

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико – механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А.М. Кривцов
« _ » _____ 2024 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО
РЕДУКТОРА**

по направлению подготовки
01.04.03 «Механика и математическое моделирование»
профиль
01.04.03_03 «Механика и цифровое производство»

Выполнила

студентка гр. 5040103/20301

И.Г. Прохоренкова

Руководитель

Доцент ВШТМиМФ, к.ф.-м.н.

О.С. Лобода

Консультанты

Руководитель НИЦ, ЦНИИ РТК

А.Ю. Тамм

Ведущий инженер, АО "ЦКБ МТ "Рубин"

А.И. Орлов

Санкт-Петербург – 2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Прохоренковой Ирине Георгиевне, гр. 5040103/20301

1. Тема работы: Конечно-элементное моделирование волнового редуктора.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 30.05.2024.
3. Исходные данные по работе: справочная литература, актуальные публикации по теме исследования, модель волнового редуктора в формате «SLDPRT».
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
Исследование методов моделирования зубьев;
Валидация модели гибкого колеса;
Разработка методики моделирования волнового редуктора;
Моделирование гибкого колеса в составе редуктора.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрены.
6. Консультанты по работе: Тамм А.Ю. – руководитель НИЦ ЦНИИ РТК; Орлов А.И. – ведущий инженер АО «ЦКБ МТ «Рубин»
7. Дата выдачи задания 26.02.2024

Руководитель ВКР _____ Лобода О.С.

Задание принял к исполнению 26.02.2024

Студент _____ Прохоренкова И.Г.

РЕФЕРАТ

На 60 с., 50 рисунков, 9 таблиц.

ВОЛНОВОЙ РЕДУКТОР, МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ЗУБЬЯ ВОЛНОВОГО РЕДУКТОРА, МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБКОГО КОЛЕСА ВОЛНОВОГО РЕДУКТОРА, МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ, ANSYS.

В данной работе проведено исследование методов моделирования зубьев, проведена валидация модели гибкого колеса. Разработана методика моделирования волнового редуктора, для подтверждения которой проведено моделирование гибкого колеса в составе редуктора.

Основным преимуществом разработанной методики является возможность сокращения времени выполнения полноразмерного расчета механизма, частью которого является волновой редуктор.

Новая методика заключается в отказе от рассмотрения гибкого колеса как твёрдого тела и переход к оболочечной модели в трехмерной постановке для моделирования зубчатого зацепления и цилиндрической части гибкого элемента.

Такой подход позволяет значительно сократить время расчетов за счет существенного уменьшения количества степеней свободы в моделях по сравнению с использованием твердотельных элементов. При этом достигается аналогичная точность результатов благодаря изменению количества узлов интегрирования по толщине оболочечного элемента и применению элементов второго порядка. Помимо уменьшения временных затрат на расчеты, новая методика также снижает трудозатраты на подготовку модели, поскольку не требуется упрощение сложной геометрии зацепления для последующего заполнения объемов твердотельными элементами.

THE ABSTRACT

60 pages, 50 pictures, 9 tables

WAVE GEARBOX, FINITE ELEMENT METHOD, MODELLING OF WAVE GEARBOX TEETH, MODELLING OF WAVE GEARBOX FLEXIBLE WHEEL, MODELLING TECHNIQUE, ANSYS.

In this paper, a study of tooth modelling methods has been carried out and a flexible wheel model has been validated. The method of wave gearbox modelling has been developed, for the validation of which the flexible wheel as a part of the gearbox has been modelled.

The main advantage of the developed methodology is the possibility to reduce the time of full-size calculation of the mechanism, part of which is the wave gearbox.

The new technique consists in refusing to consider the flexible wheel as a solid body and switching to a shell model in a three-dimensional formulation for modelling the gear mesh and the cylindrical part of the flexible element.

This approach allows to reduce considerably the calculation time due to the substantial reduction of the number of degrees of freedom in the models in comparison with the use of solid elements. At the same time, similar accuracy of results is achieved due to the change of the number of integration nodes along the thickness of the shell element and the use of second-order elements. In addition to the reduction in computational time, the new methodology also reduces the labour required for model preparation, as there is no need to simplify the complex meshing geometry to fill the volumes with solid elements.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Глава 1. СТРОЕНИЕ И ПРИНЦИП РАБОТЫ ВОЛНОВОГО РЕДУКТОРА И ШАРНИРА МАНИПУЛЯТОРА	8
1.1 Строение волновых передач	8
1.2 Материалы и способы изготовления частей волнового редуктора	10
1.3 Модель волнового редуктора. Обзор модели аналога.	11
1.4 Описание испытательного стенда и шарнира манипулятора.....	12
1.5 Обзор литературы	13
1.6 Проблематика обнаружения неисправности редуктора.....	16
Глава 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО РЕДУКТОРА.....	18
2.1 Постановка задачи.....	18
2.1 Актуальность и новизна	18
2.2 Описание разработанных моделей	19
2.2.1 Зубья	19
2.2.2 Определение сеточной сходимости модели зуба	23
2.2.3 Гибкое колесо	24
2.2.4 Гибкое колесо в составе редуктора	25
2.3 Описание разработанной методики	30
Глава 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАЗРАБОТКИ МОДЕЛЕЙ.....	31
3.1 Зубья гибкого колеса.....	31
3.1.1 Определение сеточной сходимости модели зуба	31
3.1.2 Валидация результатов КЭ моделирования для зубьев	41
3.2 Гибкое колесо	47
3.2.1 Определение сеточной сходимости модели гибкого колеса	47
3.2.2 Валидация модели гибкого колеса	48
3.3 Моделирование гибкого колеса в составе редуктора.....	53
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	56
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	58

ВВЕДЕНИЕ

При внедрении автоматизации в производственные процессы, контрольные и мониторинговые обязанности, передаются на автоматические устройства и механизмы. При этом важно обеспечить, чтобы функциональность системы оставалась на том же уровне, что и до внедрения автоматизации. Кроме того, необходимо учитывать скорость выполнения задач и экономическую эффективность процесса. К примеру, в случае автоматизации цепочки хранения опасных веществ, важно обеспечить безопасность и эффективность процесса. Сортировка радиоактивных отходов является одним из таких процессов, его невозможно исключить из различных сфер деятельности, связанных с использованием радионуклидов. Поэтому важно обеспечить сортировку радиоактивных отходов на уровне, не уступающем человеческому труду. Для этого необходимы высокотехнологичные системы зрения, интеллектуальные дозиметрические системы и точные приводы, способные корректно обрабатывать объекты без их повреждения или перемешивания с другими объектами, что важно для предотвращения распространения радиоактивного загрязнения.

Стремление к точности при проектировании приводов требует использования высокоточных зубчатых колес, которые часто закупаются за рубежом и не всегда доступны. Кроме того, финансовый аспект при производстве конкретного привода часто зависит от практичности интеграции компонентов нестандартных размеров.

Поэтому исследование специализированных высокоточных механических систем передач, в частности редукторов, которые предназначены для работы с радиоактивными отходами (РАО), остается актуальным и вызывает интерес.

В данной работе рассматривается волновой редуктор – важнейший компонент различных манипуляционных систем. Он вносит существенную роль в манипуляторы, благодаря сочетанию таких характеристик, как небольшая масса, способность передавать крутящий момент и точность позиционирования.

Отсутствие волновых редукторов серьезно ограничило бы функциональность манипуляционных систем в различных областях применения.

Волновой редуктор играет важную роль в различных отраслях промышленности, являясь важнейшим компонентом системы передачи. Его применение охватывает широкий спектр областей, включая робототехнику (для систем приводов и автоматизации), машиностроение (в погрузочно-разгрузочных машинах, механизмах и узлах станков), космические аппараты (для солнечных батарей), аэрокосмические, наземные и орбитальные телескопы (для систем ориентации), самолеты (для систем управления механизацией крыла) и высокоточное медицинское оборудование.

Волновой редуктор состоит из гибкого и жесткого зубчатых колес, которые входят в зацепление за счет циклического возбуждения волн деформации в гибком элементе для преобразования и передачи движения.

Одним из ключевых преимуществ волнового редуктора является его способность достигать значительного передаточного отношения при относительно небольшом количестве деталей, обычно составляющем от 80 до 360 компонентов. Кроме того, он отличается высоким КПД (от 0,8 до 0,9), способностью выдерживать высокие нагрузки, низким уровнем шума, плавностью работы, благодаря равномерному распределению нагрузки на все зацепленные зубья, отличными демпфирующими свойствами и возможностью передавать движение в герметичном пространстве, не требуя уплотнителей.

Несмотря на многочисленные преимущества, волновые редуктора имеют и определенные недостатки. К ним относятся относительно малая жесткость на начальных этапах нагружения (хотя переменная жесткость может считаться преимуществом в некоторых областях применения), малая долговечность гибкого колеса по сравнению с передачами с жесткими колесами, а также риск проскальзывания зубьев при использовании роликовых генераторов в условиях высоких нагрузок.

Волновые передачи со стальными колесами используются в основном в диапазоне передаточных чисел от 80 до 360. Превышение верхнего предела этого передаточного отношения может привести к проворачиванию генератора или проскоку зубьев ($u > 360$). С другой стороны, нижний предел передаточного отношения ограничивается начальными деформациями и напряжениями, испытываемыми гибким колесом ($u < 80$). Чрезмерная деформация за этими пределами может привести к образованию трещин и окончательному разрушению гибкого колеса.

На сегодняшний день решение проблем, связанных с долговечностью зубьев под действием внешних нагрузок, может осуществляться при помощи усовершенствованных методик расчета, а также применением новых материалов.

Для определения напряжённо-деформированного состояния и распределения нагрузки между зубьями ввиду сложности геометрии и условий работы деталей редуктора целесообразно использовать программные пакеты численного моделирования, реализующие метод конечных элементов, одним из таких комплексов является ANSYS.

Целью данной работы является разработка методики моделирования волнового редуктора с использованием метода конечных элементов. Методика должна обеспечивать возможность проведения комплексного виртуального испытания полноразмерной модели механизма. Необходимо проведение расчетов и сравнительной оценке различных методов моделирования. Демонстрация преимуществ и возможности дальнейшего использования разработанной методики.

Глава 1. СТРОЕНИЕ И ПРИНЦИП РАБОТЫ ВОЛНОВОГО РЕДУКТОРА И ШАРНИРА МАНИПУЛЯТОРА

1.1 Структура волновых передач

Волновой редуктор состоит из трех основных частей: генератора волн, гибкого элемента и жесткого колеса и представлен на рис.1.1.

Генератор волн – элемент, который создает волну деформации в гибком элементе волновой передачи.

Гибкий элемент – элемент в виде цилиндрической трубы или оболочки отрицательной кривизны, имеющий зубчатый венец на наружной поверхности.

Жесткое колесо – кольцевой элемент, имеющий на внутренней поверхности зубчатый венец, причем зубья жесткого колеса и гибкого элемента входят в зацепление под действием генератора волн [2].

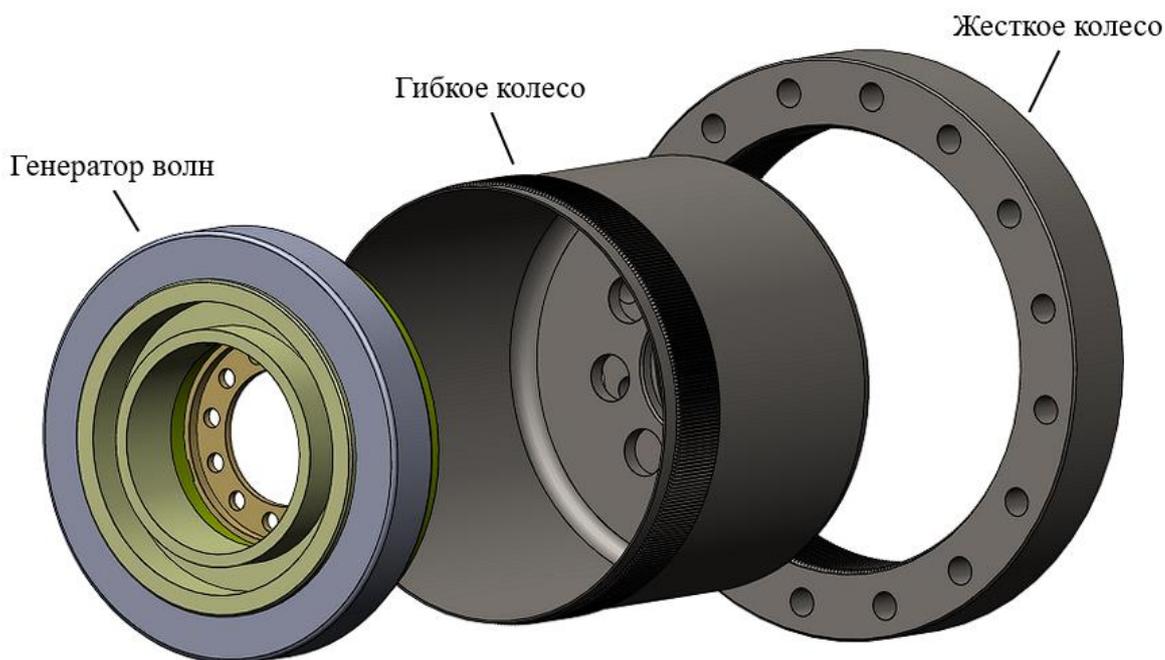


Рис.1.1. Структура волновой передачи.

Генератор волн может быть представлен в различной конфигурации: планетарный, роликовый, дисковый и кулачковый [2]. Самым востребованным является последний тип, он представлен на рис.1.2, в дальнейших рассуждениях удем иметь в виду именно его. Он представляет из себя гибкий шарикоподшипник (1), насаженный на кулачок (2) специального профиля.

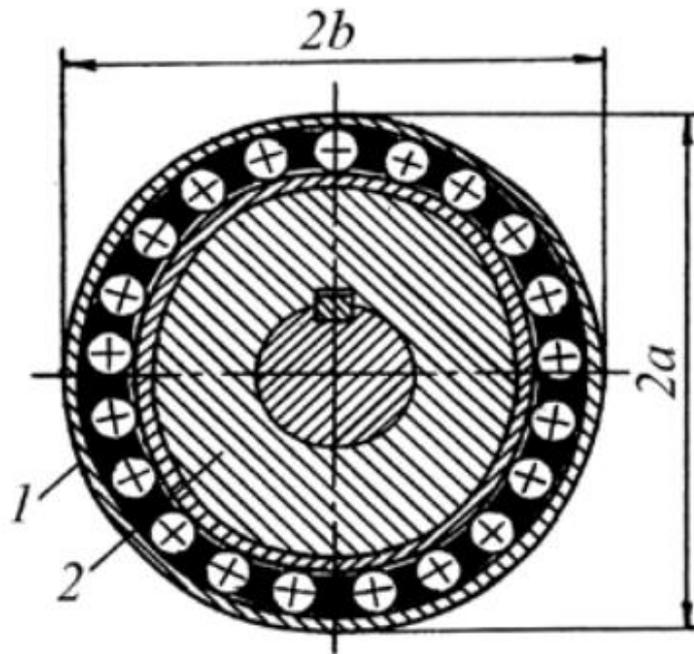


Рис.1.2. Кулачковый генератор волн: 1 - гибкий шарикоподшипник, 2 – кулачок [2].

Перейдём к рассмотрению следующей части: гибкого элемента. Он определяет габариты, кинематику, нагрузочную способность, технологичность и долговечность самого волнового редуктора. На практике чаще всего встречаются три формы: «кастрюля», «шляпа» и «цилиндр», представлены на рис.1.3.

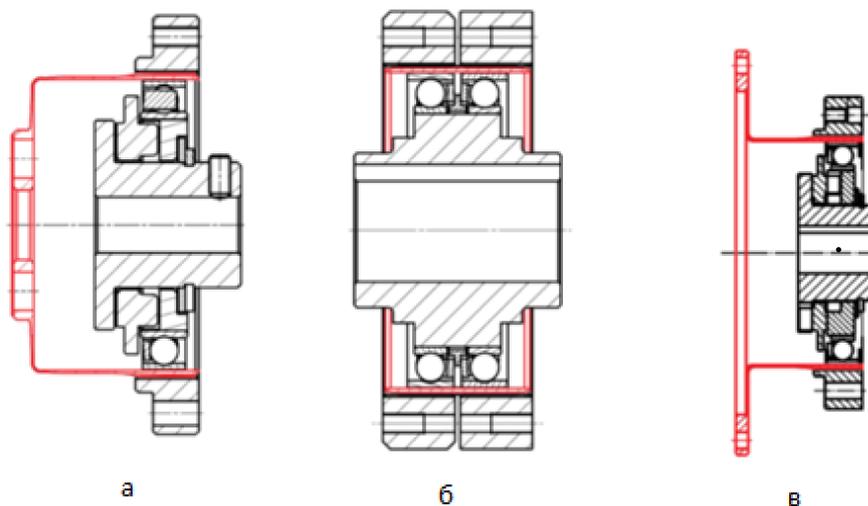


Рис.1.3. Типы гибкого элемента: а - «кастрюля», б - «цилиндр», в - «шляпа» [2].

1.2 Материалы и способы изготовления частей волнового редуктора

Выбор материалов для волновых зубчатых колес – ответственный процесс, на который влияют деформации и напряжения, испытываемые в механизме. Волновые зубчатые колеса обычно изготавливаются из сталей, разделенных на три группы в зависимости от допустимых касательных напряжений $[t]$. К первой группе относятся стали с повышенной вязкостью и меньшей чувствительностью к концентрации напряжений ($[t] = 80$ МПа), такие как 38ХМЮА, 40ХН, 12ХЗН4А, 18Х2Н4ВА, 30ХГСА, 30Х2ГН2, 40ХНМА и другие. Ко второй группе относятся стали марок 12ХЗН4А, 18Х2Н4ВА, 30ХГСА, 30Х2ГН2, 38ХМЮА, 40ХН, 40ХНМА, с допустимыми касательными напряжениями $[t] = 70$ МПа. К третьей группе относятся стали марок 50, 60 и другие, с допустимыми касательными напряжениями $[t] = 60$ МПа.

Для гибких колес подходят стали первой группы. Например, при производстве сварных гибких колес обычно используется сталь 12ХЗН4А с последующей термообработкой для снятия остаточных напряжений. Термическая обработка стальных заготовок гибких колес включает закалку с высоким отпуском (улучшением) до твердости 32...36 HRC. Дополнительно рекомендуется электрохимическая полировка с последующим азотированием.

