

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого**  
Институт прикладной математики и механики  
Кафедра теоретической механики

Работа допущена к защите  
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., проф.  
\_\_\_\_\_ **А. М. Кривцов**  
" \_ " \_\_\_\_\_

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
**на соискание академической степени**  
**МАГИСТРА**

**Тема:**

**Определение эффективных упругих характеристик материала с трещинами**

Направление: 01.03.03 "Механика и математическое моделирование"

Выполнил студент гр.63604/1 Р.Л. Лапин

Руководитель: к.ф.-м.н. В.А. Кузькин

Санкт-Петербург

2017

## Оглавление

Введение .....	3
Постановка задачи о определении эффективных упругих свойств материала с трещинами	3
Приближение невзаимодействия .....	4
Метод разрывных смещений .....	6
Описание .....	6
Пример. Одиночная трещина в бесконечной плоскости в поле растягивающих напряжений .....	8
Вычисление эффективного тензора податливости .....	10
Оценка ортотропности эффективных упругих свойств материала с трещинами .....	11
Решение задачи об определении эффективных упругих свойств .....	12
Создание начальной конфигурации .....	12
Численные параметры .....	14
Семейство параллельных трещин .....	14
Два семейства параллельных трещин .....	20
Три семейства параллельных трещин .....	31
Обсуждение .....	34
Заключение .....	34
Список литературы .....	36

## Введение

Наличие неоднородностей, например, трещин или пор, в материале может значительно изменять его упругие свойства – наличие трещин в материале может менять значение компонент тензора жесткости в несколько раз [1]. Задача влияния трещин на свойства материала в котором они находятся рассматриваются в различных областях науки - механика твердого тела ([2], [3]), геофизика ([4], [5]), материаловедение ([6], [7]), а также в областях связанных с нефтегазодобычей ([8], [9]).

Существует несколько моделей, описывающих влияние трещин на упругие свойства материала. Один из самых простых подходов применяемых для задач материалов с трещинами является подход невзаимодействия [3]. Его преимуществами является простая математическая модель, лежащая в основе. Но результаты, получаемые с помощью данного подхода, могут значительно отличаться от результатов, полученных более сложными методами, учитывающими взаимодействие трещин [1]. Тем не менее с помощью метода невзаимодействия удастся доказать ортотропную симметрию для материала с любой конфигурацией трещин, даже в тех случаях, когда в материале отсутствует геометрическая ортотропия [10].

Целью данной работы является исследование влияния взаимодействия трещин на ортотропные свойства материала с трещинами. А также оценить границы применимости подхода невзаимодействия для описания ортотропных свойств материала с трещинами.

## Постановка задачи о определении эффективных упругих свойств материала с трещинами

Рассматривается представительный объем материала с прямыми трещинами одинаковой длины. Трещины расположены в образце случайным образом. Задача рассматривается в плоско-деформированной постановке.

В качестве количественной характеристики трещиноватости материала может быть использована плотность трещин [11]

$$\rho = \frac{N_{cr} l_{cr}^2}{S}$$

где  $N_{cr}$  – число трещин в рассматриваемом материале,  $l_{cr}$  – длина трещины,  $S$  – площадь рассматриваемого образца.

Деформации, вызванные внешней нагрузкой  $\sigma_0$ , могут быть представлены, по принципу суперпозиции деформаций, в виде суммы:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{cr}$$

где  $\varepsilon_0$  – деформации в материале без трещин,  $\varepsilon_{cr}$  – деформации от трещин.

Деформации в материале, согласно закону Гука, могут быть записаны

$$\varepsilon = S^{eff} : \sigma_0$$

где  $S^{eff}$  – эффективный тензор податливости материала.

В случае изотропного материала без трещин тензор податливости имеет вид:

$$\mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix}$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Используя результаты работы [3], деформации вызванные наличием трещин в материале могут быть записаны:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{1}{2S} \sum_i (< \mathbf{b}_i > \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_i < \mathbf{b}_i >) l_i \quad (1)$$

где  $S$  – площадь представительного материала,  $< \mathbf{b}_i >$  – среднее раскрытие на  $i$  – ой трещине,  $\mathbf{n}_i$  – нормаль  $i$  – ой трещины. Под раскрытием понимается

$$\mathbf{b} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$$

$\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-$  - перемещение берегов трещин.

Ввиду того, что раскрытие трещин зависит от внешней нагрузки деформации можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 + \Delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}_0 = (\mathbf{S}_0 + \Delta \mathbf{S}) : \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{S}^{eff} : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (2)$$

где  $\mathbf{S}_0, \Delta \mathbf{S}, \mathbf{S}^{eff}$  – тензор податливости материала без трещин, тензор податливости от влияния трещин и эффективный тензор податливости.

С учетом формулы (2) упругая потенциальная энергия тогда может быть записана как

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}_0) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbf{S}^{eff} : \boldsymbol{\sigma}_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbf{S}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 : \Delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}_0 \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbf{S}_0 : \boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{1}{2S} \sum_i (\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot < \mathbf{b}_i >) (l_i) = f(\boldsymbol{\sigma}_0) + \Delta f \end{aligned} \quad (3)$$

Для определения эффективных свойств необходимо о

### Приближение невзаимодействия

Для определения влияния трещин на свойства материала существует несколько методов [3] – метод невзаимодействия (NIA), Self-consistent scheme(SCS), Differential scheme (DS), а также модифицированная схема (SK), метод Мори-Тонака, метода эффективных полей и другие.

Основная идея приближения невзаимодействия заключается в том, что все трещины в материале независимы и не чувствуют влияния соседних трещин. Тогда среднее раскрытие определяется из решения задачи об одиночной трещине:

$$< \mathbf{b}_i > = \left( \frac{\pi l_i}{E} \right) \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_0$$

Тогда подставляя в уравнение потенциальной упругой (3) энергии получаем

$$\Delta f(\sigma_0) = \left(\frac{\pi}{E}\right) (\sigma_0 \cdot \sigma_0) : \alpha$$

где  $\alpha$  – безразмерный тензор плотности трещин, и определяется

$$\alpha = \frac{1}{S} \sum_i l_i^2 \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i$$

Тензора  $\alpha$  – характеризуется направлением и количеством трещин в рассматриваемом материале.

Тогда сопоставляя уравнения для  $\Delta f(\sigma_0)$

$$\begin{aligned} \Delta f(\sigma_0) &= \left(\frac{\pi}{E}\right) (\sigma_0 \cdot \sigma_0) : \alpha \\ \Delta f(\sigma_0) &= \frac{1}{2} \sigma_0 : \Delta S : \sigma_0 \end{aligned}$$

Возможно определить значения компонент тензора податливости от трещин:

$$\Delta S_{ikkl} = \left(\frac{\pi}{E}\right) \delta_{\{ik\} \alpha_{jl}}$$

Под фигурными скобками подразумевается суммирование по индексам с перестановкой  $i \leftrightarrow j, k \leftrightarrow l, ij \leftrightarrow kl$ . А  $\delta_{\{ik\}}$  – дельта Кронекера.

Таким образом метод невзаимодействия позволяет достаточно просто определить эффективные свойства материала с трещинами. Однако, вычисленные с его помощью значения эффективных свойств могут значительно отличаться от результатов, полученных другими методами. Результаты сравнения компонент тензора жесткости для семейства параллельных трещин полученные в [1] представлены на *Рисунок 1*.

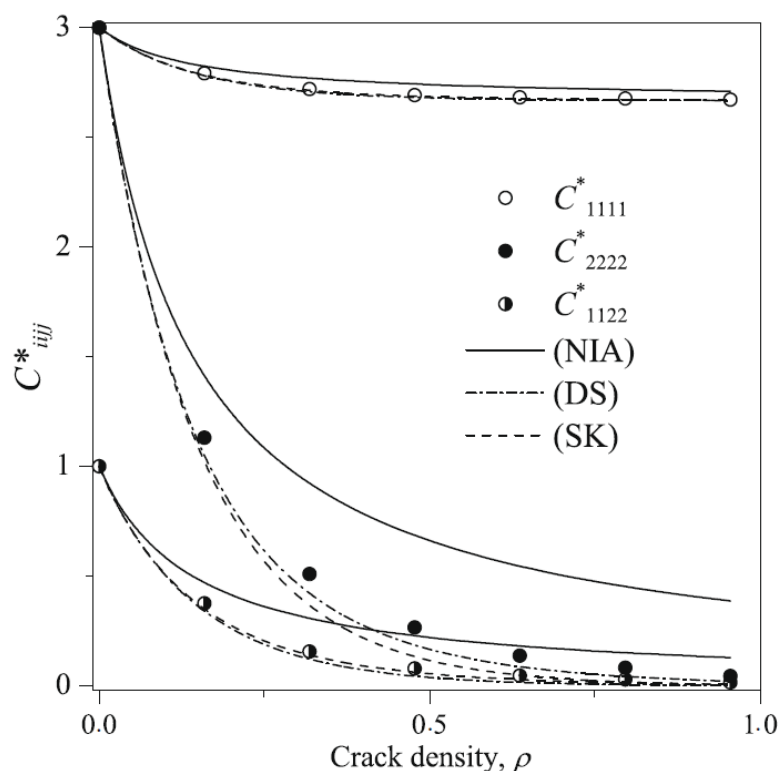


Рисунок 1. Компоненты тензора податливости для семейства параллельных трещин вычисленные различными методами

Рисунок 1 показывает, что подход невзаимодействия может быть недостаточно точным в сравнении с другими методами для определения некоторых эффективных свойств. Однако, подход невзаимодействия позволяет аналитически доказать ортотропность тензора податливости для любых конфигураций трещин. Интересным вопросом является влияние учета взаимодействия на ортотропные свойства материала. Для учета взаимодействия трещин используется метод разрывных смещений.

## Метод разрывных смещений

### Описание

Метод разрывных смещений впервые был предложен в работе [12]. Основная идея данного метода заключается в разбиении всех границ, в том числе и трещин в материале, на элементы. Элементы характеризуются раскрытием вдоль  $D_x$  и в перпендикулярном направлении  $D_y$  (Рисунок 2)

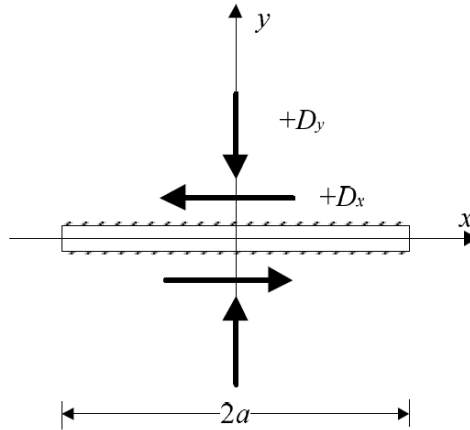


Рисунок 2. Элемент метода разрывных смещений с раскрытием

В расчетах, раскрытие трещин в материале принимается за раскрытие соответствующих элементов.

Раскрытие всех элементов может быть записано в виде вектор-столбца:

$$D = \begin{pmatrix} D_x^1 \\ D_y^1 \\ \dots \\ D_x^N \\ D_y^N \end{pmatrix}$$

где  $D_x^1$ - раскрытие первого элемента вдоль элемента,  $D_y^1$ - раскрытие первого элемента в перпендикулярном направлении.

Каждый элемент может испытывать два типа нагрузки: сдвиговую и нормальную. Нагрузки всех элементов также образуют вектор-столбец нагрузок:

$$t = \begin{pmatrix} t_x^1 \\ t_y^1 \\ \dots \\ t_x^N \\ t_y^N \end{pmatrix}$$

где  $t_x^1$  – сдвиговая нагрузка первого элемента,  $t_y^N$ - нормальная нагрузка  $N$  элемента.

Вектор-столбец раскрытий и вектор столбец нагрузок связаны друг с другом через матрицу влияния  $A$ , причем

$$\begin{aligned} t_x^i &= \sum_{j=1}^N A_{xx}^{ij} D_x^j + \sum_{j=1}^N A_{xy}^{ij} D_y^j \quad i = 1, \dots, N \\ t_y^i &= \sum_{j=1}^N A_{yx}^{ij} D_x^j + \sum_{j=1}^N A_{yy}^{ij} D_y^j \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4)$$

Компоненты матрицы влияния  $A$  определяются формулами:

$$A_{xx}^{ij} = 2G \left( -\sin(2\gamma) f_{xy}'' - \cos(2\gamma) f_{xx}'' - y(\sin(2\gamma) f_{xxy}''' - \cos(2\gamma) f_{yyy}''') \right)$$

$$A_{xy}^{ij} = 2G \left( -y(\cos(2\gamma) f_{xyy}''' + \sin(2\gamma) f_{yyy}''') \right)$$

$$A_{yx}^{ij} = 2G \left( 2 \sin^2(\gamma) + \sin(2\gamma) f_{xx}'' - y(\cos(2\gamma) f_{xxy}''' + \sin(2\gamma) f_{yyy}''') \right)$$

$$A_{yy}^{ij} = 2G \left( -f_{xx}'' + y(\sin(2\gamma) f_{xxy}''' - \sin(2\gamma) f_{yyy}''') \right)$$

где  $\gamma$  – угол между  $i$  – ым,  $j$  – ым элементами,  $G$  – модуль сдвига,  $x, y$  – локальные координаты  $j$  – го элемента в системе координат связанных с  $i$  элементом,  $f_{xx}''$  – частная производная по соответствующим переменным аналитической формулы  $f$  :

$$f = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left( y \left( \arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right)$$

Таким образом система линейных уравнений (4) определяет раскрытия элементов  $D$  при заданных нагрузках  $t$  .

Рассматривается квадратный образец с трещинами. На элементах, связанных с границей образца задается соответствующая нагрузка. Решается система линейных уравнений (4). Определяются раскрытия во всех элементах, в частности определяются раскрытия трещин.

В настоящей работе данный метод был реализован в виде вычислительного модуля на языке программирования C++. Для валидации вычислительного модуля было решено несколько тестовых задач. Одна из них – определение раскрытия одиночной трещины в бесконечной плоскости под растягивающей нагрузкой.

**Пример. Одиночная трещина в бесконечной плоскости в поле растягивающих напряжений**

Тестовая задача, которая используется для валидации численного метода – задача об одиночной прямой трещине длины  $l$  в бесконечной плоскости под нормальной равномерной нагрузкой (Рисунок 3).

