XIII ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
21-25 АВГУСТА
2023

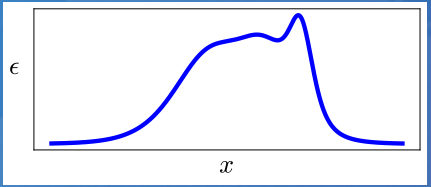
ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ

С.А. ЩЕРБИНИН, А.М. КРИВЦОВ

Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого, ВШТМиМФ
Институт проблем машиноведения РАН

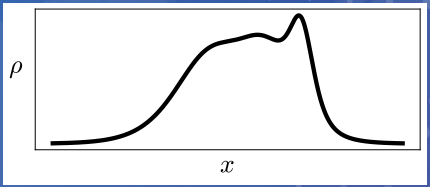
Санкт-Петербург 2023

Энергетическая динамика



Энергетическое возмущение в *носителе*

$$\rho = \epsilon / c^2$$
$$\Rightarrow$$



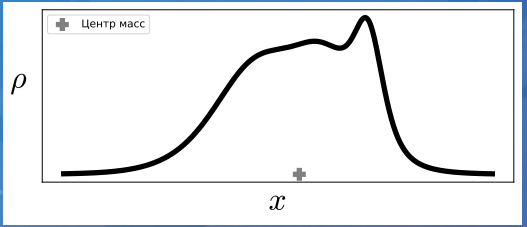
Виртуальное массивное тело – *фантом*

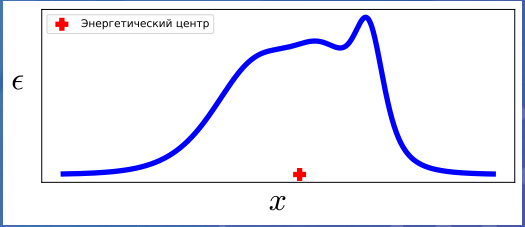
c — характерная скорость (звука)

Anton M. Krivtsov. Dynamics of matter and energy. ZAMM, **103**, e202100496 (2023)

Санкт-Петербург 2023

Энергетическая динамика





$$x_c = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho \,\mathrm{d}x \,/\breve{m} \text{ – центр масс,}$$

$$\breve{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho \,\mathrm{d}x$$

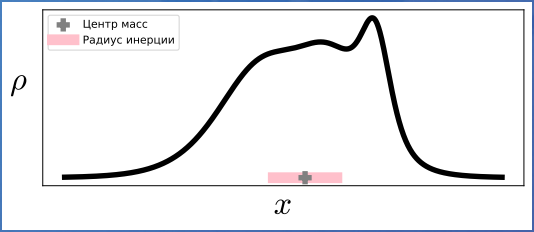
$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x\epsilon \,\mathrm{d}x \text{ – 1-й момент энергии;}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \,\mathrm{d}x;$$

$$x_c = M/E \text{ – энергетический центр.}$$

Санкт-Петербург 2023

Энергетическая динамика



$$\breve{\theta}^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho \, \mathrm{d}x \text{ –момент инерции относительно } x = 0;$$

$$\breve{\theta}^c = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 \rho \, \mathrm{d}x \text{ – центрированный момент инерции (относительно } x = x_c);$$

$$\varrho = \sqrt{\breve{\theta}^c / \breve{m}} \text{ – радиус инерции.}$$

Санкт-Петербург 2023

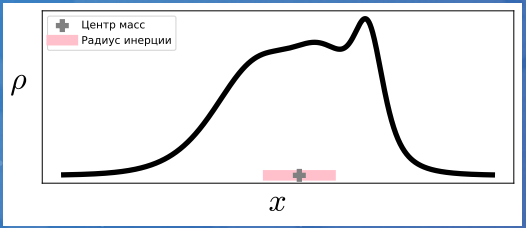
Энергетическая динамика

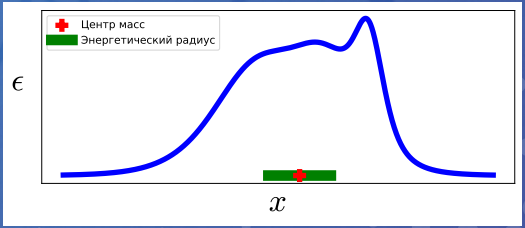
$$M^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \epsilon \, \mathrm{d}x \text{ –второй момент энергии;}$$