Высоконагруженные гибкие колеса часто изготавливают из вязких сталей марок 30ХГСА, 40ХНМА, 18Х2Н4ВА с термообработкой для улучшения до твердости 300...320 НВ. Рекомендуется дробеструйный наклеп для повышения износостойкости в 1,1...1,15 раза. Азотирование зубчатого венца может дополнительно увеличить выносливость в 1,3...1,4 раза.

Жесткие колеса подвержены меньшим нагрузкам по сравнению с гибкими и обычно изготавливаются из сталей второй и третьей групп с твердостью 280...320 НВ после термической обработки. Промежуточные кольца между гибким колесом и волнообразователем часто изготавливаются из пружинной стали марок 55С2, 60С2, 50ХГ и 35ХГС с последующей термообработкой (55...60 HRC).

Формирование оболочки и зубьев – сложный процесс в производстве гибких колес. Зубья гибких и жестких колес в целом повторяют зубья обычных зубчатых колес и часто имеют эвольвентный профиль для совместимости со стандартным зуборезным инструментом.

Нарезание или накатывание зубьев может применяться для изготовления зубьев гибких колес независимо от используемой технологии изготовления корпуса. Для нарезания зубьев гибких колес обычно используются червячные фрезы. Холодная прокатка роликами или выдавливание оболочки в штампе также применяется для изготовления зубьев мелко модульных волновых колес (с шириной венца до 50 мм), повышая их долговечность за счет упрочнения металла при холодной деформации и минимизируя срезание волокон на поверхности оболочки. При этом достигается точность зуба 7...9 степени, что исключает необходимость последующей механической доводки.

1.3 Модель волнового редуктора. Обзор модели аналога.

В данной работе исследуется аналог модели волнового редуктора CSG-80-160, представленный на рис. 1.4. Имеет следующие характеристики: максимальный повторяемый момент – 484 Нм, средний момент – 281 Нм, номинальный момент - 178 Нм, пиковый мгновенный момент – 892 Нм, масса – 0,89 кг [13]. Количество зубьев гибкого колеса волнового редуктора 342, количество зубьев жесткого колеса 340.

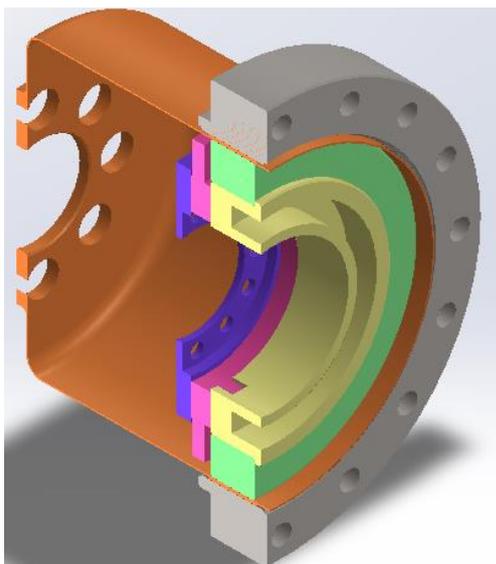


Рис.1.4. Аналог CSG-80-160.

1.4 Описание испытательного стенда и шарнира манипулятора

На этапе экспериментального тестирования основной целью является получение количественных данных о характеристиках шарнира манипулятора и проверка их соответствия условиям, изложенным в технических требованиях. Расположение шарнира соответствует схематическому изображению, показанному на рис. 1.5.

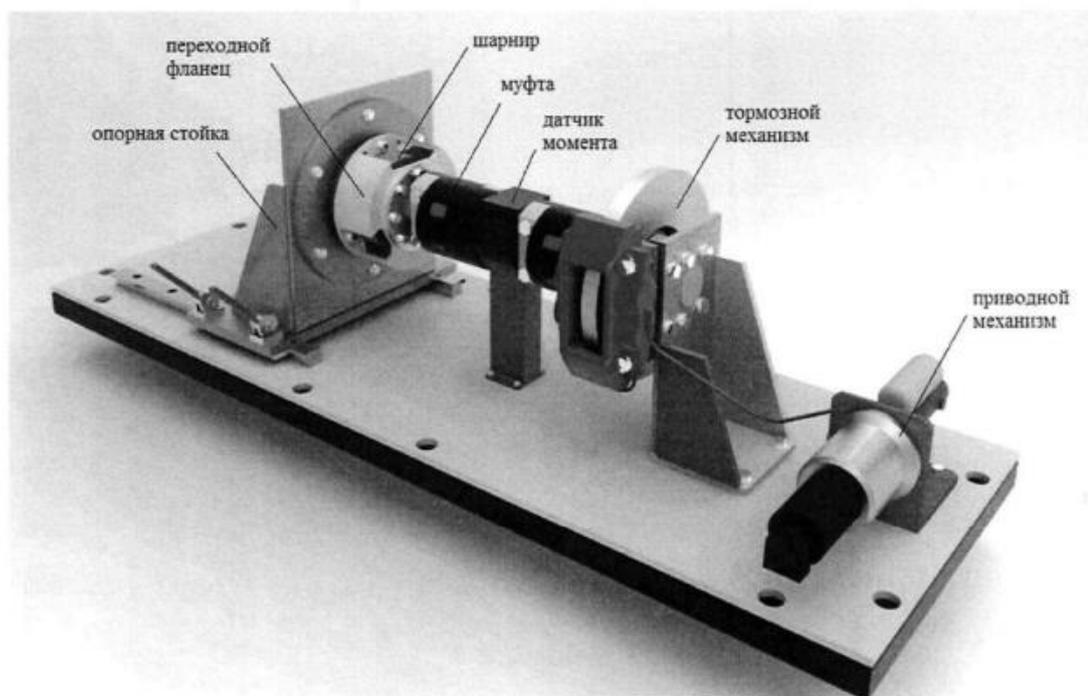


Рис.1.5. Шарнир на испытательном стенде.

Являясь неотъемлемым компонентом системы манипулятора, шарнир играет ключевую роль в обеспечении мобильности и адаптивности всей конструкции. Его выбор и качество изготовления являются первостепенными факторами, которые влияют на эксплуатационную эффективность и производительность манипуляторов. Оптимальные решения относительно типа шарнира и тщательный процесс изготовления играют важную роль в обеспечении прочности и долговечности механизма, особенно в условиях жесткой эксплуатации и значительных механических нагрузок.

Шарнир манипулятора, как показано на рис. 1.6, включает в себя волновой редуктор, выделенный голубым цветом, который и является основным объектом исследования.

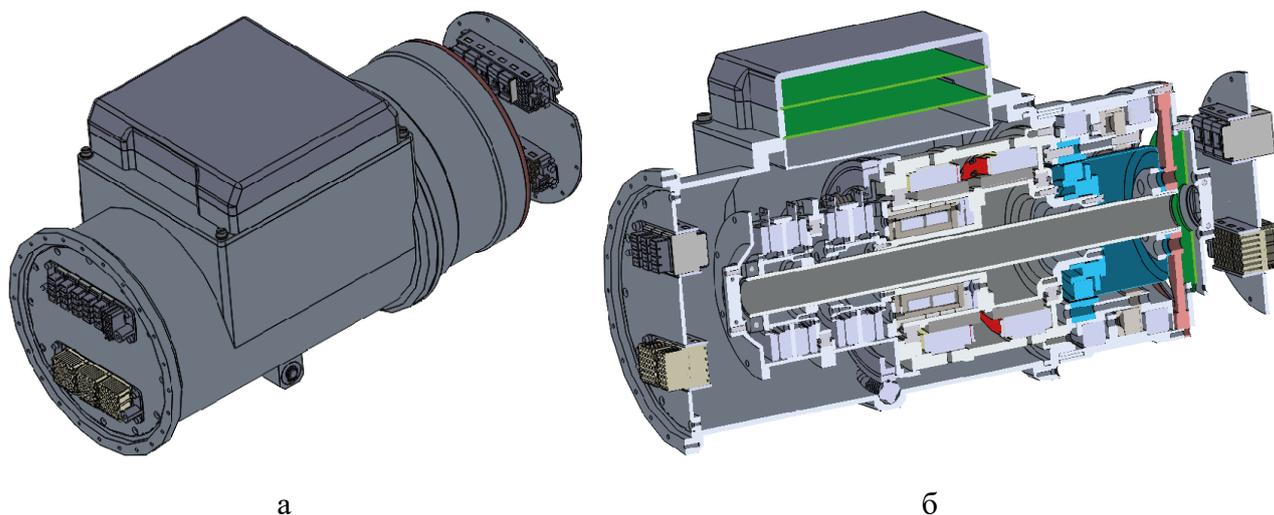


Рис.1.6. Шарнир манипулятора: а – общий вид; б – вид в разрезе.

1.5 Обзор литературы

Основной подход, используемый для разработки и уточнения параметров редуктора, основан на методе конечных элементов [25, 26]. Множество научных работ посвящено изучению изменений в кинематике зубчатых передач в результате оптимизации геометрических параметров зубчатого зацепления или геометрии ключевого компонента волновой коробки передач. Например, в одном из исследований [18] выясняется влияние податливости гибкого элемента на точность зубчатого зацепления. В различных исследовательских работах изучаются изменения геометрии зубчатого зацепления; например, в [24]

использование асимметричной формы зубьев гибкого элемента сравнивается со стандартной симметричной формой зубьев. Кроме того, в работе [8] авторы представили новую геометрию зубьев, основанную на кривых Безье, после чего провели оптимизацию с помощью двумерного анализа прочности и исследовали ее влияние на распределение напряжений и деформаций в зацеплении. Кроме того, в [9] новый профиль зуба гибкого элемента подтверждается с помощью конечно-элементного анализа.

В отдельном исследовании ученые тщательно изучили четыре различные формы генератора волн, чтобы определить наиболее эффективную форму для снижения максимальных напряжений, испытываемых гибким колесом во время работы [10]. Для оценки усталостных характеристик гибкого колеса на основе его пластичности исследователи разработали двухмерные и трехмерные конечно-элементные модели как гибкого, так и жесткого колес [15].

Помимо изучения того, как изменения кинематических свойств гибкого колеса влияют на характеристики всего механизма, одна из областей исследований посвящена изучению динамики контакта между зубьями и связанными с ними характеристиками. Несколько исследований посвящены трибологическим аспектам зацепления зубчатых колес с гибкими и жесткими компонентами. Например, в одной работе [21] исследователи изучают изменения характеристик масляной пленки в зависимости от скорости вращения вала, а в другой работе [7] оценивают износ поверхности зубьев с помощью микрометаллографического анализа. Авторы работ [20, 11] анализируют динамику контакта между гибкими и жесткими компонентами с помощью таких программных инструментов, как ANSYS и ADAMS, оценивают жесткость при кручении и проводят сравнительные исследования с экспериментальными данными. В работе [12] специально рассматривается динамика контакта зуба с зубом с помощью твердотельного конечно-элементного моделирования с последующей проверкой полученных результатов путем сравнения их с аналитическими решениями контактной задачи Герца.

В последние годы значительное внимание в исследованиях в области волновых редукторов уделяется использованию метода конечных элементов для оптимизации параметров редуктора. Например, в одном из исследований представлена модель для анализа наиболее напряженных участков гибкого колеса с помощью численного моделирования [23]. Точность модели проверена путем сравнения результатов как с аналитическими прогнозами, так и с реальными данными. Исследователи также использовали численное моделирование в двумерной и трехмерной постановках для разработки геометрии волновых редукторов: профили зубьев и оболочки гибкого колеса, для оценки контактных давлений и прогнозирования характера износа [27, 28].

Помимо геометрических улучшений, метод конечных-элементов сыграл важную роль в разработке инновационных конструкций волновых редукторов. В одном из исследований предложен новый механизм с двухкомпонентной конструкцией жесткого колеса, состоящего из внешнего кольца и гибкой внутренней вставки с внутренним зубчатым венцом [29]. Такая конфигурация позволяет упруго деформировать оба зубчатых венца во время работы, тем самым увеличивая площадь контакта в системе передачи. Как численное моделирование, так и практические испытания показали, что данная модификация конструкции повышает крутящий момент коробки передач за счет минимизации люфта шестерен.

Кроме того, изучение этих проблем выходит за рамки статических расчетов, направленных на оценку прочностных и усталостных характеристик. Углубление в динамическое моделирование процессов позволяет проводить комплексные исследования механических систем. Такие анализы позволяют точно оценить характеристики машин на этапе проектирования, что ведет к экономии материалов и возможности предвидеть потенциальные дефекты в изготовленных механизмах. Кроме того, динамическое моделирование может помочь в прогнозировании шума и акустическом анализе [3].

Проведение полномасштабного интегрированного анализа методом конечных элементов представляет собой еще одно направление для подготовки

синтетических данных. Эти данные можно использовать для обучения диагностических систем и проведения прогностического анализа сложных систем. Применяя целостный подход, объединяющий динамическое моделирование с нейросетями, инженеры могут улучшить понимание сложных механических систем и оптимизировать их работу для различных сценариев эксплуатации.

1.6 Проблематика обнаружения неисправности редуктора

Обнаружение неисправностей в редукторе может быть трудным по нескольким причинам:

1. Некоторые неисправности могут быть скрытыми и не проявляться явно при поверхностном осмотре или проверке. Например, микроскопические трещины или износ внутренних деталей могут быть трудно обнаружимыми без специализированного оборудования.

2. Редукторы и механизмы, в которые они входят, имеют сложную структуру с большим количеством деталей, что усложняет процесс диагностики. Для выявления неисправностей может потребоваться разборка и осмотр каждой детали.

3. Признаки неисправности редуктора и его составных частей могут быть схожи с симптомами других проблем в механизме, что затрудняет точное определение источника проблемы.

4. Для проведения точной диагностики редуктора часто требуется специализированное оборудование, такое как динамометры, эндоскопы и другие инструменты.

5. Для успешной диагностики и ремонта редуктора требуется большой опыт и знания. Неспособность правильно интерпретировать симптомы и признаки неисправности может привести к неправильному ремонту или увеличению времени и затрат на поиск и устранение проблемы.

Редукторы являются важными элементами многих промышленных и транспортных систем, обеспечивая передачу мощности и движение механизмов.

Однако со временем они могут подвергаться различным неисправностям, которые снижают их эффективность и увеличивают риск аварий.

Обнаружение неисправностей редукторов, возможность заранее предугадать проблемы и «опасные точки» всей конструкции является важной задачей, позволяющей своевременно выявить и устранить проблемы, предотвращая серьёзные аварии и снижая затраты на ремонт и обслуживание оборудования.

Глава 2. РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО РЕДУКТОРА

2.1 Постановка задачи

Как было сказано ранее, целью данной работы является разработка методики моделирования волнового редуктора с использованием метода конечных элементов. Методика должна обеспечивать возможность проведения комплексного виртуального исследования полноразмерной модели механизма. Необходимо проведение расчетов и сравнительной оценки различных методов моделирования. Демонстрация преимуществ и возможности дальнейшего использования разработанной методики.

Для достижения поставленной цели работы, поставлены следующие задачи:

1. Исследование методик моделирования зубьев;
2. Валидация модели гибкого колеса;
3. Разработка методики;
4. Моделирование гибкого колеса в составе редуктора.

2.1 Актуальность и новизна

Несмотря на обширную литературу, посвященную анализу волновых редукторов с помощью метода конечных элементов (МКЭ), конкретная область, касающаяся динамического моделирования полномасштабных моделей редукторов, остается практически неизученной. В предыдущих исследованиях преимущественно использовались методы 2D-моделирования для анализа поведения зубчатых зацеплений и 3D-моделирования отдельных компонентов редуктора с применением грубого гексаэдрического или мелкого тетраэдрического разбиения на конечные элементы. Эти методы в основном направлены на оценку напряженно-деформированного состояния зубьев и гибкого элемента в условиях статического нагружения, имитируя контактные взаимодействия во время работы механизма.

Одна из основных проблем динамического моделирования волновых редукторов заключается в значительных временных затратах, необходимых для численного моделирования с использованием трехмерных твердотельных

элементов, особенно для деталей с малыми размерами. Сложность деталей волновых редукторов в сочетании с потенциальным множеством зубьев шестерен накладывает ограничения на традиционные методики моделирования из-за требований к вычислениям.

В рамках данной работы предлагается новая методика моделирования волнового редуктора, направленная на сокращение времени вычислений, которое необходимо для выполнения полноразмерного расчета при исследовании механизма. Инновационная методика призвана упростить процесс расчетов и повысить эффективность изучения динамики волновых редукторов.

2.2 Описание разработанных моделей

2.2.1 Зубья

Первой решается задача исследования методик моделирования зубьев волнового редуктора.

С целью подтверждения адекватности использования каждой методики для дальнейшего решения контактных задач зубчатого зацепления рассматривается ряд задач для зуба упрощенной геометрии, приведенной на рис.2.1.

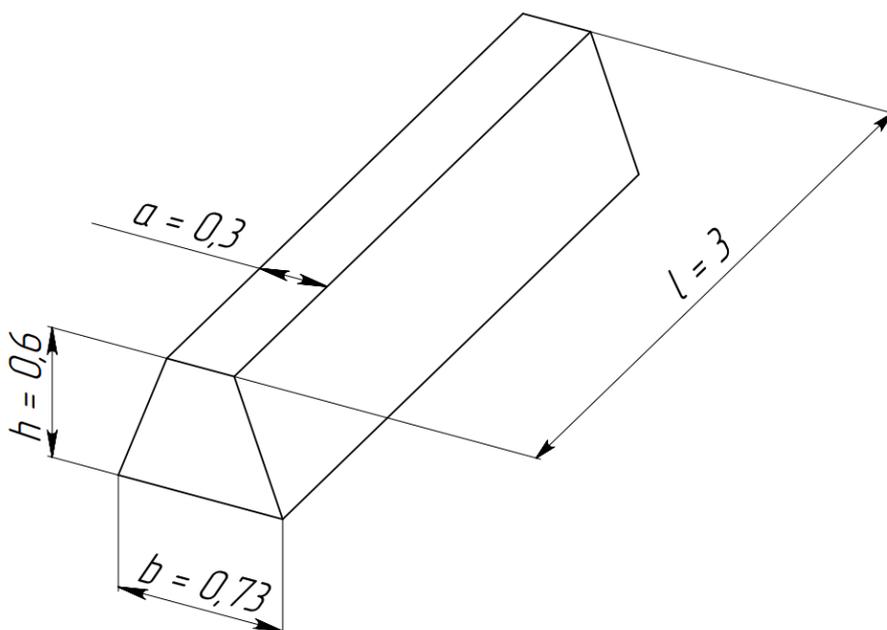


Рис.2.1. Общий вид упрощенной геометрии зуба.

