Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Институт прикладной математики и механики
Кафедра “Теоретическая механика”

Диссертация допущена к защите
Зав. кафедрой
А. М. Кривцов
“ ” 2013г.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени МАГИСТРА

Тема: Равновесие протопланетного облака системы Земля - Луна

Направление: 010800 — Механика и математическое моделирование

Выполнил студент гр. 60510/11 А. С. Мурачёв

Руководитель, к.ф.–м.н. А. М. Кривцов

Консультанты

Консультант по вопросам охраны труда, к.т.н., доц. В. В. Монашков

Санкт-Петербург
2013

Оглавление

1 Введение **3**

1.1 Происхождение Луны: ударная гипотеза и гипотеза одновременного образования с Землёй . . . 6

1.2 Модель протопланетного облака системы Земля - Луна . . . 8

1.3 Необходимые понятия и соотношения . . . 10

2 Исследование переноса излучения **12**

2.1 Введение . . . 12

2.2 Испарение ледяных частиц . . . 13

2.3 Изменение интенсивности излучения . . . 15

2.4 Уравнение переноса излучения. Сферически-симметричный случай . . . 19

2.5 Результаты . . . 21

3 Уравнение равновесия **22**

3.1 Введение . . . 22

3.2 Гравитационная сила . . . 23

3.3 Радиационная сила . . . 24

3.4 Решение уравнения равновесия . . . 25

3.5 Результаты . . . 28

4 Приложение А. Охрана труда **30**

4.1 Требования к вентиляции, отоплению и кондиционированию воздуха . . . 31

4.2 Требования к уровням шума . . . 31

4.3 Требования к естественному и искусственному освещению для помещений вычислительных комнат . . . 32

4.4 Пожарная безопасность при работе с вычислительной техникой . . . 33

4.5 Требования электробезопасности . . . 34

4.6 Эргономические требования . . . 34

4.7 Напряженность трудового процесса . . . 35

1. Введение

Проблема образования планетарной системы Земля – Луна остается одним из серьезных вопросов современной космохимии и астрофизики. Существовало множество гипотез, объясняющих образование естественного спутника Земли. С течением времени появлялись новые данные, старые гипотезы уходили, их место занимали новые. На сегодняшний день ни одна гипотеза не имеет достаточной доказательной базы, чтобы называться доказанной теорией.

Модель образования Луны должна объяснить целый ряд странностей [1], [5]:

- лунные породы имеет точно такое же соотношение изотопов кислорода O^{16}, O^{17}, O^{18}, как и земные породы. Это резко отличает их от метеоритов, прилетевших из других уголков Солнечной системы, что свидетельствует о единстве происхождения Луны и Земли.

- Луна и Земля обладают разной плотностью. Средняя плотность Земли, приведенная к нормальному давлению (1 атм) — 4.45г/см^3, плотность Луны — 3.3г/см^3. Различие обусловлено тем, что Земля содержит массивное железо-никелиевое ядро (с примесью легких элементов), в котором сосредоточено 32% массы Земли. Размер ядра Луны остается невыясненным. Но с учетом низкой плотности Луны и ограничения, налагаемого величиной момента инерции (0.3931) Луна не может содержать ядро, превосходящее 5% ее массы. Наиболее вероятным, исходя из интерпретации геофизических данных, считается интервал 1–3%, то есть радиус лунного ядра составляет 250–450 км.

- содержание летучих элементов (водород, азот, фтор, инертные газы) на Луне намного меньше, чем на Земле, что говорит о том, что в процессе отделения Луны от Земли, лунные породы потеряли свои летучие элементы.

- система Земля - Луна имеет очень высокий момент импульса, который свидетельствует о большой скорости вращения Земли, до момента отделения Луны. А значительное отклонение плоскости лунной орбиты от плоскости земного экватора говорит о несимметричном отрыве Луны.

Гипотезы, которые пытались объяснить эти факты можно свести к трем основным идеям:

1. захват Луны (или нескольких более мелких объектов, с последующим формированием из них Луны). Факт, сам по себе, практически невероятный. Тем более, изотопное родство лунных и земных пород ставят крест на всех гипотезах, основанных на данной идее. [3], [4]

2. совместное формирование Луны и Земли. В данном случае, проблемной во всех гипотезах, основанных на этой идее, являются параметры лунной орбиты (высокий момент импульса системы и большой наклон лунной орбиты), так и дефицит железа на Луне. первые, данная гипотеза была выдвинута Джорджем Дарвином в конце XIX века [2]

3. отделение Луны от Земли. На данный момент считается основной. Первыми эту идею высказали американские ученые А.Камерон и В. Уорд и одновременно В. Хартман и Д. Дэвис в 1975 г. По их версии Луна образовалась в результате катастрофического столкновения с Землей крупного космического тела, размером с Марс (гипотеза мегаимпакта). В результате огромная масса земной материи и частично материала ударника (небесного тела, столкнувшегося с Землей) расплавилась и была выброшена на околоземную орбиту. Этот материал быстро аккумулировался в компактное тело, которое стало Луной.

Гипотеза мегаимпакта стала общепринятой, поскольку она предлагала простое решение целого ряда проблем. В частности он дает объяснение повышенному значению углового момента системы Земля – Луна, наклону оси Земли. В рамках этой гипотезы объясняется и более низкое содержание железа в Луне, так как предполагается, что катастрофическое столкновение произошло после образования ядра Земли. Железо оказалось в основном сконцентрированным в ядре Земли, а Луна образовалась из вещества земной мантии [7], [8].

К середине 1970-х гг., когда на Землю доставили образцы лунного грунта, достаточно хорошо были изучены геохимические свойства Луны, и она по ряду параметров действительно показывала неплохое сходство с составом земной мантии. Именно геохимические аргументы стали решающими в системе доказательств той или иной версии образования Луны. Но ударная концепция осталась незыблемой. Её версии различались лишь в деталях: относительные размеры Земли и ударника, каков был возраст Земли, когда произошло столкновение. Между тем некоторые подробности геохимического анализа ставят под сомнение гипотезу в целом.

В работе [9] был предложен альтернативный сценарий, по которому Луна и Земля возникли как двойная система при коллапсе облака нагретых пылевых частиц первичного состава, основывающийся на представлении о возможности образования планетноспутниковых систем в процессе аккумуляции газопылевых сгущений ([10], [11]). В работе ([12]) была предложена новая модель образования Луны, учитывающая как геохимические, так и динамические аспекты проблемы.

Данная работа является частью проекта по разработке альтернативной гипотезы формирования системы Земля-Луна. Новая модель, свободная от ряда трудностей гипотезы мегаимпакта, предполагает образование Земли-Луны в результате ротационного коллапса пылевого облака. В данной работе доказывается возможность продолжительного во времени равновесного существования протопланетного облака, с наличием гравитационных и радиационных сил, вызванных интенсивным испарением льда в пропланетном облаке.

Существенный вклад в развитие данной концепции внесли специалисты в области космической баллистики: академик Т.М. Энеев, еще в 70-е г.г. исследовавший возможность аккумуляции планетных тел путем объединения пылевых сгущений; математик академик В.П. Мясников; крупный специалист в области газодинамики и суперкомпьютеров член-

корреспондент РАН А.В. Забродин; доктор физико-математических наук М.С. Легкоступов; доктор химических наук Ю.И. Сидоров; специалист в области компьютерного моделирования А.М. Кривцов

1.1 Происхождение Луны: ударная гипотеза и гипотеза одновременного образования с Землёй

Система Земля – Луна некоторыми учеными рассматривается не как система Планета – Спутник, а как двойная планета, поскольку размер и масса Луны достаточно велики. Диаметр Луны равен 3/4 диаметра Земли, а масса Луны составляет 1/81 массы Земли. В результате, вращение системы Земля – Луна происходит не вокруг центра Земли, а вокруг центра масс системы Земля – Луна, который находится на расстоянии 1700 км под поверхностью Земли.

Помимо объяснения величин углового момента и дефицита железа, теория претендующая на объяснение происхождения Луны должна обосновать сверхобедненность естественного спутника Земли летучими элементами. Этот вопрос долгое время оставался в тени [1], [5].

Луна содержит во много раз меньше K, Na и других летучих элементов по сравнению с углистыми хондритами. Состав углистых хондритов рассматривается как наиболее близкий к первоначальному космическому веществу, из которого формировались тела Солнечной системы. В качестве «летучих» будем понимать соединения углерода, азота, серы и воду .

Проблема гипотезы мегаимпкта в том, что при испарении вещества происходит явление, называемое фракционированием изотопов, то есть отношение стабильных изотопов лёгких элементов на Земле и Луне должно отличаться (например отношение $^{41}K/^{39}K$ должно было измениться на Луне на 60 промилле), но такого не наблюдается.

Исследуемая гипотеза свободна от обозначенной проблемы. В ней реализуется другая ситуация, когда испарение происходит в закрытой системе. В этом случае испарившаяся молекула может вновь вернуться в расплав. Тогда устанавливается некоторое равновесие между расплавом и паром. Понятно, что более летучие компоненты накапливаются в паровой фазе. Но вследствие того, что существует как прямой, так и обратный переход молекул между паром и расплавом изотопный эффект оказывается очень небольшим. Это –термодинамический изотопный эффект. При повышенных температурах он может быть пренебрежимо мал. Идея закрытой системы неприменима к расплаву, выброшенному на околоземную орбиту и испаряющемуся в космическое пространство. Но она вполне соответствует процессу, протекающему в облаке частиц. Испаряющиеся частицы окружены своим паром, и облако в целом находится в условиях закрытой системы.

Предположим теперь, что облако сжимается в результате гравитации. Происходит его коллапс. Тогда перешедшая в пар часть вещества выжимается из облака, а оставшиеся частицы оказываются обедненными летучими. При этом фракционирования изотопов почти не наблюдается!

Было рассмотрено несколько версий решения динамической задачи. Наиболее удачной оказалась модель динамики частиц (вариант модели молекулярной динамики), предложенная А.М. Кривцовым [12].

Опишем здесь эту модель:

Рассматривается облако частиц, каждая из которых движется в соответствии с уравнением второго закона Ньютона, как известно, включающего массу, ускорение и силу, вызывающую движение. Сила взаимодействия между каждой частицей и всеми остальными ча-

стицами f включает несколько слагаемых: гравитационное взаимодействие, упругую силу, действующую при соударении частиц (проявляется на очень малых расстояниях), и неупругую часть взаимодействия, в результате которого энергия столкновения переходит в тепло.

Необходимо принять определенные начальные условия. Решение ищется для облака частиц, имеющего массу системы Земля – Луна, и обладающего угловым моментом, характеризующим систему этих тел. На самом деле данные параметры для первоначального облака могли несколько отличаться как в большую, так и в меньшую сторону. Исходя из удобства компьютерного расчета, рассматривалась двумерная модель – диск с неравномерно распределенной поверхностной плотностью. С целью описать поведение реально трехмерного объекта в параметрах двумерной модели вводились критерии подобия при помощи безразмерных коэффициентов. Еще одно условие: нужно было приписать частице помимо угловой некую хаотическую скорость. Результаты работы более подробно освещены в [16]

Ранее попытки смоделировать образование Луны путем отрыва от быстро вращающейся Земли оказывались безуспешными. Угловой момент системы Земля - Луна был недостаточен для разделения общего тела на два фрагмента. То же получилось и с облаком частиц.

Однако ситуация коренным образом изменилась, когда приняли во внимание явление испарения.

Процесс испарения с поверхности частицы вызывает эффект отталкивания. Сила этого отталкивания обратно пропорциональна квадрату расстояния от испаряющейся частицы.

Компьютерное моделирование с использованием реальных параметров отчетливо показало появление ротационной неустойчивости, завершающейся формированием двух нагретых тел, одному из которых предстоит стать Землей, а другому – Луной.

Таким образом, предложенная динамическая модель объясняет возможность возникновения двойной системы Земля – Луна. При этом испарение приводит к утрате летучих элементов в условиях практически закрытой системы, обеспечивающей отсутствие заметного изотопного эффекта.