$$M^c = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_c)^2 \epsilon \, \mathrm{d}x \text{ – центрированный второй момент энергии;}$$

$$\varrho = \sqrt{M^c / E} \text{ – энергетический радиус.}$$

Энергетическая динамика





Связь энергетических характеристик с характеристиками фантома

$$\breve{m} = E/c^2, \qquad \breve{\theta}^r = M^r/c^2, \qquad \breve{\theta}^c = M^c/c^2$$

Санкт-Петербург 2023

Одномерная решётка

Одномерная моноатомная решётка со взаимодействием только ближайших соседей

$$m\ddot{u}_n = F(u_n - u_{n-1}) - F(u_{n+1} - u_n), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

$$F(y) = -\frac{d\Pi(y)}{dy}, \quad \Pi(y) \text{ – парный потенциал}$$

Энергия n-ой частицы

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} + \frac{1}{2}\Pi(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2}\Pi(u_n - u_{n-1})$$

Санкт-Петербург 2023

Одномерная решётка

$\dot{E}_n = \frac{1}{2a}\left(H_{n+\frac{1}{2}} - H_{n-\frac{1}{2}}\right)$ – закон сохранения энергии (a – шаг решётки)

$H = \sum H_n$ – глобальный поток энергии

$$\Downarrow$$

$$\dot{M} = H; \quad \ddot{M} = \Phi; \quad \Phi = \dot{H} = \frac{a}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}'}\left(v^2_{n+\frac{1}{2}} - v^2_{n-\frac{1}{2}}\right) F'\left(u_{n+\frac{1}{2}} - u_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

$x_c = M/E$ $\Rightarrow$ $E\ddot{x}_c = \Phi$ – аналог второго закона Ньютона

Санкт-Петербург 2023

Цепочка α-ФПУ

Простейшая аппроксимация потенциала общего вида (Леннарда-Джонса, Морзе и т.д.) в случае малых амплитуд:

$$\Pi(y) = \frac{k}{2}y^2 + \frac{\alpha}{3a}y^3 \text{ – потенциал } \alpha\text{-ФПУ}$$

$$\Phi = \dot{H} = -\alpha a \sum_{n\in\mathbb{Z}} (u_{n+1} - u_n)(v_{n+1}^2 - v_n^2)$$

В общем случае аналог силы не ноль

Возмущение в цепочке α-ФПУ движется так, как если бы на него со стороны среды воздействовала эффективная сила

Уравнение Буссинеска

Малые амплитуды + длинные волны

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \varepsilon, \qquad \frac{a}{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x} \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

(ϕ – функция, описывающая возбуждение, ε – малый параметр)

$$\Downarrow$$

$$\rho u_{tt} = D u_{xx} + 2\alpha D u_x u_{xx} + \frac{a^2 D}{12} u_{xxxx}$$ – уравнение Буссинеска

$$(D = ka,\ \rho = m/a)$$

$$\Phi = \dot{H} = -2\alpha a^2 \int_{-\infty}^{\infty} u_t u_x u_{xt} dx$$

Санкт-Петербург 2023

Уравнение Кортевега - де Фриза

Одноволновое приближение:

$$\chi = x - ct, \qquad \tau = t$$
$$(c = \sqrt{D/\rho} = \sqrt{k/m}\, a)$$

$$\Downarrow$$

$$u_{\chi\tau} + \alpha c u_\chi u_{\chi\chi} + \frac{a^2 c}{24} u_{\chi\chi\chi\chi} = 0$$ – уравнение КдФ