Выделяется три подхода к моделированию: с помощью твердотельных, оболочечных и балочных элементов. Для каждого случая проводятся три вида нагружения, которые отражены на рисунках 2.2, 2.3, 2.4.

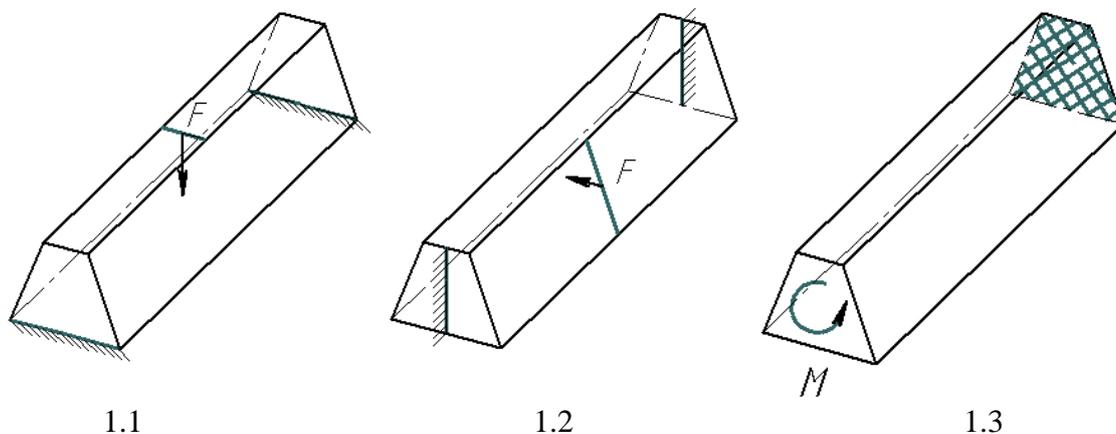


Рис.2.2. Разработанные модели с приложенными граничными условиями для твердотельного элемента.

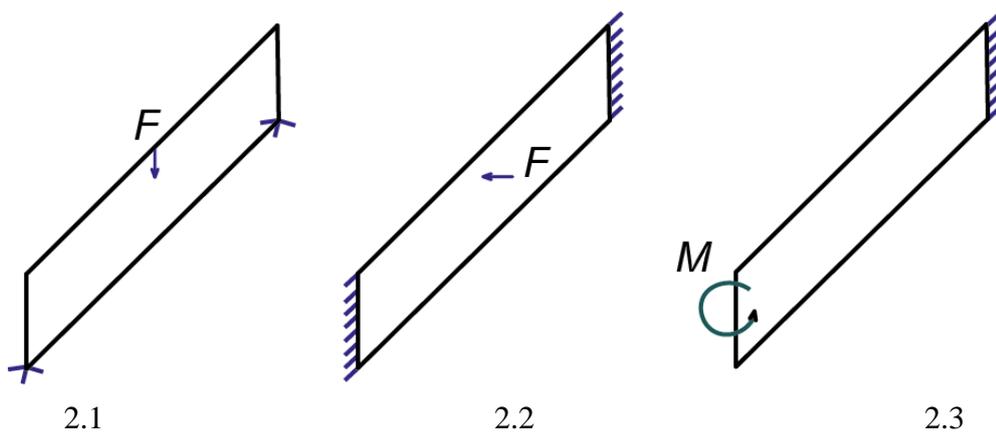


Рис.2.3. Разработанные модели с приложенными граничными условиями для оболочечной модели.

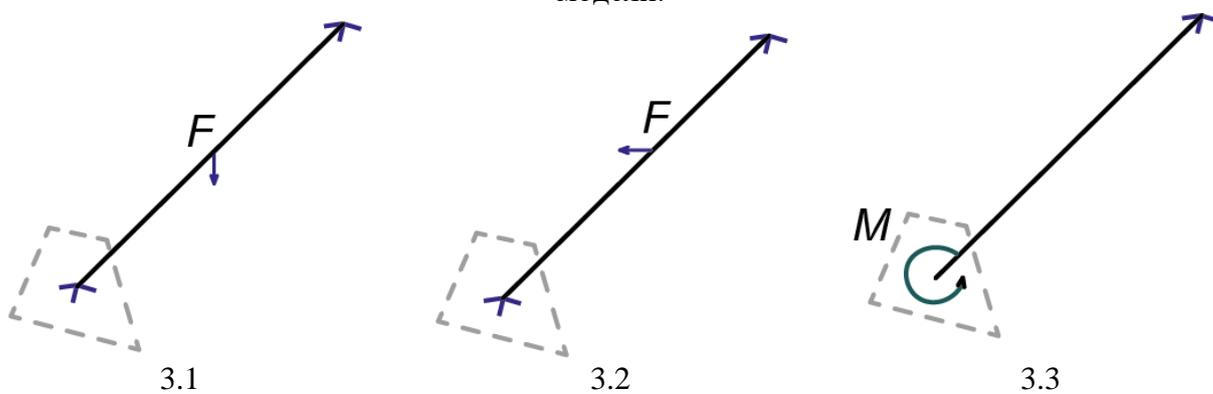


Рис.2.5. Разработанные модели с приложенными граничными условиями для балочной модели.

Таким образом проводятся три типа нагружения:

- n.1 – продольный изгиб;
- n.2 – поперечный изгиб;
- n.3 – кручение;

где $n = [1,2,3]$, $n = 1$ – твердотельный, $n = 2$ – оболочечный, $n = 3$ – балочный элемент.

Результаты решений для оболочечных элементов, а также для балочных, сравниваются с результатами для твердотельных моделей и при помощи аналитических зависимостей. Свойства материалов линейные:

- модуль Юнга: $E = 200 * 10^{11}$ Па;
- коэффициент Пуассона: $\mu = 0,3$.

При проведении исследования рассматриваются модели зубьев и гибкого колеса с различными значениями параметра ELFORM, который определяет поведение элементов в модели [22]. Выбраны следующие значения:

- для балочной поставки: $ELFORM = 1$;
- для твердотельной поставки: $ELFORM = 2$;
- для оболочечной поставки: $ELFORM = 26$.

$ELFORM = 1$ – балка Хьюза-Лиу. Формула балочного элемента Хьюза-Лиу, основана на оболочке и обладает несколькими желательными качествами [16, 17]:

1. Является инкрементально объективным (повороты жесткого тела не вызывают деформаций), что позволяет учитывать конечные деформации, которые встречаются во многих практических приложениях;

2. Прост, что обычно приводит к эффективности вычислений и надежности;

3. Совместим с гексаэдральными элементами, поскольку основан на вырожденной формулировке гексаэдрного элемента;

4. Включает конечные деформации поперечного сдвига. Дополнительные вычисления, необходимые для сохранения этого компонента деформации, по сравнению с вычислениями в предположении отсутствия деформации

поперечного сдвига, незначительны. Балочный элемент Хьюза-Лиу основан на вырождении изопараметрического 8-узлового твердого элемента – подход, заложенный Ахмадом [5].

Твердый элемент с $ELFORM = 2$ представляет собой полностью интегрированный элемент с селективным уменьшением.

$ELFORM = 26$ – полностью интегрированная оболочка с растяжением по толщине, представлена на рис.2.6 [14]:

1. На основе кинематического предположения Рейсснера-Миндлина (5 DOF в локальной системе координат дают 6 DOF в глобальной);

2. Поправка на поперечный сдвиг Батэ-Дворкина (AS) устраняет песочные часы W-моды;

3. Дополнительная функция линейной деформации по толщине.

4. Последнее важно для предотвращения "блокировки Пуассона" в изгибных режимах деформации.;

5. Для растяжения по толщине требуется трехмерная конститутивная модель;

6. Песочные часы типа 8 добавляют жесткость при деформации.

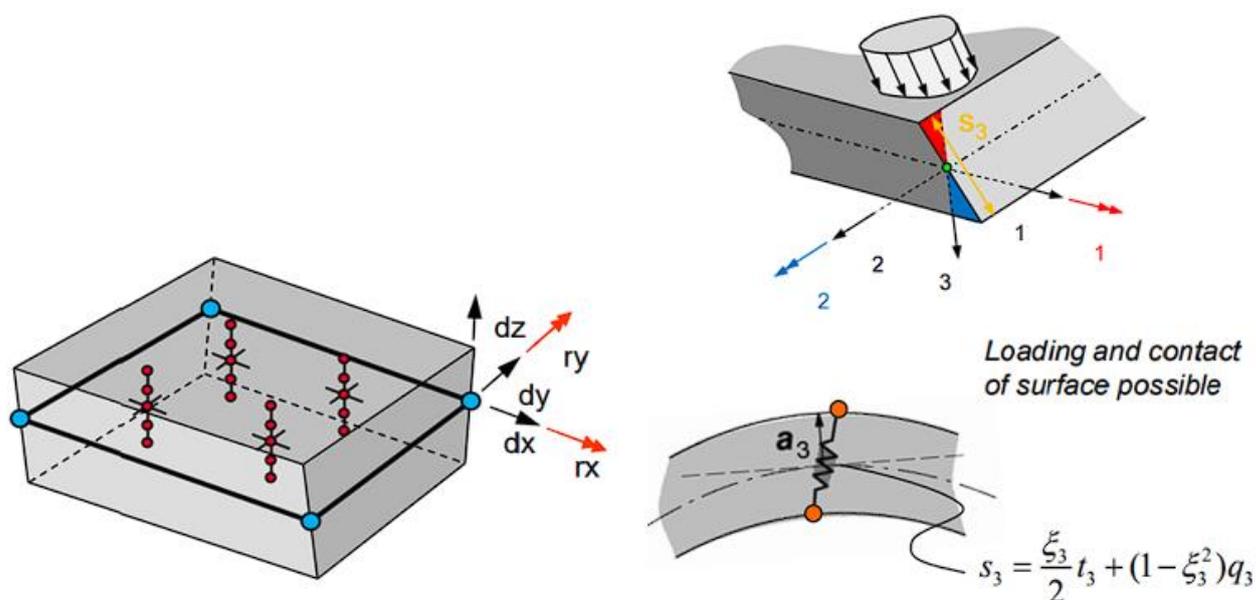


Рис.2.6. Характеристики поведения элемента $ELFORM = 26$ [14].

2.2.2 Определение сеточной сходимости модели зуба

В данном разделе рассматривается задача определения сеточной сходимости для зубьев гибкого колеса, анализируются оболочечные и твердотельные элементы. Для этого используются модели второго порядка с характерными размерами элементов от 0,03 мм до 0,6 мм. Эти модели используются для решения задачи статического изгиба зуба с наложением определенных граничных условий: на нижней грани ограничение по всем степеням свободы, а на верхней грани – распределенная сила в направлении, перпендикулярном плоскости симметрии. Общий вид моделей с этими граничными условиями показан на рисунке 2.7.

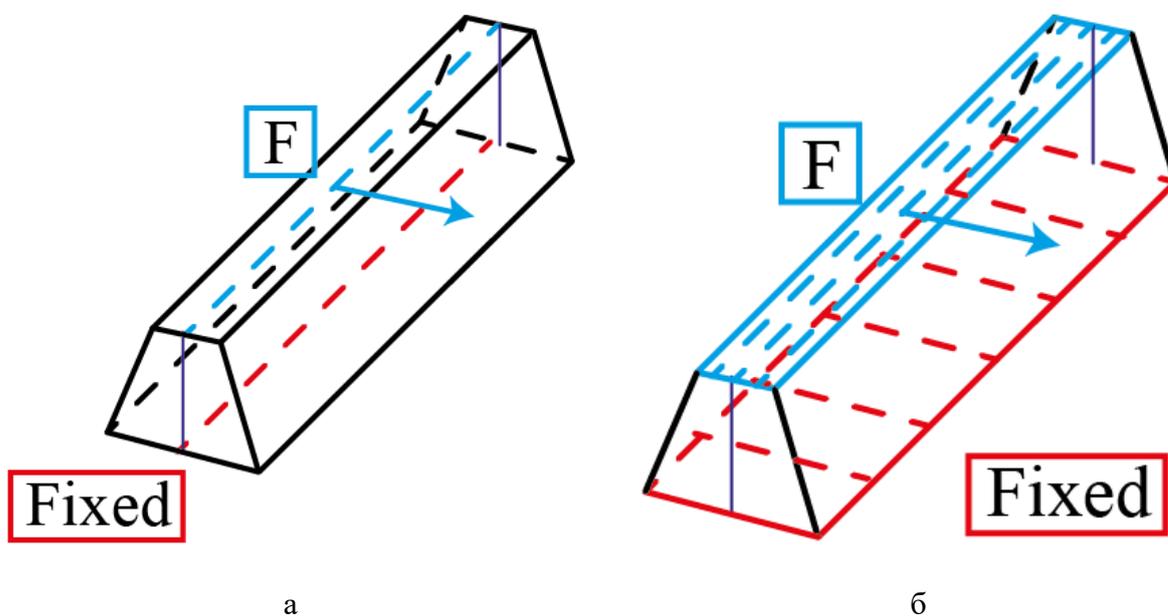


Рис.2.7. Разработанные модели с приложенными граничными условиями: а – оболочечная постановка, б – твердотельная постановка.

В процессе решения стало очевидно, что для оценки применимости методики необходимы дополнительные исследования. Для выполнения этого требования проводится серия параметрических исследований, в ходе которых изучается зависимость НДС от формы и геометрических размеров образцов. Формулировки дополнительных исследований и соответствующие им результаты подробно рассмотрены в главе 3.

2.2.3 Гибкое колесо

Общая модель гибкого колеса представлена на рис. 2.8.



Рис.2.8. Гибкое колесо в общем виде.

Для анализа и валидации модели рассматривается упрощенная модель гибкого колеса, представляющая из себя цилиндр на рис.2.9 в двух постановках: твердотельной и оболочечной. Выбранный способ упрощения модели обосновывается тем, что для валидации аналитика хорошо описана именно для цилиндрических оболочек, а само по себе гибкое колесо имеет очень схожую структуру. Характерный размер элемента 5 мм для оболочечной постановки и 2 мм для твердотельной постановки – разница обусловлена разным способом учёта толщины цилиндра. Внутренний диаметр цилиндра 100 мм, длина 77 мм, толщина 0.5 мм.

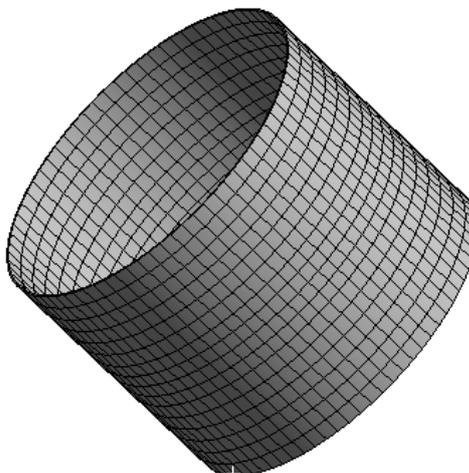


Рис.2.9. Модель гибкого колеса для расчётов.

Рассмотрено два типа нагружения: расширение (4.1) и кручение (4.2), общий вид заданных граничных условий представлен на рис. 2.10.

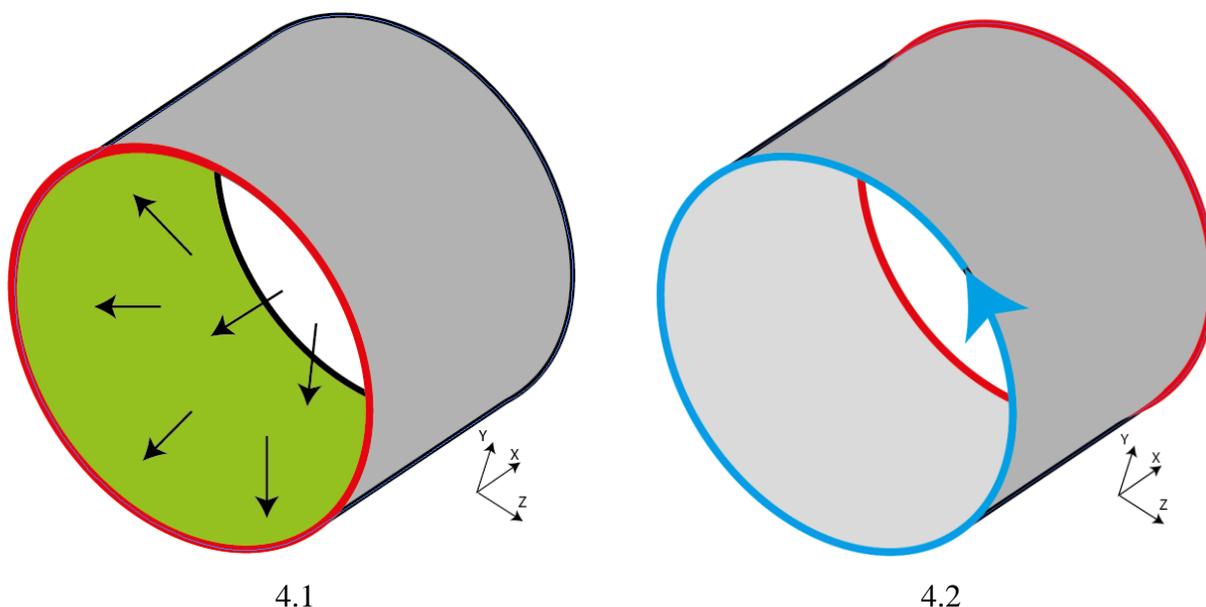


Рис. 2.10. Граничные условия для модели гибкого колеса для расчётов: 4.1 – расширение, 4.2 – кручение.

На рис. 2.10 для случая 4.1 – расширения: красным выделено ограничение движения грани в осях X, а также поворот во всех осях; зеленым, а также стрелками – давление на внутреннюю сторону цилиндра 1 МПа. Для случая 4.2 – кручения: красным выделено ограничение движения и повороты во всех осях; голубым – момент 100 Н·мм. Свойства материалов линейные:

- модуль Юнга: $E = 200 * 10^{11}$ Па;
- коэффициент Пуассона: $\mu = 0,3$.