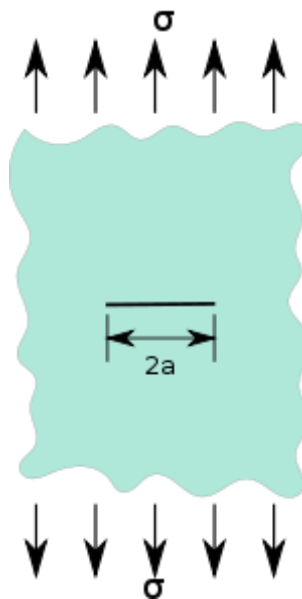


Рисунок 3. Постановка задачи о растяжении одиночной трещины

Аналитическое решение для данной задачи приведено в работе [11]



$$b_n(x) = \frac{4a(1 - \nu^2)\sigma}{E} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{0.5}$$

где  $E$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\sigma$  – внешняя нагрузка.

Расположение центров элементов в данной задаче представлено на *Рисунок 4*

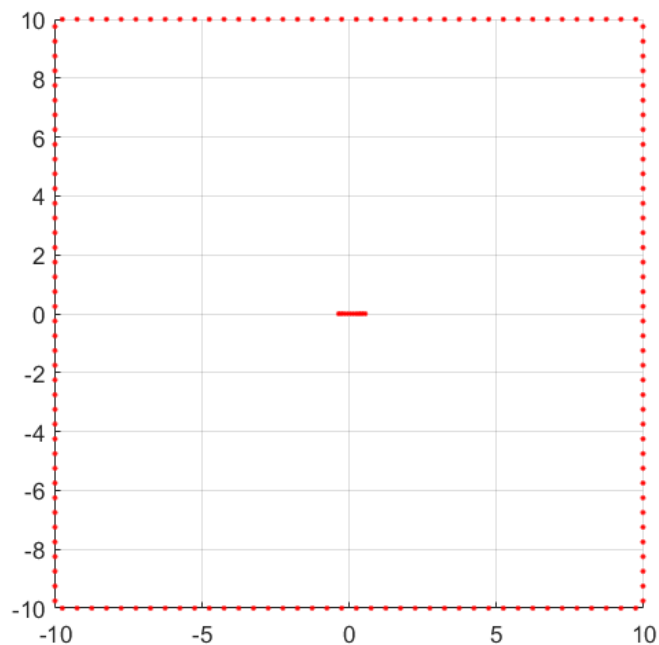


Рисунок 4. Конфигурация элементов для задачи об растяжении плоскости с одной трещиной

Численный расчет проводился при параметрах приведенных в Таблица 1

Таблица 1. Численные параметры для задачи об одиночной трещине

Параметр	Значение
$a$ – половина длины трещины	0.5
$L/2a$ – отношение длины области к длине трещины	20
$N_{cr}$ – количество элементов на трещину	10
$N_{side}$ – количество элементов на одну сторону	40

Сравнение аналитического раскрытия и численно полученного раскрытия приведены на *Рисунок 5*

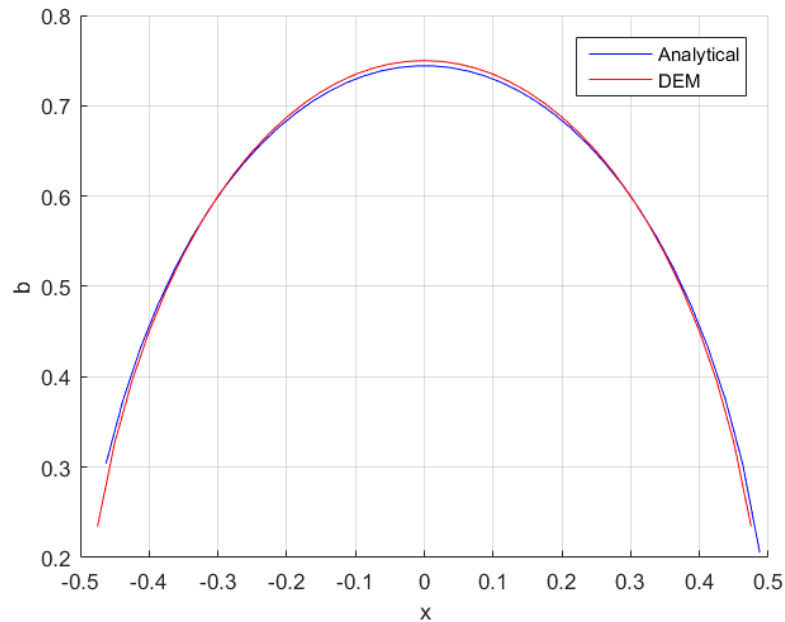


Рисунок 5. Сравнение аналитического и численного решения для задачи об одной трещине

Ошибка для среднего раскрытия при данных значениях параметров не превышает 3%. При увеличении количества элементов решение сходится к аналитическому.

### Вычисление эффективного тензора податливости

С помощью метода разрывных смещений при заданной конфигурации трещин определяются средние раскрытия на каждой трещине при определенной нагрузке  $\sigma_0$ . С помощью формул (1) и (2) определяются деформации от трещин и полные деформации в материале.

Эффективный тензор податливости связывает внешнюю нагрузку, приложенную на материал с трещинами и деформации в представительном объеме

$$\varepsilon = S_0 : \sigma_0 + \Delta S : \sigma_0 = S^{eff} : \sigma_0$$

Тензор податливости в плоско-деформированной постановке содержит 9 неизвестных компонент

$$S^{eff} = \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2212} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1212} \end{pmatrix}$$

Для определения неизвестных компонент решается три различные при различных нагрузках  $\sigma_0$ . Решение задач позволяет составить систему линейных уравнений относительно неизвестных компонент эффективного тензора податливости.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_3^1 \\ \dots \\ \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_2^3 \\ \varepsilon_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1111}^{eff} & S_{1122}^{eff} & S_{1112}^{eff} \\ S_{1122}^{eff} & S_{2222}^{eff} & S_{2212}^{eff} \\ S_{1211}^{eff} & S_{1222}^{eff} & S_{1212}^{eff} \\ \dots & \dots & \dots \\ S_{1111}^{eff} & S_{1122}^{eff} & S_{1112}^{eff} \\ S_{2211}^{eff} & S_{2222}^{eff} & S_{2212}^{eff} \\ S_{1211}^{eff} & S_{1222}^{eff} & S_{1212}^{eff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^1 \\ \sigma_2^1 \\ \sigma_3^1 \\ \dots \\ \sigma_1^3 \\ \sigma_2^3 \\ \sigma_3^3 \end{pmatrix}$$

где  $\varepsilon_k^i$  –  $k$  – ая компонента полных деформации при  $i$  – ом типе нагрузке,  $\sigma_k^i$  –  $k$  – ая компонента напряжений при  $i$  – ом типе нагрузке. Решение которой определяет все компоненты эффективного тензора податливости.

Для упрощения расчетов рассматриваются три задачи нагружения:

- Растяжение образца в вертикальном направлении:  $\sigma_0 = \sigma_0 \mathbf{jj}$
- Растяжение образца в горизонтальном направлении:  $\sigma_0 = \sigma_0 \mathbf{ii}$
- Сдвиговое нагружение образца:  $\sigma_0 = \sigma_0 (\mathbf{ij} + \mathbf{ji})$

### Оценка ортотропности эффективных упругих свойств материала с трещинами

Численно найденный эффективный тензор податливости может отличаться от ортотропного. Для оценки отклонения полученного тензора от ортотропного используется специальная оценка предложенная в [10].

Известно, что в ортотропный тензор податливости имеет определенные нулевые компоненты:

$$\mathbf{S}^{ort} = \begin{pmatrix} S_{1111} & S_{1122} & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & S_{1212} \end{pmatrix}$$

Для оценки отклонения эффективного тензора податливости  $\mathbf{S}^{eff}$  полученного с учетом взаимодействия трещин, от ортотропного  $\mathbf{S}^{ort}$  используется оценка предложенная в статье [10]

$$\delta = \sqrt{\frac{(S_{ijkl}^{eff} - S_{ijkl}^{ort})(S_{ijkl}^{eff} - S_{ijkl}^{ort})}{S_{pqrs}^{eff} S_{pqrs}^{eff}}}$$

В формуле используется суммирование по индексам.

Величина  $\delta$  позволяет ответить на вопрос – является ли полученный тензор податливости ортотропным.

## Решение задачи об определении эффективных упругих свойств

Для решения задачи об влиянии взаимодействия трещин на ортотропные свойства материала рассматривается несколько различных постановок для материала с трещинами

- Материал с семейством параллельных трещин.
- Материал с двумя семействами трещин, наклоненными под разными углами к друг другу.
- Материал с тремя семействами трещин, наклоненными под разными углами к друг другу.

Нужно отметить, что материалы с двумя и тремя семействами трещин не имеют геометрической симметрии, поэтому их рассмотрение важно для обоснования незначительного влияния взаимодействия трещин на ортотропные свойства материала.

Характеристикой трещин в материале является плотность трещин в материале, которая определяется как

$$\rho = \frac{N_{cr} l_{cr}^2}{S}$$

где  $N_{cr}$  – число трещин в рассматриваемом материале,  $l_{cr}$  – длина трещины,  $S$  – площадь рассматриваемого образца.

Для всех задач рассматривается диапазон плотностей  $\rho \in (0; 0.8]$ . Так как несмотря на то, что в каждой постановке трещины имеют определенное направление, расположение их центров случайное. Для того чтобы сгладить влияние случайного расположения на результаты в каждой постановке используется усреднение по реализациям. В данной работе на каждую рассматриваемую задачу (постановка и выбранная плотность) решается 450-650 реализаций.

Для определения тензора податливости в при заданной конфигурации трещин решается несколько подзадач:

- 1) Создание начальной конфигурации
- 2) Определение раскрытий трещин при различных нагрузках
- 3) Построение тензора податливости и определение отклонения от ортотропии

### Создание начальной конфигурации

При создании начальной конфигурации задаются следующие параметры: плотность трещин  $\rho$ , количество трещин в образце  $N_{cr}$  и длина трещина каждой трещины. С помощью данных параметров определяется размер  $L$  квадратной области, в которую помещаются трещины. Расположение центров трещин в образце носит случайные характер для каждой постановки.

В ходе исследований было обнаружено, что близкое расположение трещин приводит к некорректным результатам. Это связано с плохой обусловленностью матрицы влияния в системе линейных уравнений (4), связывающей раскрытия и нагрузки. Из-за того, что элементы метода разрывных смещений расположены слишком близко к друг другу, при использовании численного метода могут возникать отрицательные или очень большие значения раскрытий, а значит деформации на трещинах отрицательные или слишком большие. Пример «плохой» конфигурации представлен на *Рисунок 6*

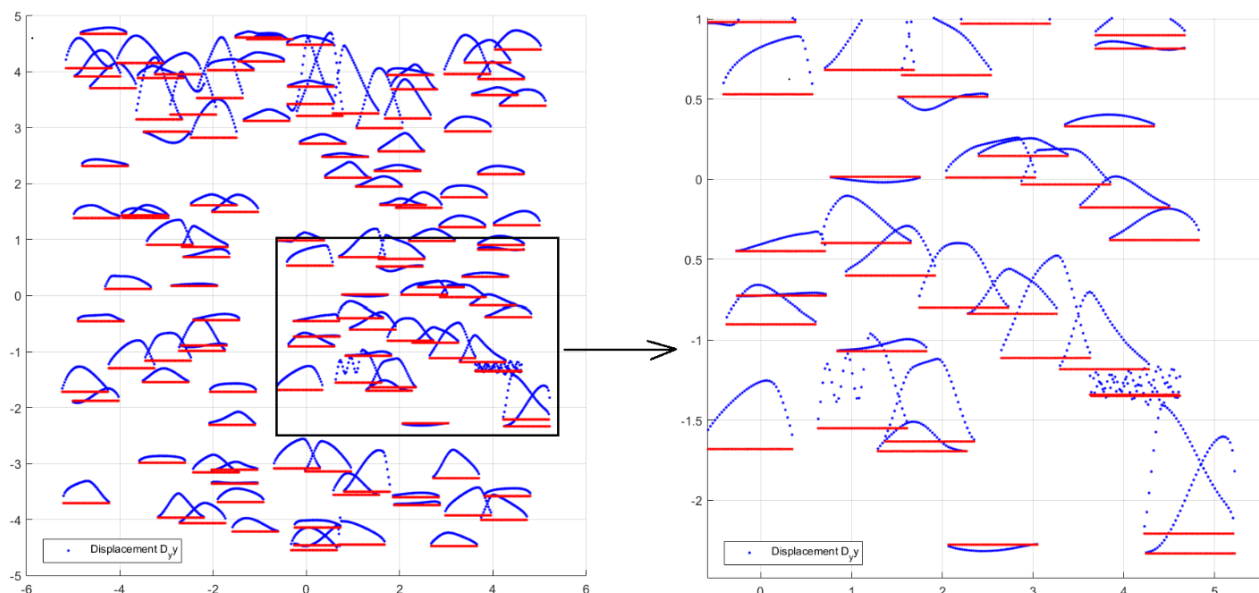


Рисунок 6. Пример «плохой» конфигурации трещин.

Чтобы избежать вырожденных случаев при создании начальной конфигурации используется ограничение на минимальное расстояние между трещинами.

Так как трещины в образце представляют собой отрезки, то для определения расстояния между двумя отрезками используется параметрическое уравнение для каждого из них. Для первого отрезка:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{a1}t_1 + x_{b1}(1 - t_1) \\ y_1 &= y_{a1}t_1 + y_{b1}(1 - t_1) \end{aligned} \quad t_1 \in [0; 1]$$

Для второго

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{a2}t_2 + x_{b2}(1 - t_2) \\ y_2 &= y_{a2}t_2 + y_{b2}(1 - t_2) \end{aligned} \quad t_2 \in [0; 1]$$

где  $x_1, y_1, x_2, y_2$  – координаты первого и второго отрезка.  $x_{ak}, x_{bk}$  – абсцисса левого и правого конца  $k$ -ой трещины,  $y_{ak}, y_{bk}$  – ордината левого и правого конца  $k$ -той трещины.

Тогда расстояние между  $i$  точкой первой трещины и  $j$  точки второй трещины:

$$r = \sqrt{(x_1^i - x_2^j)^2 + (y_1^i - y_2^j)^2}$$

Рассматривая все пары точек первого отрезка с точками второго отрезка определяется минимальное расстояние между отрезками. Если это расстояние меньше заданного, то трещину создавать в данном месте образца нельзя.

