

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМ

\_\_\_\_\_ А.М. Кривцов

« 08 » \_\_\_\_\_ июня \_\_\_\_\_ 2020 г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ ГРАНУЛИРОВАННЫХ СРЕД**

по направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование

Направленность 01.04.03\_01 Механика деформируемого твердого тела

Выполнил  
студент гр. 3640103/80101

М.А.Фомичева

Руководитель  
доцент, к.ф.-м.н.

Е.Н. Вильчевская

Консультант  
по нормоконтролю

Е.А. Хайбулова

Санкт-Петербург  
2020

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО  
Институт прикладной математики и механики  
Высшая школа теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМ

А.М. Кривцов

« 22 » января 2020 г.

**ЗАДАНИЕ**

**по выполнению выпускной квалификационной работы**

студенту Фомичевой Марии Андреевне, гр. 3640103/80101

1. Тема работы: Моделирование процесса измельчения гранулированных сред
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 8 июня 2020 года
3. Исходные данные по работе: отсутствуют
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): провести математическое моделирование движения и измельчения гранулированной среды в дробилке под действием давления. Материал моделировать как линейно-вязкий, с коэффициентом вязкости, зависящим от диаметра частиц. Исследовать влияние зависимости коэффициента вязкости от размера частиц на эффективность дробилки.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): отсутствует
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания: 22.01.2020

Руководитель ВКР

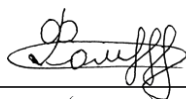


(подпись)

Е.Н. Вильчевская

Задание принял к исполнению: 22.01.2020

Студент



(подпись)

М.А. Фомичева

## **РЕФЕРАТ**

На 40 с., 22 рисунка, 0 таблиц, 0 приложений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** ГРАНУЛИРОВАННЫЕ СРЕДЫ, МИКРОПОЛЯРНЫЕ СРЕДЫ, ВЯЗКИЙ МАТЕРИАЛ, ПРОИЗВОДСТВО МИКРОИНЕРЦИИ, ДРОБИЛКА.

Тема выпускной квалификационной работы: «Моделирование процесса измельчения гранулированных сред».

Данная работа посвящена математическому моделированию движения и измельчения гранулированной среды под действием давления в дробилке. Материал моделировался как линейно-вязкий, с коэффициентом вязкости, зависящим от момента инерции частиц. Была решена полностью связанная задача по определению распределения скоростей, давления, момента инерции и коэффициента вязкости среды. Решение находилось численно, на языке программирования C++. Верификация полученного численного решения производилась путем сравнения с известным аналитическим решением для потока через туннель постоянного сечения.

## **ABSTRACT**

40 pages, 22 figures, 0 tables, 0 appendices.

**KEYWORDS:** GRANULAR MEDIA, MICROPOLAR MEDIA, VISCOUS MATERIAL, PRODUCTION OF MICROINERTIA, CRUSHER.

The subject of the graduate qualification work is “Modelling of Granular Media Grinding Process”.

This work is devoted to mathematical modeling of the granular medium movement and grinding under the action of pressure in the crusher. The material was modeled as linearly viscous, with a viscosity coefficient depending on the particles moment of inertia. A completely related problem was solved to determine the distribution of the velocities, pressure, moment of inertia, and viscosity coefficient of the medium. The solution was found numerically, in the C ++ programming language. Verification of the obtained numerical solution was carried out by comparison with the analytical solution for flow through a constant section tunnel.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Постановка задачи.....	7
1.1. Методы описания сплошных сред.....	7
1.2. Постановка задачи о движении вязкого гранулированного материала	9
Глава 2. Результаты.....	20
2.1. Моделирование движения вязкого материала.....	20
Заключение.....	38
Список использованных источников.....	40

## ВВЕДЕНИЕ

Гранулированные среды довольно часто встречаются нам в повседневной жизни, а их использование широко распространено в различных технологических процессах при создании новых материалов, разных веществ и окружающих нас предметов. Одной из важнейших частей этих технологических процессов является измельчение гранулированной среды. Так, измельчение используется при создании минеральных удобрений и различных пластмасс, лекарственных препаратов и косметики, семян и комбикорма, вяжущего вещества в строительстве (гранулированный шлак). Кроме того, измельчение используется при создании мелкодисперсного угольного топлива, водоугольного топлива при мокром помоле угля и при обогащении горных пород, [2]. Также в настоящее время применяются методы переработки, связанные с процессами смешения и усреднения сыпучих материалов. При этих методах также имеет место движение и измельчение гранулированной среды под действием перепадов давления или под действием силы тяжести. Все это указывает на значимость изучения такого процесса, как измельчение гранулированных материалов.

Также было проведено (и проводится по сей день) множество экспериментов, которые посвящены изучению характера поведения сыпучих сред. Благодаря им хорошо известно, что механические свойства гранулированных материалов не являются постоянными величинами, а зависят от состояния, в котором находится материал. В настоящее время существует множество работ, которые посвящены изучению зависимостей упругих и вязких свойств гранулированного материала от других механических параметров [9], [12], [13]. Например, в работе [18] была рассмотрена задача измельчения гранулированных сред в непрерывном потоке и исследована зависимость коэффициента вязкости от температуры. Похожая задача была рассмотрена в [9]. Однако поток частиц был ограничен, а коэффициент вязкости зависел от скорости деформации среды. Также понятно, что коэффициент вязкости сыпучего материала должен зависеть от размера частиц. Так, в статье [20] была проведена серия экспериментов по изучению зависимости коэффициента вязкости частиц от их диаметра. В работе показано, что

с уменьшением диаметра частиц вязкость увеличивается, а при большой концентрации частиц характер изменения вязкости близок к обратно-экспоненциальному.