На основании предложенной модели предстоит выяснить, как возникает обедненность Луны железом, и почему Луна обеднена железом, а Земля – нет, при том, что в результате фрагментации возникают два аналогичных по условиям образования тела. В рамках данной гипотезы предполагается ,что это вызвано тем, что после фрагментации и образования в коллапсирующем облаке двух горячих тел, остается большое количество вещества в окружающем их облаке частиц. Окружающая масса вещества остается холодной по сравнению с относительно высокотемпературными консолидированными зародышами.

Первоначально оба фрагмента, как тот, которому предстояло стать Луной, так и тот, которому предстояло стать Землей, были обеднены летучими и железом практически в одинаковой степени. Однако компьютерное моделирование показало, что если один из фрагментов оказался (случайно) несколько большей массы, чем другой, то дальнейшая аккумуляция вещества протекает крайне асимметрично. Зародыш большего размера растет гораздо быстрее. С увеличением разницы в размерах лавинообразно возрастает различие скоростей аккумуляции вещества из оставшейся части облака. В результате зародыш меньшего размера лишь немного изменяет свой состав, в то время как зародыш большего размера (будущая Земля), аккумулирует практически все первичное вещество облака и в конечном счете приобретает

состав, весьма близкий к составу первичного хондритового вещества, за исключением наиболее летучих компонентов, безвозвратно покидающих коллапсирующее облако. Заметим, что утрата летучих элементов в этом случае происходит не за счет испарения в пространстве, а за счет выжимания остаточного пара коллапсирующим облаком.

Таким образом, предложенная модель объясняет сверхобедненность Луны летучими и дефицит железа в ней. Главная особенность модели — введение в рассмотрение фактора испарения, причем в условиях, исключающих или сводящих к малым величинам фракционирование изотопов. Этим преодолевается фундаментальная трудность, с которой сталкивается гипотеза мегаимпакта. Фактор испарения впервые позволил получить математическое решение развития двойной системы Земля – Луна при реальных физических параметрах. Нам представляется, что предложенная нами новая концепция происхождения Луны из первичного вещества, а не из мантии Земли, лучше согласуется с фактами, чем гипотеза мегаимпакта.

В данной модели ещё не всё понятно, в частности следует получить более строгое выражение для газодинамического отталкивания, которое до этого считалось силой, имеющий локальный характер, хотя более физичная модель должна учитывать взаимодействие каждой частицы с каждой, как это делается для описания гравитационного взаимодействия.

Для формирования планетной системы газопылевое облако должно довольно долго находится в состоянии равновесия, чтобы из частиц пыли успели образоваться зародыши Луны и Земли.

Мы будем искать распределение плотности в равновесном облаке, в котором действуют указанные силы. Вопроса устойчивости полученного решения касаться мы не будем.

1.2 Модель протопланетного облака системы Земля - Луна

Приступим к описанию исследуемой модели протопланетного облака и предположений об его эволюции.

Обычно, газопылевую туманность, в которой возникли планеты, их спутники, мелкие твёрдые тела — метеороиды, астероиды и кометы, называют протопланетным диском, так как на поздних этапах эволюции газ и пыль, окружающие молодую звезду "сплющиваются"в тонкий диск. Это происходит из стремления системы сохранить момент импульса при гравитационном коллапсе. Протопланетным облаком мы будем называть отделившееся,от протопланетного диска устойчивое образование, которое в последствии станет планетой (или планетной системой). На ранних стадиях развития системы Земля - Луна также сформировалось газопылевое облако, вращающееся по орбите вокруг Солнца и локализованное внутри своей сферы Хилла.

На каждую частицу в протопланетном облаке действуют гравитационная сила и радиационная сила со стороны всех других частиц облака. Радиационной силой мы назовём силу отталкивания, обусловленную испарением ледяной составляющей пылевых частиц — воды, метана, аммиака и др. В модельном приближении будем считать, что вся пылевая частица состоит из льда.

Также, как уже упоминалось, в протопланетном облаке присутствует сила газового давления.

Описываемое в данной работе протопланетное облако находится в состоянии равновесия. Устойчивость облака обеспечивается адиабатическим нагревом и усилением испарения при сжатии всего облака или его фрагментов. Основная часть газа удерживается гравитационным полем облака, что позволяет облаку оставаться в квазиавновесия на протяжении десятков миллионов лет. При абсолютно неупругом соударении молекул газа с пылевыми частицами и отсутствии утечки газа из облака его равновесие может сохраняться неограниченно долго. Стоит отметить, что на данной стадии слипание частиц предотвращается усилением газового отталкивания при сближении отдельных частиц.

В течении периода относительного равновесия происходит медленное расходование запасов льда в связи постепенной утечкой газа с поверхности облака (связанной с вылетом наиболее быстрых молекул за сферу Хилла и выносом газа Солнечной радиацией).

При истощении запасов газа наступает относительно быстрый коллапс облака, продолжительностью от нескольких лет до десятков или даже сотен лет. Точную оценку его продолжительности можно получить проведя компьютерное моделирование, учитывающем влияние газовой составляющей. В ходе коллапса происходит разогрев и дополнительная адиабатическая потеря относительно летучих элементов, не сопровождающаяся изотопным фракционированием (в т.ч. потеря Rb, Xe, Pb, а также Fe). В это время образуются зародыши Земли и Луны, их суммарная масса значительно (более чем на порядок) меньше современной, а массы зародышей имеют один порядок.

После завершения коллапса и формирования двойной системы начинается медленный рост зародышей в результате сбора рассеянного пылевого материала (остатков облака, а также частиц, вращающихся по гелиоцентрической орбите). Затем зародыши планет растут в результате аккреции рассеянного пылевого и метеороидного материала. Эта стадия может продолжаться десятки миллионов лет.

Рост зародышей происходит неравномерно, больший (Протоземля) растет значительно быстрее меньшего (Протолуна), за счет чего значительно быстрее обогащается летучими элементами.

Полагается, что изначальный кинетический момент системы был достаточен для разрыва облака на два зародыша. Затем в ходе аккреции система пополнялась массой с пренебрежимо малым кинетическим моментом. Это объясняет, почему современное значение удельного момента системы Земля - Луна недостаточно для формирования двойной системы.

1.3 Необходимые понятия и соотношения

В этой части мы дадим некоторую справочную информацию об основных математических и физических памятках используемых в работе, чтобы не возвращаться к ним в дальнейшем.

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, равную числу событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга. Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального распределения, когда число испытаний ($N \to \infty$) велико, а вероятность успеха в одном испытании мала ($p \to 0$), но при этом произведение ($Np = \lambda$) остается постоянным. В таком случае, вероятность появления случайного события ровно m раз находится следующим образом:

$$P_m(N) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \tag{1.1}$$

О теории политропных шаров

Политропный газ — математическая модель газа, частный случай идеального газа, в котором внутренняя энергия является линейной по температуре функцией. Модель политропного газа широко распространена в прикладных исследованиях благодаря её сравнительной аналитической простоте и подтверждённому опытом хорошему приближению к действительности.

Уравнение состояния политропного газа имеет вид:

$$p = A(S)\rho^{\gamma} \tag{1.2}$$

где

$$A(S) = Re^{\frac{S-S_0}{c_v}} \tag{1.3}$$

и

$$\gamma = 1 + \frac{R}{c_v} \tag{1.4}$$

p— давление; ρ — плотность; S — энтропия; c_v — удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме; γ — показатель адиабаты; R — универсальная газовая постоянная;

Политропный газ нас интересует постольку поскольку именно модель политропных шаров (то есть самогравитирующих шаров из политропного газа) была предложена астрофизиками для описания равновесия звёзд, в те времена, когда все звёзды считались конвективными. Теория политропных газовых шаров была построена Эмденом в 1907 году [17].

В рамках данной модели будем считать, что уравнение состояния газа, из которого состоит протопланетное облако подчиняется политропному закону.

Так как в рамках исследуемой модели невозможно определить ни энтропию, ни теплоёмкость газа, величины $A(S)$ и γ будем считать параметрическими.

Об уравнении равновесия

Для звезды, находящейся в равновесии, векторная сумма всех сил действующих на какой-либо элемент объёма dV, должна быть равна нулю. В рамках модели считается, что помимо гравитации на частицы действует отталкивающая сила, вызванная испарением частиц (в дальнейшем будем называть её радиационной силой). Помимо гравитации и радиационной силы в протопланетном облаке существует третья сила, а именно давление газа (точнее градиент давления).

Будем считать, что хоть переносчики силы давления и радиационной силы одни и те же (молекулы), эти силы можно однозначно отделить друг от друга. Это предположение верно, лишь в том случае, если за время свободного пробега испарившейся молекулы она не встретиться с молекулами газа, и следовательно её скорость и направление движения не меняется. Как точно соблюдается это правило и соблюдается ли оно вообще можно сказать зная точно соотношение концентраций и размеров твёрдого и газообразного вещества в протопланетном облаке. В рамках модели ответ на данный вопрос получен быть не может.

Вместе с тем, точное соблюдение этого принципа, возможно является необязательным, так как в дальнейшем будет показано, что радиационная сила падает с расстоянием по экспонентациальному закону, и поэтому оказывает своё влияние только между довольно близкими частицами. Если "близость"понимать, как расстояние при котором радиационная сила вносит существенный вклад в силы межчастичного взаимодействия, то такую модель можно считать вполне обоснованной.

Рассмотрим более подробно силу давления: в общем случае давление P является величиной, позволяющей описать силу, действующую на выделенный в жидкости или газе объем V произвольной формы со стороны окружающего его вещества, как интеграл по разделяющей поверхности [14]:

$$\vec{F} = -\oint_S P d\vec{S} \tag{1.5}$$

где давление P зависит только от состояния вещества на этой поверхности. Вектор $d\vec{S} = \vec{n}dS$ (n — нормаль к элементу поверхности) направлен в любой точке наружу от поверхности, поэтому в (1.5) перед интегралом стоит знак минус. Из (1.5) следует размерность давления дин/см^3.

В отсутствии радиационной силы для сферически-симметричных звезд уравнение гидростатического равновесия имеет вид [14]:

$$\frac{dP}{dr} + \rho\frac{Gm(r)}{r^2} = 0 \tag{1.6}$$

Если добавить в это выражение слагаемое отвечающее за радиационную силу, F_{rad}, действующую на элементарный объём со стороны всего облака, то получим выражение равновесия для данной модели.

2. Исследование переноса излучения

2.1 Введение

Взаимодействию излучения с веществом посвящено множество научных работ и монографий (например [6], [13], [18]), этой темой занимаются довольно долго и она может считаться уже вполне изученной. В основном эти работы касаются переноса электромагнитного излучения или частиц высоких энергий в газах([19]), в таких средах перенос излучения сводится к совокупности элементарных процессов рассеяния (упругого и неупругого), поглощения и генерации электроманитного излучения. Каким образом кванты излучения будут взаимодействовать с веществом в общем случае зависит от частоты. Что именно переносится, фотоны света или молекулы вещества, математически разницы нет (конечно, если мы исключаем квантово-механические явления из описания). В рассматриваемой модели по понятным причинам зависимости от частоты нет.

Задача, которую решает теория переноса излучения можно сформулировать следующим образом: "При известных характеристиках среды и входящего в среду излучения необходимо определить закон изменения интенсивности излучения в зависимости от пройденного расстояния".

В общем случае эту задачу решает так называемое "Уравнение переноса излучения полученное Чандроссекаром [13].

Но это уравнение в общем случае имеют интегродифференциальный вид и часто неразрешимо.

Можно показать, что силу с которой это излучение давит на поверхность определяется интенсивностью излучения приходящего на эту поверхность.

Все три описанные силы зависят от распеределения концентраций газа и пылинок (радиационная сила зависит только от концентрации пылинок, газовое давление от плотности газа, а гравитационная сила от массы пыли и газа в данной точке пространства), причём это уравнение также интегродифференциальны.

