Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

К У Р С О В А Я Р А Б О Т А

Применение уравнений Лагранжа II рода к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы

по дисциплине «Курсовое проектирование по теоретической механике»

Выполнил
студент гр.3630103/80002 М.М. Фролов

Ассистент ВШТМ К.В. Мацюк

«___» _____ 2019 г.

Санкт-Петербург

2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение. 3

1. Исходные данные. 4

1.2. Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы с помощью уравнений Лагранжа II рода. 5

Заключение. 8

Список использованной литературы. 9

Введение

Уравнения Лагранжа второго рода дают единый и притом достаточно простой метод решения задач динамики. Важное преимущество этих уравнений состоит в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в рассматриваемую систему, ни от того, как эти тела движутся; определяется число уравнений Лагранжа только числом степеней свободы системы. Кроме того, при идеальных связях в правые части уравнений входят обобщенные активные силы и, следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Уравнения Лагранжа представляют собой ОДУ второго порядка относительно обобщенных координат, которые составляются независимо от того, рассматривается абсолютное или относительное движения механической системы. Из полученных уравнений, если заданы действующие силы и начальные условия, можно, интегрируя, найти закон движения системы. В курсовой работе проводится исследование движения механической системы с двумя степенями свободы с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

1. Исходные данные

Механическая система тел (рис. 1) движется под воздействием момента M и сил тяжести.

Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах q_1 и q_2 при заданных начальных условиях. Необходимые данные приведены в табл.; там же указаны рекомендуемые обобщенные координаты.

При решении задачи массами нитей пренебречь. Считать, что качение колес происходит без проскальзывания. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Колеса, для которых в таблице радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками. Водила (кривошипы) рассматривать как тонкие однородные стержни.

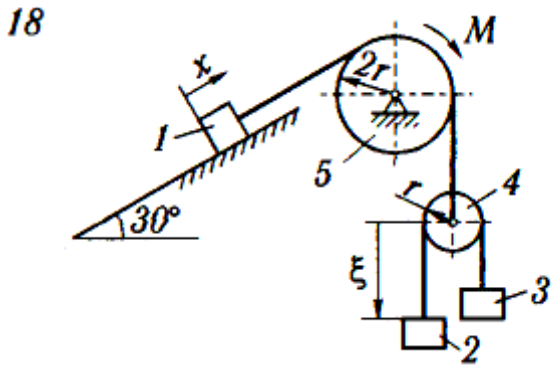

Рис.1

Номер варианта (рис. 212–214)	Массы тел					Радиус инерции		Силы P	Моменты M	Коэффициенты		Обобщенные координаты		Начальные условия			
	1	2	3	4	5	i_{2y}	i_{3y}			трения скольжения	вязкого сопротивления	q_1	q_2	q_{10}	q_{20}	$\dot{q}_{10}$	$\dot{q}_{20}$
17	m	$3m$	–	–	–	–	–	P	–	0	b	x	ξ	0	ξ_0	0	0
18	$2m$	$2m$	m	m	$3m$	–	–	–	M	f	–	x	ξ	0	0	0	0

Табл.1

1.2 Исследование движения механической системы с двумя степенями свободы с помощью уравнений Лагранжа II рода

Расставим силы :