Несмотря на такое большое количество экспериментальных данных о характере движения и измельчения сыпучих материалов в различных технологических устройствах, в настоящее время не существует законченной теории движения гранулированных сред [6]. Именно поэтому данная работа посвящена численному моделированию движения и измельчения гранулированного вещества с переменным коэффициентом вязкости, зависящим от момента инерции частиц (а значит, и от их размера) проходящих через конусообразную мельницу. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. На примере измельчения гранулированной среды провести математическое моделирование микрополярной вязкой среды с коэффициентом вязкости, зависящим от момента инерции.
2. Предложить аналитическую зависимость коэффициента вязкости среды от момента инерции на основе эмпирических данных.
3. Определить вид для источникового члена из кинетического уравнения для момента инерции, описывающего измельчение материала.
4. Предложить численный алгоритм для решения такого типа задач.
5. Получить распределение скоростей, давления, момента инерции и коэффициента вязкости среды.
6. Провести верификацию полученного решения с доступными аналитическими решениями.

Эти задачи помогли провести математическое моделирование измельчения гранулированной среды. Описание и результаты этого моделирования приведены в следующих главах.

# 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

## 1.1 Методы описания сплошных сред

Существует два принципиально различных подхода к описанию кинематики сплошных сред, а именно: материальное (лагранжево) описание и пространственное (эйлерово) описание. Материальное описание используется при моделировании твердых деформируемых тел - например, упругих, или же проявляющих сложные реологические свойства. Однако стоит отметить, что применение материального описания корректно только в том случае, когда не нарушается гипотеза о локальной топологии, т.е. близкие материальные частицы в процессе движения остаются близкими. Для сред, которые при определенных условиях демонстрируют свойства текучести, нужно использовать пространственное описание, которое не накладывает столь жестких ограничений на характер движения среды, как материальное, и по существу позволяет моделировать не только сплошные среды, но и среды, состоящие из отдельных частиц. При пространственном описании все физические величины вводятся в рассмотрение применительно к выделенному в пространстве элементарному объему, содержащему множество частиц, движущихся независимо друг от друга. Поэтому пространственное описание, как правило, используется при моделировании жидкостей, а также сыпучих сред, которые ведут себя подобно жидкостям.

В последнее время все больше набирает популярность теория микрополярных сред, которая позволяет описывать среды, учитывая процессы на микроуровне. Микрополярный континуум представляет собой сплошную среду, в которой каждая частица обладает помимо трансляционных степеней свободы также ориентационными или вращательными степенями свободы. При материальном описании в роли частицы микрополярного тела рассматривается материальный объем, содержащий одни и те же материальные частицы. При пространственном описании в качестве частицы микрополярного тела рассматривается постоянный репрезентативный элементарный объем  $V$ , который в каждый момент времени содержит разные материальные частицы.

По сути, среда рассматривается с разных точек зрения (см. Рис.1.1.1). На микроуровне исследователь имеет дело с отдельными материальными частицами (например, песчинками в куче песка), каждая из которых обладает своими инерционными и кинематическими характеристиками; мезоуровень – это элементарный объем, содержащий достаточно большое количество материальных частиц, чтобы можно было говорить об их усредненных характеристиках, и, наконец, макроуровень – сплошная среда [11], [16].

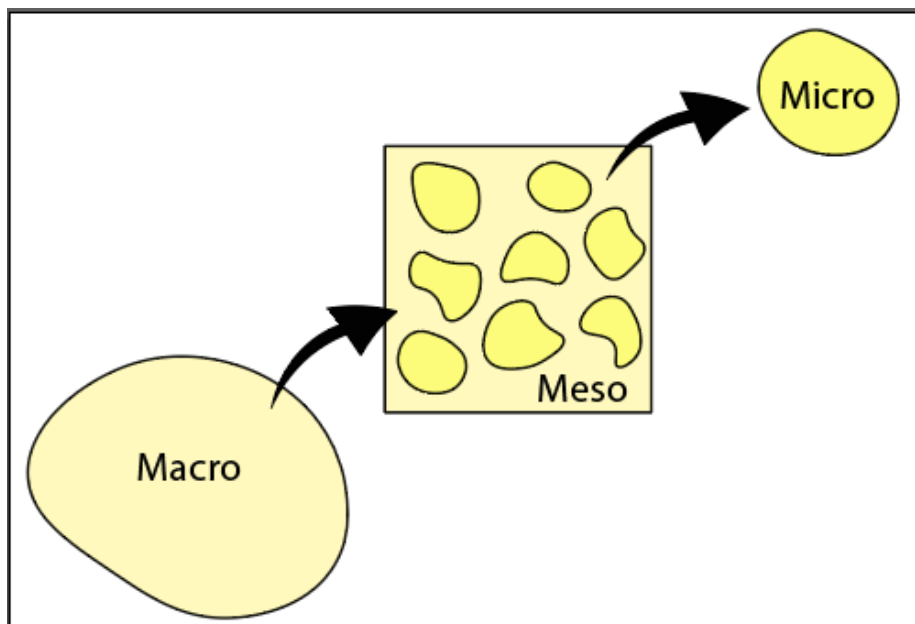


Рис. 1.1.1. Различные уровни описания среды.