Использование данного условия при создании начального условия приводит к улучшению расчетов. Пример такой конфигурации представлен на *Рисунок 7*.

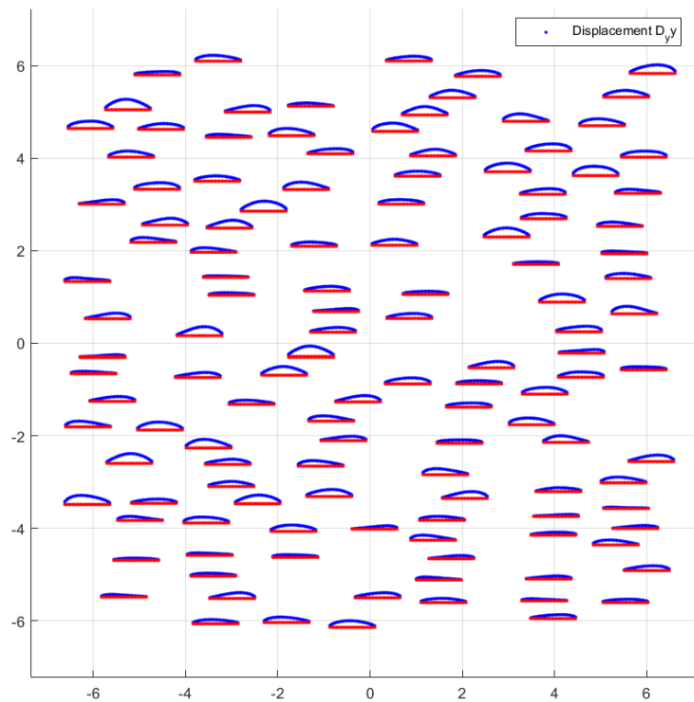


Рисунок 7. Пример хорошей конфигурации трещин

В ходе численных экспериментов было получено, что при заданном параметре минимального расстояния между трещинами, равного 0,1 длины трещины, матрица влияния достаточно хорошо обусловлена, и раскрытия трещин физически разумны.

### Численные параметры

Для всех рассматриваемых постановок используются численные параметры, приведенные в Таблица 2:

Таблица 2. Численные параметры для расчетов определения влияния взаимодействия трещин

$\rho$ – плотность трещин	[0.01; 0.8] с шагом 0.1
$l$ - длина трещины	1
$N_{cr}$ – количество трещин	300-350
$N_{el}^{cr}$ - количество элементов на одной трещине	20
$N_{el}^{dm}$ - количество элементов на одной стороне образца	40
Число реализаций для каждой плотности	450-650
$G$ – модуль сдвига	1
$\nu$ - коэффициент Пуассона	0.25

### Семейство параллельных трещин

Пример конфигурации параллельных трещин представлен на *Рисунок 8*

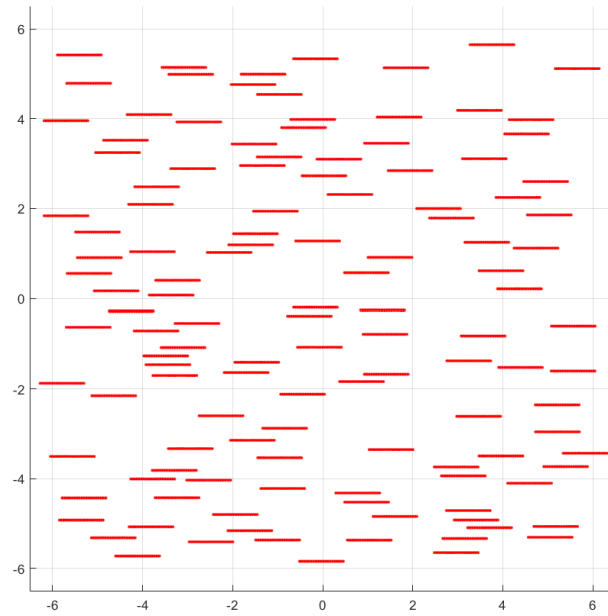


Рисунок 8. Пример конфигурации с параллельными трещинами

Так как все трещины в образце параллельны и направлены горизонтально, то наибольший эффект от трещин оказывается на компоненту тензора связанную с нормалью трещин –  $S_{2222}$ .

Облако значений для компоненты  $\Delta S_{2222}$  тензора податливости при различных реализациях для разных плотностей представлены на *Рисунок 9*

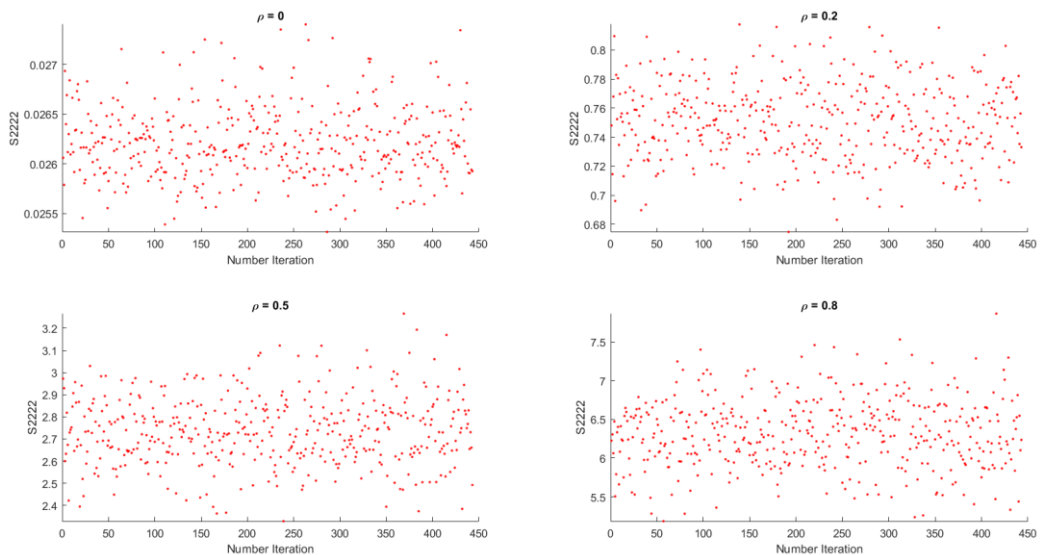


Рисунок 9. Облака значений компоненты 2222 тензора податливости для разных плотностей

Средние значений компоненты  $\Delta S_{2222}$  тензора податливости с границами показаны *Рисунок 10*

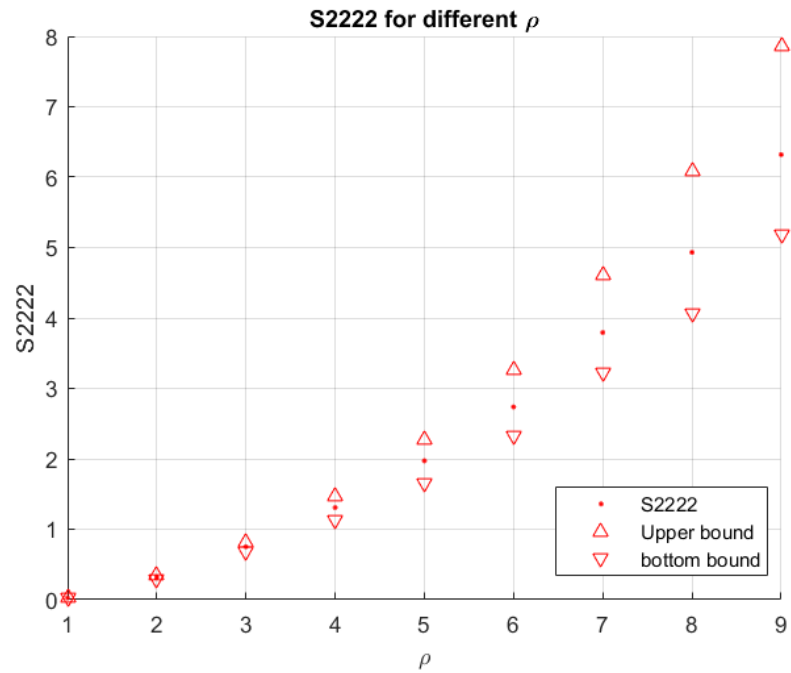


Рисунок 10. Средние значений компоненты 2222 тензора податливости с границами.

Результаты для всех компонент тензора  $\Delta S$  представлены на *Рисунок 11*

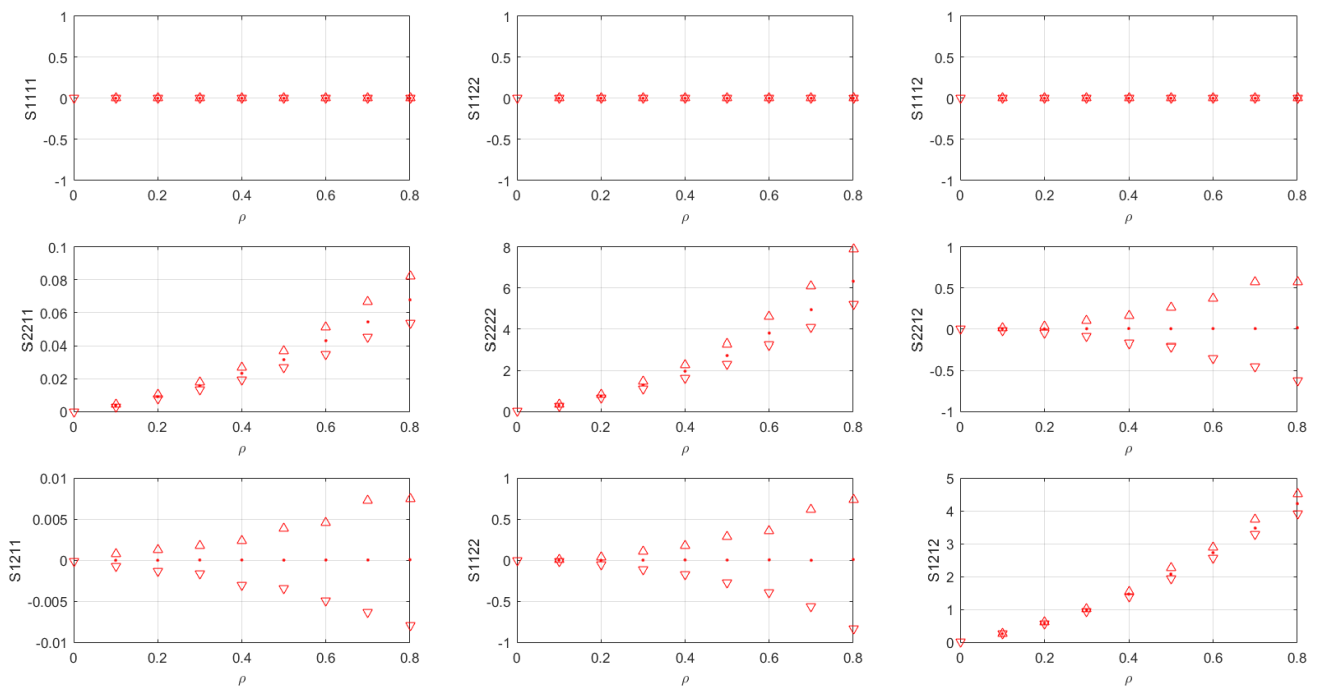


Рисунок 11. Значение средних величин всех компонент тензора податливости от трещин для различных плотностей с отображением максимального и минимального значения по реализациям

*Рисунок 10* и *Рисунок 11* показывает, что увеличение плотности приводит к увеличению разбросу максимальных и минимальных значений по реализациям значений компоненты тензора податливости.

По найденному среднему эффективному тензору податливости  $S^{eff}$  можно определить средний эффективный тензор жесткости.



$$c^{eff} = (s^{eff})^{-1}$$

Задача определения эффективных компонент тензора жесткости в материале с параллельными трещинами численно решалась в [1]. Сравнение результатов, полученных в данной работе с результатами [1] представлено на *Рисунок 12* и *Рисунок 13*.

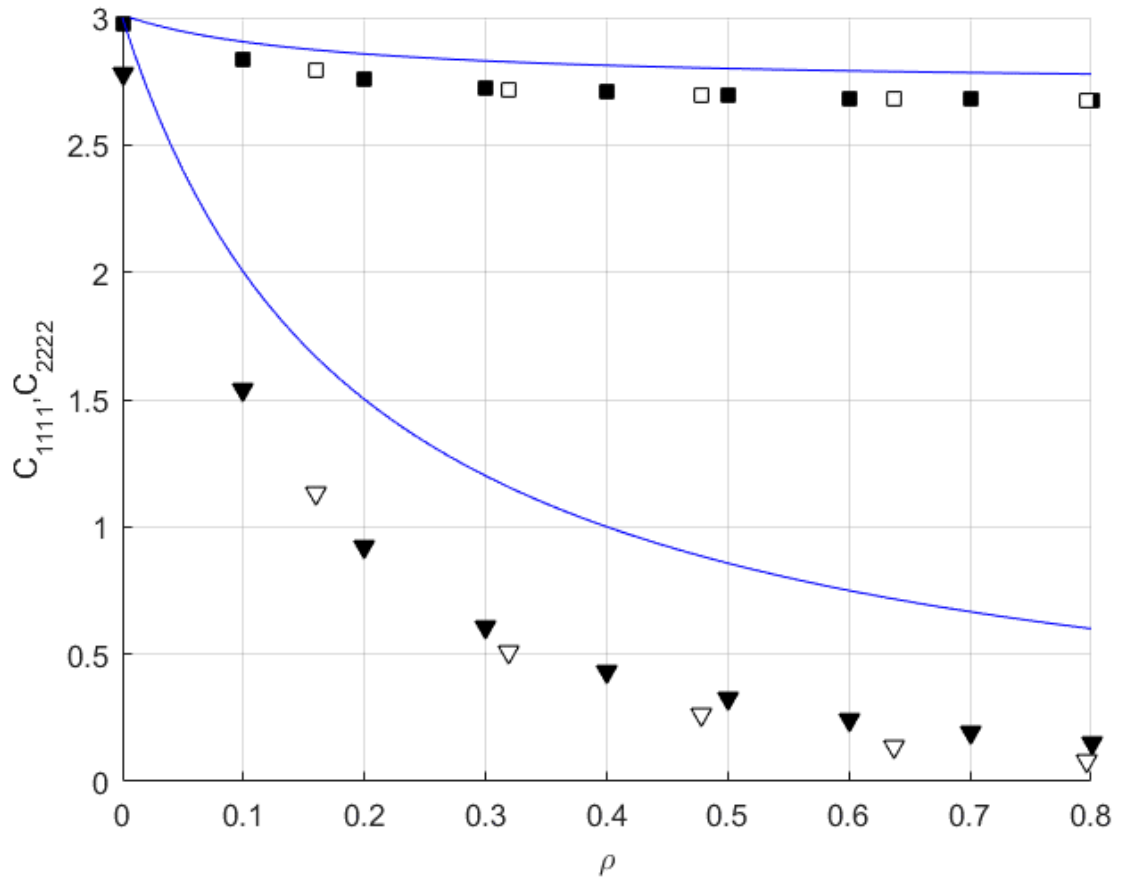


Рисунок 12. Сравнение компонент  $C_{1111}$   $C_{2222}$ . Закрашенные точки – результаты, вычисленные в данной работе, не закрашенные – результаты из [1], сплошная линия – результаты приближения не взаимодействия.