Выбранные параметры для моделей, другими словами, значение ELFORM, для двух постановок аналогичны постановке задачи для зубьев.

2.2.4 Гибкое колесо в составе редуктора

Следующим этапом является переход от рассмотрения зуба и цилиндра гибкого колеса к моделированию гибкого колеса в составе волнового редуктора. В процессе эксплуатации волнового редуктора гибкое колесо воспринимает циклически повторяемые деформации, передаваемые от эксцентрика. В связи с этим, гибкое колесо принимает форму эллипса.

Для рассмотрения движения гибкого колеса в составе редуктора модель упрощается до изучения взаимодействия гибкого и жесткого колёс волнового редуктора, общий вид изучаемой модель представлен на рис. 2.11.

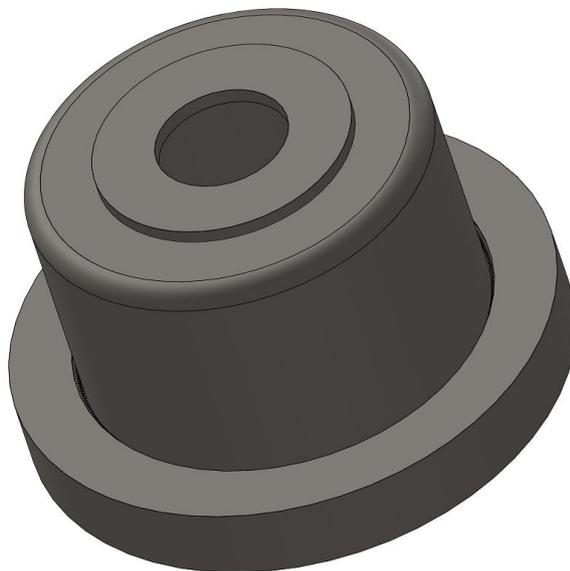


Рис. 2.11. Гибкое и жесткое колеса в общем виде.

На рисунке 2.12, который отражает вид на модель сверху, видно, что гибкому колесу задана эллипсовидная форма в области контакта зубьев, что соответствует физике процесса.

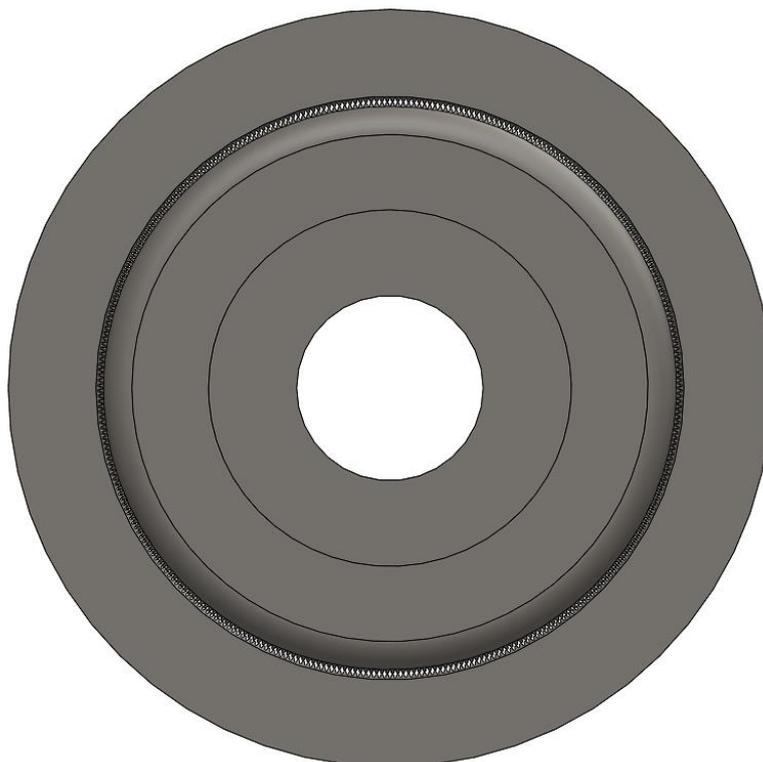


Рис. 2.12. Гибкое и жесткое колеса вид сверху.

Рассматриваются три постановки:

5.1 цилиндр гибкого колеса – твердотельный элемент, зубья – твердотельные элементы;

5.2 цилиндр гибкого колеса – оболочечный элемент, зубья – оболочечные элементы;

5.3 цилиндр гибкого колеса– оболочечный элемент, зубья – балочные элементы.

Общий вид геометрии представлен на рисунке 2.13, вид геометрии зубьев для каждой из постановок представлен на рисунках 2.14, 2.15, 2.16.

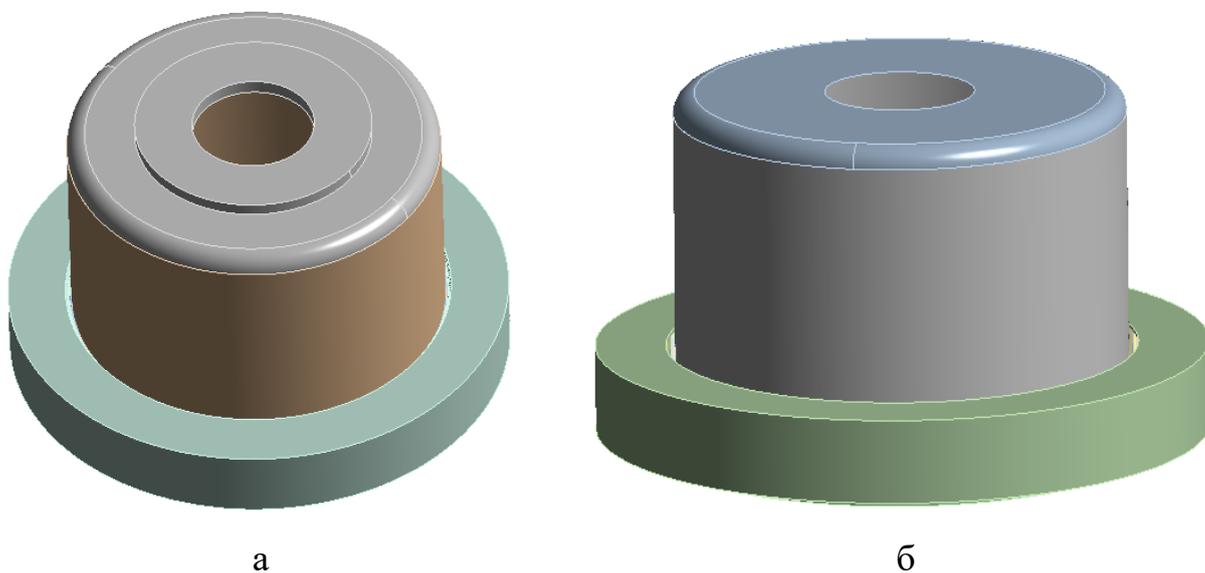


Рис. 2.13. Общий вид геометрии: а – постановка 5.1; б - постановки 5.2 и 5.3.

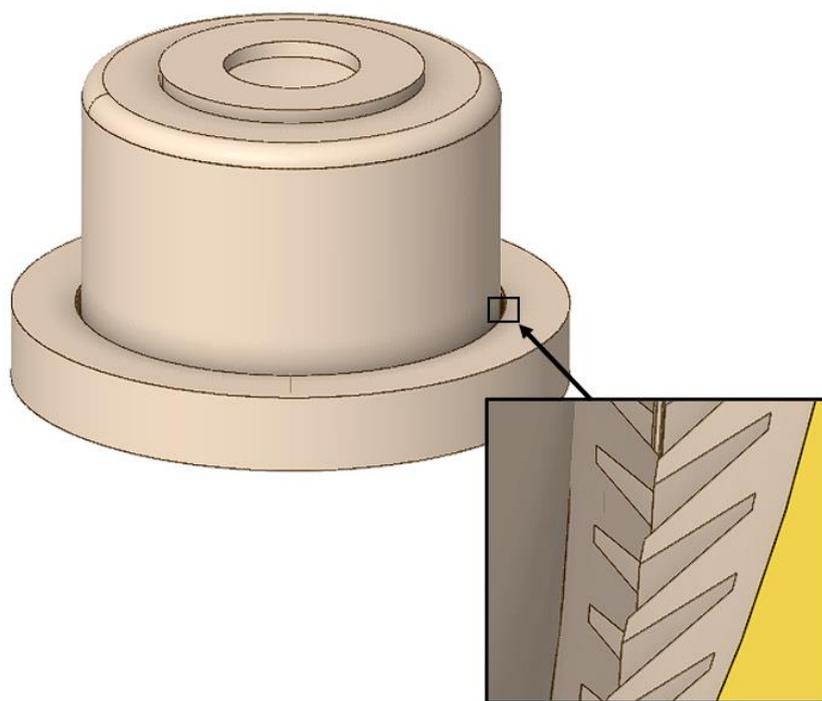


Рис. 2.14. Геометрия зубьев для постановки 5.1.

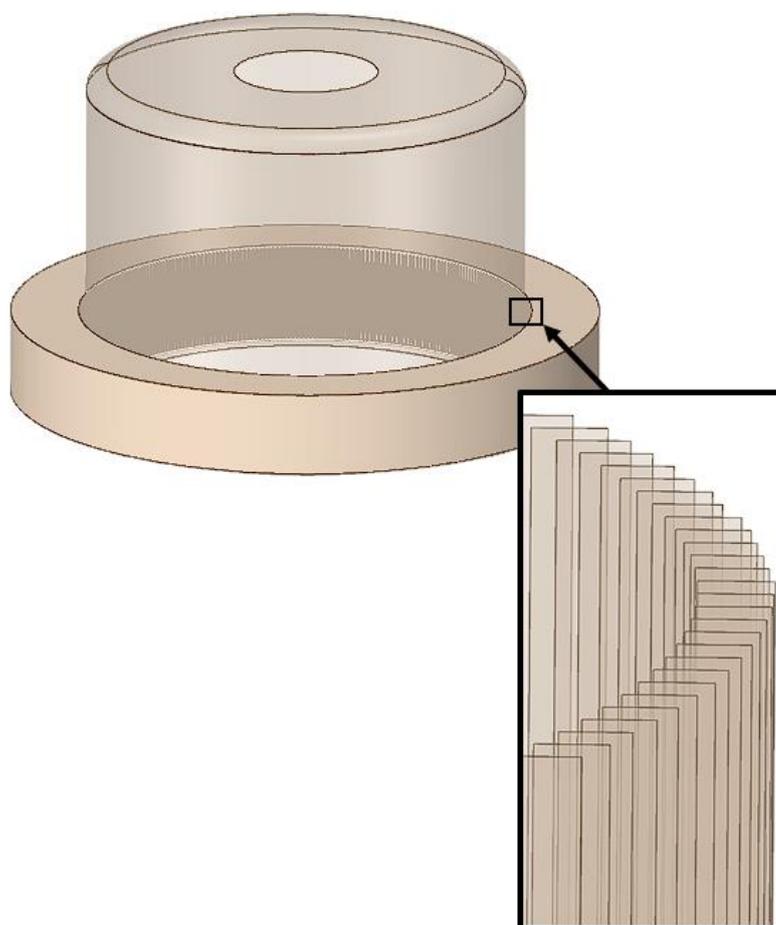


Рис. 2.15. Геометрия зубьев для постановки 5.2.



Рис. 2.16. Геометрия зубьев для постановки 5.3.

Рассматривается статическая задача: жесткое колесо закреплено снаружи, гибкое колесо закреплено сверху, на часть внутренней поверхности гибкого колеса действует момент. Общий вид заданных граничных условий представлен на рис. 2.17.

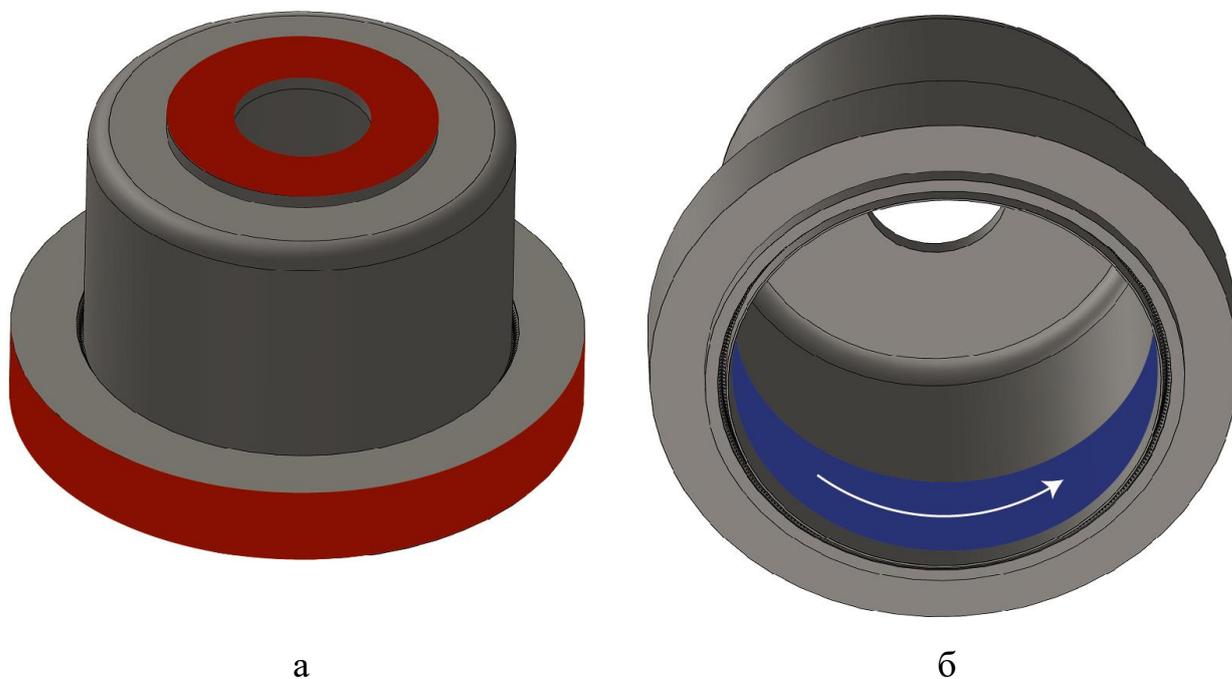


Рис. 2.17. Граничные условия для задачи моделирования гибкого колеса в составе редуктора:
а – жесткая заделка (ограничение всех степеней свободы), б - момент.

2.3 Описание разработанной методики

На основе проводящихся исследований предлагается новая методика моделирования волнового редуктора. Основной целью является возможность сокращения времени выполнения полноразмерного расчета механизма, частью которого является волновой редуктор.

Новая методика заключается в отказе от рассмотрения гибкого колеса как твёрдого тела и переход к другим постановкам – оболочечным или балочным в 3D постановке для моделирования зубчатого зацепления и цилиндрической части гибкого элемента.

Такой подход позволит снизить расчетное время за счет существенного уменьшения количества степеней свободы в моделях по сравнению с применением твердотельных элементов. При этом схожая точность решения достигается за счет изменения количества узлов интегрирования по толщине оболочечного элемента и использования элементов второго порядка. Кроме снижения временных затрат на расчет, так же уменьшаются трудозатраты на подготовку модели в связи с отсутствием необходимости упрощения сложной геометрии зацепления для дальнейшего заполнения объемов твердотельными элементами.

Глава 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАЗРАБОТКИ МОДЕЛЕЙ

3.1 Зубья гибкого колеса

3.1.1 Определение сеточной сходимости модели зуба

Исследование влияния формы поперечного сечения зуба на НДС

В данном разделе решается задача статического изгиба зуба, граничные условия: на нижней грани накладывается жесткое ограничение на все степени свободы, а на верхней грани прикладывается распределенная сила в 50 Н в направлении, перпендикулярном плоскости симметрии. Размеры зуба: длина составляет 3 мм, а высота – 0,6 мм. В рамках параметрического исследования изменяются длины верхнего и нижнего оснований (представленные параметрами а и b), что приводит к изменению формы сечения. Значения этих параметров систематизированы в таблице 3.1, где исходная конфигурация зуба соответствует значению №1.

Таблица 3.1

Значения оснований исследуемого образца

	Верхнее основание, мм	Нижнее основание, мм	Отношение оснований
№	a	b	a/b
1	0,3	0,73	0,41
2	0,35	0,68	0,51
3	0,4	0,63	0,63
4	0,45	0,58	0,78
5	0,5	0,53	0,94
6	0,515	0,515	1,00
7	0,53	0,5	1,06
8	0,58	0,45	1,29
9	0,63	0,4	1,58
10	0,68	0,35	1,94
11	0,73	0,3	2,43

В качестве результатов рассматриваются:

1. Максимальные перемещения во всём зубе.

2. Максимальные значения напряжений в сечении. Для уменьшения возможных неточностей, связанных со способом расчёта, сечение располагается параллельно плоскости закрепления и отодвинуто на 0,1 мм от нижнего основания.

3. Определение процентного отклонения значений перемещений и напряжений при моделировании в оболочечной постановке от твердотельной постановки.

Результаты исследования, полученные путем тщательного варьирования соотношения верхнего и нижнего оснований (a/b), подробно представлены в таблице 3.2 и на рис.3.1, они проливают свет на сложную взаимосвязь между геометрическими параметрами и реакцией конструкции.