Используя различные балансовые соотношения и кинематические уравнения в рамках теории микрополярных сред, можно описать все характеристики среды, которые могут интересовать исследователя: перемещения, скорости, давление, температуру, изменение массы и т.д. Необходимые теоретические рамки для такого описания – стандартные макроскопические уравнения для массовых характеристик, линейной и угловой скоростей. Но стоит отметить, что в классической теории микрополярных сред принято, что момент инерции не является независимой переменной. Однако при моделировании структурных изменений в среде, связанных с консолидацией или дефрагментацией частиц, или с изменением свойств анизотропии среды, необходимо учитывать, что тензор инерции элемен-



тарного объема может изменяться. Именно поэтому в расширенной теории микрополярных сред было предложено новое кинетическое уравнение для тензора микроинерции [11]. Это уравнение представляет собой балансовое соотношение для тензора инерции, содержащее в правой части некий источниковый член, который отвечает за структурные изменения среды при различных процессах. Например, за структурные изменения, которые происходят из-за протекания химических реакций или деления частиц при механическом дроблении. В том числе, источниковый член может описывать фазовые переходы или изменения физических свойств, таких как электрическая намагниченность или поляризация.

Кроме того, благодаря уравнению из расширенной теории микрополярных сред, а также экспериментальной корреляции между вязкостью среды и размеров частиц, можно связать коэффициент вязкости среды с моментом инерции. Тем самым можно получить полностью связанную задачу о движении гранулированной среды, где компоненты скорости, а также давление, коэффициент вязкости и момент инерции будут связаны друг с другом.

В нашем случае, непрерывный поток гранулированного вещества, измельчающийся при прохождении через конусообразную дробилку, может послужить отличным примером микрополярной среды. Из-за процесса дробления общее число гранул и момент инерции каждой отдельной гранулы постоянно меняется. При таком процессе, традиционный материальный способ описания движения твердых тел не сможет дать корректного описания и должен быть заменен пространственным.

Учитывая все вышесказанные преимущества пространственного описания и расширенной теории микрополярных сред относительно описания сыпучих материалов, в данной работе гранулированный материал описывается как микрополярная вязкая среда с коэффициентом вязкости, зависящим от момента инерции.

## **1.2. Постановка задачи о движении вязкого гранулированного материала**

Рассмотрим следующую плоскую задачу о движении гранулированного материала в воронкообразной дробилке. Непрерывный поток сыпучего материала

поступает сверху во входное отверстие контейнера шириной  $2L$  и высотой  $H = H_1 + H_2$ . Будем считать, что на материал сверху действует давление  $p_0$ . Затем материал попадает в область воронки высотой  $H_2$ , где контейнер постепенно сужается до ширины  $2L_0$ . Угол между линией горизонта и сужающейся стенкой сосуда  $\alpha = 45^\circ$ . Отметим также, что на частицы материала действует сила тяжести. Геометрия этой задачи показана на Рис. 1.2.1. Обратите внимание, что выбранное начало координат находится внизу рассматриваемой мельницы, в середине сечения, расположенного на выходе из сосуда (красные стрелки).

Будем рассматривать процесс движения и измельчения материала внутри дробилки. А именно, нас будет интересовать распределение компонент скорости, давления, момента инерции и коэффициента вязкости среды. Обратите внимание, что будут рассматриваться только две компоненты скорости, т.к. исследуется плоская задача. Кроме того, изменение момента инерции будет носить наибольшую важность, ведь именно эта величина показывает изменение размера частиц, а значит лучше всего характеризует процесс измельчения.

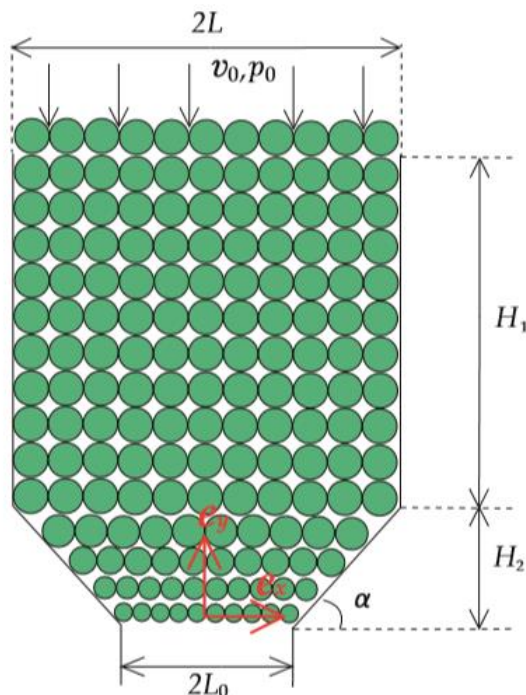


Рис.1.2.1. Схематичное изображение рассматриваемой системы.

Обратите внимание, что микрочастицы, попадающие в воронку, имеют не-

правильную форму и различный размер. Однако, благодаря тому, что мы рассматриваем материал в пространственном описании, каждая точка континуума представляет собой репрезентативный объем, описанный средними характеристиками среды. Так, например, гомогенизированный тензор инерции на уровне континуума изотропен из-за статистически случайного распределения микрочастиц разных размеров и форм, и имеет шаровой вид, т.е.

$$\mathbf{J}(x, z, t) = J(x, z, t) \mathbf{E}, \quad (1.2.1)$$

где  $\mathbf{E}$  - единичный тензор.