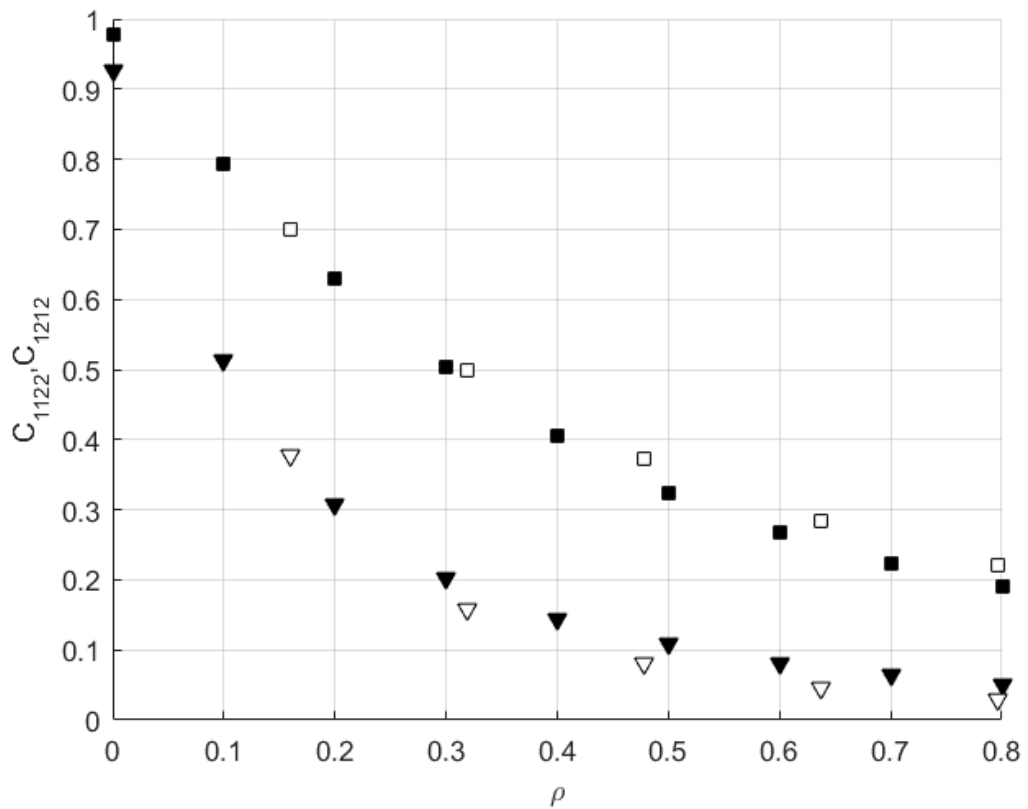


Рисунок 13. Сравнение компонент  $C_{1212}$  и  $C_{1122}$ . Закрашенные точки – результаты, вычисленные в данной работе, не закрашенные – результаты из [1]

Найденные компоненты тензора жесткости качественно хорошо согласуются с результатами полученными авторами в [1] для аналогичной задачи.

Отклонение среднего тензора податливости и облако точек отклонений тензоров податливости для всех конфигураций при плотности  $\rho = 0.4$  представлены на Рисунок 14

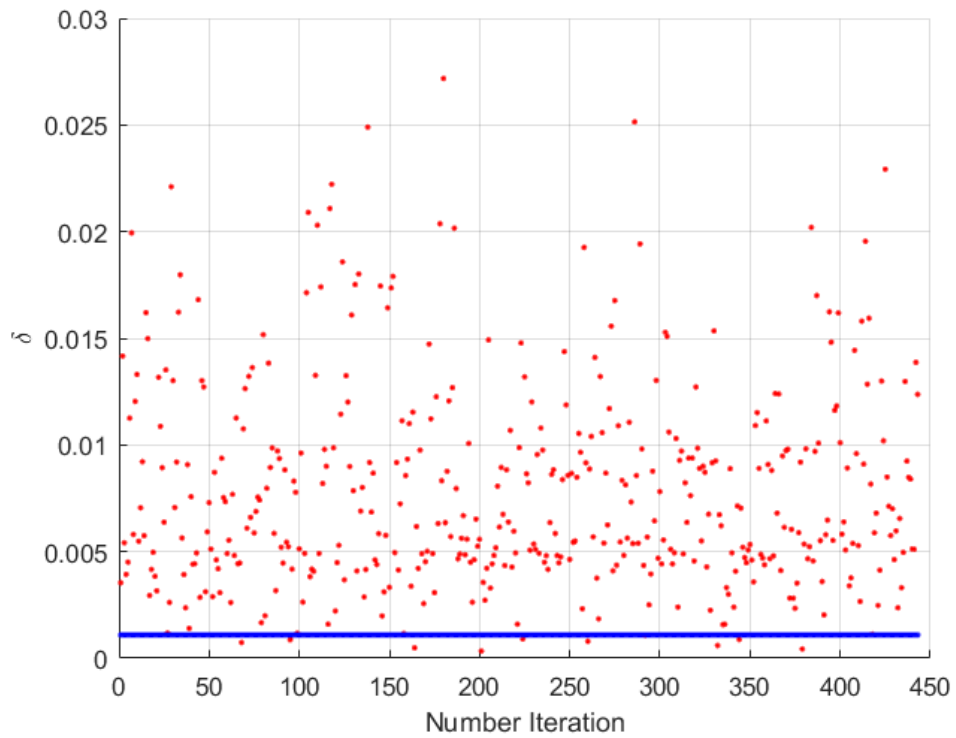


Рисунок 14. Облако точек отклонения тензора податливости от трещин и отклонение от ортотропного для среднего тензора податливости

Значения отклонения от ортотропного для среднего тензора податливости и облака точек отклонений тензоров податливости для всех конфигураций при различных плотностях приведены на *Рисунок 15*

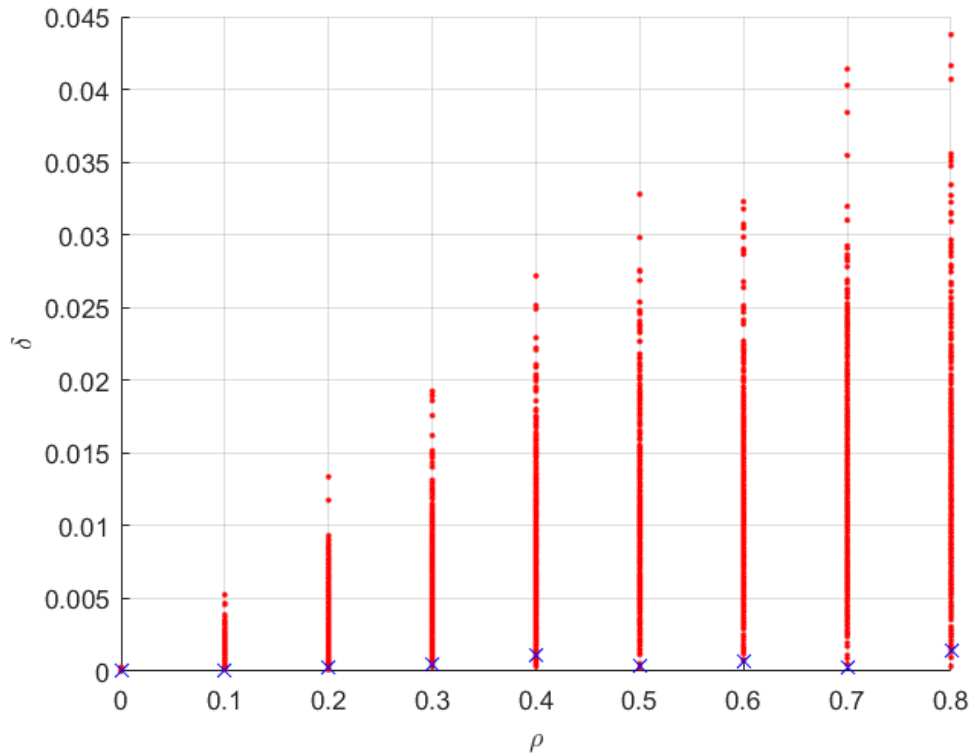


Рисунок 15. Отклонение тензора податливости от ортотропного для семейства параллельных трещин

Отклонение для задачи о образце с параллельными трещинами для среднего тензора податливости не превышает 1%, также максимальное значение разброса не превышает 5% для самой большой плотности. Данные результаты позволяют заключить, что материал с параллельными трещинами можно считать ортотропным.

### Два семейства параллельных трещин

Материал с семейством параллельных трещин обладает ортотропной симметрией, и как было показано выше, учет взаимодействия трещин не меняет ортотропные свойства материала. Чтобы полностью проверить гипотезу о незначительном влиянии взаимодействия необходимо проверить случаи, когда материал не обладает данной симметрией.

Первой задачей рассматривается материал с двумя семействами трещин, наклоненными друг к другу  $30^\circ$ . Причем, количество трещин первого семейства в два раза больше второго. Тогда плотность трещин в материале можно записать:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2$$

$$\rho = \frac{N_{cr} l}{S}, \quad \rho_1 = 2\rho_2$$

Пример конфигурации представлен на *Рисунок 16*.

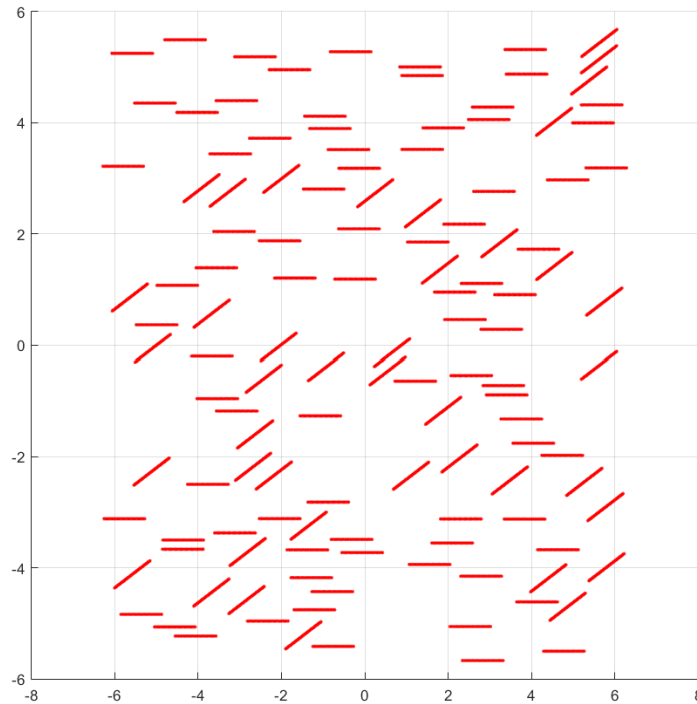


Рисунок 16. Пример конфигурации двух семейств трещин, наклоненных под углом  $30^\circ$

Поиск тензора податливости аналогичен методу описанному выше. Однако, для проверки ортотропности тензора податливости необходимо исследовать тензор податливости в осях соответствующим ортотропным.

Для определения ортотропных осей используется гипотеза, что в ортотропных осях отклонение тензора податливости от ортотропного минимально.

Чтобы определить тензор податливости в осях повернутых от начальных на угол  $\alpha$  используется матрица поворота  $F(\alpha)$  [13]:

$$F(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

Тогда тензор податливости в новых осях будет иметь вид:

$$S_{new} = F'SF$$

Компоненты тензора податливости от трещин при различных плотностях в начальных осях представлены Рисунок 17

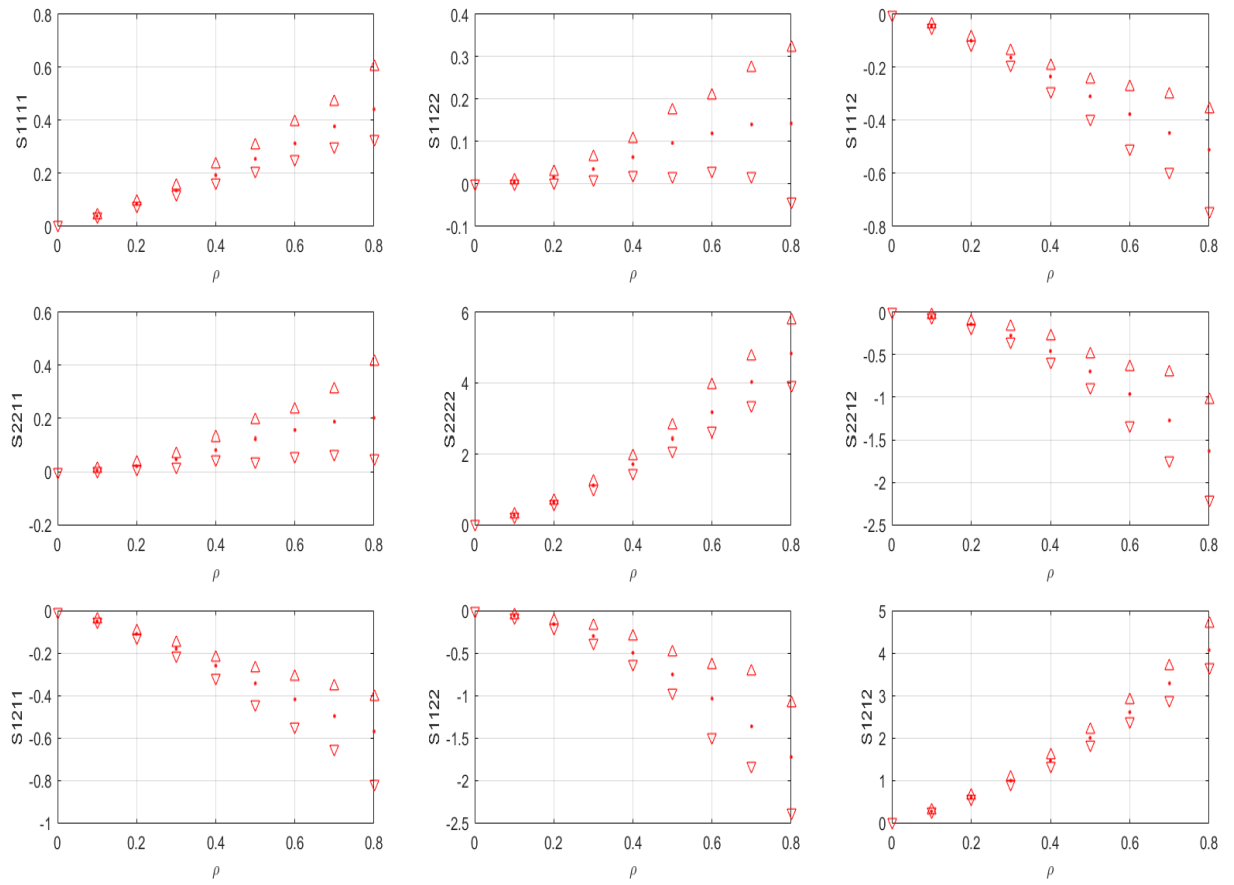


Рисунок 17. Компоненты среднего тензора податливости от трещин при различных плотностях в начальных осях вместе с разбросом.