В данной работе нам следует решить обратную задачу: зная силу давления молекулярного излучения в зависимости от радиуса протопланетного облака (а она равняется силе газового давления минус сила гравитационного притяжения), нужно определить концентрацию частиц в облаке.

Чтобы полученное уравнение равновесия в принципе имело решение, необходимо иметь уравнение связывающее каким-то образом концентрации газа и частиц. Откуда его получить мы не можем ответить. Поэтому в работе считается, что эти концентрации пропорциональны друг другу, и в дальнейшем вместо двух разных концентраций пылинок и газа, будем

использовать одну и относительно неё разрешать уравнение.

2.2 Испарение ледяных частиц

Радиационная сила вызвана испарением частиц, но в космосе не образуется жидкая фаза. Лёд сублимирует, то есть сразу переходит в газообразное состояние.

На сегодняшний день не существует теории достаточно точно количественно описывающей сублимацию льда. Видимо, причина этого в том, что скорость испарения льда в космическом пространстве и в атмосфере будет различаться. Легко понять почему: в вакууме оторвавшиеся от поверхности молекулы безвозвратно покидают ледяную частицу, в атмосфере же, есть вероятность молекуле столкнувшись с атмосферной молекулой вернуться обратно, также молекулы атмосферы могут быть захвачены ледяной поверхностью. И чем выше давление, тем меньше скорость испарения, при той же температуре. Но создать условия космического вакуума на Земле достаточно сложно.

Можно выделить как минимум четыре принципиально разных подхода к описанию испарения льда.

- Описание первого подхода можно найти в [20]. В его основе лежит эмпирически установленная А.Дельземмом и З.Секаниной формула для скорости сублимации вещества с поверхности кометы в зависимости от гелиоцентрического расстояния

$$Z = Z_0 g(r), \qquad g(r) = \alpha \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-m} \left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n}\right]^{-k} \tag{2.1}$$

  где Z_0 - количество испаряющихся в 1 секунду молекул с 1 кв. см. поверхности на гелиоцентрическом расстоянии в 1.0 а.е. А.Дельземм получил, что для водяного снега при значении альбедо ядра в видимом и инфракрасном участках спектра, равном 0.1, количество испаряющихся молекул $Z_0 = 3^{17}$молсм$^{-2}$с$^{-1}$, а для остальных постоянных им найдены следующие значения: $r_0 = 2.808\ a.e.,\ m = 2.15,\ n = 5.093,\ k = 4.6142,\ \alpha = 0.111262$.

- Второй подход предполагает использовать формулу Люнгмюра для испарения вещества в вакуум [21]. Если вещество в процессе испарения не разлагается, то скорость испарения с единицы поверхности описывается следующей формулой:

$$\frac{\Delta m}{\Delta \tau} = \alpha P \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}, \tag{2.2}$$

  где P — давление насыщенного пара при температуре T; α — коэффициент испарения, который зависит от состояния и чистоты поверхности, для чистых веществ $\alpha \approx 1$; M — молекулярная масса испаряющегося вещества.

  Эта формула справедлива только для случая испарения в вакуум, когда испарившиеся частицы не возвращаются к поверхности испарения в результате столкновения с другими частицами. Если давление остаточного газа в камере сравнимо с давлением насыщенного пара, то скорость испарения существенно уменьшается.

Таким образом, скорость испарения вещества определяется главным образом давлением насыщенного пара P.

- Третий подход выводится из общих термодинамических соотношений [22]. Адсорбированная молекула не лежит на поверхности неподвижно. В действительности она колеблется вблизи поверхности с некоторой частотой. Каждое такое колебание может рассматриваться как попытка разорвать связь между молекулой и поверхностью. Если связь будет разорвана, молекула может покинуть поверхность пылинки и уйти обратно в газ —десорбировать.

  Этот процесс описывается уравнением Поляни-Вигнера. Интенсивность испарения — это количество молекул, испарившихся за 1 сек. с 1 см.^{2} поверхности в 1 рад. телесного угла. Согласно этому уравнению, средняя интенсивность (с$^{-1}$ см.$^{-1}$ рад.$^{-1}$), с которой молекулы будут покидать пылевую частицу, равна

$$j = \nu_0 \theta^n e^{-E_D/kT}, \tag{2.3}$$

  ν_0 — частота колебаний молекулы вблизи поверхности, $\nu_0 \approx 10^{12}$ Гц

  θ — количество молекул на поверхности пылинки;

  n — порядок десорбции:

  $n = 0$ — лёд толстый и испарение идёт только с поверхности.;

  $n = 1$ — лёд тонкий (1-2 атомарных слоя);

  E_D — энергия десорбции.

  Энергии десорбции E_D различны для различных атомов и молекул. Они зависят и от свойств поверхности. Их точное определение — непростая задача, решаемая, как правило, с помощью лабораторных экспериментов. Для молекулы воды, согласно последним измерениям — 0.5 эВ. Критическая температура, при которой начинается активная десорбция для воды — около 100 K.

Автор работы предлагает использовать третий подход, как наибоолее подходящий к условиям модели. В отличии от первых двух в нём совсем нет подгоночных параметров.

Запишем выражение для интенсивности в виде

$$j = \alpha \exp\left(-\frac{\beta}{T}\right), \tag{2.4}$$

где

$\alpha = 10^{12}, \quad \beta = 0.5 \cdot 8.67 \cdot 10^{-5} = 5.77 \cdot 10^3$

Из уравнения состояния для идеального газа легко видеть, что температура в политропных шарах пропорциональна плотности в степени $\gamma - 1$.

Поэтому для интенсивности имеем:

$$j = \alpha \exp\left(-\frac{\hat{\beta}}{\rho^{\gamma-1}}\right) \tag{2.5}$$

Таким образом, мы получили выражение для интенсивности испарения частиц.

Также через эту величину можно оценить «время жизни» ледяных частиц.

Рассмотрим частицы полностью состоящие изо льда

Изменение их массы связано с интенсивностью испарения очевидной формулой

$$\dot{m} = 4\pi r^3 j \tag{2.6}$$

Представим массу как $m = (4/3)\pi r^3 \rho_{part}$, где ρ_{part} плотность частицы и подставим её в (2.6)

Разрешая это уравнение относительно дифференциала радиуса, получаем

$$\dot{r} = \frac{j}{\rho_{part}} \tag{2.7}$$

Отсюда несложно получить "время жизни"частицы

$$\tau = \frac{r\rho_{part}}{j} \tag{2.8}$$

2.3 Изменение интенсивности излучения

В этом разделе мы введём понятие интенсивности и потока излучения.

Будем считать, что все частицы представляют собой идентичные сферы с площадью поперечного сечения σ и массой m_p которые испаряются с интенсивностью $j(r)$, зависящей от расстояния r до центра облака интенсивностью. Удары молекул о частицы протопланетного облака будем считать абсолютно неупругими, соударениями между молекулами, в силу их малости, пренебрежём. Молекулы распространятся в радиальных направлениях от испаряющейся частицы со скоростью v. При таких условиях можем рассматривать испарение молекул с частиц, как некий вид излучения. Также будем считать, что распределение концентрации частиц в протопланетном облаке имеет центральную симметрию.

Определим интенсивность излучения таким образом: возьмём элементарную площадку площадью $d\delta$, ориентированную перпендикулярно направлению излучения. Если излучение падает в течение промежутка времени dt в телесном угле $d\omega$, то количество частиц, проходящее сквозь площадку будет пропорционально $kd\delta d\omega dt$, то есть

$$dN = Id\delta d\omega dt \tag{2.9}$$

Коэффициент пропорциональности I, входящий в эту формулу, будем называть интенсивностью молекулярного излучения, или просто интенсивностью излучения.

Отметим, что ранее введённая интенсивность испарения имеет смысл интенсивности излучения, исходящий с испаряющейся частицы. Поэтому интенсивность излучения элементарного объёма это произведение интенсивности испарения отдельной частица и концентрации частиц в этой точке.

Другой важной характеристикой, которой мы будем пользоваться, является поток молекулярного излучения. Эта величина представляет собой количество молекул прошедшее за

единицу времени через единичную площадку. Будем обозначать поток излучения через H. Тогда количество молекул протекающее за промежуток времени dt через площадку $d\delta$ будет

$$dN = Hd\delta dt \tag{2.10}$$

Рассмотрим излучение, проходящее сквозь единичную площадку $d\delta$, в направлении образующим угол $d\vartheta$ с её внешней нормалью. Несложно показать [6], что поток есть интеграл по всем направлениям от проекции интенсивности на нормаль. Математически это запишется так:

$$H = \int I \cos\vartheta d\omega \tag{2.11}$$

или в полярной системе координат

$$H = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} I \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta, \tag{2.12}$$

где φ азимут выбранного направления.

Рассмотрим элементарный объём. Пусть исходящее из него излучение имеет интенсивность I. Поток излучения на расстоянии r можно найти [6] по формуле

$$H = \sigma I \frac{1}{r^2} \tag{2.13}$$

Можно показать, что интенсивность излучения в пустом пространстве на любом расстоянии от частицы одинакова.

При локальном лучевом равновесии поток излучения по определению отсутствует, однако поток излучения выходящей из некоторого объёма не равен нулю. Найдём его. Для этого нужно в уравнении (2.12) поменять верхний придел интегрирования по ϑ на $\pi/2$

$$H = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I \cos\vartheta \sin\vartheta = \pi I \tag{2.14}$$

Теперь рассмотрим одну частицу которая испаряется в совершенно пустой Вселенной. Можно показать, что плотность молекул $\rho_{gas}(r)$, испарившаяся с частицы обратно пропорциональна, квадрату расстояния до частицы.

Действительно, напишем уравнение непрерывности для молекул отделившихся от частицы, с источниковым членом в правой части:

$$(\vec{\nabla} \cdot \rho_{gas}(r)\vec{v}) = j\sigma\delta^3(r), \tag{2.15}$$

где σ — площадь частицы, а $\delta^3(r)$ — дельта-символ Кронекера, v — скорость молекул.

Первое слагаемое в силу стационарности-ноль.

$$\rho_{gas}(r)v \cdot 4\pi r^2 = j\sigma \tag{2.16}$$

Тогда интегрируя по всему объёму находим:

$$\rho_{gas}(r) = \frac{j\sigma}{4\pi r^2 v} \tag{2.17}$$

Что можно переписать, как

$$\rho_{gas}(r) = \frac{H}{4\pi v} \tag{2.18}$$

Рассмотрим, аналогичную частицу, с той же поверхностной площадью σ, находящейся на расстоянии r от первой частицы. Подсчитаем радиационную силу отталкивания между частицами (см. 2.1).

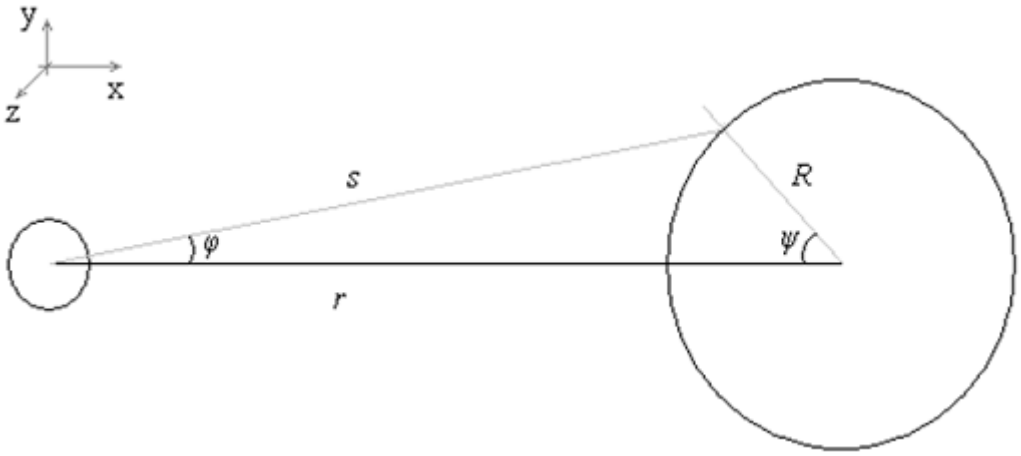

Рис. 2.1:

Приближённо переданный импульс при абсолютно-неупругом ударе за время Δt будет[1]

$$\Delta p = \frac{k\sigma\Delta t}{8\pi} H \tag{2.19}$$

Сила радиационного отталкивания поэтому:

$$F_{rad} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{k\sigma}{8\pi} H \tag{2.20}$$

Теперь будем считать, что среда, в которой распространяется излучение не пуста, а заполнена частицами. В таком случае интенсивность будет некоторым образом меняться вдоль луча. В оставшейся части этого параграфа мы выведем уравнение, которое определяет закон этого изменения. Этот эффект назовём эффектом экранирования излучения, а следовательно радиационной силы.