В процессе измельчения материала характеристики микрочастиц будут уменьшаться, что будет приводить к уменьшению момента инерции на макроуровне. В то же время массовая плотность элементарного объема остается неизменной (см. Рис.1.2.2). Далее под словом «частицы» мы будем подразумевать характеристическую (или репрезентативную) гомогенизированную частицу со средними характеристиками. Кроме того, все приведенные ниже уравнения для решения системы также записаны для репрезентативной частицы.

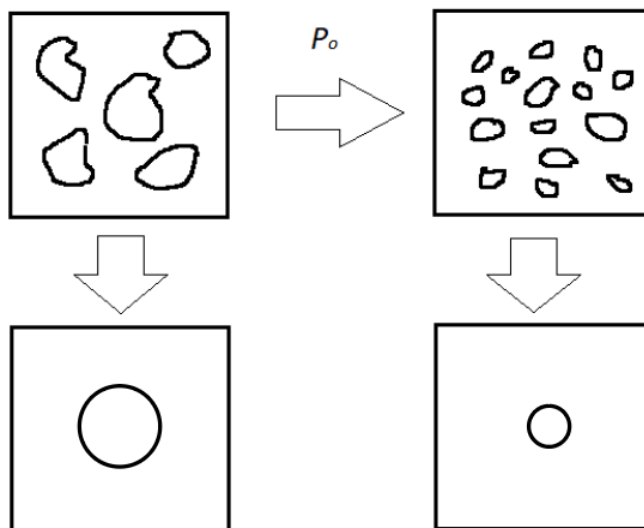


Рис. 1.2.2. Процесс гомогенизации гранулированного материала.

Отметим, что из-за статистически случайного распределения микрочастиц с различными угловыми скоростями, угловая скорость характерных частиц равна нулю. Поэтому вращательное движение частиц среды и спиновый баланс не будут рассмотрены в этой задаче.

Далее более подробно остановимся на описании постановки проблемы. Чтобы решить поставленную задачу, рассмотрим связанную систему уравнений – баланс количества движения (1.2.2.) и кинетическое уравнение для тензора инерции (1.2.3.):

$$\rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\delta \mathbf{J}}{\delta t} = \boldsymbol{\chi}, \quad (1.2.3)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  - тензор напряжений в материале;

$\rho \mathbf{g}$  – объемные силы;

$\mathbf{J}$  – тензор инерции;

$\boldsymbol{\chi}$  - источниковый член;

$\nabla$  – оператор Набла;

$\mathbf{v}$  – вектор скорости в материале;

$\rho$  – плотность материала;

$\frac{\delta}{\delta t}$  – материальная производная, которая выражается следующей формулой

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (1.2.4)$$

Напомним, что источниковый член  $\boldsymbol{\chi}$  в уравнении (1.2.3) отвечает за структурные изменения в материале. Он, как и тензор момента инерции, будет иметь шаровой вид. В силу того, что в нашей задаче материал измельчается, предложим следующий вид источникового члена

$$\boldsymbol{\chi} = -\alpha_0 p (\mathbf{J} - \mathbf{J}_*), \quad (1.2.5)$$

где  $\mathbf{J}_*$  и  $\alpha_0$  - положительные постоянные, которые можно интерпретировать как минимальный размер зерна, до которого частицы могут быть раздроблены, и величина, обратная к твердости частиц, соответственно. Параметр  $\alpha_0$  показывает насколько легко частицы могут быть раздроблены, а также как хорошо они могут передавать давление в нижние слои системы.  $\mathbf{J}_*$  и  $\alpha_0$  – это величины, которые являются характеристиками материала, а не дробилки, и могут рассматриваться как его определяющие свойства. Кроме того, в уравнении 1.2.5 присутствует давление системы, благодаря которому и происходит измельчение. Отметим, что

источниковый член стремится к минимальному моменту инерции, а знак минус указывает, что момент инерции уменьшается с ростом давления в материале.

Как уже упоминалось ранее, в данной задаче рассматривается линейно – вязкий материал с переменной вязкостью, зависящей от момента инерции. Определяющее уравнение для такого материала имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + 2\eta\mathbf{d}, \quad (1.2.6)$$

где  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}dev(\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla)$  – девиатор градиента скорости;

$p$  – давление в материале;

$\mathbf{E}$  – единичный тензор.

Также будем считать, что материал несжимаемый, т.е.

$$\rho = \rho_0 = const$$

Для такого материала справедливо уравнение несжимаемости

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2.7)$$

Как уже отмечалось ранее, в работе [20] был проведен ряд экспериментов, по изучению зависимости коэффициента вязкости от диаметра частиц этой среды. Результаты этих экспериментов представлены на Рис.1.2.3. Видно, что с увеличением концентрации частиц, коэффициент вязкости все больше зависел от их диаметра. Полученная зависимость показывает, что чем меньше размер частиц, тем больше их вязкость. Кроме того, видно, что зависимость этих двух величин стремится к обратно-экспоненциальной.

