй постановки, учитывающей нелинейные свойства материала и геометрии, результаты получаются более точными и реалистичными;

в) На основе оценки напряженно-деформируемого состояния сильфонного компенсатора в задаче статики сделан вывод о его способности эффективно работать при заданных условиях эксплуатации. Расчеты позволили оценить предельные значения напряжений и деформаций в компенсаторе и убедиться, что они остаются в пределах допустимых значений для выбранного материала.

Проведенный термомеханический расчет сильфонного компенсатора позволил определить его способность выдерживать заданные нагрузки. Полученные результаты подтверждают, что компенсатор является надежным

и эффективным элементом системы, способным компенсировать температурные деформации и сохранять свою функциональность в условиях эксплуатации.

Однако, следует отметить, что проведенный расчет основывается на предположении и идеализации условий, то есть для получения более точных результатов рекомендуется провести дополнительные эксперименты с использованием реальных нагрузок. Это позволит более точно оценить долговечность сильфонного компенсатора и дать рекомендации для его оптимального использования в реальных системах.

Таким образом, результаты данной работы представляют собой важный вклад в изучение термомеханического поведения сильфонных компенсаторов и могут быть использованы в дальнейших исследованиях и разработках в области компенсационных устройств и систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бруйка В. А. Инженерный анализ в ANSYS Workbench часть 1. Самарский государственный технический университет. Самара, 2010. – 213 с.
2. Даутов Р.З., Карчевский М. М. Введение в теорию метода конечных элементов. Казанский государственный университет имени В.И. Ульянова-Ленина. Казань, 2004. – 242 с.
3. Келлер И. Э., Д. С. Петухов. Критерии прочности и пластичности. Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета. Пермь, 2020. – 157 с.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Издательство «Наукова думка». Киев, 1970. – 308 с.
5. Лукьянова А. Н. Моделирование контактного взаимодействия деталей. Самарский государственный технический университет. Самара, 2012. – 88 с.
6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. В. И. Агошкова, В. А. Василенко, В. В. Шайдурова; под ред. Г. И. Марчука. Издательство «МИР». Москва, 1977. – 351 с.
7. Тимошенко С. П., Дж. Гудьер. Теория упругости. Издательство «Наука». Москва, 1979. – 560 с.
8. Ткаченко Л. А., Репина А. В. Теория теплообмена. Издательство Казанского университета. Казань, 2017. – 151 с.
9. Фокин В.Г. Метод конечных элементов в механике деформируемого твердого тела. Самарский технологический институт. Самара, 2010. – 22 с.
10. Глебович С. А. Конструкция сильфонных компенсаторов // Известия тульского государственного университета. Технические науки. Выпуск 9, часть 1. Издательство «ТулГУ». Тула, 2017. – 53-57 с.
11. ГОСТ 34347-2017. Сосуды и аппараты стальные сварные. Общие технические условия. Дата введения: 30-11-2017. Москва: Издательство стандартов, 2017.

12. ГОСТ Р 57700.10-2018 Численное моделирование физических процессов. Определение напряженно-деформированного состояния. Верификация и валидация численных моделей сложных элементов конструкции в упругой области. Дата введения: 06-02-2018. Москва: Стандартинформ, 2018

13. Напряжения фон Мизеса и основные напряжения: сравнительный анализ и исчерпывающие факты. [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.lambdageeks.com/von-mises-stress-vs-principal-stress/>.

(дата обращения: 23.03.2023)

14. Распознавание и разрешение сингулярностей при моделировании методом конечных элементов. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.comsol.ru/blogs/how-identify-resolve-singularities-model-meshing>.

(дата обращения: 27.02.2023)

15. Сингулярность при решении МКЭ-задач. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ansys.soften.com.ua/about-ansys/blog/625-fea-stress-singularities.html>. (дата обращения: 05.03.2023)