Чтобы найти закон распространения радиационного излучения в облаке, воспользуемся простой моделью. Некоторый объём пространства представим в виде цилиндра с основанием H и длиной L. В этом цилиндре находятся частицы — сферы с эффективной площадью (площадь поперечного сечения данном случае) $s = \sigma/4$.. Пусть, перпендикулярно основанию в цилиндр, по прямым траекториям входят N молекул.Каждая молекула упавшая на частицу, ей тотчас поглощается.

Наша задача ответить на вопрос: сколько в среднем лучей достигнет противоположной стенки цилиндра?

Эта задача равносильна следующей: На некоторой поверхности площадью H нанесена в случайном месте точка. На поверхность набрасываются случайным образом окружностей площадью s . Какова вероятность того, что точка останется непокрытой? Будем решать её. Ответ легко получить из закона распределения Пуассона.

Очевидно, что вероятность того, что точка покроется одной окружностью есть отношение площади окружности к площади поверхности:

$$P = \frac{S}{H}. \tag{2.21}$$

В том случае, если набрасывается k окружностей, коэффициент λ в распределении Пуассона равен

$$\frac{k \cdot S}{H}. \tag{2.22}$$

Нас интересует случай, когда $m = 0$, случай, когда точка не покрылась ни одной окружностью, т.е. случай, когда луч прошёл через цилиндр со сферами ни встретив ни одну на своём пути.

Подставляя $m = 0$, в формулу Пуассона (1.1), находим $P_0(N) = e^{-\lambda}$.

Поэтому из N лучей в среднем пройдёт

$$N_{ex} = N \cdot e^{-\lambda} = N \cdot \exp\left(-\frac{k \cdot s}{H}\right) = N \cdot \exp\left(-\frac{k \cdot L \cdot s}{H \cdot L}\right) = N \exp(-\rho S L) \tag{2.23}$$

лучей, где ρ- концентрация частиц в рассматриваемом объёме.

Для подтверждения аналитической формулы и для большей наглядности указанной зависимости был поставлен компьютерный эксперимент. Программа была написана в среде «matlab». Для упрощения расчётов моделировался двумерный случай. Задавалась концентрация (как правило небольшое число, меньшее 10), которая домнажалась на площадь поля $L \times H$ ($H = 50$, значение L менялось), что давало количество частиц k. Затем k точек случайном образом (с нормальным распределением) наносились на это поле (создавался двумерный массив из случайных чисел по оси абцисс от 0 до L, и по оси ординат от 0 до H). Каждая точка представляла собой центр задерживающей частицы. при этом осуществлялась проверка от того, чтобы два центра частиц не располагались ближе друг к другу, чем «диаметр» частицы, в данном случае равный единице ($\Delta x^2 + \Delta y^2 > 1$, Δx и Δy — разница между соответствующими декартовыми координатами).

Затем в интервале от нуля до H выбиралось случайным образом N чисел (моделирующих случайным образом N лучей —вошедших молекул по прямым траекториям перпендикулярным H). Для каждого числа вычислялась разница между ним и каждой из k ординат частиц. Одновременно включался счётчик. Если модуль этой разницы для всех k частиц был больше половины радиуса, то значение счётчика увеличивалось на единицу, в противном случае значение счётчика оставалось неизменным (таким образом моделировалось экранирование).

После проверки всех N точек, значение счётчика для данного L запоминалось, а L увеличивалась.

Значение L менялось от 0 до 1000 с шагом 10.

Зависимость числа пройдённых лучей от в некотором объёме проиллюстрирована на рисунке 2.2

Синими кружочками нарисовано аналитическое решение, концентрация частиц равна 8. Как видно эксперимент имеет хорошее совпадение с теорией.

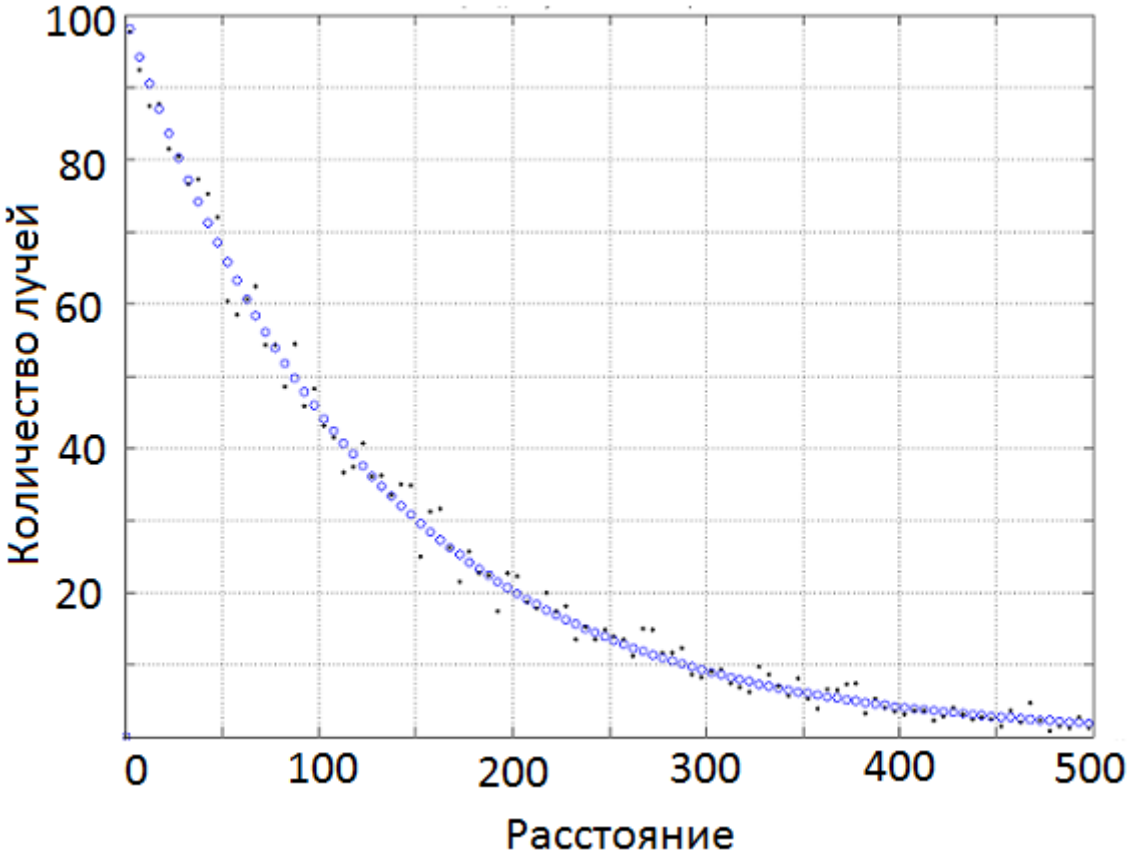

Рис. 2.2:

Формула (2.23) и описанный выше компьютерный эксперимент показывают изменение потока излучения вдоль луча. Так как излучение в процессе распространения не покидает рассматриваемый объём, то применима формула (2.14), связывающая интенсивность и поток, а следовательно, найденная зависимость есть закон изменения интенсивности вдоль луча с точностью до константы π.

В случае если концентрация частиц неоднородна, очевидно надо подэкспонентациальное выражение заманить на интеграл по координате.

Поэтому в общем случае

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\int_0^L \rho(r) S dr\right), \tag{2.24}$$

где I_0 — начальная интенсивность излучения.

В принципе, из тех же соображений можно вывести закон изменения интенсивности для излучающих частиц.

2.4 Уравнение переноса излучения. Сферически-симметричный случай

В предыдущем параграфе была выведена формула для изменения интенсивности вдоль луча (2.24). Эту же соотношение даже в более общем случае было получено Чандрасекаром

[13] из решения дифференциального уравнения для интенстивности. Повторим здесь его рассуждения.

Рассматриваемая среда обладает способностью поглощать и испускать молекулы.

Рассмотрим слой поглощающей среды, толщиной ds. Доля поглащённых молекул в этом слое будет пропорциональна длине этого пути ds. Коэффициент пропорциональности назовём коэффициентом поглощения, обозначим его χ.

В результате прохождения излучения сквозь такой слой, интенсивность уменьшится на величину $I\chi ds$, где I интенсивность изучения перед попаданием в слой ds.

Так как множитель χds должен быть безразмерным, то коэффициент поглощения χ имеет размерность, обратную длине. Можно показать, что $\chi = \rho\sigma$, где ρ концентрация частиц в объёме, толщиной ds.

Если частицы в данном слое излучают молекулы, то первоначальная интенсивность увеличится на величину εds. Назовём $\varepsilon = nj\sigma$ коэффициентом излучения (j-интенсивность испарения частицы протопланетного облака).

Таким образом для полного изменения интенсивности можем записать

$$\frac{dI}{ds} = -I\chi + \varepsilon \tag{2.25}$$

Уравнение (2.25) называется уравнением переноса

Формальное решение уравнения переноса даётся в виде суммы двух экспонент с интегралами в показателе:

$$I(s) = I_0 e^{-\int\limits_0^s \chi(s)ds} + \int_0^s \varepsilon(s') e^{-\int\limits_{s'}^s \chi(s)ds} ds', \tag{2.26}$$

I_0, как и прежде, начальная интенсивность, при $s = 0$.

В сферически-симметричном случае излучение зависит от двух аргументов: от расстояния r от центра облака, и от угла ϑ между направлением излучения и направлением радиус-вектора.

В таком случае можно показать, что уравнение переноса излучения будет иметь следующий вид:

$$\cos\vartheta \frac{\partial}{\partial r} I(r,\vartheta) - \frac{\sin\vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} I(r,\vartheta) = \sigma\rho(r) I(r,\vartheta) \tag{2.27}$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных имеет решение вида [24]:

$$F_0\left(\sin\vartheta r\right) \exp\left(-s \int_{\Delta r} \frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\vartheta}} da\right), \tag{2.28}$$

Произвольная функция $F_0(r\sin\vartheta)$ находится приравниваем к начальной интенсивности решения уравнения с $\rho(r) = 0$. Экспонента в таком случае равна 1 и поэтому функция F_0 равна константе — начальной интенсивности I_0. Таким образом

$$I = I_0 \exp\left(-s \int_{\Delta r} \frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta}} da\right) \tag{2.29}$$

Предположим, мы хотим найти интенсивность излучения, которую регистрирует частица, расположенная в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ от частицы в точке с радиус-вектором $\vec{x}$.

В интеграле стоящем под экспонентой переменная a должна пробегать значения от $r - x$ до x (для определённости, пусть $r \geq x$). Но такие приделы ставить некорректно, потому что в ряде случаев может получиться абсурдный результат. Так например, при равенстве модулей векторов $\vec{r}$ и $\vec{x}$ правая часть (2.29) есть тождественный нуль, тогда как совершенно очевидно что при любом ненулевом угле между радиус-векторами $\vec{r}$ и $\vec{x}$ это выражение не может быть нулём.