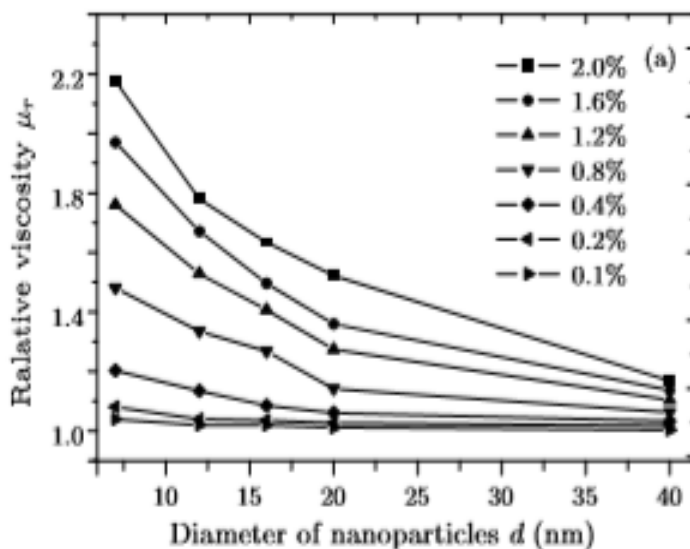


Рис. 1.2.3. Зависимость коэффициента вязкости от диаметра частиц среды.

Предположим, что зависимости коэффициента вязкости среды от момента инерции частиц и от их диаметра аналогичны. Тогда частицы с наименьшим моментом инерции должны иметь максимальную вязкость. Исходя из этого, предложим следующий закон изменения коэффициента вязкости от момента инерции характерной частицы:

$$\eta = \eta_0 \exp\left(-\lambda \frac{J-J_0}{J_0}\right) \quad (1.2.8)$$

где  $\eta_0$  и  $\lambda$  - положительные постоянные,  $\eta_0$  соответствует коэффициенту вязкости частиц с моментом инерции  $J_0$ , максимальному моменту инерции в системе (т.е. вязкость  $\eta_0$  имеет материал с вязкостью, не зависящей от диаметра частиц). Этот коэффициент вязкости достигается при значении параметр  $\lambda = 0$ .

На Рис. 1.2.4. проиллюстрирована зависимость коэффициента вязкости от момента инерции при заданных параметрах  $\eta_0 = 1, \lambda = 2.5$ .

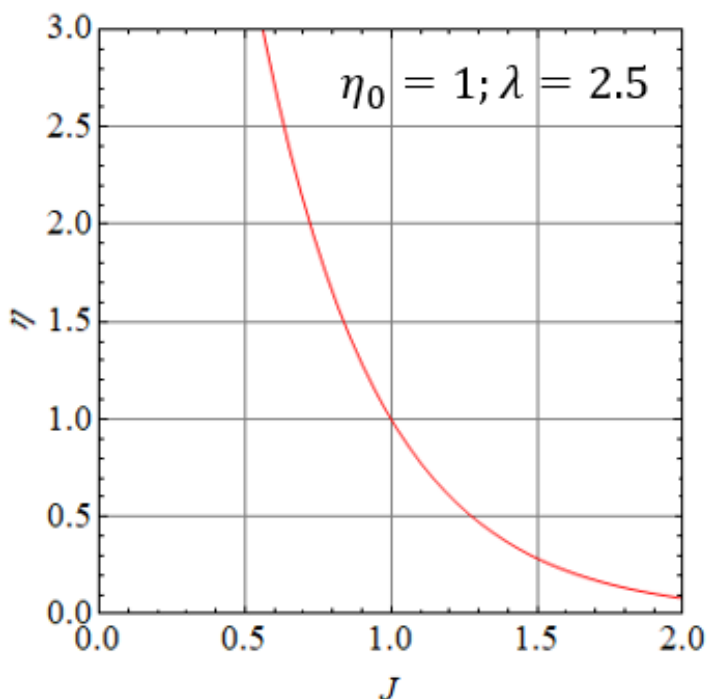


Рис. 1.2.4. Предложенная аналитическая зависимость коэффициента вязкости от момента инерции частиц среды.

Теперь рассмотрим граничные и начальные условия для исследуемой системы:

- 1) Изначально область воронки полностью пустая. Затем частицы постепенно поступают в нее только с вертикальной скоростью  $v_0$ , т.е.

$$v_y(x, H, t) = v_0$$

$$v_x(x, H, t) = 0$$

Затем обе компоненты скорости будут изменяться, а общая скорость частиц будет равна

$$\mathbf{v} = v_y \mathbf{e}_y + v_x \mathbf{e}_x$$

- 2) На стенках воронки используются условия прилипания, т.е.

$$v_{x,y}(L, y, t) = 0$$

$$v_{x,y}(-L, y, t) = 0$$

$$v_{x,y}(L_0 + y \operatorname{ctg} \alpha, y, t) = 0$$

$$v_{x,y}(-(L_0 + y \operatorname{ctg} \alpha), y, t) = 0$$

- 3) Все частицы поступают в воронку с одинаковым моментом инерции,

$$J(x, H, t) = J_0$$

- 4) На верхней границе сосуда на частицы действует внешнее давление, а на нижней границе давление равно нулю, т.к. частицы выходят из сосуда в свободное пространство

$$p(x, H, t) = p_0$$

$$p(x, 0, t) = 0$$

Отметим также, что изначально была изучена возможность моделирования процесса измельчения и движения гранулированного материала для одномерного профиля скорости или, другими словами, для одномерного случая. При моделировании такой задачи, между слоями материала не происходит смешения (т.е. частицы с верхних горизонтальных слоев не перемещаются в нижние слои, и наоборот). Но также ясно, что модуль скорости в каждом слое разный. Тогда скорость будет иметь вид

$$\mathbf{v} = v(y) \mathbf{e}_x \quad (1.2.9)$$

Именно благодаря такому допущению, в задаче есть только одна компо-

нента скорости. Определенно, такая модель является более простой в реализации. Однако для такой постановки проблемы, невозможно рассмотреть среду с переменным коэффициентом вязкости, зависящим от момента инерции. Покажем это, используя уравнения 1.2.6 и граничное условие 4. Напряжения в материале будут иметь следующий вид