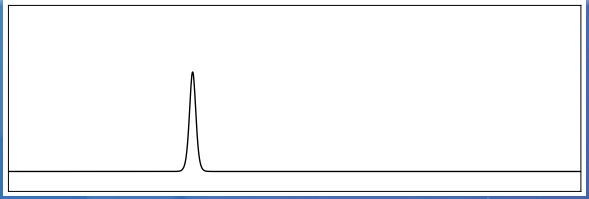
$$\epsilon = D u_\chi^2$$ – плотность энергии

$$\tilde{h} = \frac{2\alpha c D}{3} u_\chi^3 + \frac{a^2 c D}{12}\left(u_\chi u_{\chi\chi\chi} - \frac{u_{\chi\chi}^2}{2}\right)$$ – плотность потока энергии

$$\Phi = \alpha \frac{a^2 c^2 D}{24} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{\chi\chi}^3 \, \mathrm{d}\chi$$ – аналог силы

Солитоны КдФ

Любое возмущение распадается на солитоны и осциллирующий хвост



Начальное возмущение

Возмущение после распада

Солитоны КдФ

Точный солитонный профиль

$$u_\chi = \frac{3q^2}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{6\alpha}}{a} q(\chi - \chi_0 - q^2 \alpha c \tau)\right)} \quad (q \text{ – параметр})$$

- Скорость энергетического центра солитона – **константа**
- Энергетический радиус солитона – **константа**

Санкт-Петербург 2023

Солитоны КдФ

"Возмущённый" солитонный профиль $u_\chi = \dfrac{3q^2+\delta}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{6\alpha}}{a}q(\chi-\chi_0)\right)}$ (δ – мало)

- Профиль сбрасывает с себя лишнюю энергию, превращаясь в точный солитон
- Точный солитон можно найти посредством метода обратной теории рассеяния
- Скорости начального профиля v_0 и солитона v_s – через энергетическую динамику

- Разность скоростей $v_0 - v_s = \frac{4}{45}\alpha c\delta$
- $\delta > 0$ – "торможение"
- $\delta < 0$ – "ускорение"

Линеаризованное уравнение КдФ

Динамика осциллирующего хвоста на больших временах описывается линеаризованным уравнением КдФ

$$u_{\chi\tau} + \frac{a^2 c}{24} u_{\chi\chi\chi\chi} = 0$$

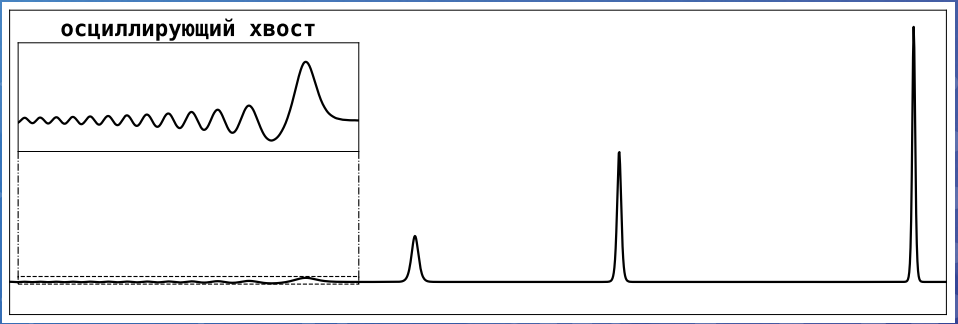
$$\epsilon = D u_\chi^2, \quad \tilde{h} = \frac{a^2 c D}{12}\left(u_\chi u_{\chi\chi\chi} - \frac{u_{\chi\chi}^2}{2}\right) \text{ – интегралы движения}$$

$$\dot{\chi}_c = -\frac{a^2 c}{8} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_{\chi\chi}^2 \, \mathrm{d}\chi \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_\chi^2 \, \mathrm{d}\chi$$