Эта проблема имеет понятную причину: если к отрезку, соединявшему $\vec{r}$ и $\vec{x}$ провести перпендикуляр, то переменная в точке пересечения перпендикуляра с отрезком имеет минимальное значение. То есть из-за того, что поведение переменной немонотонно в сферической геометрии, интеграл берётся как-бы по замкнутому контуру, поэтому оказывается равен нулю. Следовательно простейшее решение видется в том, чтобы разбить данный интеграл на два, на которых переменная будет вести себя монотонно. Следует так же учесть, что при прохождении излучения в поглощающей среде его интенсивность не может увеличатся, поэтому необходимо сделать так, чтобы подынтегральное выражение всегда было больше нуля. В итоге, получим:

$$I = I_0 \exp\left(-s\int_{l_p}^{x} \frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta}}da\right) \times \exp\left(-s\int_{l_p}^{r} \frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta}}da\right), \tag{2.30}$$

где l_p — длина перпендикуляра к отрезку, соединявшему вершины векторов $\vec{r}$ и $\vec{x}$

2.5 Результаты

В главе выведены соотношения определяющие испарение вещества в космическое пространство, определена интенсивность молекулярного излучения, выведен на основании распределения Пуассона закон измененная интенсивности излучения в поглощающей среде, проведён двумерный компьютерный эксперимент, подтверждающий теоретические выводы.

Эта зависимость оказывается имеет обратный экспонентациальный характер, где неизвестная функция плотности стоит под интегралом в экспоненте.

Изучено уравнение переноса излучения. Его формальное решение оказалось обобщением выеденного ранее закона. Получено решение уравнения переноса в сферически-симметричном случае. Предложена форма записи решения, недопускающая нефизичных результатов.

3. Уравнение равновесия

3.1 Введение

В предыдущей главе главным образом исследовалось распространение излучения в поглощающих средах. В этой главе мы установим связь между излучением и силой, с которой оно действует на элементарный объём.

Основная же цель данной главы написать уравнение равновесия и построить его численное решение. Получить аналитическое решение не представляется возможным ввиду сложности задачи.

Как было уже сказано, теория переноса излучения имеет долгую историю развития. Было разработано и разрабатывается множество методов приближённого решения уравнения переноса.

В данной работе, решается обратная задача, поэтому разработанные методы не подходят для нашего случая.

Данная глава посвящена формулировала уравнения равновесия протопланетного газопылевого облака и отысканию его решения.

Равновесие газовой составляющей газопылевого облака может быть описано на основе уравнения Лейна-Эмдена для политропных газовых сфер [14]. Рассмотрение показывает, что изотермическое состояние облака неустойчиво, а равновесие может быть достигнуто при показателе политропы $n = 1/(\gamma - 1) < 3$, чему соответствует увеличение температуры к центру облака. В последнем случае облако имеет четко выраженную границу (в отличие от неограниченного изотермического облака).

Но существует ряд проблем в описании газопылевого облака в рамках этой модели.

- Если искать решение в виде $\rho = \lambda\Theta^n$ (Θ — некий параметр, зависящий от температуры), как это обычно делают (см. [13], [14]), то получится, что на границе шара плотность, давление и температура обращаются в ноль, что нефизично [25]

- Для конкретного расчета требуется значение размерной константы в уравнении политропы, однако неясно, каким образом выбирать это значение. (Эта проблема уже упоминалась ранее)

- Уравнение баланса энергии для стационарного состояния облака без внутреннего подвода энергии дает равенство нулю градиента теплового потока, что может быть для сферического неизотермического облака реализовано только, если тепловой поток обратно пропорционален квадрату расстояния до центра облака. Но из этого следует а)

бесконечная температура в центре (a, значит, и бесконечное давление) b) подвод энергии в центральную точку облака. Для звезд эта проблема, видимо, сглаживается подводом энергии от ядерных реакций, в случае же газового облака эти результаты приводят к противоречию с рассматриваемой моделью.

Однако понятно, что самогравитирующее газовое облако должно иметь некоторое стационарное состояние. Следовательно, либо существует устойчивое изотермическое решение, либо в предыдущих рассуждениях содержится ошибка, либо требуется альтернативная модель.

Ответы на данные вопросы нами не получены. Мы продолжаем придерживаться существующей модели.

3.2 Гравитационная сила

Напишем уравнение для силы гравитационного притяжения для двух элементарных объёмов вещества.

Рассмотрим два элементарных объёма с радиус-векторами $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ и углом θ между ними (см. рис 3.1).

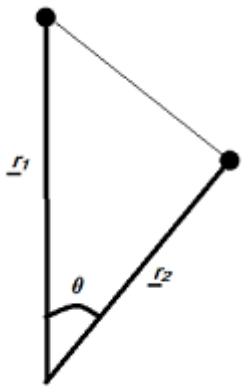

Рис. 3.1:

В этих точках концентрация частиц суть $\rho(r_1)$ и $\rho(r_2)$ соответсвенно.

Обозначим за $f_{grav}(r_1, r_2)$ модуль силы гравитационного притяжения, между элементарными объёмами вещества $\underline{\mathbf{r_1}}$ и $\underline{\mathbf{r_2}}$. Силу гравитационного притяжения запишется в виде:

$$f_{grav}(r_1, r_2) = G\frac{m(r_1)m(r_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta)}, \tag{3.1}$$

где $m(r_1)$ и $m(r_2)$ массы соответствующих объёмов вещества, в силу центральной симметрии, зависящие только от расстояния до центра облака.

Далее будем рассматривать объёмную гравитационную силу, то есть гравитационную силу отнесённую к объёму $dV(\underline{\mathbf{r_1}})$. Обозначим её за за $F_{grav}(r_1)$. Масса есть плотность умноженная на занимаемый ею объём.

Плотность вещества ρ_c, в свою очередь, есть плотность газа ρ_{gas} плюс концентрация частиц ρ, помноженная на среднею массу пылевой частицы m_p. Будем считать, что плотность газа пропорциональна концентрации частиц, с коэффициентом пропорциональности ν ($\rho_{gas} = \nu\rho$).

$$\rho_c = \rho_{gas} + \rho m_p = (\nu + m_p)\rho \tag{3.2}$$

Тогда для модуля гравитационной силы, действующей между веществом с радиус-векторами $\underline{\mathbf{r_1}}$ и $\underline{\mathbf{r_2}}$ можем записать:

$$F_{grav}(r_1) = \gamma \frac{\rho(r_1)\rho(r_2)dV(r_2)}{L^2} \tag{3.3}$$

где $dV(r_2)$ объём в точке r_2, а $\gamma = G(\nu + m_p)^2$, G — гравитационная постоянная,
а $L^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta$ — квадрат расстояние между частицами.

3.3 Радиационная сила

Теперь будем искать общее выражение для радиационной силы в точке $\underline{\mathbf{r}}$.

Каждая молекула обладает импульсом p, если эта молекула столкнулась с некоторой частицей протопланетного облака, то эта частица получает приращение количества движения p в направлении движения молекулы. Этим и вызывается давление излучения на частицы.

Возьмём элементарный объём с площадью основания $d\delta$ и толщиной dr. Допустим, что на объём падает излучение со всех сторон и найдём силу молекулярного давления, действующую на объём в направлении нормали к основанию.Рассмотрим сперва излучение падающие на объём под углом ϑ к нормали внутри телесного угла $d\omega$ в течение промежутка времени dt. Если интенсивность излучения I, то количество молекул, падающее на объём, будет равно $Id\delta\cos\vartheta d\omega dt$. Однако не все эти молекулы производят давление на объём, а только часть их, поглощаемая этим объёмом. Так как путь молекул в объёме равен $dr\sec\vartheta$, то количество поглощенных объёмом частиц равно $I\chi d\delta dr d\omega dt$, где $\chi = \rho\sigma$ — коэффициент поглощения в данной точке пространства. Количество движения получаемое объёмом в направлении нормали равно количеству этих частиц, умноженных на импульс одной молекулы и на $\cos\vartheta$. Следовательно, указанное количество движения после сокращения на скорость молекул будет равно

$$\cos\vartheta k I\chi d\delta dr d\omega dt \tag{3.4}$$

где k — импульс молекулы газа.

Интегрируя это выражение по всем направлениям, получаем полное количество движения, приобретаемое объёмом за время dt. Оно равно

$$dtd\delta drk\chi \int I\cos\vartheta d\omega = dtd\delta drk\chi H \tag{3.5}$$

Таким образом, сила, которая действует на элементарный объём, отнесённая к этому объёму равна:

$$F_{rad} = k\chi H \tag{3.6}$$

Поток H от одной из частиц, который «чувствует» другая, из формулы (2.13) обратно пропорционален квадрату расстояния между частицами.

Также поток уменьшается из-за ослабления интенсивности излучения в среде.

Напишем здесь силу, с которой вещество в элементарном объёме с радиус-вектором $\vec{r_2}$ отталкивает от себя вещество с радиус-вектором $\vec{r_1}$.

Потери интенсивности в сферически-симметричном случае даются уравнением (2.30). Подставив это выражение в (2.13), мы найдём поток излучения в поглощающей среде. Сила находится выражением (3.6).

В конечном счёте имеем

$$dF(r_1)_{rad} = K\rho(r_1)j(r_2)\exp\left(-s\int_{l_p}^{r_2}\frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2-r_1^2\sin^2\theta}}da\right)\exp\left(-s\int_{l_p}^{r_1}\frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2-r_1^2\sin^2\theta}}da\right)\frac{dV(r_2)}{L^2}, \tag{3.7}$$

где сохранены обозначения предыдущего параграфа, а константа $K = k\mu\sigma^2$.

Если же мы имеем протопланетное облако произвольной геометрии, то радиационную силу можно представить в следующем виде[2] .

$$dF(r)_{rad} = Kj(r_2)\rho(r_1)\rho(r_2)\exp\left(-sL\int_0^1\rho(q)d\lambda\right)\frac{dV(r_2)}{L^2}, \tag{3.8}$$

где $q^2 = \lambda^2 r^2 + (1-\lambda)^2 r_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)r_1 r_2\cos\theta$.

3.4 Решение уравнения равновесия

Цель данного параграфа сформулировать и численно решить уравнение равновесия газового шара в рамках исследуемой модели.

В предыдущих параграфах мы получили выражения для сил гравитационного и радиационного взаимодействия между двумя элементарными объёмами. В протопланетном облаке на каждый элементарный объём действует всё облако. Чтобы найти эту силу необходимо проинтегрировать по всему объёму.

Из классической теории Ньютона следует, что гравитационная сила с которой облако действует на внутреннею точку, с радиус-вектором $\vec{r}$ определятся только массой заключённой в сфере радиуса r, $M(r)$.

$$F(r)_{grav} = G\rho(r)\frac{M(r)}{r^2}, \tag{3.9}$$

где

$$M(r) = 4\pi(\nu + m_p)\int_0^r\rho(x)x^2 \tag{3.10}$$

Этот результат нельзя перенести на радиационную силу отталкивания, так как взаимодействие двух элементарных объёмов зависит от того как изменяется плотность между этими объёмами. Можно сказать, что радиационная сила зависит от координат, но не от расстояния между объёмами.

Очевидно, что в случае центральной симметрии, радиационная сила, действующая со стороны всего облака на частицу, как и гравитационная направлена по радиусу.

Без потри общности выберем систему координат так, чтобы вектор $\vec{r}$ смотрел на северный полюс сферы (т.е. полятный и азимутальный углы, определяющие направление вектора $\vec{r}$ были соответственно равны нулю $\theta = 0, \varphi = 0$)

Интеграл по всему объёму для радиационной силы, в случае сферической геометрии запишется так:

$$\hat{F}(r)_{rad} = 2\pi K\rho(r)\int_0^R dx\rho(x)j(x)\int_0^\pi d\theta \exp\left(-s\int_{l_p}^x \frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta}}da\right)\times \\ \times \exp\left(-s\int_{l_p}^r \frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\theta}}da\right)\left(\frac{x^2\sin(\theta)(r - x\cos\theta)}{L^3}\right), \tag{3.11}$$

где элемент объёма $dV = x^2\sin(\theta)drd\theta d\varphi$, множитель $(r - x\cos\theta)/L$ есть косинус угла между направлением излучения и вектором $\underline{\mathbf{r}}$. Множитель 2π появился в результате интегрирования по азимутальному углу, от которого подынтегральное выражение не зависит.