Компоненты среднего тензора податливости от трещин в ортотропных осях представлены на *Рисунок 18*

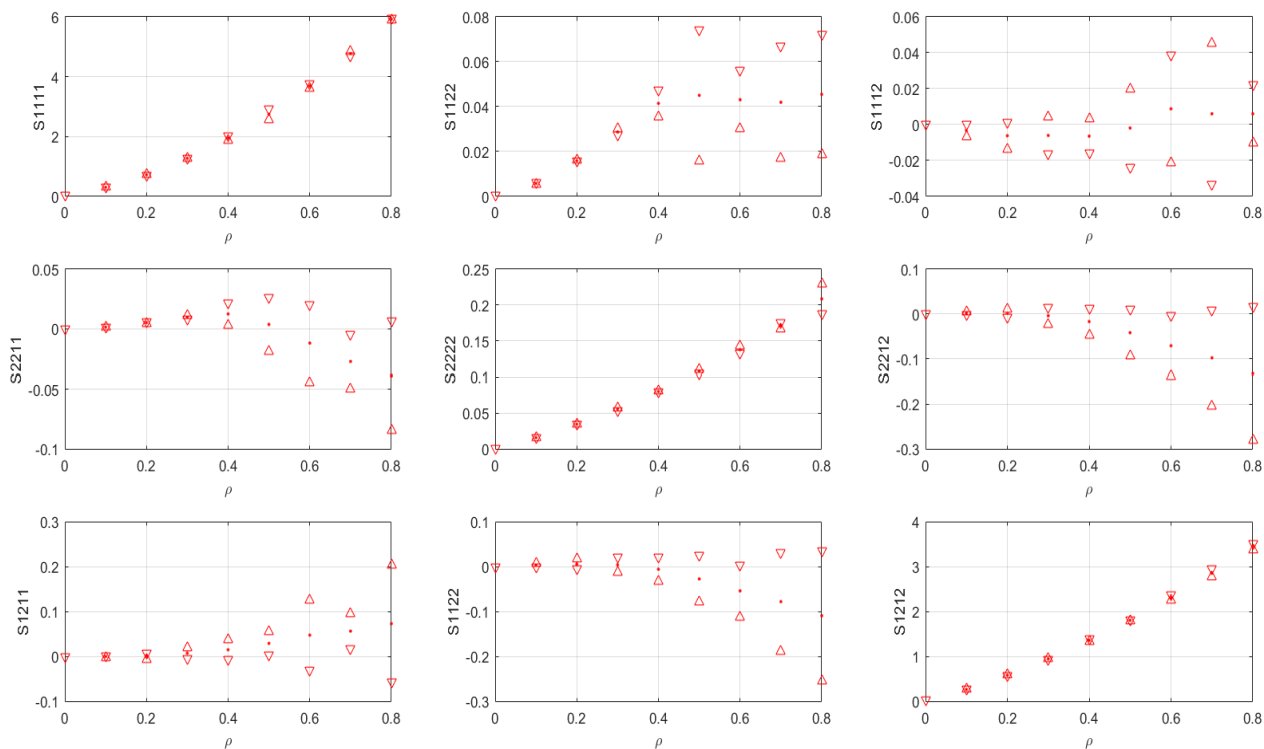


Рисунок 18. Компоненты среднего тензора податливости от трещин при различных плотностях в ортотропных осях вместе с разбросом.

Рисунок 17 и Рисунок 18 показывают, что увеличение плотности приводит к увеличению разброса значений компонент тензора податливости от трещин. Также поворот к ортотропным осям значительно уменьшает компоненты тензора податливости, которые в ортотропном равны 0 ( $S_{1112}$ ,  $S_{2212}$ ,  $S_{1211}$ ,  $S_{1122}$ ), то есть уменьшает отклонение от ортотропного.

Значения вычисленного отклонения для среднего тензора податливости для разных углах поворота осей при разных плотностях  $\rho$  приведены Рисунок 19.

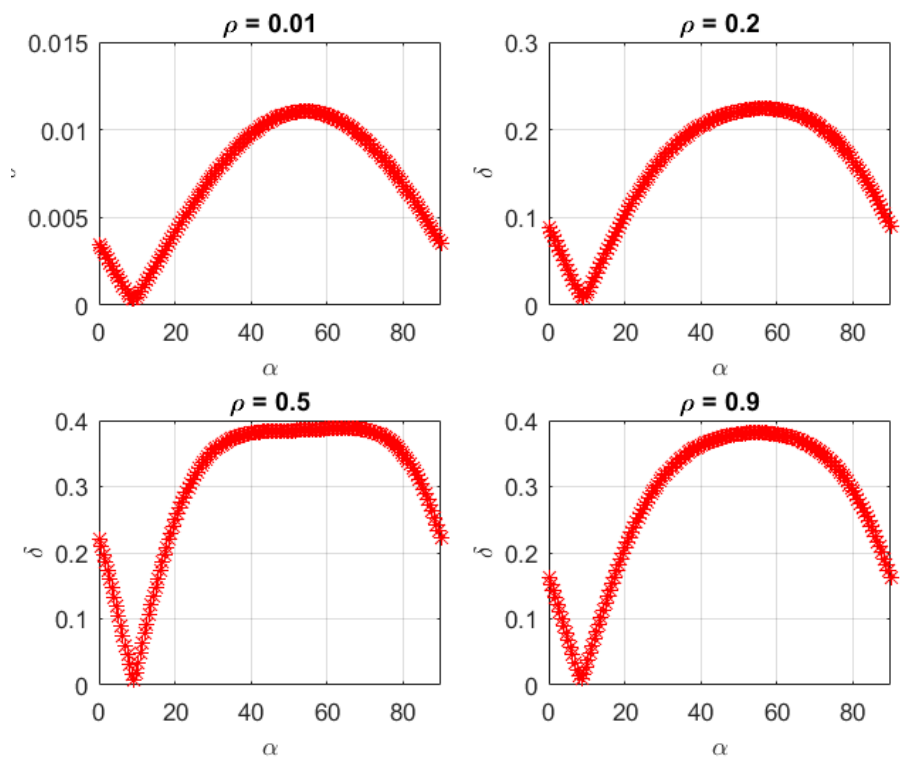


Рисунок 19. Отклонение тензора податливости от ортотропного при разных плотностях для разных углов

Рисунок 19 показывает, что для всех плотностей общий характер графиков схож. Причем минимум наблюдается в окрестности одного значения.

Задача определения ортотропных осей для материала с двумя семействами трещин, наклоненными под углом  $30^\circ$  аналитически решена в [3] – оси ортотропии повернуты от начальных на угол  $9.5^\circ$  (Рисунок 20)

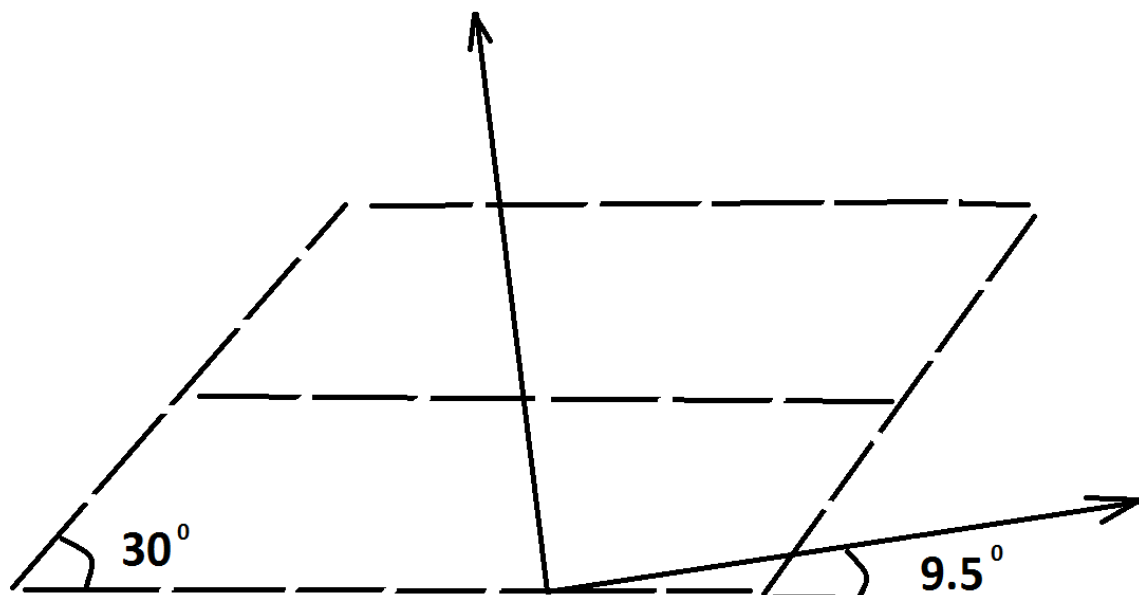


Рисунок 20. Аналитическое решение для определения осей ортотропии для двух семейств трещин с углом  $30^\circ$



Значения найденных углов ортотропии для различных плотностях для среднего тензора податливости, разброс углов для всех конфигураций, а также аналитическое решение приведены на *Рисунок 21*.

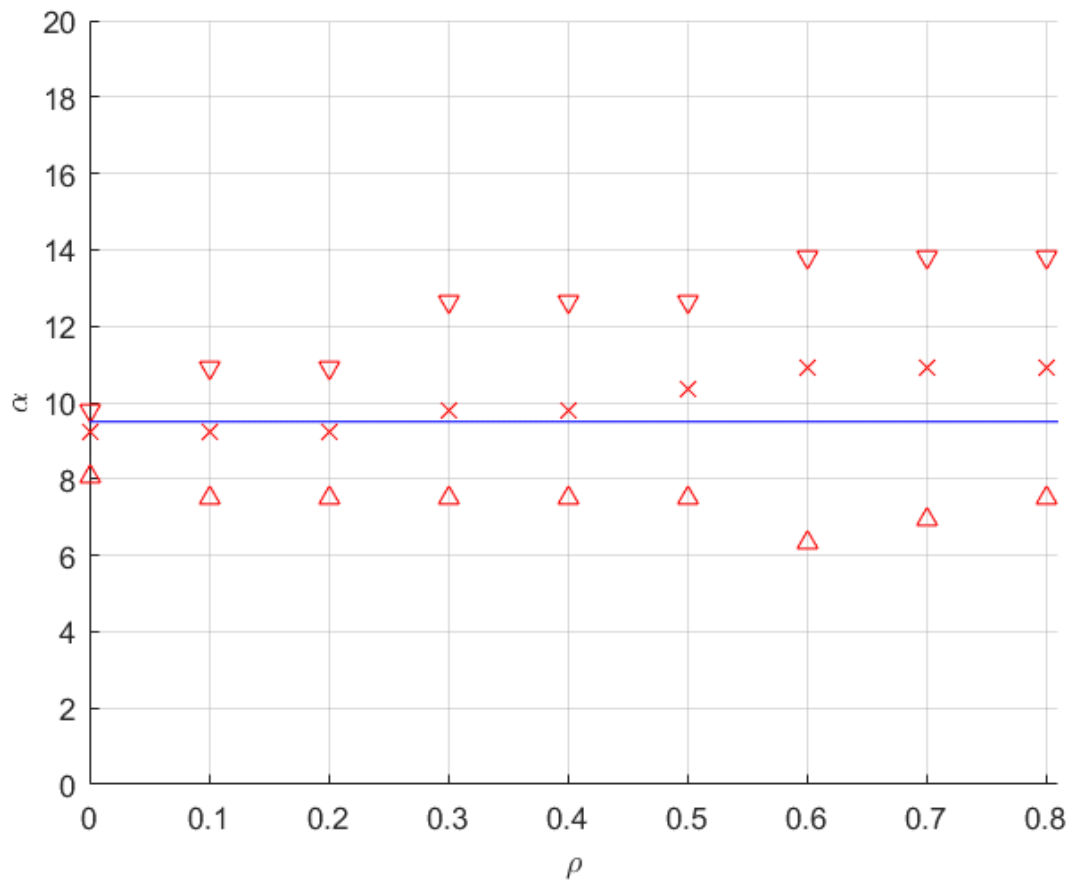


Рисунок 21. Значение поворота осей к ортотропным для различных плотностей в задаче о двух семействах трещин. Крест – значение угла для среднего тензора податливости, синяя линия – аналитическое решение, стрелочки – максимальные и минимальные значения углов.

Углы ортотропии, найденные с помощью численного метода, хорошо согласуются с известным аналитическим решением.