Таблица 3.2

Полученные значения напряжений (S) и перемещений (U) при изменении формы поперечного сечения зуба

№	Твердотельная постановка		Оболочечная постановка		Отклонения, %	
	U, мм	S, МПа	U, мм	S, МПа	U	S
1	0,00061	105	0,00065	116	-6,60	-10,02
2	0,00063	126	0,00066	134	-4,24	-11,70
3	0,00068	136	0,00069	140	-1,06	-3,04
4	0,00074	154	0,00072	156	2,81	-1,07
5	0,00084	174	0,00078	175	7,28	-0,16
6	0,00087	181	0,00080	181	8,73	-0,10
7	0,00091	188	0,00082	188	10,20	-0,13
8	0,00108	218	0,00091	214	15,27	-0,92
9	0,00132	240	0,00105	246	20,48	-2,72
10	0,00167	273	0,00124	287	25,62	-5,41
11	0,00222	314	0,00154	341	30,59	-5,41

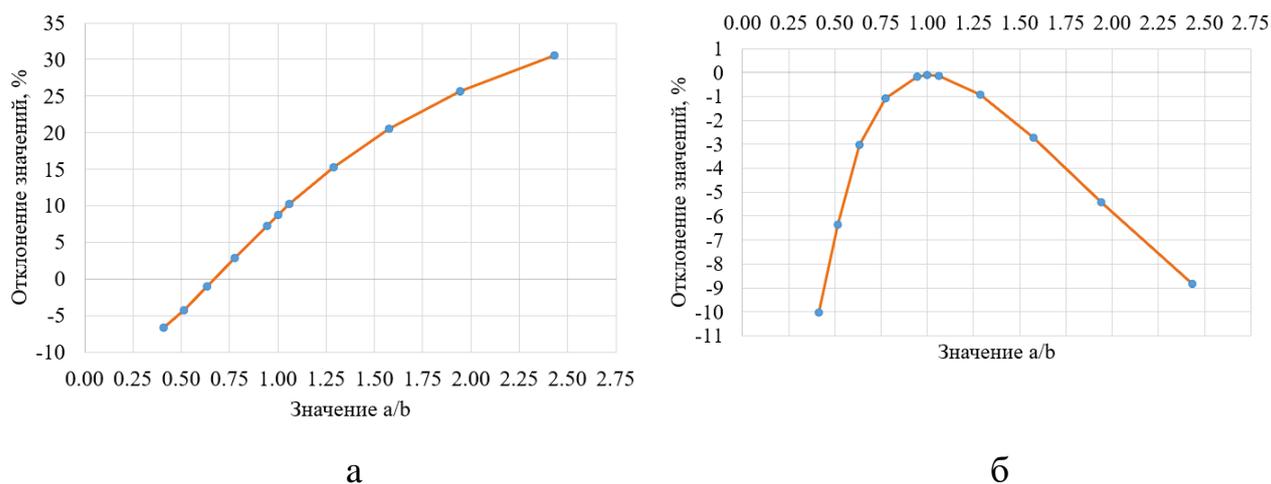


Рис. 3.1. Графики зависимости процентной ошибки при варьировании значения верхнего основания к нижнему: а – перемещений; б – напряжений.

При исследовании различных вариаций формы поперечного сечения зуба становится очевидным, что отклонения значений меняют знак в зависимости от формы. Это означает, что выбор формы поперечного сечения играет решающую роль в определении того, какая постановка даст большее перемещение.

Следовательно, при изучении поведения модели, определении ее области применимости и упрощении нецелесообразно полагаться только на прямоугольную форму сечения, необходимы иные подходы.

Исследование влияния высоты зуба на НДС

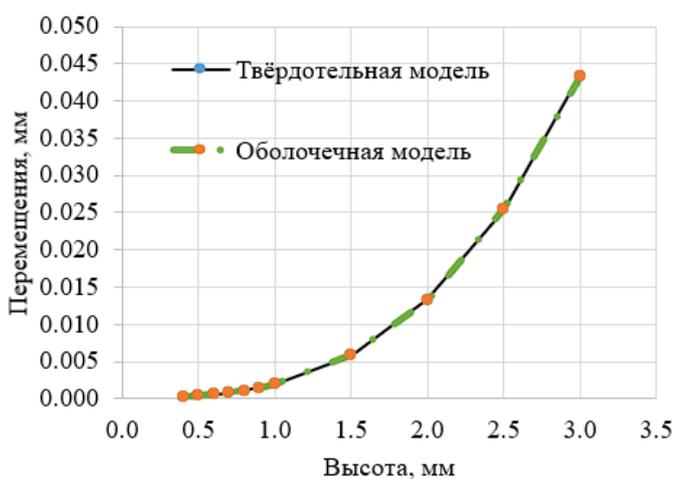
В данном случае учитывается влияние изменения высоты (h) трапеции на НДС зуба. Размеры образцов, исследуемых в данном исследовании, следующие: верхнее основание – 0,3 мм, нижнее основание – 0,73 мм.

Изменяя только высоту при неизменных других параметрах, можно ожидать, что смещения будут более выраженными в оболочечной постановке. Модель и граничные условия, используемые в этой части, остаются такими же, как и в предыдущем исследовании. В таблице 3.3 и на рис. 3.2 представлены полученные результаты.

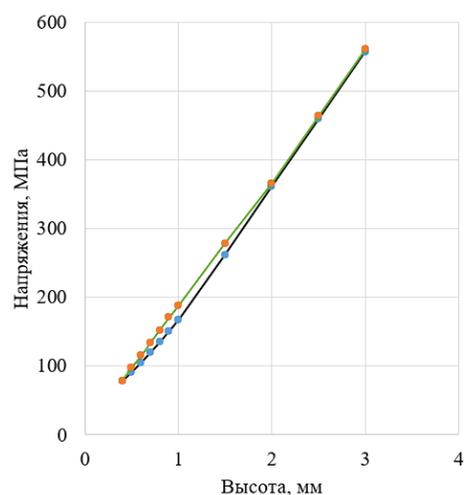
Таблица 3.3

Полученные значения напряжений (S) и перемещений (U) при изменении высоты поперечного сечения зуба

№	h, мм	Твердотельная постановка		Оболочечная постановка		Отклонения, %	
		U, мм	S, МПа	U, мм	S, МПа	U	S
1	3,0	0,04335	557	0,04368	561	-0,76	-0,68
2	2,5	0,02539	460	0,02564	464	-0,98	-0,77
3	2,0	0,01328	366	0,01346	366	-1,35	-1,22
4	1,5	0,00586	262	0,00598	278	-2,06	-6,22
5	1,0	0,00198	167	0,00205	188	-3,54	-12,56
6	0,9	0,00152	152	0,00158	171	-4,10	-13,04
7	0,8	0,00115	135	0,00120	152	-4,76	-13,14
8	0,7	0,00085	120	0,00089	134	-5,51	-11,76
9	0,6	0,00061	105	0,00065	116	-6,61	-10,02
10	0,5	0,00042	91	0,00046	98	-8,28	-7,80
11	0,4	0,00028	78	0,00031	78	-10,69	-0,58



а



б

Рис. 3.2. Полученные значения напряжений и перемещений при изменении высоты зуба для: а – перемещения и б – напряжения.

Результаты исследования, включающие вариации соотношения высоты и нижнего основания (h/b), графически представлены на рис. 3.3.

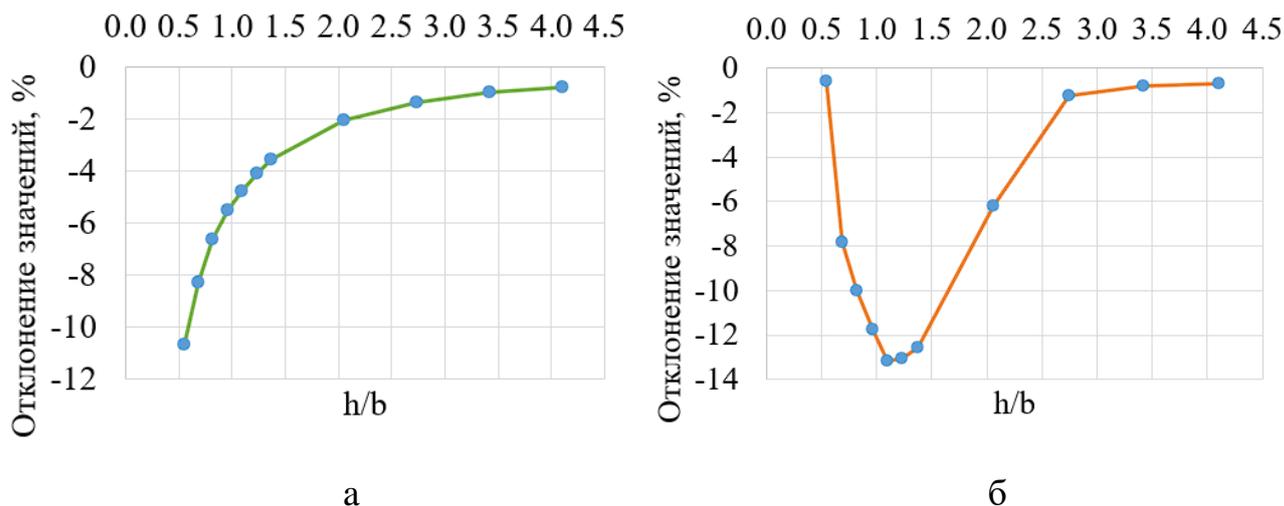


Рис. 3.3. Графики зависимости процентной ошибки а – перемещений и б – напряжений при варьировании значения высоты к нижнему основанию.

Полученные результаты определяют критические значения геометрических параметров образцов и устанавливают взаимосвязь, которая позволяет корректировать механические свойства материала. Это, в свою очередь, расширяет диапазон применимости методики при сохранении приемлемого уровня точности решения.

Исследование влияния высоты зуба на НДС с коррекцией механических свойств материала

Основываясь на результатах предыдущих исследований, проведено дополнительное изучение влияния высоты зуба на НДС с использованием модифицированных механических свойств для постановки в виде оболочки. Для изменения свойств используется формула (3.1).

$$E_{matShell} = E_{matSolid} * \left(1 - \frac{\delta}{100}\right), \quad (3.1)$$

где $E_{matSolid} = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль Юнга в твердотельной постановке;

$E_{matShell}$ – модуль Юнга в оболочечной постановке;

δ – % отклонения перемещений согласно таблице 3.3.

Значения напряжений и перемещений с изменённым материалом представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4

Полученные значения напряжений (S) и перемещений (U) с изменённым значением модуля упругости материала при варьировании высоты

№	Твердотельная постановка		Оболочечная постановка		Отклонения, %	
	U , мм	S , МПа	U , мм	S , МПа	U	S
1	0,04335	557	0,04325	561	0,24	-0,68
2	0,02539	460	0,02538	464	0,02	-0,77
3	0,01328	362	0,01326	366	0,15	-1,22
4	0,00586	262	0,00586	278	-0,06	-6,22
5	0,00198	167	0,00198	188	-0,04	-12,56
6	0,00152	151	0,00152	171	-0,10	-13,04
7	0,00115	135	0,00115	152	0,23	-13,14
8	0,00085	120	0,00085	134	-0,01	-11,76
9	0,00061	105	0,00061	116	-0,10	-10,02
10	0,00042	91	0,00042	98	0,20	-7,80
11	0,00028	78	0,00028	78	-0,17	-0,58

Результаты, полученные при регулировке механических характеристик материала, показаны на рис. 3.4, а взаимосвязь между модулем упругости и геометрическими параметрами образцов – на рис. 3.5.

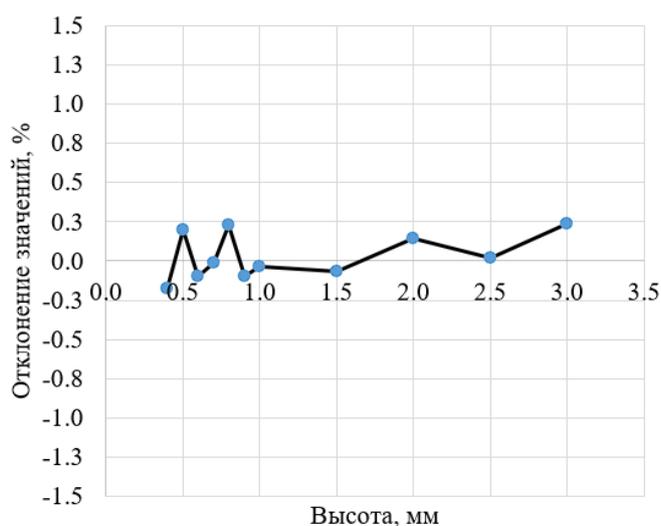


Рис. 3.4. Графики зависимости от высоты процентного отклонения.

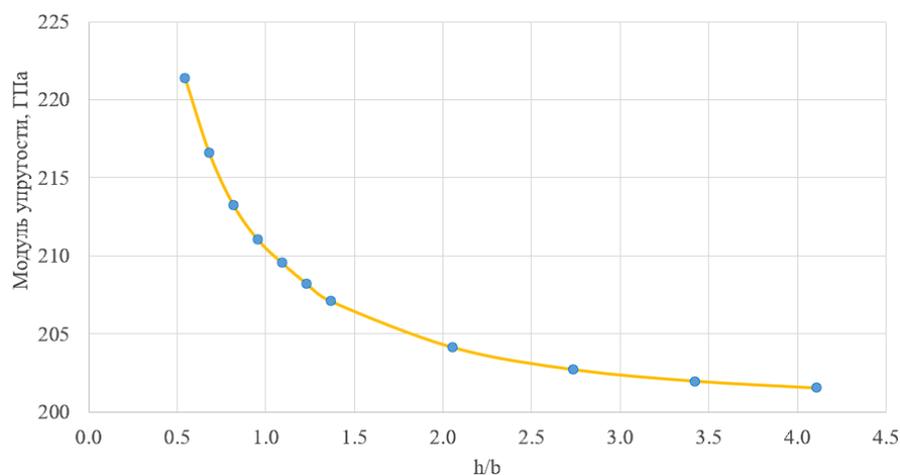


Рис. 3.5. График зависимости модуля упругости при варьировании соотношений высоты к нижнему основанию (h/b).

На основании графика, изображающего зависимость между модулем упругости и геометрическим параметром, было выбрано конкретное значение модуля упругости для данной геометрии зуба. Для оболочечной постановки модуль упругости равен $2,13 \cdot 10^5$ МПа, а для твердотельной – $2 \cdot 10^5$ МПа, что дает расхождение в 6,5 %.

Исследование сеточной сходимости

Проводится анализ сточной сходимости с сохранением граничных условий, как и в предыдущих исследованиях, при значении силы 52 Н. После решения поставленных задач получены поля перемещений и эквивалентных напряжений, которые служат основой для построения графиков сходимости на рисунках 3.8, 3.9 и 3.10.

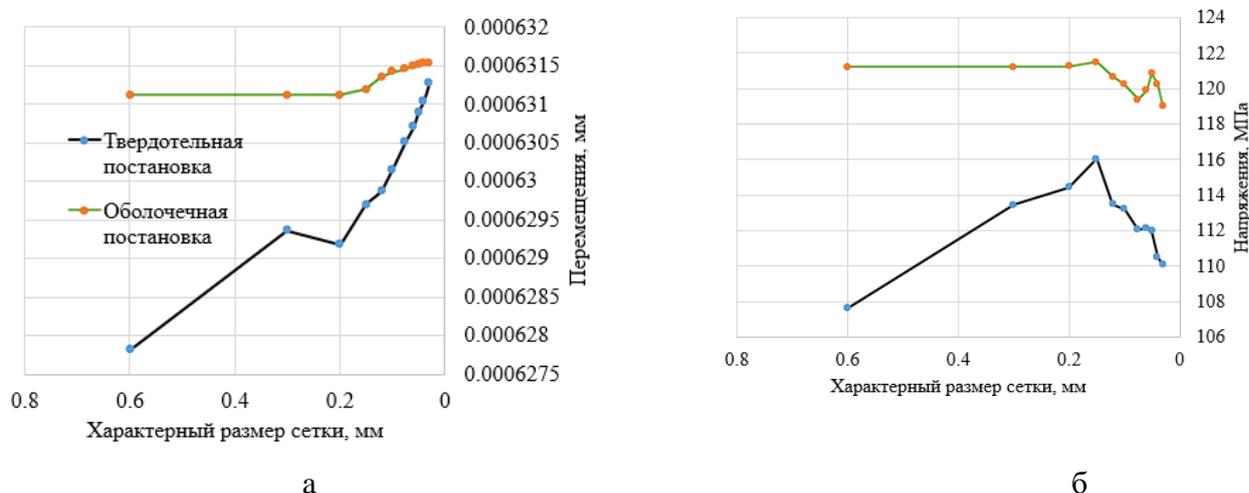


Рис. 3.8. Графики сходимости: а – перемещений; б – напряжений.

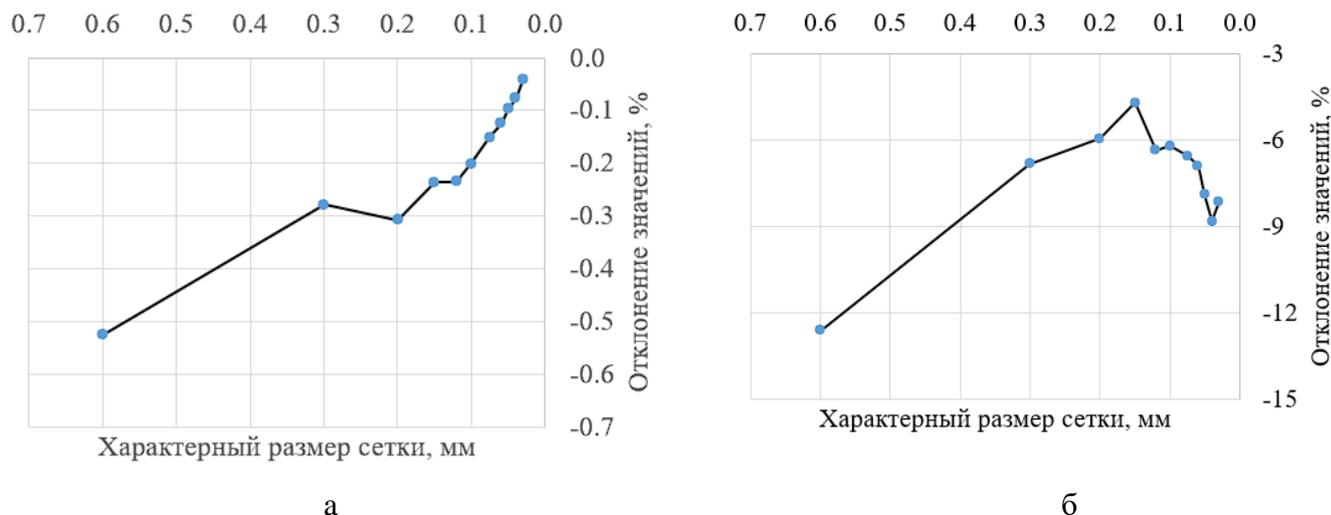


Рис. 3.9. Графики изменения процентного отклонения между твердотельной и оболочечной постановками для: а – перемещений; б – напряжений.