Символ $\hat{}$ служит для того, чтоб различать обозначения радиационной силы в выражениях (3.7) и (3.11)

Запишем уравнение равновесия под действием сил радиационного отталкивания, гравитационного притяжения и газового давления для элементарного объёма в точке на расстоянии r от центра облака выглядит так:

$$-G\frac{m(r)}{r^2} + \frac{1}{\rho(r)}\hat{F}(r)_{rad} = \frac{1}{\rho(r)}\frac{dP(r)}{dr}, \tag{3.12}$$

Напомним, что мы предполагаем, что нам известно уравнение состояния в виде $P = P(\rho_{gas})$, т.е. давление является функцией только плотности газа. Причём

$$P(r) = C\rho(r)^\gamma_{gas}, \tag{3.13}$$

где C — константа.

Для решения уравнения (3.12) необходимо задаться значением плотности в центре $\rho(r = 0)$

Уравнение решалось методом итераций. Алгоритм дан в приложении[3]

Для начала, алгоритм был проверен на тестовой задаче — решение уравнения Эмдена, при разных показателях индекса политропы $n = 1/(\gamma - 1)$:

$$-G\frac{m(r)}{r^2} = C\nu\frac{1}{\rho(r)}\frac{d\rho(r)^\gamma}{dr}, \tag{3.14}$$

Решения уравнения Эмдена в явном виде удалось получить только для трёх значений показателя политропы (n=0,1,5)

Функционльный вид этих решений, следующий:

$$\rho = 1 - \frac{x^2}{6} \qquad \text{при } n = 0; \tag{3.15}$$

$$\rho = \frac{\sin x}{x} \qquad \text{при } n = 1; \tag{3.16}$$

$$\rho = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{1/2}} \qquad \text{при } n = 5; \tag{3.17}$$

Ниже приведены графики для последних двух значений n и сравнение их с полученным решением (слева — аналитическое, справа — численное)

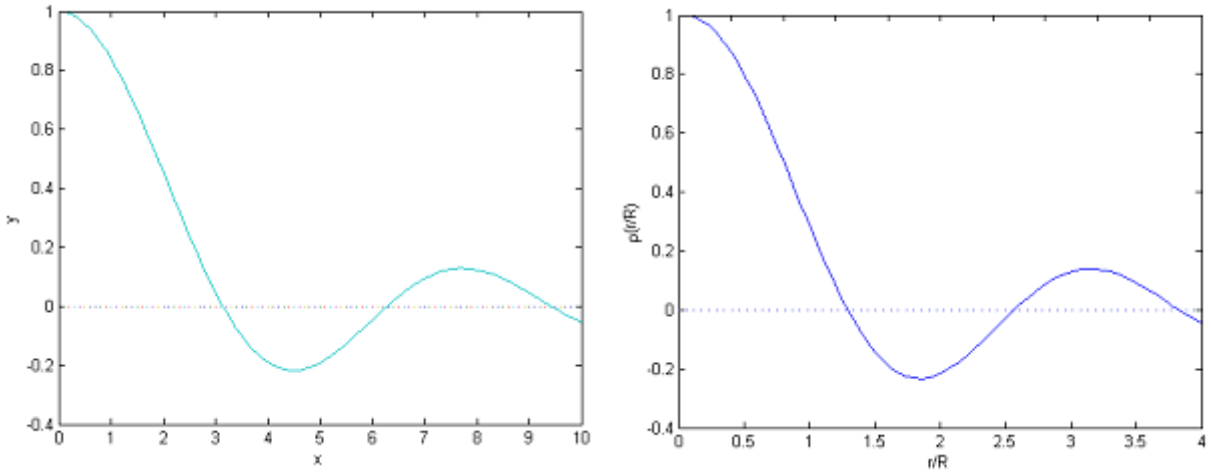

Рис. 3.2: n=1

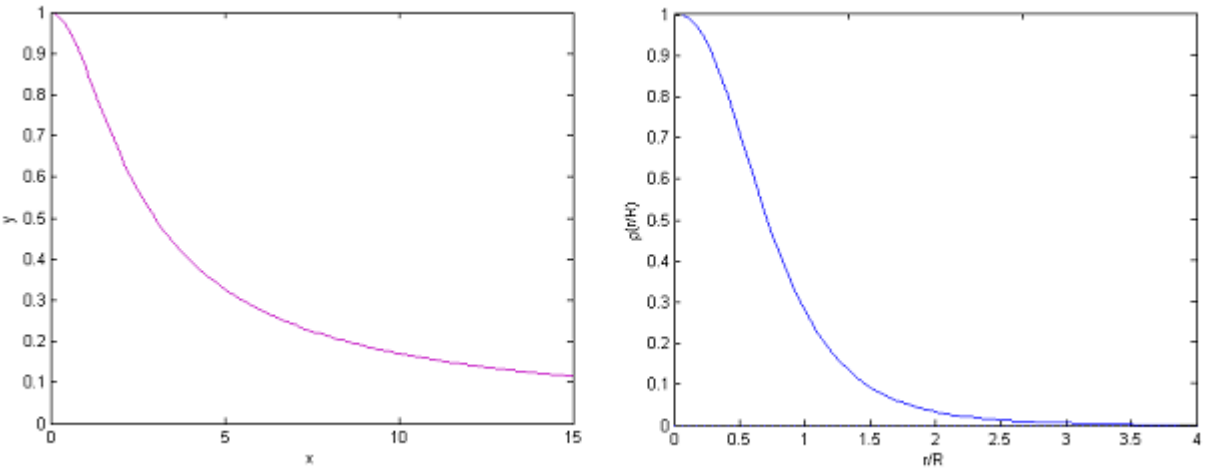

Рис. 3.3: n=5

Как видно, графики подобны, и отличаются лишь масштабом.

После, подтверждения работоспособности алгоритма, было построено решение уравнение (3.12). Оказалось, что при малых значениях константы K [4] , стоящей перед радиационной силой, решение почти полностью совпадает с классическим решением уравнения Эмдена. При увеличении при росте же её значения, решение начинает деформироваться.

Графики $K = 9, G = 1$ показаны на рисунке (3.4).

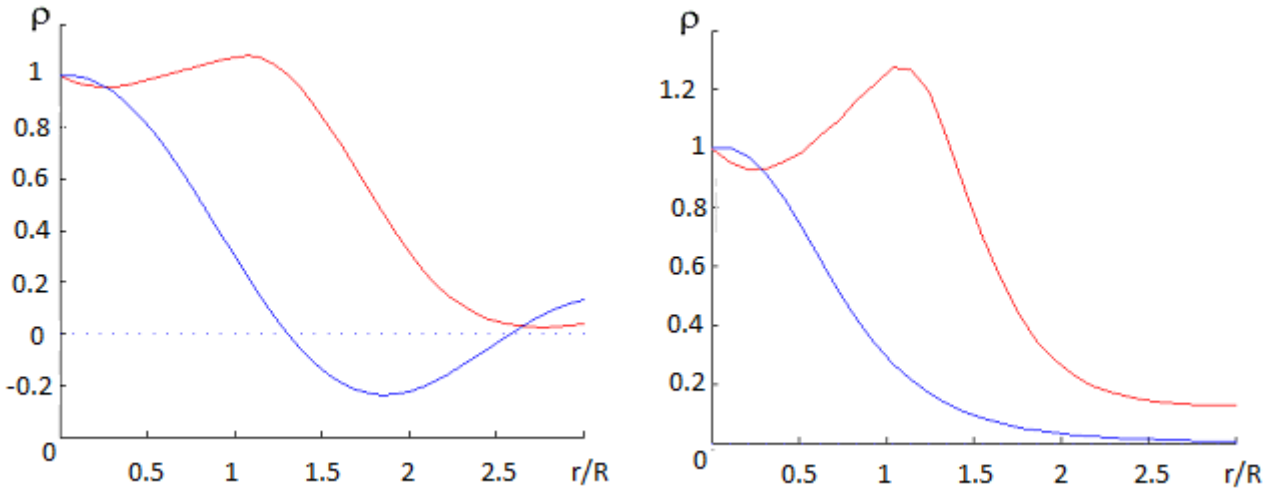

Рис. 3.4: K=9

Синим цветом нарисовано классическое решение уравнение Эмдена, красным цветом решение уравнения (3.12). Слева $n = 1$, справа $n = 5$.

Мы видим объяснение такому поведению в том, что при малых значениях константы K интеграл, отвечающий за радиационную силу очень мал, и не оказывает существенного влияния на вид функции плотности. При росте же константы, роль интеграла начинает расти и появляется решение указанного вида. Наличие «горба» может свидетельствовать об неустойчивости решения с сильной радиационной силой.

3.5 Результаты

В данной главе мы закончили рассмотрение модели газопылевого протопланетного облака, между частицами которого, помимо сил гравитационного притяжения действуют силы радиационного отталкивания.

Были получены выражения для сил радиационного отталкивания в случае облака произвольной геометрии и в центрально-симметричном случае в сферических координатах.

Было сформулировано и численно решено уравнение равновесия относительно концентрации частиц. Так как решение сходится это доказывает тот факт, что равновесная конфигурация газопылевых облаков может существовать.

Вместе с тем, в рассматриваемой модели остались нерешённый вопросы. Главным из которых видится нетипичные граничные условия в неизотермическом протопланетном облаке.

В данной работе мы с одной стороны опирались на кинематические законы движения частиц газа, с другой стороны вводили силу газового давления, термодинамическую величину, что строго говоря, не совсем корректно. Поэтому здесь встаёт вопрос, нерешённый пока вопрос о сведении давления к силе газодинамического отталкивания.

Автором работы предпринимались безуспешные попытки это сделать. Видимо, требуется наложение каких-то дополнительных условий на модель или её существенная переработка (например в данной модели все молекулы, несмотря на температуру среды имеют одина-

ковую скорость, что, в реальных условиях не будет являться истиной. Возможно одно из необходимых условий новой модели зависимость скорости от температуры).

4. Приложение А. Охрана труда

Основные нагрузки при выполнении данной работы: интеллектуальные, эмоциональные, зрительные, и, в меньшей степени, слуховые. Вся работа проводилась за персональным компьютером и за письменным столом, натурные эксперименты отсутствовали. Организация работы должна проводиться в этом случае согласно СниП 2.2.2/2.41340-03. По природе действия вредные и опасные факторы подразделяются на следующие группы:

– физические факторы: температура, влажность и подвижность воздуха, неионизирующие электромагнитные излучения (ультрафиолетовое, видимое, инфракрасное, лазерное, микроволновое, радиочастотное, низкочастотное), статическое, электрические и магнитные поля, ионизирующие излучения, производственный шум, вибрация (локальная, общая), ультразвук, аэрозоли преимущественно фиброгенного действия (пыли), освещенность (отсутствие естественного освещения, недостаточная освещенность, повышенная ультрафиолетовая радиация);

– химические факторы, в том числе некоторые вещества биологической природы (антибиотики, витамины, гормоны, ферменты);

– биологические факторы: патогенные микроорганизмы, микроорганизмы продуценты, препараты, содержащие живые клетки и споры микроорганизмов, белковые препараты;

– факторы трудового процесса, характеризующие тяжесть физического труда: физическая динамическая нагрузка, масса поднимаемого и перемещаемого груза, стереотипные рабочие движения, статическая нагрузка, рабочая поза, наклоны корпуса, перемещение в пространстве;

– факторы трудового процесса, характеризующие напряженность труда: интеллектуальные, сенсорные, эмоциональные нагрузки, монотонность нагрузок, режим работы.