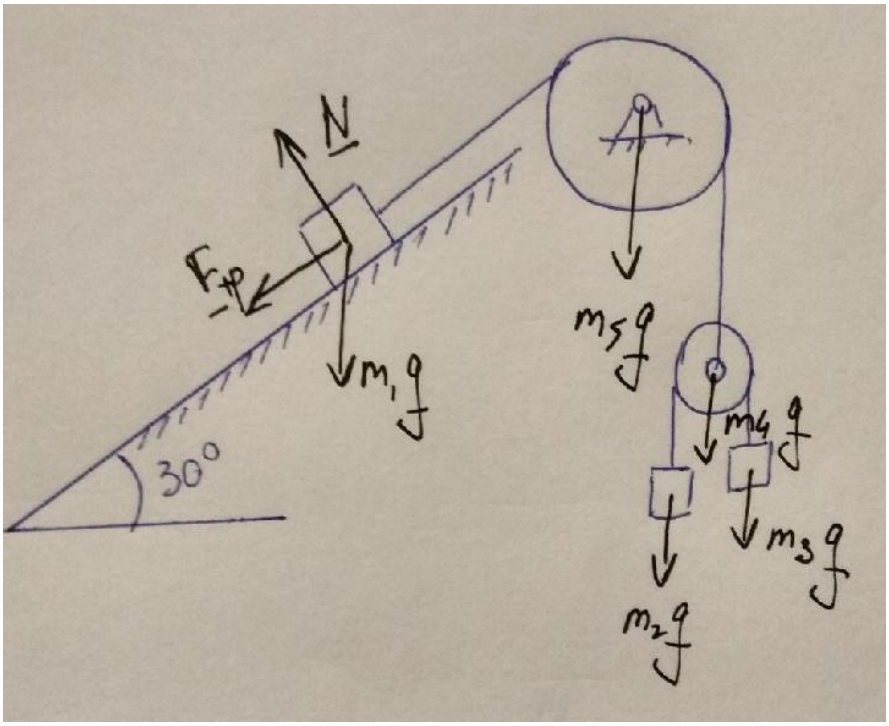

Рис.2

Выберем обобщенные координаты:

$q_1 = x$

$q_2 = \xi$

Выразим координаты частей системы через обобщенные координаты:

1) x

2) $x + \xi$

3) $x - \xi$

4) $\frac{\xi}{r}$

5) $\frac{x}{2r}$

Выразим кинетическую и потенциальную энергии через обобщенные координаты и обобщенные скорости:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 ,$$

$T_1 = m\dot{x}^2$

$T_2 = m(\dot{x} + \dot{\xi})^2$

$T_3 = \frac{1}{2}m(\dot{x} - \dot{\xi})^2$

$T_4 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\dot{\xi}^2$

$T_5 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5 ,$$

$\Pi_5 = 0$ (т.к. диск вращается вокруг собственного центра масс)

$\Pi_1 = mgx$

$\Pi_2 = -2mg(x + \xi)$

$\Pi_3 = -mg(x - \xi)$

$\Pi_4 = -mgx$

Обобщенные силы:

$Q_x^* = \frac{M}{2r} - \sqrt{3}mgf$

$Q_\xi^* = 0$

Выпишем необходимые производные полученных выражений:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{7}{2}m\dot{x} + 2m\left(\dot{x} + \dot{\xi}\right) + m\left(\dot{x} - \dot{\xi}\right) + m(\dot{x} + 0.5\dot{\xi})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{15}{2}m\ddot{x} + \frac{3}{2}m\ddot{\xi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -3mg$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = 2m\left(\dot{x} + \dot{\xi}\right) + m\left(\dot{x} - \dot{\xi}\right) + m(\dot{x} + 0.5\dot{\xi})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = 4m\ddot{x} + \frac{3}{2}m\ddot{\xi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = -mg$$

Запишем уравнения Лагранжа II рода:

$$\begin{cases} 8\mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}} - 3\ddot{\xi} = 2\mathrm{g} \\ 15\mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}} + 3\ddot{\xi} = 6\mathrm{g} + \dfrac{M}{mr} - 2\sqrt{3}\mathrm{fmg} \end{cases}$$

Решив систему, получим искомые уравнения движения:

$$x = \frac{1}{14}\left(\left(4 - 2\sqrt{3}f\right)g + \frac{M}{mr}\right)t^2$$

$$\xi = \frac{1}{21}\left(\left(8\sqrt{3} - 9\right)g - 4\frac{M}{mr}\right)t^2$$

Заключение

В данной курсовой работе было проведено исследование движения механической системы с двумя степенями свободы с помощью уравнений Лагранжа II рода, в результате которого получен закон движения системы.

Список использованной литературы

1. Яблонский А.А., Норейко С.С. и др.: Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике, «Интеграл-Пресс», 2006г.