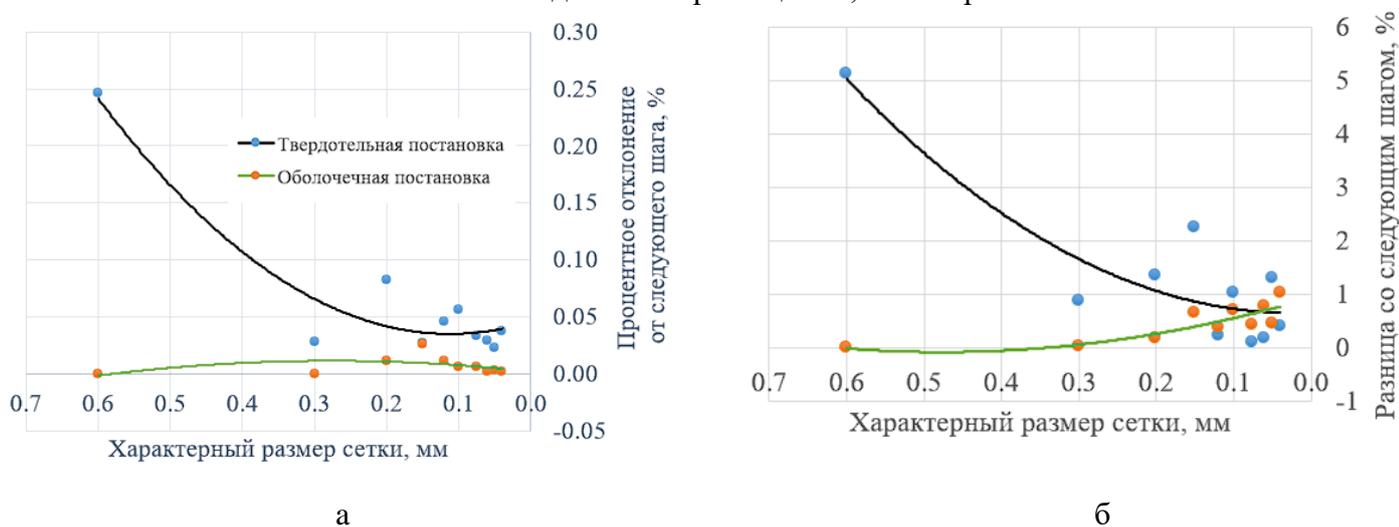


Рис. 3.10. Графики изменения процентного отклонения со следующим шагом изменения сетки: а – перемещений; б – напряжений.

На рисунке 3.10 показаны функции аппроксимации для графиков сходимости перемещений и напряжений, значения функций представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5

Функции аппроксимации значений сходимости для перемещений и напряжений

	Перемещения	Напряжения
Оболочечная постановка	$y = 0,869x^2 - 0,195x + 0,0459$	$y = 4,4574x^2 - 4,2514x + 0,9415$
Твердотельная постановка	$y = -0,1238x^2 + 0,0684x + 0,0019$	$y = 13,122x^2 - 0,6162x + 0,667$

Из графиков выше видно, что оптимальная сходимости достигается при использовании элементов размером 0,15 мм как для оболочечных, так и для твердотельных элементов. Разница в значениях перемещений и напряжений составляет всего 0,3% и 4,5% соответственно. Уменьшение размера элемента дальше этой точки приводит к значительному увеличению времени расчетов при незначительном улучшении точности решения.

Валидация результатов конечно-элементного моделирования на основании аналитических расчётов для задачи определения сеточной сходимости

Проверка результатов конечно-элементного моделирования проводится путем аналитических расчетов, чтобы убедиться в сходимости сетки для рассматриваемой задачи. По формуле (3.2) вычисляются напряжения изгиба, зависящие от высоты зуба [1].

$$\sigma_{и} = \frac{6w_{\alpha}h_x \cos\gamma_x}{s_1^2}, \quad (3.2)$$

где $w_{\alpha} = \frac{w}{\cos \alpha_w}$ – удельная нормальная сила; $w = \frac{F}{b_w} K$ – удельная окружная сила; $F_t = w_{\alpha} \cos\gamma_x b_w$ – тангенциальная составляющая силы, действующая на зуб; где h_x – высота зуба; b_w – длина зуба; s_1 – высота зуба.

Чтобы устранить возможные отклонения, связанные с выбранным методом задания нагрузки при анализе результатов конечно-элементного моделирования, сравниваются значения вдоль траектории, проходящей через центр исследуемого образца, до высоты зуба 0,5 мм. Это сравнение позволяет получить график изменения напряжений в зависимости от высоты зуба, представленный на рисунке 3.11.

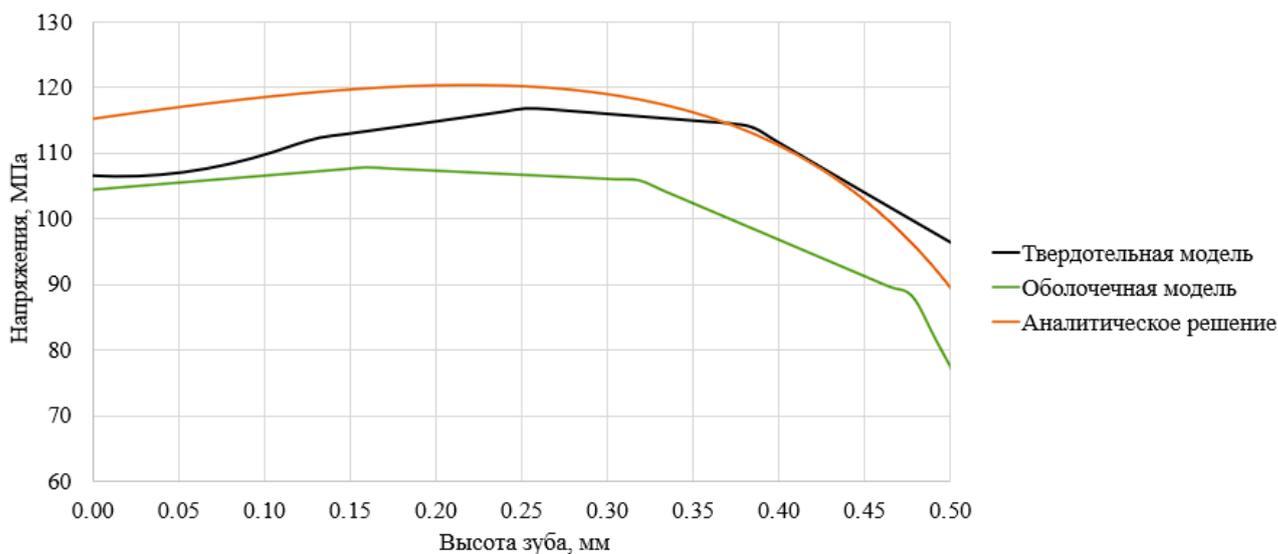


Рис. 3.11. Зависимость напряжений от высоты зуба.

Сходство в распределении напряжений между оболочечной моделью и аналитическим решением можно объяснить применением принципа компланарности сечений. Этот принцип используется как в теории оболочек, так и при выводе аналитических зависимостей. Однако при воздействии на твердотельную модель изгибающей нагрузки возникают заметные различия в деформациях, наблюдаемых на противоположных сторонах зуба. С одной стороны элементы испытывают растяжение, а с другой - преобладает сжатие, что приводит к характерному искривлению поперечного сечения.

Для решения задачи изгиба зуба под распределенной нагрузкой вдоль верхнего края проведен комплексный анализ с целью изучения влияния геометрических параметров на перемещения и напряжения в рассматриваемых постановках. В ходе исследования было выяснено, как изменение модуля упругости в зависимости от геометрических параметров влияет на общее поведение системы. Кроме того, проведено сравнительное исследование, чтобы сопоставить аналитическое решение с твердотельной и оболочечной формулировками задачи.

При сравнении результатов было отмечено, что расхождения в значениях перемещений между твердотельной и оболочечной постановками незначительны и составляют всего 0,3%. Напротив, при сравнении значений

напряжений с аналитическим решением и конечно-элементным моделированием для твердотельной постановки наблюдалось расхождение в 8 %, а для оболочечной – в 14 %. Эти результаты подчеркивают нюансы различий в подходах к моделированию и их влияние на точность прогнозирования напряжений.

3.1.2 Валидация результатов КЭ моделирования для зубьев

На следующем этапе проводится валидация полученных результатов с помощью аналитического расчета для трех случаев нагружения, постановка которых описана в разделе 2.2.1. Анализируются деформации и напряжения, которые возникают в зубьях в зависимости от длины исследуемых образцов.

Для решения задачи определения изгибных напряжений используется теория изгиба стержней [3]. Согласно данным справочника изгибные напряжения в зависимости от длины зуба рассчитываются по формуле (3.3).

$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y, \quad (3.3)$$

где M_x – изгибающий момент; $J_x = \frac{h^3(b^2+4ba+a^2)}{36(b+a)}$, $J_y = \frac{h}{48} \cdot \frac{b^4-a^4}{b-a}$ – моменты инерции; y – длина зуба.

Для нагружения типа п.1 значения сравниваются для трех значений расстояния от нижнего основания, каждое из которых проходит в центральном сечении, пути изображены красной пунктирной линией на рисунке 3.13. В результате получен график изменения напряжений в зависимости от длины зуба, приведенный на рисунке 3.14.

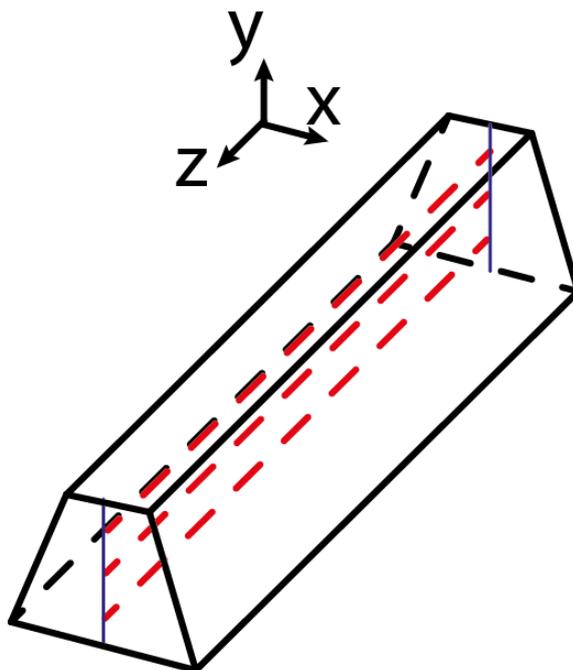


Рис. 3.13. Пути для отображения значений напряжений.

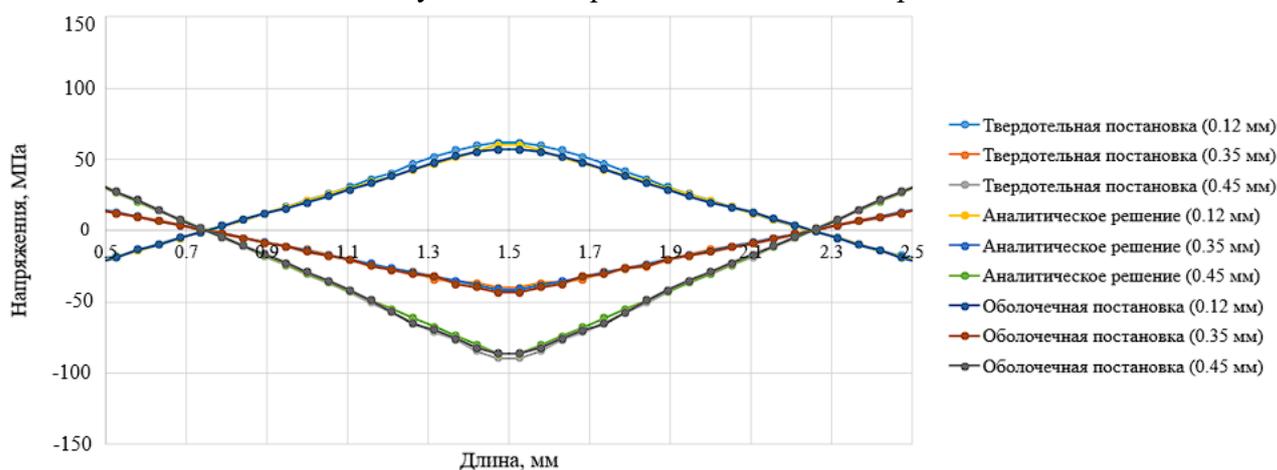


Рис. 3.14. Зависимость напряжений от высоты зуба для случая нагружения п.1.

Можно отметить, что напряжения выводятся только для твердотельной и оболочечной постановок, в случае с моделью в балочной постановке выводятся изгибающие моменты, которые полностью совпадают с аналитическими расчётами. Таким образом совпадают и напряжения для балочной постановки и аналитической зависимости. Стоит только отметить способ вывода напряжений для балочной постановки – модель накладывает ограничения вывода данных о напряжениях в плоскости сечения, другими словам, можно увидеть только усредненные или максимальные в сечениях значения напряжений,

распределенные по длине. Аналогично, в случае балочной постановки для второго способа нагружения.

Для нагружения типа п.2 для твердотельной постановки и аналитического решения значения сравниваются для трех значений расстояния от центральной линии (выделена зеленым), пути изображены красной пунктирной линией на рисунке 3.15. В результате получен график изменения напряжений в зависимости от длины зуба, приведенный на рисунке 3.16.

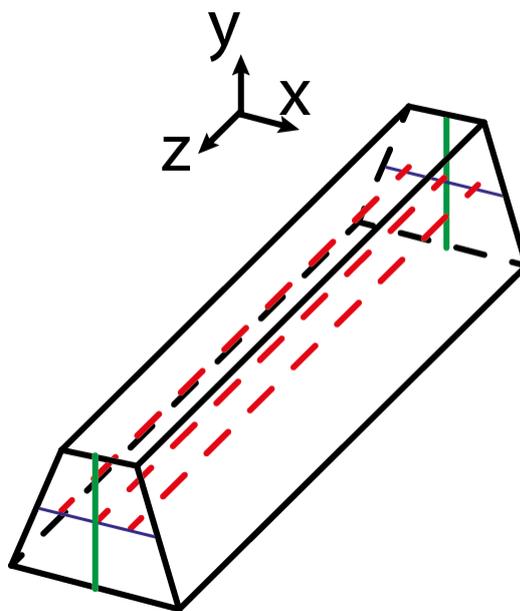


Рис. 3.15. Пути для отображения значений напряжений.

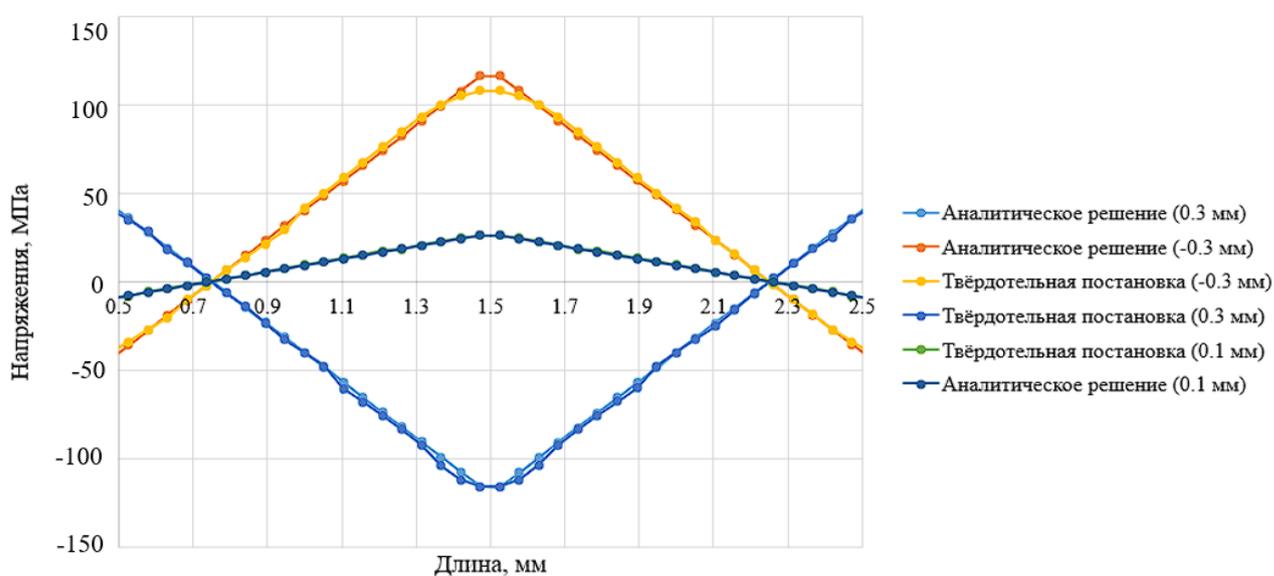


Рис. 3.16. Зависимость напряжений от высоты зуба для нагружения п.2 между твердотельной и аналитическим решениями.

В связи с ограничениями выбранного способа аналитического расчёта оболочечная постановка сравнивается отдельно, результат представлен на рис. 3.17.

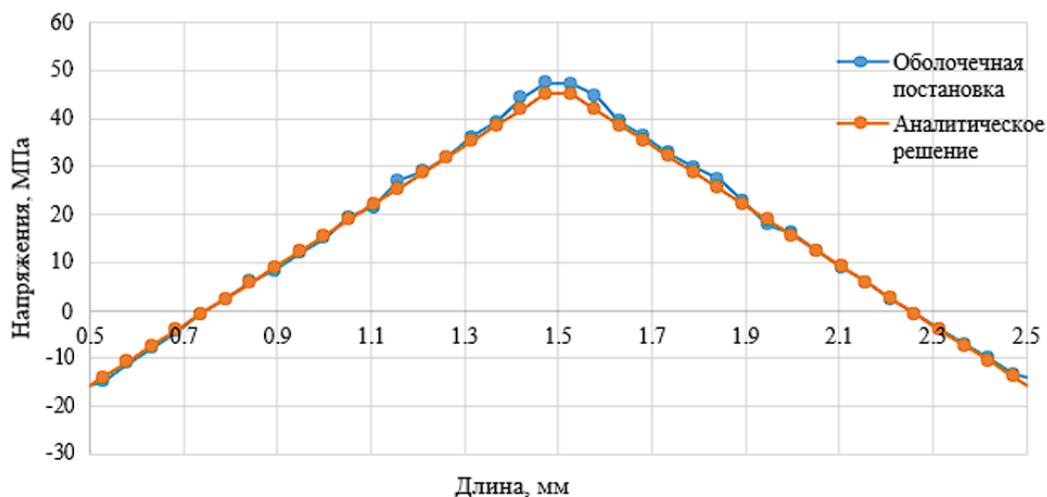


Рис. 3.17. Зависимость напряжений от высоты зуба для нагружения п.2 между оболочечным и аналитическим решениями.