Скорость энергетического центра осциллирующего хвоста постоянная отрицательная величина

Энергетическая динамика КдФ

На больших временах энергетический центр любого возмущения в уравнении КдФ движется с постоянной скоростью

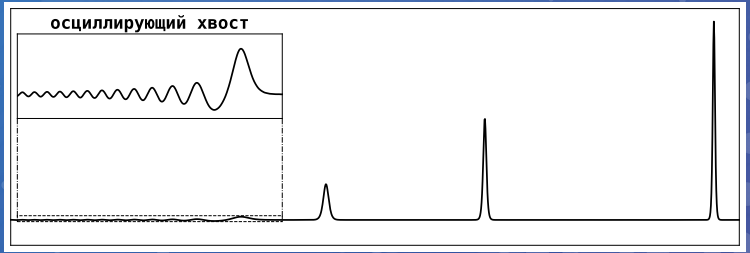


Санкт-Петербург 2023

Энергетическая динамика КдФ

$M^r = E\chi_c^2 + M^c$ – связь между вторым энергетическим моментом и центрированным вторым энергетическим моментом (аналог теоремы Штейнера)

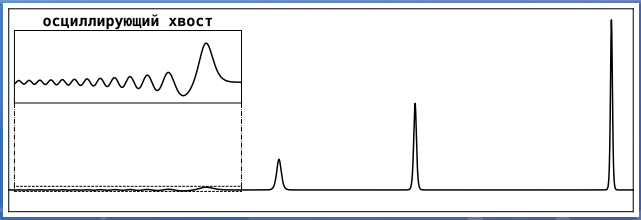
$M^c = \sum_{i=0}^{N} \left(E_i\chi_i^2 + M_i^c\right) - E\chi_c^2$ – центрированный второй энергетический момент возмущения после распада на невзаимодействующие части ($i = 0$ – хвост, $i = 1, 2, \ldots$ – солитоны)



Энергетическая динамика КдФ

$$\ddot{M}^c = 2\sum_{i=1}^{N} E_i \dot{\chi}_i^2 + \ddot{M}_0^r \text{ – константа} \Rightarrow \varrho = \sqrt{C_1\tau^2 + C_2\tau + C_3}.$$

$$\varrho = v_\varrho \tau \text{ – на больших временах}$$



На больших временах энергетический радиус любого возмущения в уравнении КдФ растёт **линейно** с течением времени

Санкт-Петербург 2023

Приближение КдФ

N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965)
объяснение явления возврата ФПУ через солитоны КдФ

- G. Friesecke and J. Wattis, Comm. in Math. Phys. 161, 391 (1994)
- G. Friesecke and R. L. Pego, Nonlinearity 12, 1601 (1999)
- G. Schneider and C. Wayne, in Int. Conf. on Diff. Eqs., Vol. 1, 2 (Berlin, 1999)
- D. Bambusi and A. Ponno, Comm. in Math. Phys. 264, 539 (2006).
- Y. Hong, C. Kwak, and C. Yang, Arch. Rational Mech. Anal. 240, 1091 (2021).

Математически строгое обоснование корректности приближения КдФ

Заключение

- Подход энергетической динамики был применён для описания энергопереноса в нелинейной моноатомной цепочке для случая длинноволновых низкоамплитудных возмущений
- В общем случае возмщуение в рассматриваемой системе движется так, как будто на него воздействует со стороны среды эффективная сила, зависящая от его формы (для некоторых форм эта сила равна равна нулю)
- На больших временах энергетический центр любого возмущения в рассматриваемой системе движется с постоянной скоростью
- На больших временах энергетический радиус любого возмущения в рассматриваемой системе увеличивается линейно

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!

Представленные результаты подготовлены к публикации

Санкт-Петербург 2023