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E} + \eta(J) \frac{\partial v}{\partial z} (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_x) \quad (1.2.10)$$

Такие напряжения существуют в том числе и наверху сосуда, где на частицы действует давление  $p_0$  в направлении  $\mathbf{e}_y$ . Тогда

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_y \Big|_H = p_0 \mathbf{e}_y = -p \mathbf{e}_y + \eta(J) \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{e}_x \quad (1.2.11)$$

Расписывая это уравнение на два скалярных, видно, что давление  $p$  наверху сосуда со стороны частиц равно  $p_0$ , тогда как слагаемое  $\eta(J) \frac{\partial v}{\partial z}$  равно нулю. Это означает, что либо функция, описывающая зависимость коэффициента вязкости равна нулю, либо зависимость скорости от вертикальной компоненты равна нулю. Таким образом было получено противоречие между первоначальными предположениями о движении. А значит, с помощью одномерного приближения невозможно корректно рассмотреть поставленную задачу. Учитывая все вышесказанное и был совершен переход к двумерному случаю.

Так как не существует известного аналитического решения для данной задачи, будем использовать численное решение. Для этого преобразуем исходные тензорные уравнения в скалярные, для более простой численной реализации этих уравнений. Вначале подставим определяющее уравнение для нашего материала 1.2.6. в баланс количества движения 1.2.2. и получим

$$\rho_0 \frac{\delta v}{\delta t} = -\nabla p + 2\nabla \cdot (\eta(J)\mathbf{d}) + \rho_0 g \quad (1.2.12)$$

Отметим, что коэффициент вязкости системы не постоянный, а значит нужно взять необходимые производные от коэффициента вязкости. Прделаем эту операцию, а также распишем материальную производную. Расписав уравнение относительно двух осей координат, получим следующую комбинацию уравнений



$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta(J) \left( 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (1.2.13)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta(J) \left( 2 \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \right) + 2 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \rho_0 g \quad (1.2.14)$$

Теперь учтем зависимость коэффициента вязкости от момента инерции, описанную в формуле 1.2.8, и получим следующие уравнения

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_0 \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \left( 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right) + 2\eta_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \right)}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \right)}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \right)}{\partial y} \right) \quad (1.2.15)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_0 \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \left( 2 \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} \right) + 2\eta_0 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \right)}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \right)}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \right)}{\partial x} \right) + \rho_0 g \quad (1.2.16)$$

Далее подставим определяющее уравнение для источникового члена 1.2.6. в кинетическое уравнение для тензора микроинерции 1.2.3. Учитывая, что и тензор микроинерции, и источниковый член имеют шаровую форму, получим следующее уравнение

$$\frac{\partial J}{\partial t} + v_x \frac{\partial J}{\partial x} + v_y \frac{\partial J}{\partial y} = \alpha_0 P_0 (J - J_*) \quad (1.2.17)$$

Объединяя все вышесказанное, а также расписав уравнение несжимаемости 1.2.7., получим следующую систему скалярных уравнений

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2.18)$$

$$\frac{\partial J}{\partial t} + v_x \frac{\partial J}{\partial x} + v_y \frac{\partial J}{\partial y} = \alpha_0 P_0 (J - J_*) \quad (1.2.19)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_0 \exp \left( -\lambda \frac{J - J_0}{J_0} \right) \left( 2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) +$$

$$2\eta_0 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J-J_0}{J_0} \right)}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J-J_0}{J_0} \right)}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J-J_0}{J_0} \right)}{\partial y} \right)}{\partial x} \right) \quad (1.2.20)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_0 \exp \left( -\lambda \frac{J-J_0}{J_0} \right) \left( 2 \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \right) + \\ &+ 2\eta_0 \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J-J_0}{J_0} \right)}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J-J_0}{J_0} \right)}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{J-J_0}{J_0} \right)}{\partial x} \right)}{\partial y} \right) + \rho_0 g \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Для более корректного и информативного описания результатов, будем решать описанную систему уравнений в безразмерном виде

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (1.2.22)$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{y}} = \bar{\alpha}_0 (\bar{J} - \bar{J}_*) \quad (1.2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\eta}_0 \exp \left( -\lambda \frac{\bar{J} - \bar{J}_0}{\bar{J}_0} \right) \left( 2 \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{y}^2} \right) + \\ 2\bar{\eta}_0 \left( \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{\bar{J} - \bar{J}_0}{\bar{J}_0} \right)}{\partial \bar{x}} \right)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{\bar{J} - \bar{J}_0}{\bar{J}_0} \right)}{\partial \bar{y}} \right)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{\bar{J} - \bar{J}_0}{\bar{J}_0} \right)}{\partial \bar{y}} \right)}{\partial \bar{x}} \right) \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{t}} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\eta}_0 \exp \left( -\lambda \frac{\bar{J} - \bar{J}_0}{\bar{J}_0} \right) \left( 2 \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial \bar{x}^2} \right) + \\ + 2\bar{\eta}_0 \left( \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{\bar{J} - \bar{J}_0}{\bar{J}_0} \right)}{\partial \bar{y}} \right)}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{\bar{J} - \bar{J}_0}{\bar{J}_0} \right)}{\partial \bar{x}} \right)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \left( \exp \left( -\lambda \frac{\bar{J} - \bar{J}_0}{\bar{J}_0} \right)}{\partial \bar{x}} \right)}{\partial \bar{y}} \right) + \bar{g} \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Здесь переменные с верхним подчеркиванием обозначают безразмерные величины, а именно