Значения перемещений при сравнении твердотельной постановки, оболочечной постановки, балочной постановки отличаются на 1,1 %, значения напряжений по сравнению с аналитическим решением и КЭ моделированием отличаются не более чем на 8% для каждой постановки.

Для сравнения в третьем типе нагружения (при кручении) используется аналитическая зависимость из книги [3].

При кручении стержня с поперечным сечением в виде трапеции приближенное значение наибольших касательных напряжений и угла закручивания можно получить, приведя заданное сечение к прямоугольной форме, называемой эквивалентным прямоугольником, геометрические характеристики которого – площадь, момент инерции, момент сопротивления — имеют значения, близкие значениям заданной фигуры.

На рисунке 3.18 показано создание эквивалентного прямоугольника для необходимого сечения «равнобедренная трапеция»: для этого из центра тяжести трапеции проведен перпендикуляр на боковые стороны, затем проведен перпендикуляр до пересечения с нижним основанием и уровнем верхнего

основания. В результате получается прямоугольник с эквивалентным сечением для равнобедренной трапеции.

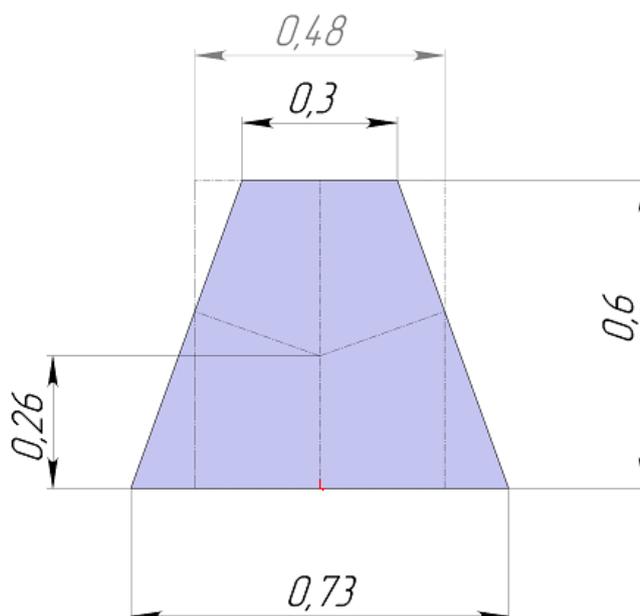


Рис. 3.18. Построение эквивалентного сечения в виде прямоугольника.

Согласно данным в книге [6] напряжения при кручении рассчитываются по формуле (3.4), абсолютный угол закручивания по формуле (3.5)

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{\alpha ab^2}, \quad (3.4)$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G \beta ab^3}, \quad (3.5)$$

где $M_{кр}$ – крутящий момент в сечении; a , b – соответственно длинная и короткая стороны эквивалентного прямоугольника; коэффициент α и β – выбираются из справочных таблиц в зависимости от отношения a/b размеров сечения.

Значения максимальных напряжений при сравнении аналитического решения и твердотельной, оболочечной и балочной постановок отличаются не более чем на 4 %, значения абсолютного угла закручивания по сравнению с аналитическим решением и КЭ моделированием отличаются не более чем на 5,1% для каждой постановки.

Плюсы и минусы каждой постановки, а также расчётное время представлены в сравнительной таблице 3.6.

Таблица 3.6

Сравнительная таблица для зубьев

Показатель	Твердотельная постановка	Оболочечная постановка	Балочная постановка
Расчётное время постановка п.1, сек	119	16	4
Расчётное время п.2, сек	98	7	2
Расчётное время п.3, сек	115	4	2.5
Ошибка решения в сравнении с аналитикой (не более), %	7,5	8	---
Ограничения вывода результатов	Возможен вывод всех результатов, во всех плоскостях измерений	Возможно полное представление НДС в одной плоскости. При настройке количества точек интегрирования по толщине, возможен вывод значений в 5 точках по толщине и более	Ограничение на вывод результатов, возможность просмотра только в одной оси

Таким образом, итоги для каждой постановки:

1. Твердотельная:

Удовлетворяет точности решения, в среднем в 15 раз медленнее, чем оболочечная постановка. Благодаря высокой точности хорошо подходит для рассмотрения зубчатого зацепления в том случае, если зубьев довольно мало.

2. Оболочечная:

Удовлетворяет точности решения, накладывает не критичные для данной задачи ограничения на вывод результатов. Время расчёта меньше, чем в твердотельной постановке в среднем в 15 раз, в сравнении с балочной постановкой ведет себя медленнее в среднем в 2,5 раза.

3. Балочная:

Расчётное время оказалось минимальным, точность решения превосходит другие постановки. Ограничения для вывода результатов не позволяют использовать данную постановку, решение становится не информативным.

3.2 Гибкое колесо

3.2.1 Определение сеточной сходимости модели гибкого колеса

Проводится исследование сеточной сходимости модели гибкого колеса. Граничные условия приложены аналогично постановке 4.1 – расширению, подробно описано в разделе 2.2.3.

В результате решения задачи получены максимальные значения напряжений, на основе которых построен график сходимости, приведенный на рисунке 3.19, а также график сходимости процентного отклонения между твердотельной и оболочечной постановками для напряжений на рисунке 3.20.

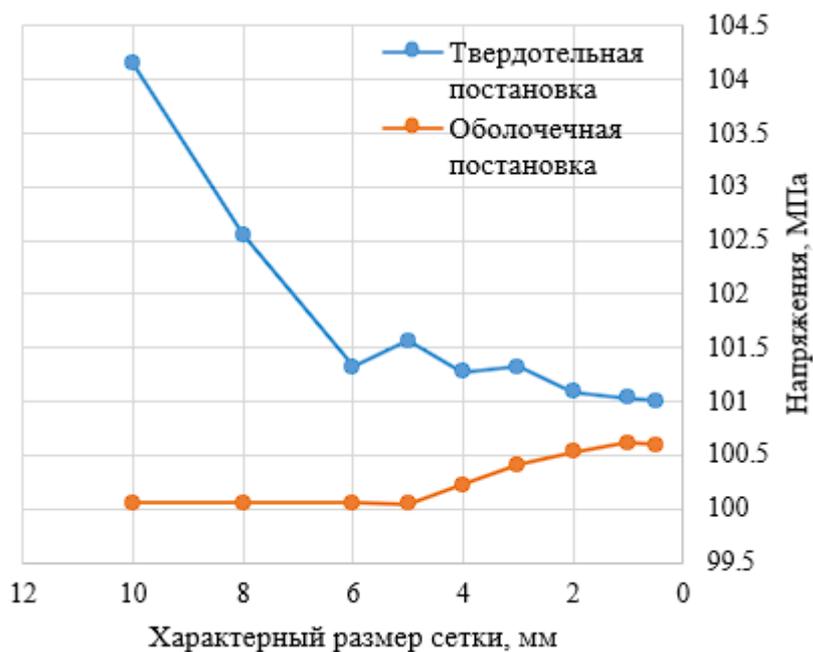


Рис. 3.19. График сходимости напряжений.

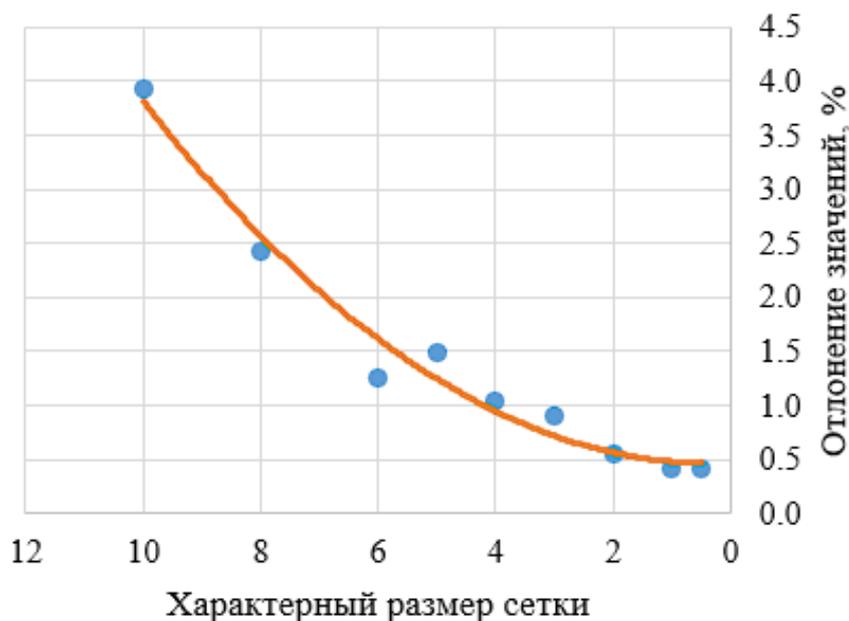


Рис. 3.20. График изменения процентного отклонения между твердотельной и оболочечной постановками для напряжений.

На рисунке 3.20 показана функция аппроксимации для графика сходимости напряжений, значение функции: $y = 0.0397x^2 - 0.063x + 0.2989$.

Как видно из приведенных выше графиков, сходимость достигается при характерном размере элемента в 1 мм для оболочечных и твердотельных элементов – разница для значений напряжений составляет 0,5%. Дальнейшее уменьшение характерного размера элемента приводит к существенному увеличению расчетного времени при незначительном повышении точности решения.

3.2.2 Валидация модели гибкого колеса

Результаты для конечно-элементного моделирования упрощенной формы гибкого колеса, сравниваются с аналитическим решением из теории пластин и оболочек.

Напряжения в тонкостенных цилиндрах широко изучены из-за огромного количества применения, например, в оболочках котлов, резервуаров под давлением, труб.

Как правило, в цилиндрических оболочках развиваются три типа напряжений (рис. 3.21):

- окружные или кольцевые напряжения (σ_θ);
- продольные или осевые напряжения (σ_L);
- радиальные напряжения (σ_r).

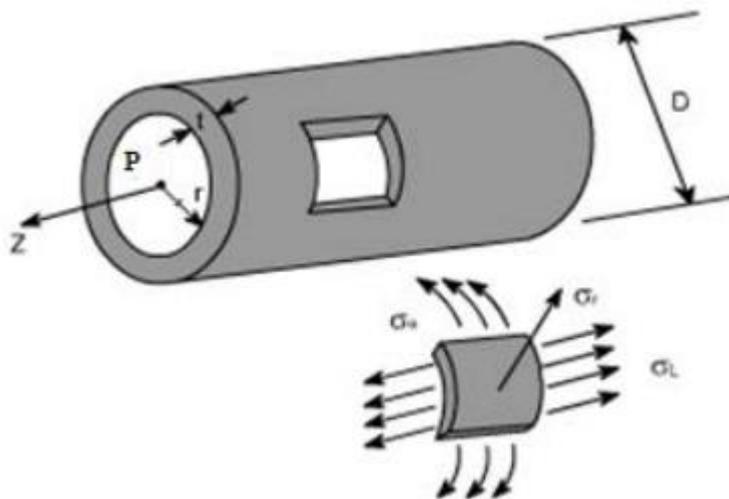


Рис. 3.21. Тонкостенный цилиндр под давлением [6].

Кольцевые напряжения (рис. 3.22) – это вид механических напряжений в цилиндрической оболочке, возникающих под действием внутреннего или внешнего давления. Его можно определить как среднюю силу, действующую по окружности (перпендикулярно оси и радиусу) на каждую частицу в стенке цилиндра [6].

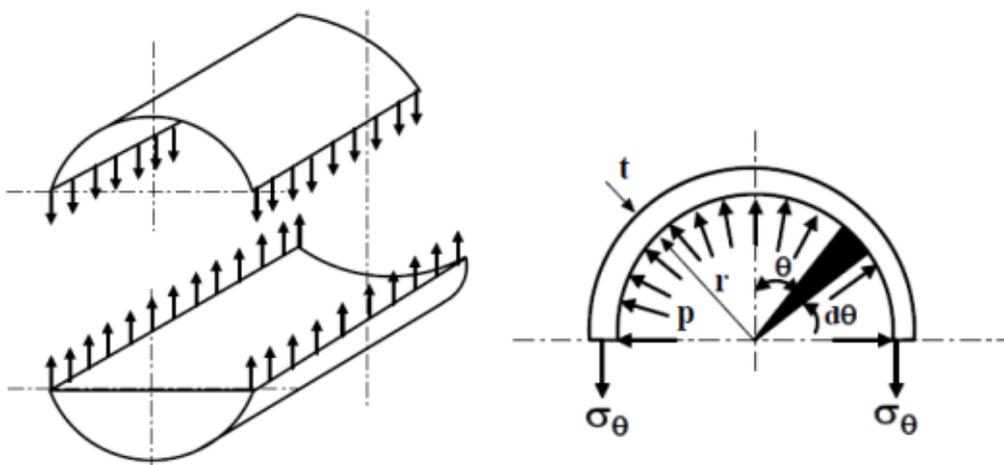


Рис. 3.22. Кольцевые напряжения [19].

Если толщина стенки мала по сравнению с диаметром, то сила, стремящаяся расколоть цилиндр под действием давления, вычисляется по формуле (3.6) [19].

$$F = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} prL \cos \theta d\theta = 2prL = pD_iL \quad (3.6)$$

Площадь поперечного сечения, на которое действует эта сила, определяется по формуле (3.7).

$$A = 2tL \quad (3.7)$$

Поэтому напряжение в кольце определяется по формуле (3.8)

$$\sigma_{\theta} = \frac{F}{A} = \frac{pD_iL}{2tL} = \frac{pD_i}{2t}, \quad (3.8)$$

где p – давление, D_i – внутренний диаметр, t – толщина цилиндра.

В качестве результатов для нагружения типа 4.1, представленного на рисунке 2.10 рассматриваются кольцевые напряжения, таким образом их значение равно:

$$\sigma_{\theta} = \frac{pD_i}{2t} = \frac{1000000 * 0.1}{2 * 5 * 10^{-4}} = 100 \text{ МПа}$$

Сравним результаты с конечно-элементным моделированием, представленным на рис. 3.23.

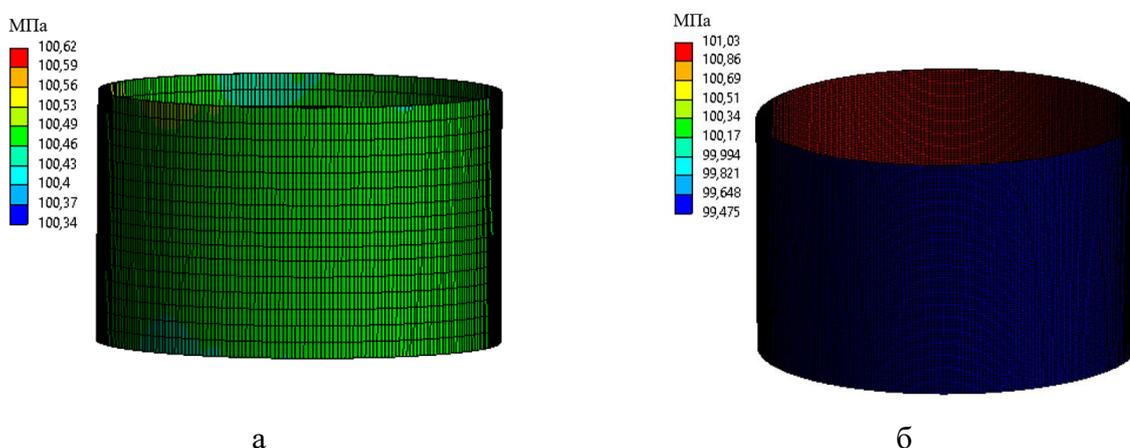


Рис. 3.23. Кольцевые напряжения при КЭ расчёте: а – оболочечная постановка, б – твердотельная постановка.

Рассчитаны деформации по формуле (3.9).

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{E} = 0,0005 \quad (3.9)$$

Сравним результаты с конечно-элементным моделированием, представленным на рисунке 3.24.

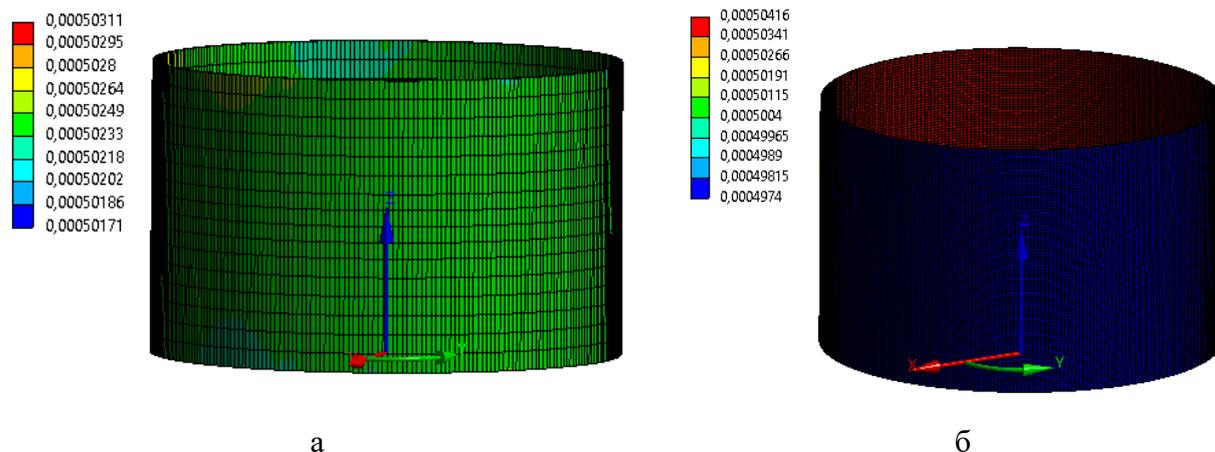


Рис. 3.24. Кольцевые деформации при КЭ расчёте: а – оболочечная постановка, б – твердотельная постановка.

Таким образом результаты для первой постановки – расширение гибкого колеса, в сравнении с аналитическим решением для напряжений отличаются не более 0,3% для оболочечной постановки и не более чем 1,1% для твердотельной постановки. Деформации отличаются не более 0,3% для оболочечной постановки и не более чем 1% для твердотельной постановки.