В помещении лаборатории или кафедры на сотрудника, работающего с вычислительной техникой, могут негативно действовать следующие факторы:

– повышенная и пониженная температура воздуха;

– чрезмерная запыленность и загазованность воздуха;

– повышенная и пониженная влажность воздуха;

– недостаточная освещенность рабочего места;

– превышающий допустимые нормы шум;

– повышенный уровень ионизирующего излучения;

– повышенный уровень электромагнитных полей;

– повышенный уровень статического электричества;

– опасность поражения электрическим током;

– блеклость экрана дисплея;

– длительное пребывание в сидячем положении;

– гиподинамия;

– повышенные интеллектуальные и психо-эмоциональные нагрузки;

– ненормированный рабочий день.

4.1 Требования к вентиляции, отоплению и кондиционированию воздуха

Микроклимат производственных помещений — это климат внутренней среды этих помещений, который определяется действующими на организм человека сочетаниями температуры, влажности и скорости движения воздуха. Допустимые микроклиматические условия — это такие сочетания параметров микроклимата, которые при длительном и систематическом воздействии на человека могут вызвать напряжение реакций терморегуляции и которые не выходят за пределы физиологических приспособительных возможностей. При этом не возникает нарушений в состоянии здоровья, не наблюдаются дискомфортные теплоощущения, ухудшающие самочувствие и понижение работоспособности. Оптимальные параметры микроклимата в производственных помещениях обеспечиваются системами кондиционирования воздуха, а допустимые параметры — обычными системами вентиляции и отопления. Помещение кафедры является помещением категории 1а, то есть выполняются работы с интенсивностью энерготрат 58-77 Вт/м^3. Для создания и автоматического поддержания в лаборатории независимо от наружных условий оптимальных значений температуры, влажности, чистоты и скорости движения воздуха, в холодное время года используется водяное отопление, в теплое время года применяется кондиционирование воздуха. Кондиционер представляет собой вентиляционную установку, которая с помощью приборов автоматического регулирования поддерживает в помещении заданные параметры воздушной среды. Также одежда персонала должна соответствовать температурному режиму в помещении. Отопление, вентиляция и кондиционирование должны осуществляться согласно СНиП 2.04.05-91:

1. В холодные периоды года температура воздуха, скорость его движения и относительная влажность воздуха должны соответственно составлять: $22-24$°C; 0.1м/с; 40-60%; температура воздуха может колебаться в пределах от 21 до 25°C.

2. То же в теплые периоды года: $23-25$°C; 0.1-0.2 м/с; 40-60%; температура воздуха может колебаться в пределах от 22 до 26°C.

3. Воздух, поступающий в помещения с ЭВМ, должен быть отчищен от загрязнений, в том числе от пыли и микроорганизмов. Запыленность воздуха не должна превышать требований 12.1.005-91.

4.2 Требования к уровням шума

Шум — беспорядочное сочетание различных по силе и частоте звуков. Эквивалентный (по энергии) уровень звука (дБА) непостоянного шума - уровень звука постоянного широ-

кополосного шума, который имеет такое же среднеквадратичное звуковое давление, что и данный непостоянный шум в течение определенного интервала времени. Предельно допустимый уровень (ПДУ) шума — это уровень фактора, который при ежедневной (кроме выходных дней) работе, но не более 40 часов в неделю в течение всего рабочего стажа, не должен вызывать заболеваний или отклонений в состоянии здоровья, обнаруживаемых современными методами исследований в процессе работы или в отдаленные сроки жизни настоящего и последующих поколений. Соблюдение ПДУ шума не исключает нарушения здоровья у сверхчувствительных лиц. В нашем помещении источником шумовых помех могут стать вентиляционные установки, кондиционеры и др. Длительное воздействие этих шумов отрицательно сказываются на эмоциональном состоянии персонала. Шум ухудшает условия труда оказывая вредное действие на организм человека. Работающие в условиях длительного шумового воздействия испытывают раздражительность, головные боли, головокружение, снижение памяти, повышенную утомляемость, понижение аппетита, боли в ушах и т. д. Такие нарушения в работе ряда органов и систем организма человека могут вызвать негативные изменения в эмоциональном состоянии человека вплоть до стрессовых. Под воздействием шума снижается концентрация внимания, нарушаются физиологические функции, появляется усталость в связи с повышенными энергетическими затратами и нервно-психическим напряжением, ухудшается речевая коммутация. Все это снижает работоспособность человека и его производительность, качество и безопасность труда. Длительное воздействие интенсивного шума (выше 80 дБА) на слух человека приводит к его частичной или полной потере. Для того, чтобы добиться допустимого уровня шума рекомендуется применять звукопоглощающее покрытие стен. Защиту от шума следует выполнять в соответствии с СН 2.2.4/2.1.8.562-96.

4.3 Требования к естественному и искусственному освещению для помещений вычислительных комнат

Освещённость — плотность светового потока по поверхности, на которую он падает. Правильно спроектированное и выполненное производственное освещение улучшает условия зрительной работы, снижает утомляемость, способствует повышению производительности труда, благотворно влияет на производственную среду, оказывая положительное психологическое воздействие на работающего, повышает безопасность труда и снижает травматизм. Недостаточность освещения приводит к напряжению зрения, ослабляет внимание, приводит к наступлению преждевременной утомленности. Чрезмерно яркое освещение вызывает ослепление, раздражение и резь в глазах. Неправильное направление света на рабочем месте может создавать резкие тени, блики, дезориентировать работающего. Существует три вида освещения: естественное, искусственное и совмещенное (естественное и искусственное вместе). Естественное освещение — освещение помещений дневным светом, проникающим через световые проемы в наружных ограждающих конструкциях помещений. Естественное освещение характеризуется тем, что меняется в широких пределах в зависимости от времени дня, времени года, характера области и ряда других факторов. Искусственное освещение применяется при работе в темное время суток и днем, когда не удается обеспечить нор-

мированные значения коэффициента естественного освещения (пасмурная погода, короткий световой день). Освещение, при котором недостаточное по нормам естественное освещение дополняется искусственным, называется совмещенным освещением. Искусственное освещение подразделяется на рабочее, аварийное, эвакуационное, охранное. Рабочее освещение, в свою очередь, может быть общим или комбинированным. Общее — освещение, при котором светильники размещаются в верхней зоне помещения равномерно или применительно к расположению оборудования. Комбинированное — освещение, при котором к общему добавляется местное освещение. Работа, выполняемая с использованием вычислительной техники, имеют следующие недостатки: вероятность появления прямой блесткости, ухудшенная контрастность между изображением и фоном, отражение экрана. Недостаточность освещения приводит к напряжению зрения, ослабляет внимание, приводит к наступлению преждевременной утомленности. Чрезмерно яркое освещение вызывает ослепление, раздражение и резь в глазах. Неправильное направление света на рабочем месте может создавать резкие тени, блики, дезориентировать работающего. Согласно СНиП 23-05-95 освещение в помещениях, где располагается вычислительная техника, должно быть смешанным: естественным и искусственным. При выполнении зрительной работы категории средней точности к. е. о. должен быть не ниже 4%. Искусственное освещение в помещениях следует осуществлять в виде комбинированной системы освещения с использованием люминесцентных источников света в светильниках общего назначения. В качестве источников должны использоваться люминесцентные лампы типа ЛБ и ДРЛ с индексом цветопередачи ($R > 70$). В качестве светильников должны использоваться установки с преимущественно отраженным или рассеянным светораспределением (тип УСП-5-2х40, УСП-35-2х40, ЛВ003-2х40-002). Величина освещенности при искусственном освещении люминесцентными лампами должна быть в горизонтальной плоскости не ниже 300лк — для системы общего освещения и не ниже 750лк — для системы комбинированного освещения, причем с учетом работы категории высокой зрительной точности может быть увеличена до 1000лк. Для исключения бликов отражения на экранах от светильников общего назначения необходимо применять антибликерные сетки, специальные фильтры для экранов, защитные козырьки и т.п.

4.4 Пожарная безопасность при работе с вычислительной техникой

Пожарная безопасность — это состояние защищенности личности, имущества, общества и государства от пожаров. Пожар — это неконтролируемое горение, причиняющее материальный ущерб, вред жизни и здоровью граждан, интересам общества и государства. Определение категорий помещений осуществляется на стадии проектирования путем последовательной проверки принадлежности к категориям, установленным нормативными документами (НПБ 105-95). Причинами взрывов и пожаров чатсо являются электрооборудование и электрические сети. Опасность загорания в ЭВМ связана со значительным количеством плотно расположенных на монтажных платах и блоках: электронных узлов и схем, электрических и коммутационных кабелей, резисторов, конденсаторов, полупроводниковых диодов

и транзисторов. Высокая плотность элементов в электронных схемах приводит к значительному повышению температуры отдельных узлов ($80 - 200^0$C), что может служить причиной воспламенения изоляционных материалов. В связи с этим в помещениях вычислительного центра должны быть предусмотрены возможные пути эвакуации персонала. Требования к количеству, размерам и размещению эвакуационных выходов, лестниц и лестничных клеток установлены СНиП 2.01.02-85, а именно:

1. Эвакуационные выходы должны располагаться рассредоточено. Минимальное расстояние l между наиболее удаленными один от другого эвакуационными выходами из помещения следует определять по формуле: $l = \sqrt{P}$, где P — периметр помещения.

2. Ширина путей эвакуации в свету должна быть не менее 1м, дверей- не менее 0.8м.

3. Высота прохода на путях эвакуации должна быть не менее 2м.

4. Не допускается устройство винтовых лестниц, забежных ступеней, раздвижных и подъемных дверей и ворот, а также вращающихся дверей и турникетов.

5. Двери на путях эвакуации должны открываться по направлению выхода из здания.

6. Наружные эвакуационные двери зданий не должны иметь запоров, которые не могут быть открыты изнутри без ключа.

4.5 Требования электробезопасности

Для питания ЭВМ служит трехфазная электросеть с напряжением 380/220В и частотой 50Гц. Помещение, в котором располагался вычислительный центр, относится к помещениям без повышенной опасности (ГОСТ 12.1.013), поэтому защитное заземление не применялось (ГОСТ 12.1.030). При этом обслуживающий персонал должен допускаться до работы только после инструкции по технике безопасности. Изолирующие корпуса терминалов обеспечивают недоступность токоведущих частей, находящихся под напряжением.

4.6 Эргономические требования

Настоящий стандарт ГОСТ Р ИСО 9241-5-2009 устанавливает руководящие принципы, применяемые при формировании требований пользователей, а также при разработке проекта и установке оборудования рабочих станций, предназначенных для проведения офисных работ с применением видеодисплейных терминалов. Общие принципы и требования, установленные в настоящем стандарте, следует учитывать при разработке стандартов, устанавливающих требования к конструкции офисной мебели и оборудования рабочего места оператора Под рабочим местом понимается зона, оснащенная необходимыми техническими средствами, в которой совершается трудовая деятельность исполнителя или группы исполнителей, совместно выполняющих одну работу или операцию. Конструкция рабочего места

должна обеспечивать быстроту, безопасность, простоту и экономичность технического обслуживания в нормальных и аварийных условиях; полностью отвечать функциональным требованиям и предполагаемым условиям эксплуатации. Конструкция рабочего стола должна обеспечивать оптимальное размещение на рабочей поверхности используемого оборудования с учетом его количества и конструктивных особенностей, характера выполняемой работы. Высота рабочей поверхности стола для взрослых пользователей должна регулироваться в пределах 680-800 мм; при отсутствии такой возможности высота рабочей поверхности стола должна составлять 725 мм. Конструкция рабочего стула (кресла) должна обеспечивать подержание рациональной рабочей позы, позволять изменять позу с целью снижения статического напряжения мышц шейно-плечевой области и спины для предупреждения развития утомления. Тип рабочего стула (кресла) должен выбираться в зависимости от характера и продолжительности работы с учетом роста пользователя. Поверхность сиденья, спинки и других элементов стула (кресла) должна быть полумягкой, с нескользящим, неэлектризующимся и воздухонепроницаемым покрытием, обеспечивающим легкую очистку от загрязнений. Клавиатуру следует располагать на поверхности стола на расстоянии 100-300 мм от края, обращенного к пользователю, или на специальной, регулируемой по высоте рабочей поверхности, отделенной от основной столешницы.

