**А.В. Костарев**

1. **Нестационарные связи общего вида**

Рассматривается система материальных точек с массами {. Движение системы ограничено идеальными голономными нестационарными связями общего вида

(.

Равнодействующие активных сил и реакций связей, действующих на точку системы, формально определяют ее абсолютное ускорение в инерциальной системе отсчета**:**

Проблемы использования уравнений Ньютона (1.2) для вывода дифференциальных уравнений движения системы состоят в их векторном виде и в зависимости неизвестных реакций , а значит и ускорений  от скоростей точек.

Уравнениям (1.1) и (1.2) отвечает множество ***возможных*** положений, законов движения , и скоростей порожденных множеством начальных условий.

Возможные положения системы на связях можно задать независимыми обобщенными координатами {, где *l -* число степеней свободы системы. Тогда, возможный закон движения точки окажется функцией обобщенных координат и времени

Представим движение системы из произвольного положения как сумму двух движений: переносного движения вместе со связями и относительного движения по связям. Возможная скорость точки является суммой переносной и относительной скоростей:

Здесь и далее повторяющийся индекс говорит о суммирование по индексу.

В произвольном положении системы на связях переносная скорость имеетединственное значение,определяемое уравнениями связи (1.1).

Уравнениям (1.1), напротив, отвечает множество относительных скоростей **,** порожденныхмножеством начальных условий. Все относительные скорости направлены произвольно в касательной плоскости к поверхности связей, и имеют произвольный модуль. Именно относительные скорости создают разнообразие возможных скоростей системы. Относительные скорости точек принято называть  ***виртуальными*** скоростями системы [1].

Из выражения (1.3) вытекает, что при стационарных связях множества возможных и виртуальных скоростей совпадают.

В данном положении системы производные в формуле (1.5) имеют единственное значение. Произвольными же в формуле (1.5) являются обобщенные скорости , которые назовем ***виртуальными обобщенными скоростями***.

Умножив закон Ньютона для каждой точки на ее возможную скорость, после суммирования по k придем к теореме об изменении кинетической энергии системы для возможных скоростей:

Поскольку на систему наложены идеальные связи, сумма мощностей их реакций на любых виртуальных скоростях в произвольном положении системы равна нулю

Подставив в (1.6) выражение возможных скоростей (1.3), придем к двум наборам соотношений

Покажем, что из соотношений (1.8) следуют уравнения Лагранжа второго рода. Подставим в (1.8) выражение относительных скоростей (1.5), и просуммируем

Скобки в соотношении (1.10) не зависят от виртуальных скоростей поскольку в них нет реакций идеальных связей , которые связаны с виртуальными скоростями и касательные к поверхности связей ускорения в левой части не зависят от реакций

Запишем (1.10) в виде

Ввиду независимости скоростей приходим к уравнениям:

Покажем, что это и есть уравнения Лагранжа.

Слагаемые в (1.10) имеют размерность мощности, поэтому суммы

естественно назвать ***обобщенными силами***.

Выразим суммы через обобщенные координаты.

Здесь использованы тождества Лагранжа

вытекающие из соотношений (1.3)

Таким образом, выражения (1.12) являются уравнениями Лагранжа второго рода.

Из уравнений Лагранжа следуют дифференциальные уравнения движения системы по связям. После их интегрирования вопрос о реакциях идеальных связей остается открытым. Обычно для определения реакций прибегают к векторным уравнениям динамики относительного движения.

Покажем, что соотношения (1.9) позволяют найти реакции связей аналитически, по функции кинетической энергии Т. Запишем (1.9) в виде:

С учетом уравнений Лагранжа, и того, что , получаем

Здесь учтено, что при нестационарных связях кинетическая энергия является суммой квадратичной, линейной и нулевой форм обобщенных скоростей.

Таким образом, для каждой из точек системы

Из этих соотношений можно определить реакции внешних и внутреннихидеальных связей.

1. **Дискретные нестационарные связи**

Понятие нестационарных связей применимо только в случаях, когда инертность системы пренебрежимо мала по сравнению с инертностью связей (движение спичечного коробка по волнам, поезда по Земле, человека по поезду, и т.п.). В противном случае связь должна быть включена в систему.

Детали механизмов обладают инертностью одного порядка, поэтому в механизмах чаще всего нестационарные связи отсутствуют. После решения обратной задачи любую деталь механизма можно, однако, формально считать нестационарной связью для сопряженных деталей. Это позволяет находить реакции внутренних связей предлагаемым ниже способом.

Когда нестационарные связи представляют собой механизм с конечным числом степеней свободы, их движение можно задать функциями времени , которые назовем несвободными обобщенными координатами системы.