Облако точек отклонения тензора податливости от ортотропного для всех конфигураций и отклонение среднего тензора податливости для плотности  $\rho = 0,4$  в ортотропных осях представлены на *Рисунок 22*

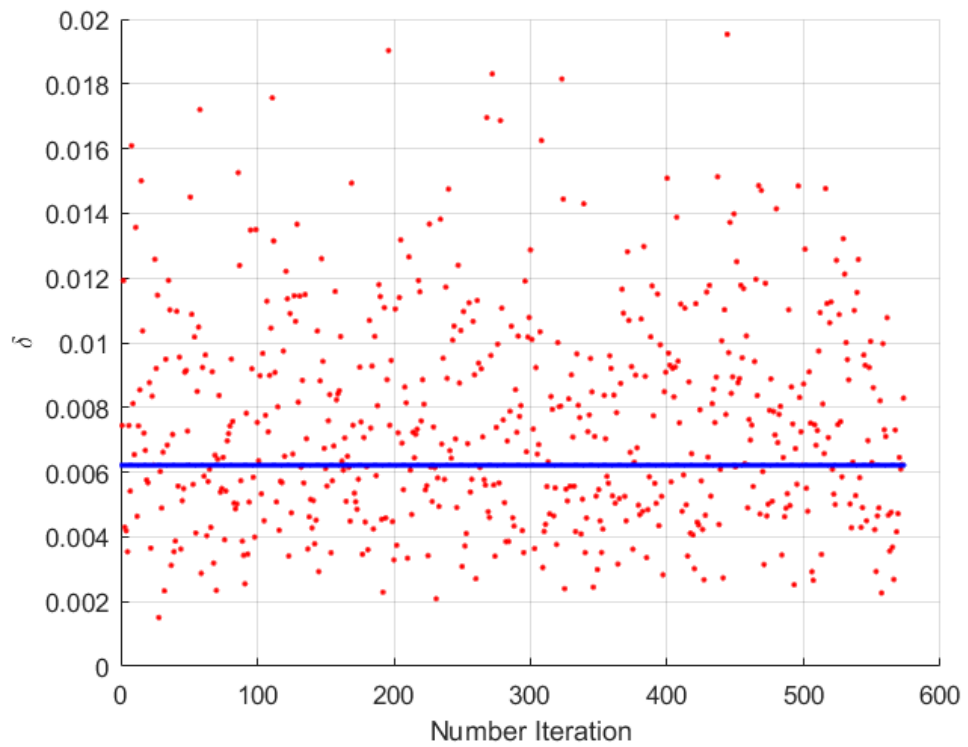


Рисунок 22. Облако точек отклонений для всех конфигураций и для среднего тензора податливости при плотности  $\rho = 0,4$

Отклонение осей среднего тензора податливости в орторопных осях от ортотропного тензора, а также разброс ошибок для всех конфигураций представлены на *Рисунок 23*

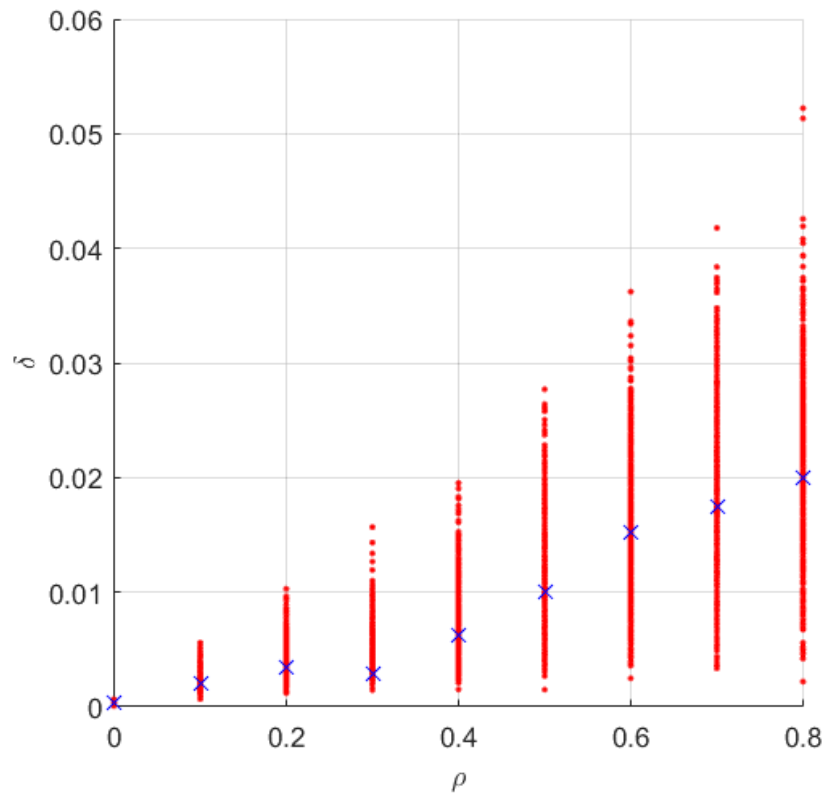


Рисунок 23. Отклонение тензора податливости от ортотропного для двух семейств под углом  $30^0$

Значения для отклонения среднего тензора податливости в ортотропных осях, а также максимальный разброс не превышает 5% для больших плотностей, что позволяет говорить об орторопности эффективного тензора податливости.

Аналогичные расчеты проведены для задач двух семейств трещин, наклоненных под углом  $15^0$  и  $40^0$ .

Значения компонент для среднего тензора податливости от трещин в ортотропных осях с разбросом по всем конфигурациям для разных плотностей представлены на *Рисунок 24* и *Рисунок 25*.

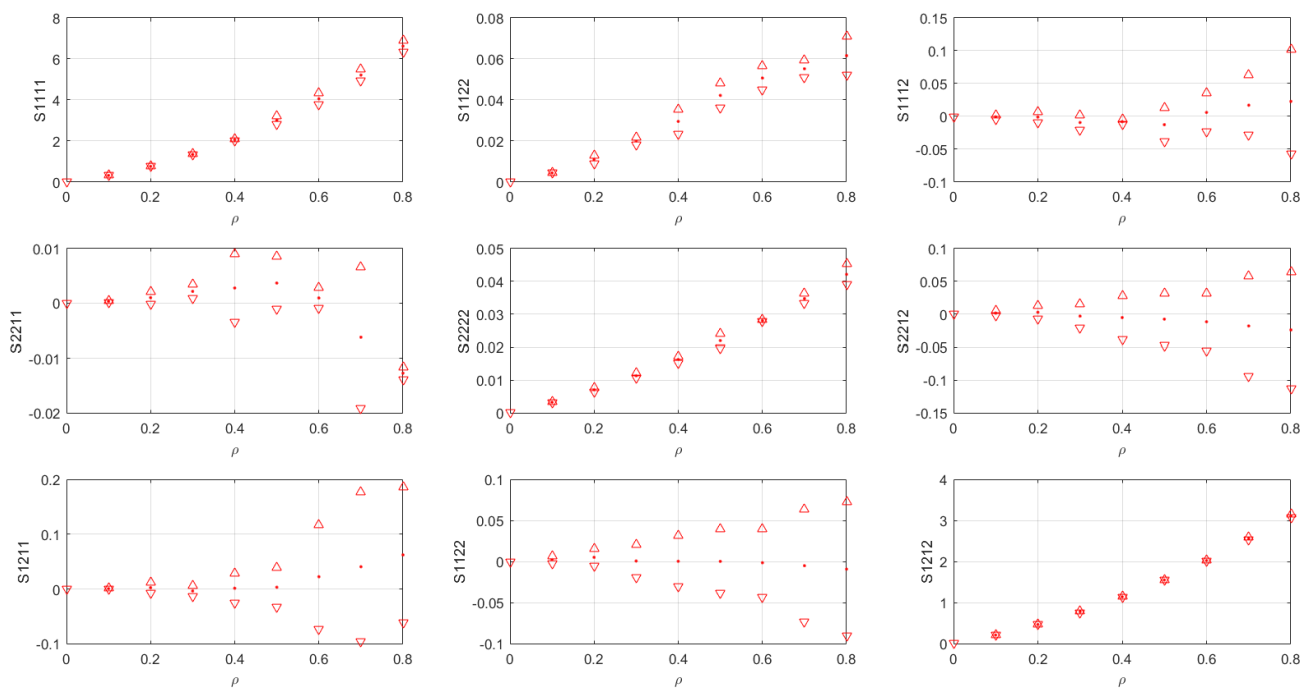


Рисунок 24. Значение компонент среднего тензора податливости от трещин при различных плотностях для 2 семейств с углом  $15^0$ , а также разброс для всех компонент

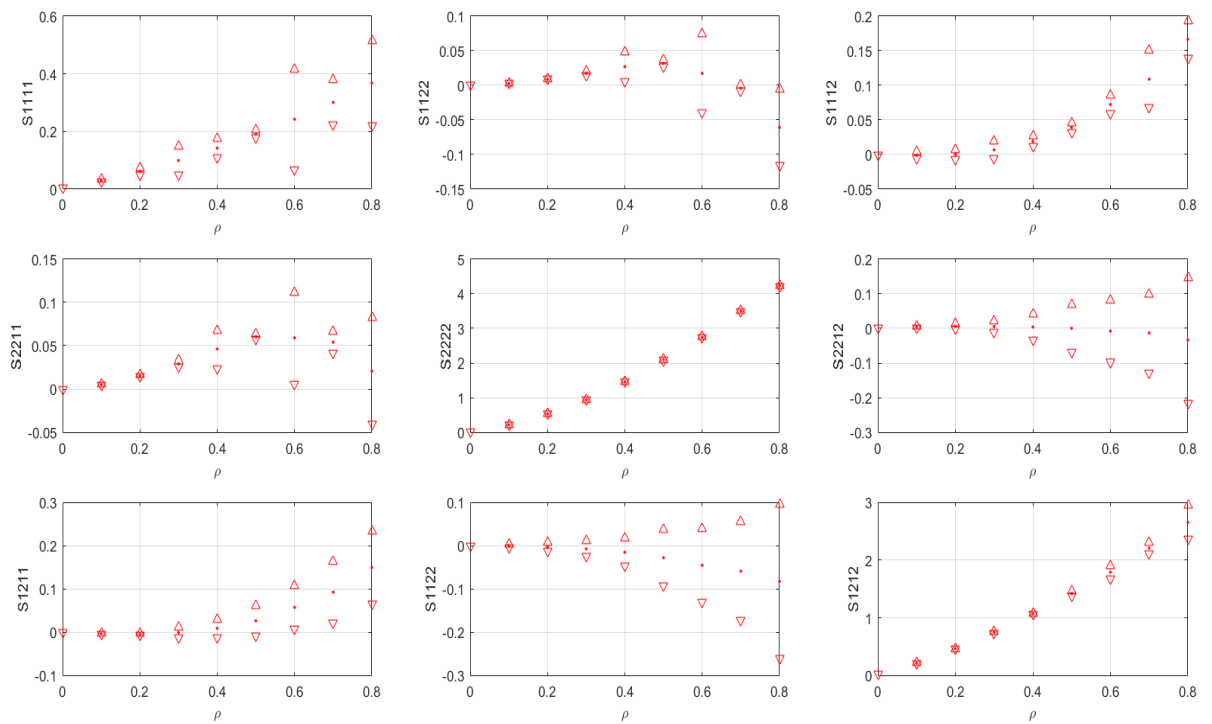


Рисунок 25. Значение компонент среднего тензора податливости от трещин при различных плотностях для 2 семейств с углом 40, а также разброс для всех компонент. Значения отклонения среднего тензора податливости от трещин в зависимости от поворота осей представлены на *Рисунок 26* и *Рисунок 27*.

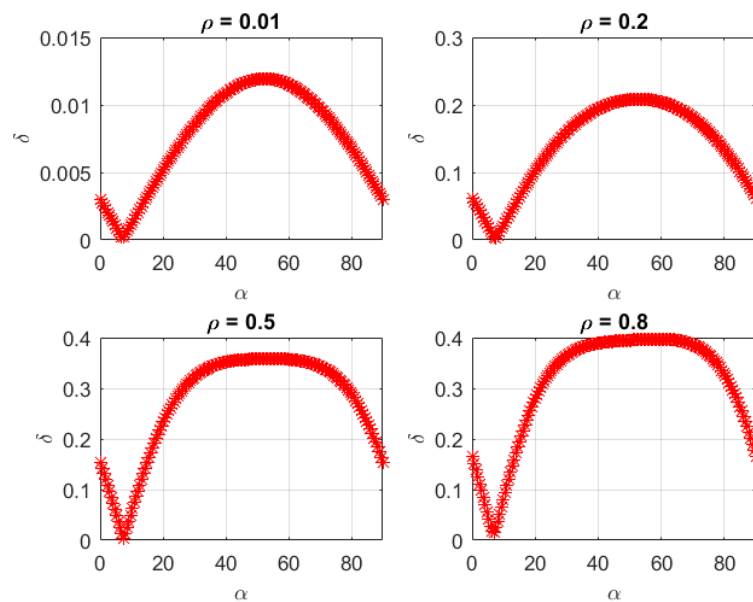


Рисунок 26. Отклонение тензора податливости от отропного для семейств, наклоненных под углом  $15^0$  при различных осей для разных плотностей.

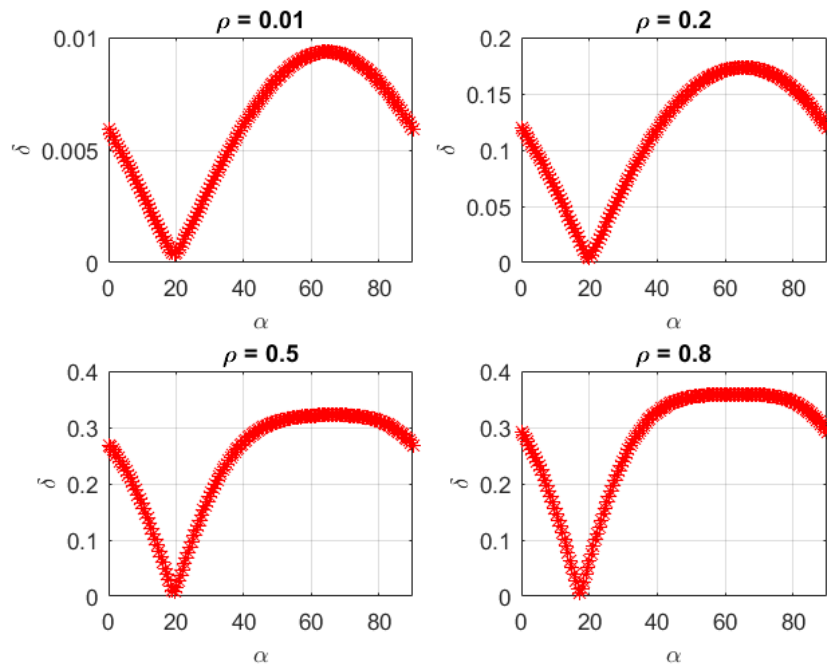


Рисунок 27. Отклонение тензора податливости от отротропного для семейств, наклоненных под углом  $40^\circ$  при различных осях для разных плотностей.