4.7 Напряженность трудового процесса

Тяжесть трудового процесса в ходе работы над диссертацией можно отнести к оптимальному классу условий труда (легкая физическая нагрузка), основная нагрузка интеллектуальная, присутствует возможность гибкого графика работы, изменения рабочей позы. Классифицировать по степени напряженности выполняемую работу можно следующим образом: интеллектуальные нагрузки предполагают решение сложных задач с выбором по известным алгоритмам (напряженный труд 1-ой степени), а также эвристическую, творческую деятельность, требующую решения сложных задач при отсутствии алгоритма (напряженный труд 2-ой степени); большую часть времени работа проходит установленному графику с возможной его коррекцией по ходу деятельности (напряженный труд 1-ой степени); часто присутствует работа в условиях дефицита времени (напряженный труд 2-ой степени); сенсорные нагрузки (работа за экраном компьютера) присутствуют более четырех часов за рабочий день (напряженный труд 2-ой степени); фактическая продолжительность рабочего дня 8-9 часов (напряженность труда средней степени).

Примечания

[1] Переданный импульс равен количеству молекул ударившихся за время Δt о частицу, умноженным на импульс каждой молекулы $k\cos\varphi$. Так как частицы находятся далеко друг от друга можно считать, что этот импульс равен просто k. Количество этих молекул есть концентрация молекул(из формулы (2.18)) помноженной на объём $\sigma v \Delta t$, занимаемый всеми частицами, которые ударятся о площадку за время Δt.

Радиационная сила есть отношение импульса, ко времени его передачи.

[2]Действительно интегрирование идёт по пути, соединяющему вершины векторов $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ Вершина вектора $\vec{q}$, пробегают всё множество точек на отрезке $[r_1, r_2]$

$$\vec{(}q) = \vec{r_1} + \lambda(\vec{r_1} - \vec{r_2}) = \lambda\vec{r_1} + (1-\lambda)\vec{r_2}, \quad \lambda = \overline{0..1} \tag{4.1}$$

$$q^2 = \lambda^2 r_1^2 + (1-\lambda)^2 r_2^2 - 2\lambda(1-\lambda) r_1 r_2 \cos\theta, \tag{4.2}$$

Так как интегрирование ведётся по отрезку $[r_1, r_2]$, то дифференциал будет $d(\lambda|\vec{r_2} - \vec{r_1}|) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\theta} d\lambda$

[3]Метод итераций это способ численного решения математических задач. Его суть – нахождение алгоритма поиска по известному приближению (приближенному значению) искомой величины следующего, более точного приближения (см. [26], [27]).

Для решения уравнения методом итераций относительно плотности, расчетная область разбивается на N узлов. Эта плотность подставляется в слагаемое, отвечающее за радиационную силу. Получившееся дифференциальное уравнение численно решается, находится новая плотность, которая сравнивается с предыдущей. Если невязка больше некого наперёд заданного значения, то операция повторяется, если нет, то прекращается.

Напишем псевдокод общей структуры программы:

программа РасчетПлотности()
{
ЗаданиеВходныхПараметров();
ТекущаяНевязка = 1;
ТекущееКоличествоИтераций = 0;
ПространственныйШаг = Радиус / КоличествоУзловСетки;
Инициализация()
Повторять пока((ТекущаяНевязка > МаксимальнаяНевязка) и (ТекущееКоличествоИтераций < МаксимальноеКоличествоИтераций))
{ **Для** i **от** 1 **до** КоличествоУзловСетки **с шагом** 1
{
ПредыдущаяПлотность[i] = ТекущаяПлотность[i] ;
}
Итерация();
ТекущаяНевязка = ВычислитьНевязку();
ТекущееКоличествоИтераций++;
}
}

Теперь расскажем, подробнее о том, что значит каждая из подпрограмм и каждая и операций, выполняемых в программе РасчетПлотности().

- Подпрограмма «ЗаданиеВходныхПараметров()» хранит значение всех констант используемых в программе: таких как гравитационная постоянная, показатель политропы n , константа политропы, константы, определяющие интенсивность испарения (α, β), константу стоящею перед радиационной силой K, радиус облака, плотность в нуле, максимальную невязку, максимальное количество итераций (25),

количество узлов по сетке и по пространству N (эти значения брались одинаковыми, чтобы двухмерные элементы сетки не были вытянуты), константу ν и m_p. Большинство констант в расчёте было принято за 1. Максимальная невязка — 10^{-5}, количество узлов в сетке бралось равным 60.

- Нам будет нужно два массива – массив текущих значений плотности (на данном шаге итерации) и массив значений плотности на предыдущем шаге итерации – он нам нужен для того, чтобы вычислять невязку . Также в подпрограмме «Инициализация()» задаются начальные значения для обоих массивов. Мы принимаем, что в начале итерационной процедуры они равны граничному условию задачи. С тем же успехом в качестве начального приближения можно было бы принять и другие функции, например, логарифмический закон или закон обратных квадратов. Выбор «хорошего» начального условия может существенно ускорить сходимость метода.

- Подпрограмма «ВычислитьНевязку()», как видно из названия, вычисляет невязку.

  Есть определенный выбор в том, какую норму брать. Мы здесь невязку считаем так:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} |\rho(r_i)^k - \rho(r_i)^{k-1}|, \tag{4.3}$$

  где индекс i суммирует пространственные узлы, а k – номер итерации.

- В подпрограмме «Иттерация» три действия продпрограмме Итерация(). Тут три действия: во-первых, задаётся массив значений радиационной силы $F(r_i)_r ad$, во-вторых, считается методом прямоугольников тройной интеграл (радиационная сила в каждой точке) и элементам ранее заданного массива присваивается значение найденной силы (для каждого r_i соответственно). Для вычисления радиационной силы используется предыдущее значение плотности. В-третьих, находится текущая плотность в подпрограмме «РешитьДифференциальноеУравнение($F_r ad$)», которой был передан массив $F_r ad$

- Наконец, рассмотрим подпрограмму РешитьДифференциальноеУравнение($F_r ad$). Здесь решается дифференциальное уравнение

$$\gamma C \nu \frac{d\rho}{dr} = \rho^{2-\gamma} \left(F_{rad}(r_i) - \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(x) x^2 dx \right), \tag{4.4}$$

  которое в конечных разностях запишется в виде

$$\gamma C \nu \frac{\rho(r_i)^k - \rho(r_{i-1})^k}{\Delta r} = (\rho(r_i)^k)^{2-\gamma} \left(F_{rad}(r_i) - \frac{4\pi G}{r_i^2} \sum_{j=1}^{j<i} \rho(x)_j^k x_j^2 \Delta x \right). \tag{4.5}$$

  Последнее уравнение легко разрешается относительно $\rho(r_i)^k$

$$\rho(r_i)^k = \rho(r_{i-1})^k + \Delta r \frac{1}{\gamma C \nu} (\rho(r_i)^k)^{2-\gamma} \left(F_{rad}(r_i) - \frac{4\pi G}{r_i^2} \sum_{j=1}^{j<i} \rho(x)_j^k x_j^2 \Delta x \right) \tag{4.6}$$

  Новая плотность в подпрограмме ищется по описанному выше соотношению.

[4] стоит отметить, что так как в численном решении константа α, перед интенсивностью испарения равна единице, то более правильно следует под константой K понимать произведение K и α

Литература

[1] Э.М. Галимов. Образование Луны и Земли из общего супрапланетного газо-пылевого сгущения. Геохимия, 2011, № 6, стр. 563–669.

[2] Darwin G.H. On the secular changes in the orbit of a satellite revolving around a tidely disturbed planet // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1880. V. 171. P. 713-891

[3] Рускол Е.А. Происхождение Луны. М.: Наука, 1975. 188 с.

[4] Harris A.W., Kaula WM. A co-accretional model of satallite formation // Icarus. 1975. V. 24. P. 516-524

[5] Э.М. Галимов, Происхождение Луны. Российская концепция против «американской», "Земля и Вселенная"№6/2005

[6] Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., 1956.

[7] Melosh H.J., Sonett C.R. When wordls collide: Jetted vapor plumes and the Moon's origin; Origin of the Moon ;Eds Hartmann W.K., Phillips R.J., Taylor G.J.Lunar Planet. Inst. Houston. 1986. P. 621–642.

[8] Vasilyev S.V., Krivtsov A.M., Galimov E.M. Modelling space bodies growth by accumulation of space dust material; Proc. XXXII Int. Summer School Conf. Advanced Problems in Mechanics. 2004. St. Petersburg, Russia. P. 425–429.

[9] Галимов Э.М. Проблема происхождения Луны ; Основные направления геохимии , Ред. Галимов Э.М. М.: Наука, 1995. С. 8–45.

[10] Гуревич Л.Е., Лебединский А.И. Формирование планет; Изв. АН СССР. Сер. физич. 1950. 14(6). С. 765–775

[11] Энеев Т.М., Козлов Н.Н. Численное моделирование процесса формирования планет и протопланетной небулы; Препр. Ин-та прикл. Математики. 1977. 80 с.

[12] Галимов Э.М., Кривцов А.М., Забродин А.В. и др. Динамическая модель образования системы Земля–Луна, Геохимия. 2005. № 11. С. 1137–1149

[13] С. Чандрасекхар. Перенос лучистой энергии. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.

[14] Зельдович Я.Б., Блинников С.И., Шакура Н.И.,Физические основы строения и эволюции звёзд. — М., изд-во МГУ, 1981. — 160 с.

[15] В.В. Шулейкин. Физика Моря, М. изд АН СССР, 1968. стр 848

[16] А.А. Ле-Захаров, А.М. Кривцов. Разработка алгоритмов расчета столкновительной динамики гравитирующих частиц для моделирования образования системы Земля - Луна в результате гравитационного коллапса пылевого облака. Опубликовано в сб. науч. работ под ред. Э.М. Галимова, «Проблемы зарождения и эволюции биосферы», 2011.

[17] Gaskugeln: Anwendungen der mechanischen Warmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme («Газовые шары: Применения механической теории высокой температуры к космологическим и метеорологическим проблемам»), опубликовано в книге University of Wisconsin, Madison, 1907

[18] Амбарцумян В.А. Рассеяние и поглощение света в планетных атмосферах, Уч. Зап. ЛГУ, №82. 1941

[19] А.И. Наумов. Физика атомного ядра и элементарных частиц. Уч. пособие. 1984 год. 364 стр.

[20] Delsemme A. H., An analytic approximation of dependance on distance for vaporization of comets. Univ. of Toledo. 1972.

[21] «Физическое материаловедение. Том 2. Основы материаловедения. Гл. 4. Термодинамика в материаловедении. под ред. Калина Б.А Москва.: МИФИ. 2007, стр. 15- 227;

[22] Васюнин А. И. Межзвездные льды, Физика Космоса, Труды 41-й Международной студенческой научной конференции, Екатеринбург, 30 января — 3 февраля 2012 г. стр 27-43.

[23] Гонин О.Г. Исследование равновесия частиц космической пыли под действием гравитационных и газодинамических сил, Магистерская диссертация, 2005

[24] Д. Михалас; Звёздные атмосферы; Часть 1. М.: Мир, 1982; 352 стр;

[25] A. M. Krivtsov; Spherical gas cloud; manuscript from 14, April 2012;

[26] Верлань, А.Ф., Сизиков, В.С.; Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы, Изд-во: Киев: Наукова думка, 1986 г.;

[27] Кукуджанов В.Н. Численные методы в механике сплошных сред. Курс лекций. М.: МАТИ, 2006