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{L}, & \bar{y} &= \frac{y}{L}, & \bar{v}_x &= \frac{v_x}{v_0}, & \bar{v}_y &= \frac{v_y}{v_0} \\ \bar{J} &= \frac{J}{J_0}, & \bar{J}_* &= \frac{J_*}{J_0}, & \bar{t} &= \frac{v_0}{L} t, & \bar{p} &= \frac{p}{v_0^2 \rho_0} \\ \bar{\eta} &= \frac{\eta}{v_0 L \rho_0}, & \bar{\eta}_0 &= \frac{\eta_0}{v_0 L \rho_0}, & \bar{\alpha} &= \frac{L p \alpha_0}{v_0}, & \bar{g} &= \frac{g L}{v_0^2} \end{aligned}$$

Уравнения (1.2.22) - (1.2.25) являются готовой системой уравнений для

численного моделирования разрушения линейно - вязкого гранулированного материала. Моделирование производилось численно на языке C++, с использованием неявных численных схем, методов расщепления и прогонки.

Далее кратко остановимся на численном методе, который был использован при решении. Для поставленной двумерной задачи нельзя воспользоваться простым методом прогонки или только методом расщепления, так как первый метод приведет к заполнению матрицы коэффициентов, а второй метод нарушит физический смысл уравнений, особенно при расщеплении уравнения несжимаемости. Будем пользоваться комбинацией всех методов. Для начала введем так называемую функцию ошибки

$$\xi^n = \tau \Lambda(f^n) \quad (1.2.26)$$

где  $\xi$  – функция ошибки;

$f$  – вектор искомых функций, имеющий в качестве компонент давление, момент инерции и скорости;

$\Lambda$  – дифференциальный оператор рассматриваемой системы уравнений 1.2.22 – 1.2.25;

$\tau$  – псевдошаг по времени.

Отметим, что для каждой искомой функции необходимо вводить собственный псевдошаг, а также что для каждого из уравнений 1.2.22. - 1.2.25. оператор  $\Lambda$  имеет свой вид. Далее будем разделять этот оператор на две части, относительно  $x$  – компоненты ( $\Lambda_1$ ) и  $y$  – компоненты ( $\Lambda_2$ ), т.е.

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \quad (1.2.27)$$

После чего будем решать нестационарные операторные уравнения, относительно не самих искомых функций, а относительно функции ошибки. Обратите внимание, что слева появился нестационарный член, который не входил в начальные дифференциальные уравнения систем 1.2.22-1.2.25

$$\frac{(\xi^{n+\frac{1}{2}} - \xi^n)}{\tau} = \Lambda_1 \xi^{n+\frac{1}{2}} \quad (1.2.28)$$

$$\frac{(\xi^{n+1} - \xi^{n+\frac{1}{2}})}{\tau} = \Lambda_2 \xi^{n+1} \quad (1.2.29)$$

Т.е. будем находить приближенное решение для неизвестной величины, используя только производные по одной координате, а потом по другой. Здесь верхние индексы  $n$  и  $n + 1$  указывают на номер шага по времени, а  $n + \frac{1}{2}$  – промежуточный шаг по времени, необходимый для того, чтобы «соединить» решения данных уравнений относительно двух осей. В свою очередь, уравнения 1.2.28-1.2.29 будем решать, используя метод прогонки. Отметим, что функция ошибки имеет разные значения для различных переменных. Далее, найденную функцию ошибки прибавим к вектору искомым функций, т.е.

$$f^{n+1} = f^n + \xi^n \quad (1.2.30)$$

Будем проделывать эти итерации до тех пор, пока функция ошибки не станет близка к нулю, или же, другими словами, пока решение уравнений относительно вектора искомым функций на шагах  $n$  и  $n + 1$  не будут равны друг другу.

Такая комбинация численных методов помогла достигнуть хорошей сходимости численного решения при довольно больших шагах по времени, а также при довольно грубом разбиении сеткой рассматриваемой области (особенно в зоне сужения). Кроме того, в отличие от явных методов, этот численный алгоритм сохраняет физический смысл исходной системы.

Результаты, полученные при моделировании, которое было осуществлено описанным выше способом, приведены в следующей главе.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 2.1. Моделирование движения вязкого гранулированного материала

На Рис. 2.1.1. представлен интерфейс разработанной программы для численного решения исследуемой задачи. На нем можно увидеть специальные окна для задания необходимых параметров, кнопку сохранения выбранных параметров и полученного решения, а также параметры самой конусообразной дробилки. Благодаря такому разработанному интерфейсу можно видеть изменение изолиний различных величин в режиме реального времени (которое отображается правее

сосуда). Кроме того, в левом нижнем углу сосуда заметна зеленая точка, которую можно передвигать по области сосуда. Благодаря ей, можно рассматривать результаты решения в необходимой точке для исследователя.