Углы поворота к ортотропным осям для двух семейств трещин, наклоненных под углом  $15^\circ$   $40^\circ$ , для разных плотностей представлены на *Рисунок 28* и *Рисунок 29*.

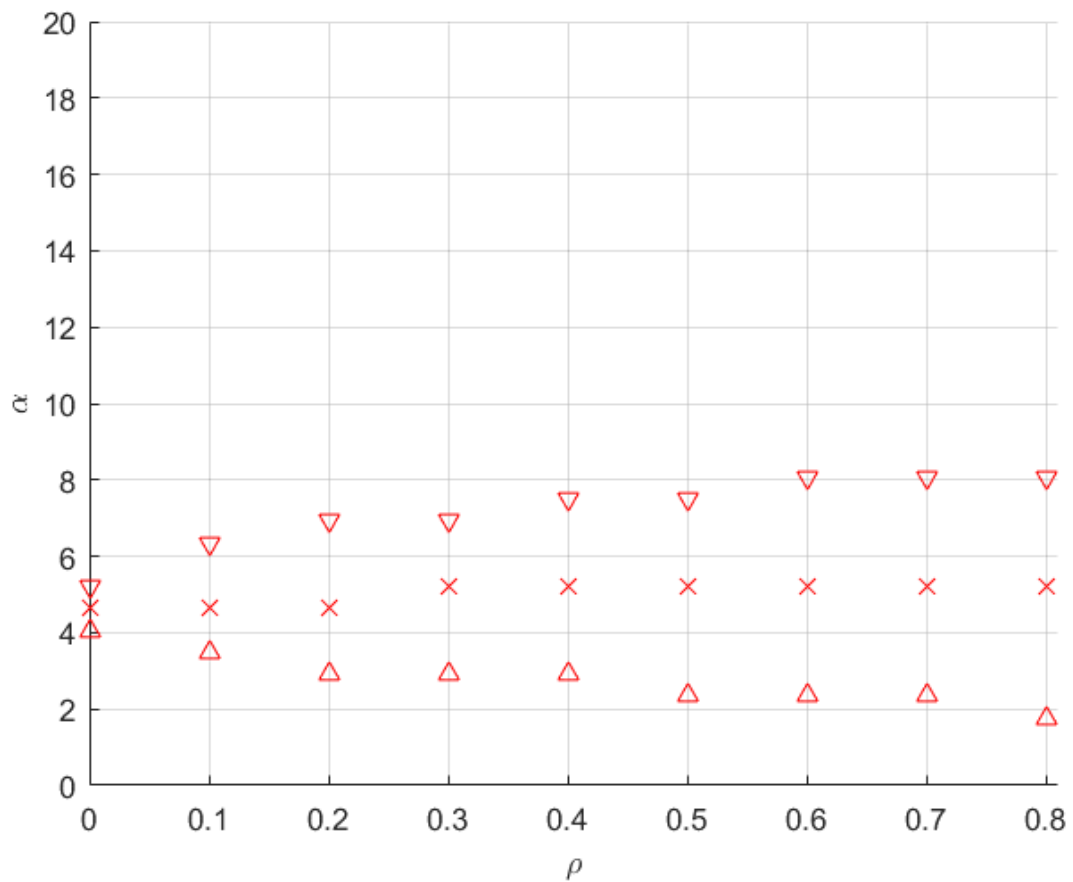


Рисунок 28. Углы поворота к ортотропным осям для двух семейств трещин, наклоненных, под углом  $15^\circ$ .

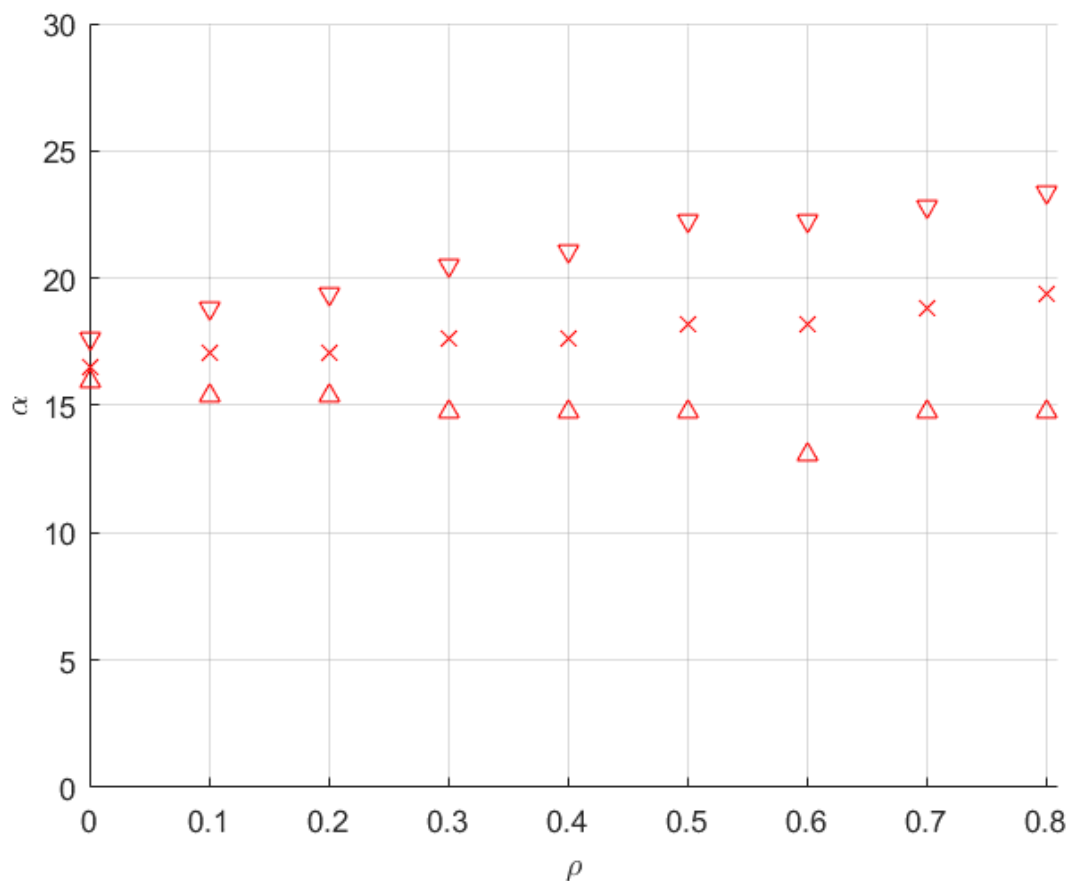


Рисунок 29. Углы поворота к ортотропным осям для двух семейств трещин, наклоненных, под углом  $40^\circ$ .

Таким образом, угол поворота к ортотропным осям для задачи о двух семействах, наклоненных под углом  $15^\circ$  – приблизительно равен  $5^\circ$ , а для наклоненных под углом  $40^\circ$  -  $18^\circ$ .

Отклонение среднего тензора податливости от отропного в осях ортотропии для разных плотностях представлены со значениями отклонения для всех плотностей представлены на

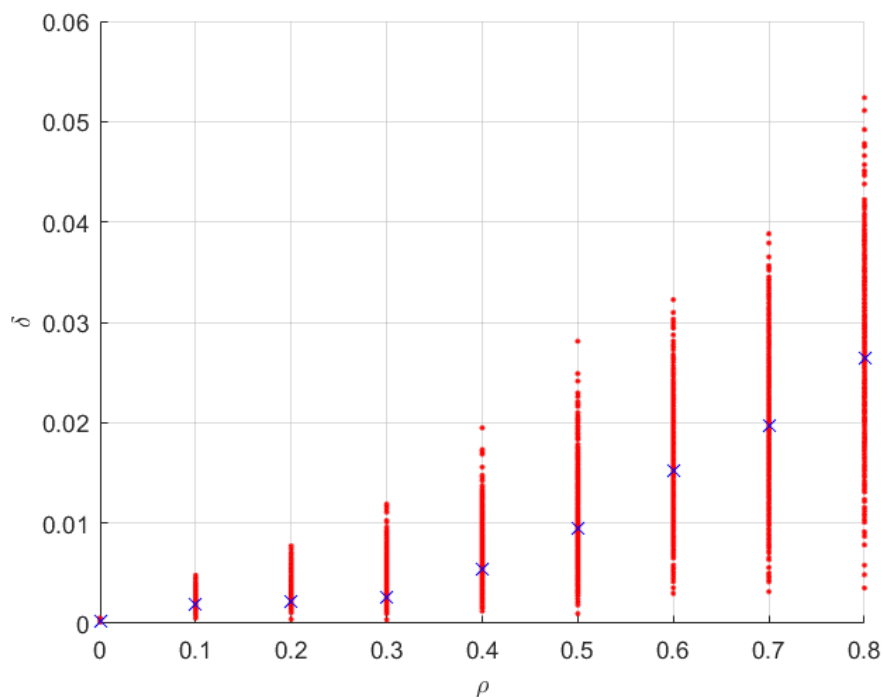


Рисунок 30. Отклонение тензора податливости от ортотропного для двух семейств, наклоненных под углом  $40^{\circ}$  при различных плотностях

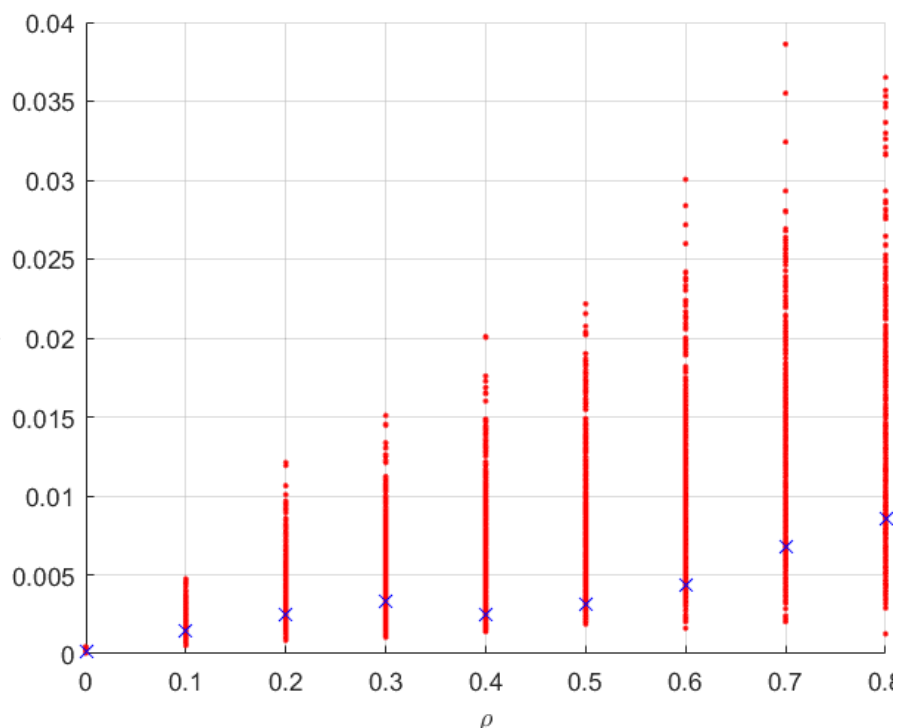


Рисунок 31. Отклонение тензора податливости от ортотропного для двух семейств, наклоненных под углом  $15^{\circ}$  при различных плотностях

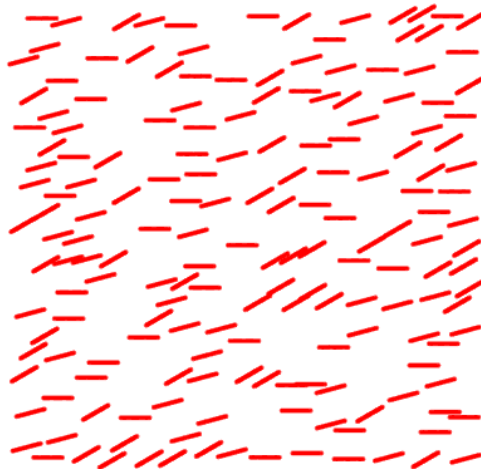
Величина отклонения тензоров податливости для различных плотностей при различных наклонах семейств трещин не превышает 5%. Что позволяет говорить о незначительном влиянии взаимодействия трещин на ортотропные свойства.

### Три семейства параллельных трещин

Рассматривается материал с тремя семействами трещин, наклоненными под углами  $15^{\circ}$  и  $30^{\circ}$ . Количество трещин в каждом семействе одинаково.