Таким образом, абсолютное движение системы относительно инерциальной системы отсчета может быть задано системой *m* обобщенных координат { среди которых последние *m-l* несвободных координат являются заданными функциями времени.

Будем сначала считать, что все координаты свободны, а реакции нестационарных связей являются неизвестными активными силами. Связи становятся условно стационарными. Найдем дифференциальные уравнения системы и уравнения, выражающие реакции через все обобщенные координаты. Из полученных соотношений найдем выражения реакций нестационарных связей через закон движения связей и системы по связям.

После освобождения координат связей, кинетическая энергия становится квадратичной формой виртуальных обобщенных скоростей

а возможные законы движения - функциями только обобщенных координат.

Их явная зависимость от времени скрыта в координатах

Запишем соотношения типа (1.8)

Уравнения аналогичны уравнениям . Разница только в том, что в число активных сил включены неизвестные реакции нестационарных связей. Как и в случае уравнений , приходим к полной системе уравнений движения системы, состоящей из дифференциальных уравнений Лагранжа числом степеней свободы *l*:

и уравнений для определения реакций , входящих в обобщенные силы

Уравнения (2.4) позволяют по начальным условиям найти закон движения системы по связям. После этого, из уравнений (2.5) можно найти реакции внешних и внутренних связей.

1. **Примеры**
   1. Нестационарные связи общего вида.

Точка массы m движется в плоскости x,y по закону, в котором выделена обобщенная координата q вдоль движущейся плоской кривой

Например, точка движется по эллипсу, полуоси которого изменяются во времени

Кинетическая энергия точки является суммой трех форм обобщенной скорости

Производные форм:

Из уравнения мощностей

находим реакцию связи

**3.2** Точка массы m движется без трения по хорде диска, вращающегося в горизонтальной плоскости с переменной угловой скоростью ω (t). Найдем горизонтальную реакцию ***R*** направляющей.

**3.2.1** Общая формула

,

)

Теперь

С учетом дифференциального уравнения движения

получаем

**3.2.2** . Освободим координату φ

Обобщенная сила реакции (момент) по

Получаем тот же результат

После интегрирования уравнения относительного движения, по функциям ω (t) и x(t) найдем реакцию R.

Аналогичный результат можно получить с помощью основного уравнения динамики относительного движения точки.

**3.3** Внутренние реакции.

Для части системы, остальная ее часть является нестационарной связью. Поэтому реакция отброшенной части может быть найдена указанными ниже способами.

Найдем натяжение нити S, соединяющей тела в эллиптическом маятнике.

**3.3.1** Общая формула.

Кинетическая энергия массы

x

φ

R

*l*

Здесь рассматривается как заданная функция скорости нестационарной связи, поэтому

**3.3.2** Освободим координату x. Реакцию стержня S считаем неизвестной активной силой. Уравнение Лагранжа

приводит к тому же результату:

Очевидное слагаемое входит в правую часть решения через ускорения. Это выражение дает решение при . Чтобы найти натяжение нити при  , системе следует дать постоянную вертикальную скорость, как это сделано в следующем примере.

**3.4** Реакции стационарных связей.

При стационарных связях реакции идеальных связей не создают мощности. Чтобы найти реакции, можно искусственно сделать связи нестационарными, придав им постоянную скорость в направлении связи. При этом система отсчета остается инерциальной, и реакции связей не изменяются.

Найдем нормальную реакцию R , действующую на тело эллиптического маятника.

Дадим основанию вертикальную постоянную скорость . Кинетическая энергия системы

**3.4.1** Общая формула

**3.4.2** Освободим координату у (.

Обобщенная сила по у:

Приходим к тому же результату:

Этот результат можно получить из теоремы о движении центра масс.

**3.5** Найдем реакцию нити R маятника массы *m* и переменной длины *l(t).*

**3.5.1** Общая формула

R

*l(t)*

mg

*φ*

*l*

**3.5.2** Освободим координату *l*

Приходим к тому же результату

Этот результат можно получить и с помощью основного уравнения динамики относительного движения точки.

Заметим, что освобождение координат приводит к результату быстрее, чем общая формула. Но этот способ применим только к связям с конечным числом степеней свободы.

Автор выражает искреннюю благодарность Федору Федоровичу Прохоренко за поднятую им тему получения уравнений Лагранжа из теоремы об изменении кинетической энергии.

**Литература**

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике.М.: Наука, 1966.
2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.Курс теоретической механики, т.1. М.: Наука, 1982.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р*.* Курс теоретической механики. СПб: Лань, 1998.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 2003.
5. Курс теоретической механики. // Под ред. Колесникова К.С*.* М.: МГТУ, 2000.
6. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.II.М.: Высшая школа, 1971.
7. Гернет М.М. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа.1987. 344 с.