Рассмотрим вторую поставку: 4.2 кручение. Когда на оболочку круглого сечения воздействует крутящий момент M , напряжение сдвига τ на любом радиусе r определяется по формуле (3.10).

$$\tau = \frac{Mr}{J}, \quad (3.10)$$

где J – момент инерции в сечении. Для полого цилиндра вычисляется по формуле (11).

$$J = \frac{\pi[D^4 - d^4]}{32}, \quad (3.11)$$

где D – внешний диаметр, а d – внутренний.

Максимальное напряжение сдвига возникает при радиусе равном половине среднего диаметра. Напряжение сдвига вычисляется по формуле (12).

$$\tau = \frac{MD_m}{2J} = \frac{2M}{\pi D_m^2 t} \quad (3.12)$$

Площадь поперечного сечения при среднем диаметре определяется по формуле (3.13).

$$A_0 = \frac{\pi D_m^2}{4} \quad (3.13)$$

Таким образом напряжения для данной постановки вычисляются по формуле (3.14).

$$\tau_{max} = \frac{M}{2A_0 t} \quad (3.14)$$

Подставляя исходные данные, получается значение максимального сдвигового напряжения, которое равно 0,0126056 МПа. Сравним результаты с конечно-элементным моделированием, результаты которого представлены на рисунке 3.25.

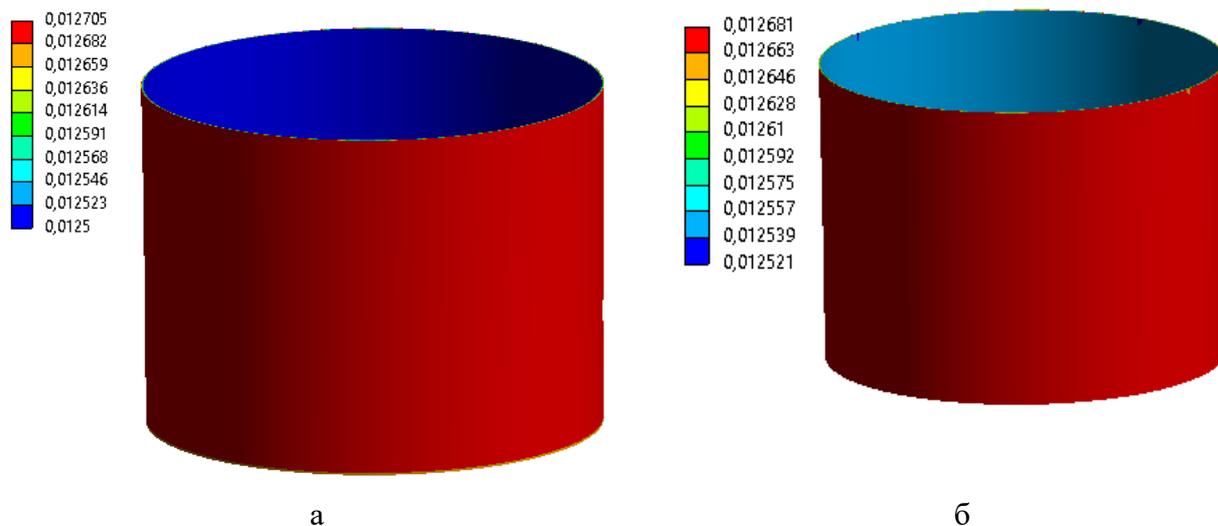


Рис. 3.25. Максимальное сдвиговое напряжение при КЭ расчёте: а – оболочечная постановка, б – твердотельная постановка.

Таким образом результаты для второй постановки – кручение гибкого колеса, в сравнении с аналитическим решением максимальное сдвиговое напряжение отличается на 1% для оболочечной постановки и на 0.75% для твердотельной постановки.

Плюсы и минусы постановок, а также расчётное время представлены в сравнительной таблице 3.7.

Таблица 3.7

Сравнительная таблица для цилиндра гибкого колеса

Показатель	Твердотельная постановка	Оболочечная постановка
Расчётное время, задача расширения, сек	8.5	0.7
Расчётное время, задача кручения, сек	2.6	0.6
Ошибка решения в сравнении с аналитикой для задачи расширения (не более), %	1.1	0,3
Ошибка решения в сравнении с аналитикой для задачи кручения (не более), %	0.75	1

Таким образом оболочечная постановка превосходит по показателям точности и времени расчёта твердотельную постановку, а именно расчётное время в среднем в 8 раз меньше.

3.3 Моделирование гибкого колеса в составе редуктора

Результаты для конечно-элементного моделирования гибкого колеса в составе редуктора, а именно рассмотрение контактного взаимодействия гибкого и жесткого колес в статической задаче, сравниваются между собой для трех случаев, которые подробно описаны в разделе 2.2.4.

Анализируются деформации и напряжения, которые возникают в гибком элементе, в частности, в его зубьях.

Для сравнения значений выбраны:

1. максимальные напряжения, возникающие в гибком элементе;
2. максимальные деформации, возникающие в гибком элементе;
3. сравнение напряжений в плоскости сечения, представленной на рис. 3.26, для гибкого колеса;
4. время вычислений.

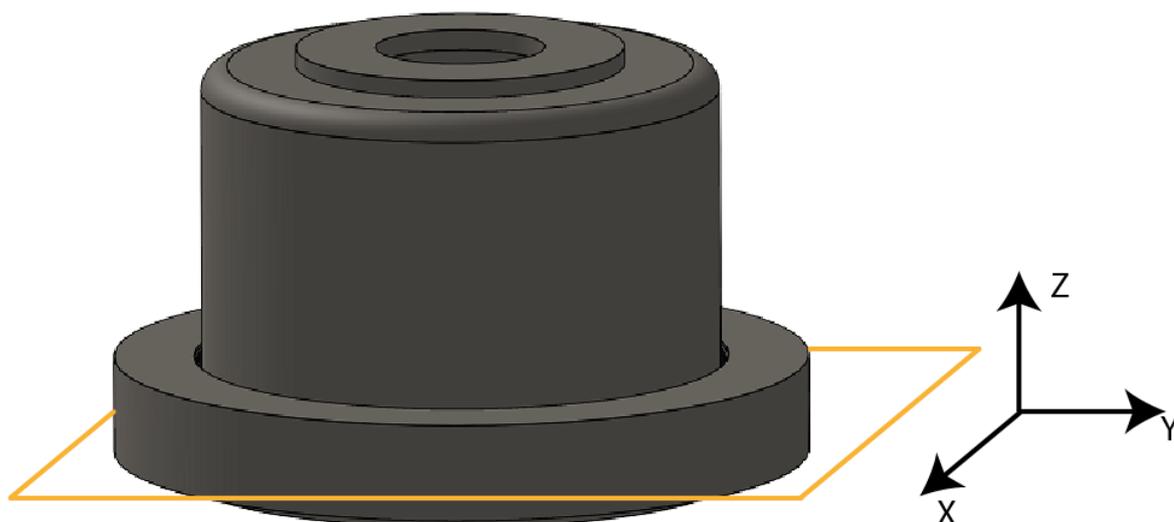


Рис. 3.26. Плоскость сечения для сравнения результатов.

Максимальные напряжения, максимальные деформации, возникающие в гибком элементе, время вычислений отражены в таблице 3.8. Относительная ошибка вычислений отображена в таблице 3.9, над центральными значениями – показаны отличия напряжений, под центральной осью – деформаций.

Таблица 3.8

Сравнительная таблица для модели гибкого колеса в составе редуктора

Постановка	Напряжения, МПа	Деформации, мм, * 10 ⁻³	Время вычислений, сек
5.1	78,659	1,4838	549
5.2	76,452	1,5203	79
5.3	74,392	1,6621	66

Таблица 3.9

Относительная ошибка напряжений и деформаций

Постановка	5.1	5.2	5.3
5.1	---	2.8%	5.4%
5.2	2.5 %	---	2.7%
5.3	12 %	9.3%	---

Наглядно результаты сравнения напряжений в плоскости сечения для гибкого колеса представлены на рисунках 3.27.

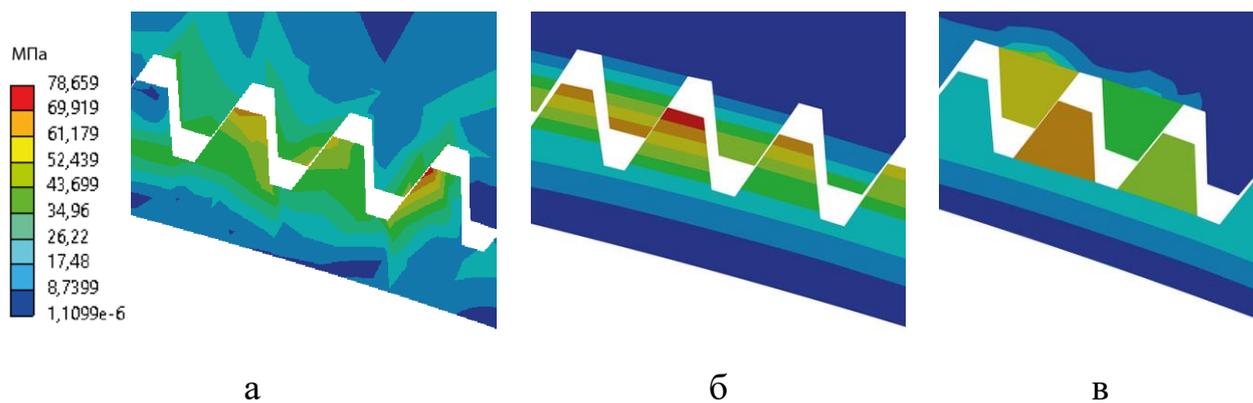


Рис. 3.27. Распределение напряжений для постановок: а – 5.1; б – 5.2; в – 5.3;

Таким образом напряжения для всех постановок отличаются не более чем на 6 % и деформации отличаются не более чем на 3% в сравнении постановок 5.1 и 5.2 (твердотельной и оболочечной), не более чем 12% для постановок 5.1 и 5.3 (твердотельной и балочной), при этом расчётное время полностью твердотельной постановки (5.1) выше в 7 раз в сравнении со случаем 5.2 – оболочечной постановкой, и в 8,3 раз чем в постановке 5.3 – балочной. Расчётное время для оболочечной постановки (5.2) выше в 1,2 раз чем для балочной постановки (5.3), но при это балочная модель более ограничена в выводах результатов, что делает её не целесообразной в использовании.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения данной работы решены следующие задачи:

1. Проведено исследование методик моделирования зубьев гибкого колеса волнового редуктора, а именно:

- Смоделировано поведение трёх типов элементов: твердотельных, оболочечных и балочных;
- Проведено сравнение НДС и валидация на основе аналитических зависимостей;
- При анализе получено: для моделирования зубьев рациональным является оболочечная постановка, так как она отвечает критериям точности, обеспечивает время расчёта лучше, чем твердотельная постановка в 15 раз и, в отличие от балочной постановки, накладывает не критичные ограничения на вывод результатов;

2. Проведена валидация модели гибкого колеса, а именно:

- Смоделировано поведение двух типов элементов цилиндра гибкого колеса: твердотельных и оболочечных;
- Проведено сравнение НДС и валидация на основе аналитических зависимостей;
- При анализе получено: для моделирования цилиндра гибкого колеса рациональным является оболочечная постановка, так как отклонение результатов от аналитических зависимости для нее не превосходит 1%, обеспечивает время расчёта лучше, чем твердотельная постановка в 8 раз;

3. Разработана методика моделирования волнового редуктора, а именно:

На основе полученных исследований предлагается новая методика моделирования волнового редуктора, позволяющий сократить время выполнения полноразмерного расчета при исследовании механизма. Новая методика заключается в использовании оболочечных элементов в 3D постановке

для моделирования зубчатого зацепления и цилиндрической части гибкого элемента.

Такой подход позволяет снизить расчетное время за счет существенного уменьшения количества степеней свободы в моделях по сравнению с применением твердотельных элементов. При этом схожая точность решения достигается за счет изменения количества узлов интегрирования по толщине оболочечного элемента и использования элементов второго порядка. Кроме снижения временных затрат на расчет, так же уменьшаются трудозатраты на подготовку модели в связи с отсутствием необходимости упрощения сложной геометрии зацепления для дальнейшего заполнения объемов твердотельными элементами.

Совокупность описанных достоинств позволяет применять описанный метод для решения задач, включающих в свой состав объемные сборки с количеством зубьев более 300.

4. Для подтверждения разработанной методики проведено моделирование гибкого колеса в составе редуктора, а именно:

- Смоделировано три случая: цилиндр гибкого колеса и зубья – твердотельные элементы; цилиндр гибкого колеса и зубья – оболочечные элементы; цилиндр гибкого колеса – оболочечный элемент, зубья – балочные элементы. Для данных постановок проведено сравнение НДС;
- При анализе получено: для моделирования гибкого колеса в составе редуктора рациональным является оболочечная постановка цилиндра и зубьев гибкого колеса, так как отклонение результатов от полностью твердотельной постановки не превосходит 3%, при этом время расчёта лучше, чем в твердотельной постановке в 7 раз.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. // Справочник, 1993.
2. Ивашов Е.Н., Лучников А.П., Сигов А.С., Степанчиков С.В. Проектирование элементов и устройств технологических систем электронной техники. // Москва Энергоатомиздат, 2008.
3. Кузьмин М.И., Тамм А.Ю., Прохоренкова И.Г. Разработка методики моделирования зубчатого зацепления волнового редуктора с применением МКЭ // Труды 34-й международной научно-технической конференции "Экстремальная робототехника", Санкт-Петербург, Россия, 23-24 ноября 2023 г.
4. Реут Л. Е. Кручение. Расчеты на прочность и жесткость при кручении. // Учебно-методическое пособие для студентов машиностроительных специальностей, 2023.
5. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements. // Int. J. Numer. Meths. Eng., 2, 1970.
6. Bai Y., Bai Q. Subsea engineering handbook. // Engineering, Environmental Science, 2012.
7. Caixia Z., Zhiqiong S., Zhifeng L., Congbin Y., Qiang C., Mengmeng L. Tribological properties of flexspline materials regulated by micro- metallographic structure. // Tribology International, 2018 – №18 – p. 177-186.
8. Cheng Y.-H., Chen Y.-C. Design, analysis and optimization of a strain wzve gear with a novel tooth profile. // Mechanism and Machine Theory – V. 175, 2022.
9. Congbin Y., Qiushi H., Zhifeng L., Yongsheng Z., Qiang C., Caixia Z. Analysis of the Partial Axial Load of a Very Thin-Walled Spur-Gear (Flexspline) of a Harmonic Drive. // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2020 – №21, p. 1333-1345.
10. Eloy Y.S., Ignacio G.P., Alfonso F.A. Stress analysis of strain wave gear drives with four different geometries of wave generator. // Springer Nature B.V, 2020.

11. Fanjie L., Xiaopeng L., Yajing G., Dongyang S. Analysis of Contact Mechanical Characteristics of Flexible Parts in Harmonic Gear Reducer. // Shock and Vibration, 2021 – 17 p.
12. Gonzalez-Perez I., Fuentes-Aznar A. Implementation of a Finite Element Model for Gear Stress Analysis Based on Tie-Surface Constraints and Its Validation Through the Hertz's Theory. // Journal of Mechanical Design, 2018 – Vol. 140.
13. Harmonic Drive gear. Cup Type Component Sets & Housed Units // Boston US Headquarters, 2019
14. Haufe A., Schweizerhof K., DuBois P. Properties & Limits: Review of Shell Element Formulations. // Developer Forum 2013. – Filderstadt/Germany – Haufe/Schweizerhof/DuBois, 24. September 2013.
15. Hexu Y., Xiaopeng L., Jinchu X., Yajing G., Baitao L. Modeling and Fatigue Characteristic Analysis of the Gear Flexspline of a Harmonic Reducer. // MPDI, Mathematics, 2022 – 868 p.
16. Hughes T.J.R., Liu W.K. Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part I. Two-Dimensional Shells. // Comp. Meths. Appl. Mechs. 27, 167-181, 1981.
17. Hughes T.J.R., Liu W.K. Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part II. Three-Dimensional Shells. // Comp. Meths. Appl. Mechs. 27, 331-362, 1981.
18. Huimin D., Delun W., Kwun-Lon T. Kinematic Effect of the Compliant Cup in Harmonic Drives. // Journal of Mechanical Design – Vol. 133, – 2011.
19. Iturgaiz M. Finite Element Method studies on the stability behavior of cylindrical shells under axial and radial uniform and non-uniform loads. // Department of Mechanical and Process Engineering Hochschule Niederrhein, 2012.
20. Jianfeng M., Chao L., Yingchao L., Lingli C. Simulation of meshing characteristics of harmonic reducer and experimental verification. // Advances in Mechanical Engineering, 2018 – Vol. 10, №3 – p. 1-9.
21. Kalina A., Mazurkow A., Witkowski W., Wierzba B., Mariusz O. Properties of Elasto-Hydrodynamic Oil Film in Meshing of Harmonic Drive Gears. // Materials, 2021 – №14 – p. 1194.

22. LS-DYNA Theory Manual. // Livermore Software Technology Corporation , Livermore, 2006.
23. Pacana J., Witkowski W., Mucha J. FEM analysis of stress distribution in the hermetic harmonic drive flexspline. // Strength of Materials, 2017 – Vol. 49, №3 – p. 51-62.
24. Routh B., Sahoo V., Sobczyk A. Performance analysis of asymmetric toothed strain wave gear. // Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science, 2021 – p. 1-15.
25. Shuang W., Gedong J., Xuesong M., Chuang Z., Xian Z., Hao Z. A rapid stress calculation method for short flexspline harmonic drive. // Engineering Computations, 2018.
26. Vineet S., Rathindranath M. State of Stress in Strain Wave Gear Flexspline Cup on Insertion of Drive Cam – Experiment and Analysis. // Proceedings of the World Congress on Engineering. – 2016 – Vol. 2.
27. Zhiyuan Y. Application of FEA for the Strain Wave Gear tooth surface design and modification. // Gear Solutions, 2019.
28. Zhiyuan Y. Finite Element Analysis of Metal and Nonmetal Strain Wave Gear. // Research Square, 2023.
29. Zilong L., Lei Z., Dong X., Yi Z., Cui M., Kai H., Guanyi L. A Novel Strain Wave Gear Reducer with Double Flexsplines. // Actuators, 2023 – №12 – 313 p.