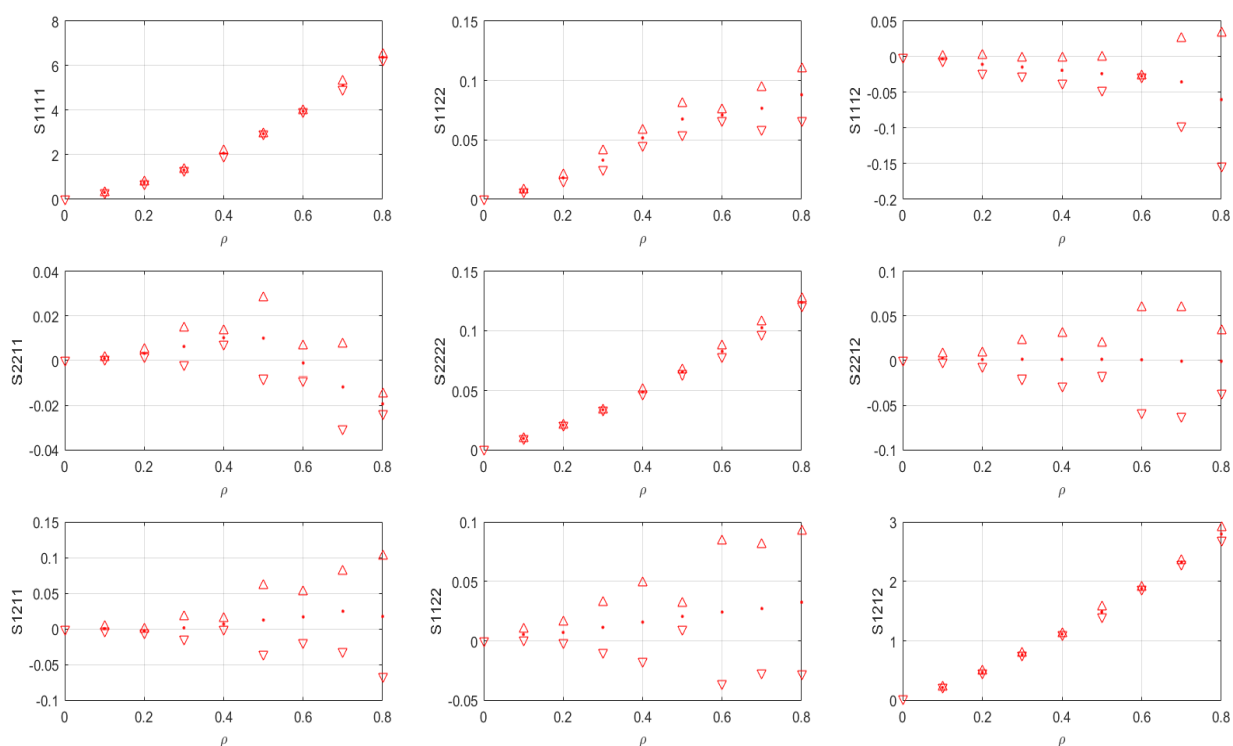
$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$$

Пример такой конфигурации представлен на *Рисунок 32*



*Рисунок 32.* Пример конфигурации трех семейств трещин под углами  $15^0$  и  $30^0$ .

Значение компонент среднего тензора податливости от трещин при различных плотностях с максимальным разбросом представлены на *Рисунок 33*



*Рисунок 33.* Значение компонент среднего тензора податливости в ортотропных осях при различных плотностях с максимальным разбросом

Отклонение осей среднего тензора податливости от ортотропного при различных осях для различных плотностях представлены на *Рисунок 34*.



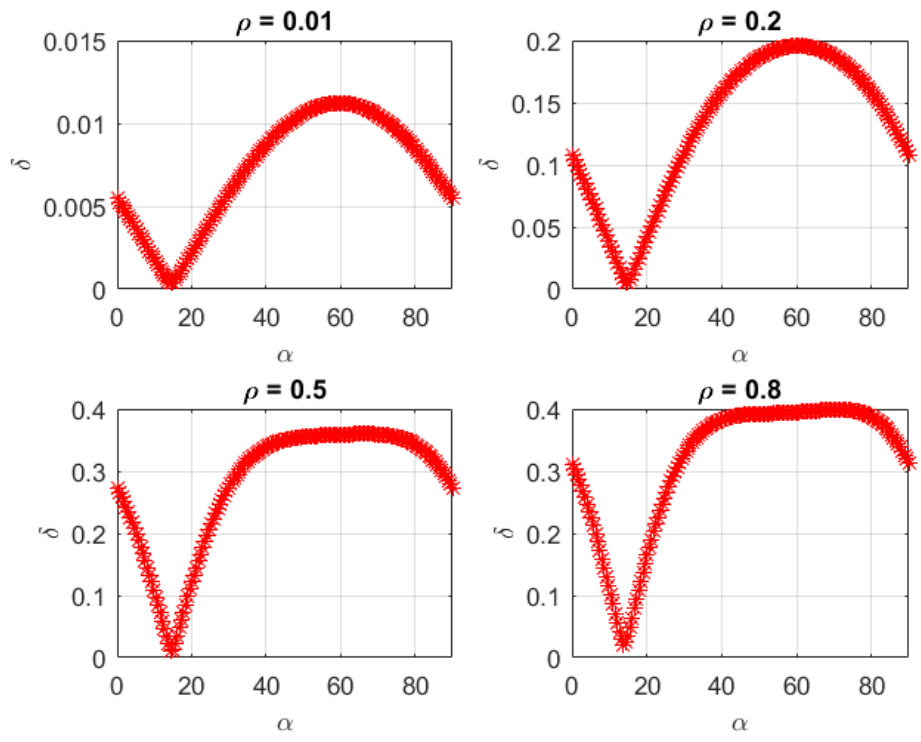


Рисунок 34. Отклонение тензора податливости для различных плотностях в различных осях для трех семейств трещин.

Углы поворота к ортотропным осям для задачи трех семейств трещин с максимальным значением разброса представлены на *Рисунок 35*

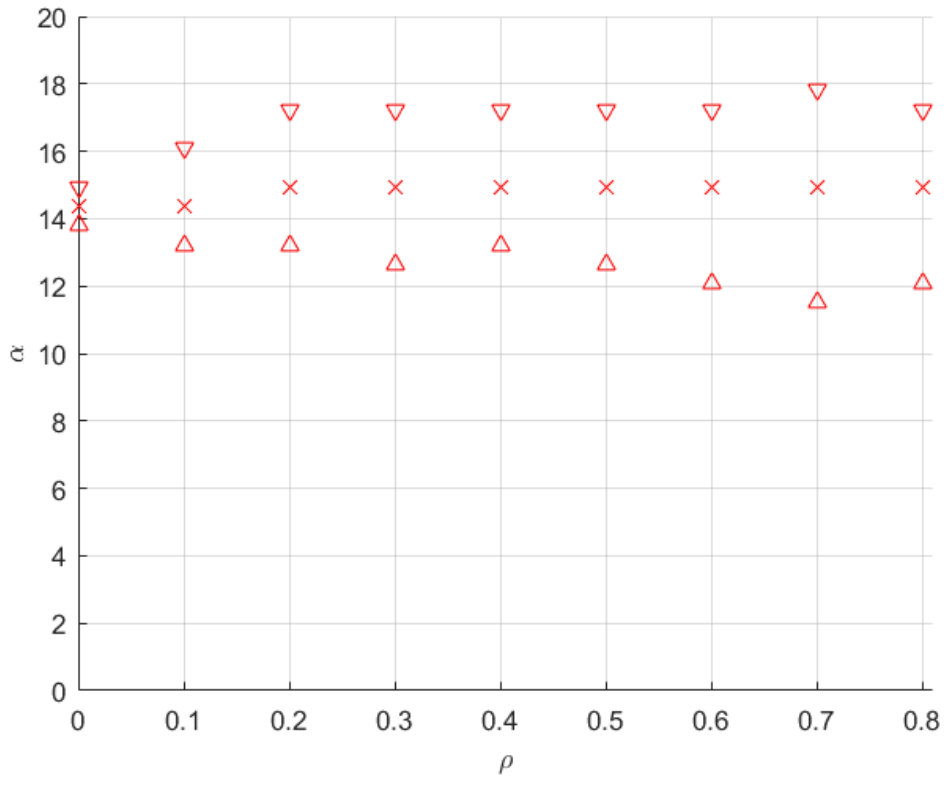


Рисунок 35. Углы поворота к ортотропным осям для задачи о трех семействах трещин с максимальными разбросом.

Угол поворота для задачи о трех семействах трещин приблизительно равен  $15^{\circ}$ .

Отклонение среднего тензора податливости от ортотропного в ортотропных осях при различных плотностях, а также облако точек для всех конфигураций представлены на *Рисунок 36*.

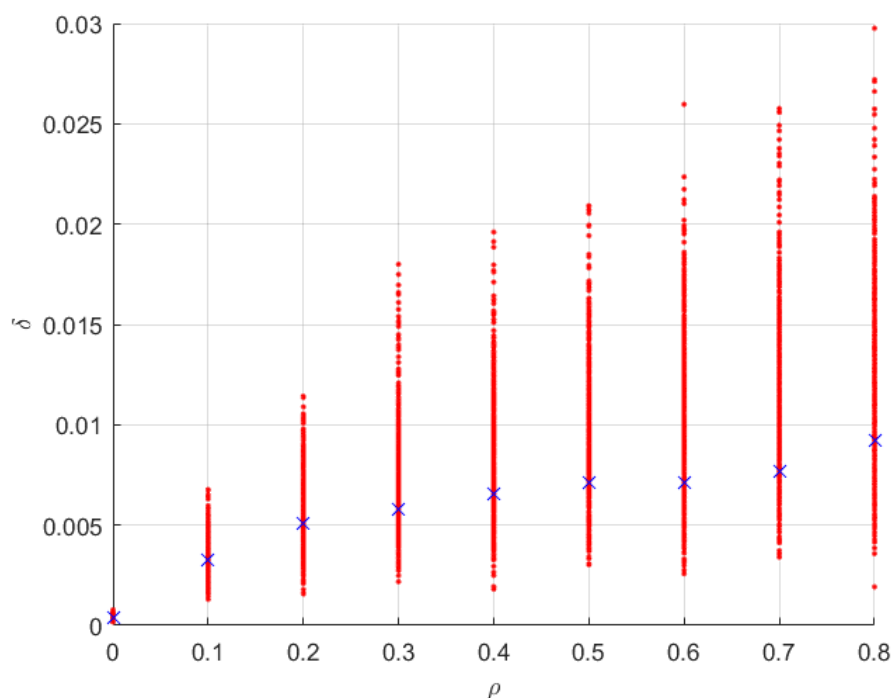


Рисунок 36. Отклонение среднего тензора податливости от ортотропного в осях ортотропии при различных плотностях для трех семейств трещин

Отклонение среднего тензора податливости для семейства трех трещин не превышает 1.5%, а максимальный разброс не превышает 3%. Таким образом, эффективный тензор податливости можно считать ортотропным.

### Обсуждение

В данной работе исследовано влияние взаимодействия трещин на ортотропные свойства материала с трещинами при различных постановках – одно семейство трещин, два (три различных угла) и три семейства параллельных трещин. Всего пять различных постановок. Для каждой из постановки исследован диапазон плотностей, причем для каждой определенной плотности проведено 450-650 реализаций усреднения результатов.

В ходе исследования показано, что даже для постановок в которых отсутствует геометрическая ортотропия – два и три семейства наклоненных семейств трещин, наблюдается незначительное влияние взаимодействия на ортотропные свойства материала. Отклонение тензора податливости во всех постановках не превышает 5-6%, что позволяет сделать заключение - при решении задач, связанных с ортотропными свойствами материала с трещинами, можно ограничиваться подходом невзаимодействия. Данное заключение позволяет значительно упростить дальнейшие расчеты.

### Заключение

В работе над данной задачей были получены следующие результаты:

- Реализован метод разрывных смещений на языке C++ в виде вычислительного модуля для определения эффективных свойств материала с трещинами, позволяющий решать задачи в различных постановках
- Проведено тестирование метода для задачи об одной трещине под растягивающей внешней нагрузкой. Отклонение полученных результатов от аналитического решения для среднего раскрытия не превышает 3%.
- Решена задача создания начальных конфигураций. Определено минимальное расстояние между трещинами, позволяющее повысить устойчивость численного метода. Данное расстояние соответствует 0.1 длины трещины.
- Проведено сравнение численных значений компонент тензора жесткости для задачи о параллельных трещинах с известными решениями [1]. Получено хорошее качественное совпадение.
- Для задачи двух семейств трещин, наклоненных под углом  $30^{\circ}$ , определены углы поворота к осям ортотропии. Полученные результаты хорошо согласуются с известным аналитическим решением [3].
- Определены углы поворота к осям ортотропии для постановок, в которых отсутствует геометрическая ортотропия. В частности, для задачи двух семейств трещин, наклоненных под углом  $30^{\circ}$  – угол поворота  $9^{\circ}$ , наклоненных  $15^{\circ}$  –  $5^{\circ}$ , наклоненных  $40^{\circ}$  –  $18^{\circ}$ . Для трех семейств трещин угол поворота –  $15^{\circ}$ .
- Рассмотрены несколько постановок с различными семействами трещин (5 различных постановок) при различных плотностях. Для каждой плотности проведено 450 расчетов для реализации операции усреднения.
- Исследовано влияние взаимодействия трещин на орторопные свойства материала с трещинами при различных постановках. Даже в материале, в котором отсутствует геометрическая ортотропия, наблюдается незначительное влияние взаимодействия –5%.

## Список литературы

- [1] VI Kushch, I Sevostianov, L Mishnaevsky, «Effect of crack orientation statistics on effective stiffness of microcracked solid,» *International Journal of Solids and Structures*, т. vol.46, pp. 1574-1588, 2009.
- [2] Bernam Budiansky, Richard J. O'Connell, «Elastic moduli of a cracked solid,» *International journal of Solids and structures*, № 12, pp. 81-97, 1976.
- [3] M.Kachanov, «Elastic solids with many cracks and related problems,» *ADVANCES IN APPLIED MECHANIC*, т. vol.30, pp. 260-438, 1993.
- [4] Vladimir Grechka, Mark Kachanov, «Effective elasticity of rocks with closely spaced and intersecting cracks,» *GEOPHYSICS*, т. 71, № 3, pp. D85-D91, 2006.
- [5] Erik H. Saenger, Oliver S. Kruger and Serge A. Shapiro, «Effective elastic properties of randomly fractured soils: 3D numerical experiments,» *Geophysical Prospecting*, № 52, pp. 183-195, 2004.
- [6] Y.J. Liu, X.L. Chen, «Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element,» *Mechanics of Materials*, № 35, pp. 69-81, 2003.
- [7] Y. BENVENISTE, «A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials,» *Mechanics of Materials*, № 6, pp. 147-157, 1987.
- [8] И. Баяк, «Основные принципы математического моделирования макроскопических физических свойств коллекторов углеводородов,» *Seismic Technology*, № 10, pp. 5-18, 2011.
- [9] И. Баяк, «Междисциплинарный подход к определению эффективных физических свойств коллекторов,» в *Galperin Readings 2011*, Galperin, 2011.
- [10] Igor Sevostianov, Mark Kachanov, «On approximate symmetries of the elastic properties and elliptic orthotropy,» *International Journal of Engineering Science*, № 46, pp. 211-223, 2008.
- [11] M.Kachanov, «Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts,» *Appl Mech Rev*, № vol. 45, pp. 304-305, 1992.
- [12] Crouch S.L., Starfield A.M, «Boundary Element Methods in Solid Mechanics: with Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering,» *George Allen and Union*, p. 322, 1983.
- [13] K. J. Willam, «Advanced Mechanics of Materials,» CVEN 5161, 2003.