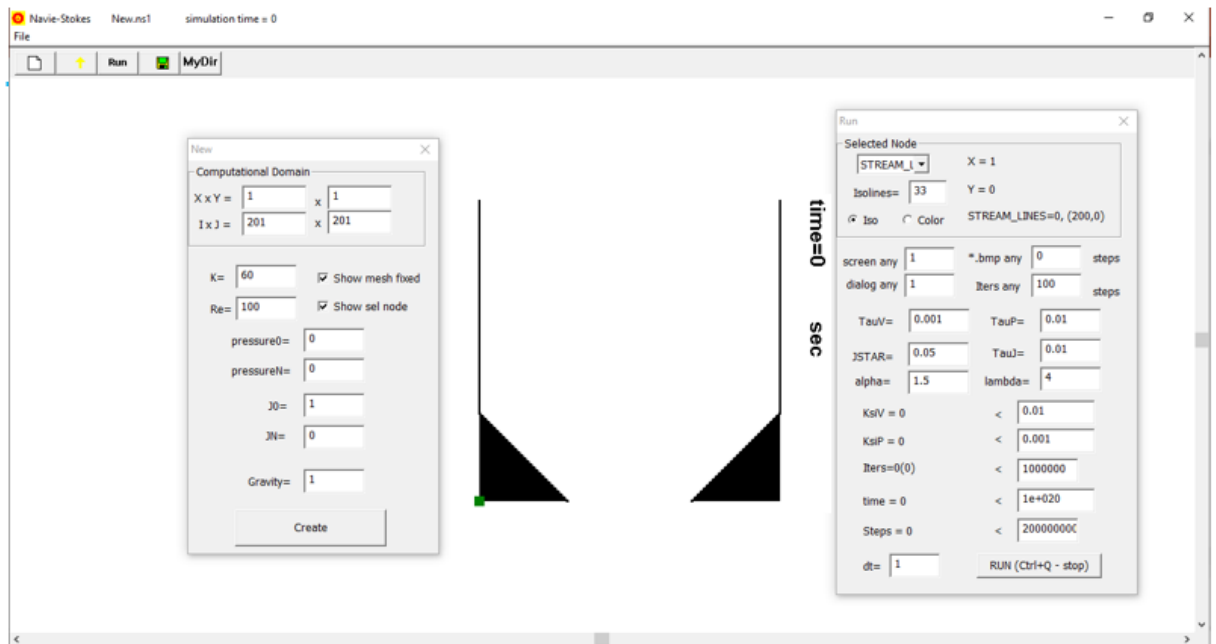


Рис. 2.1.1. Интерфейс разработанной программы.

На Рис.2.1.2 проиллюстрированы окна для задания необходимых параметров задачи. В них можно задать такие свойства, как минимальный  $J_*$  и начальный  $J_0$  моменты инерции, давление на выходе  $p(x, 0, t)$  и входе  $p(x, H, t)$  сосуда, коэффициент вязкости среды  $\eta_0$ , показатель экспоненты для зависимости коэффициента вязкости от момента инерции  $\lambda$ , ускорение свободного падения  $\bar{g}$ , величину, обратную твердости частиц  $\alpha_0$ , количество элементов сетки по двум осям  $X, Y$ , шаг по времени  $dt$ , псевдошаги по времени для разных величин  $\tau_v, \tau_p, \tau_j$ , количество итераций и необходимое значение функции ошибки  $\xi_p, \xi_v$ . Также можно выбрать количество отображаемых изолиний на графике и функцию отображения графика в цвете или чёрно-белым.

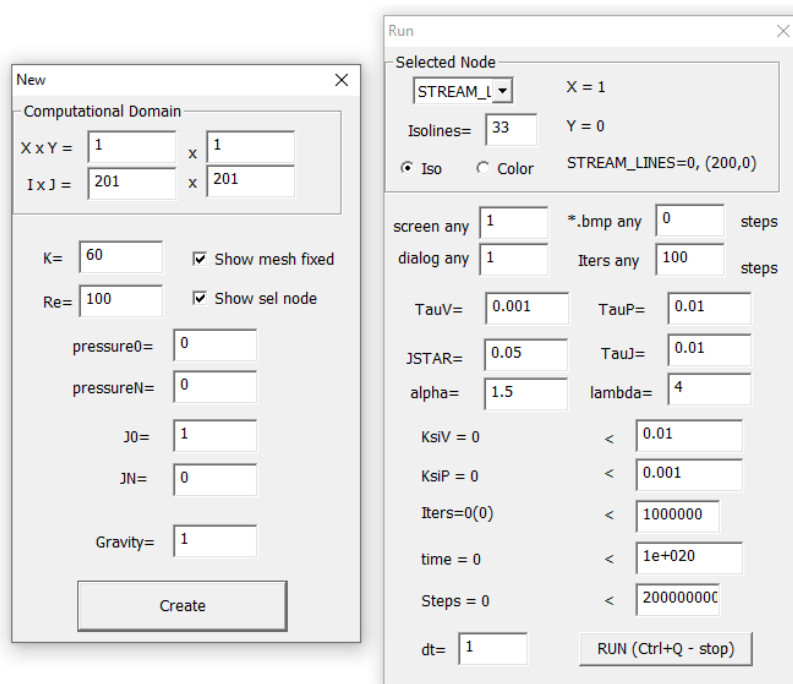


Рис. 2.1.2. Окна программы для задания необходимых параметров.

Теперь рассмотрим решение уравнений (1.2.22) - (1.2.25) из предыдущего раздела. Отметим, что результаты, которые представлены ниже, получены при значении давления  $p_0 = 0$  на верхней границе сосуда. Результаты представлены в безразмерной форме.

Для начала рассмотрим переход системы к стационарному режиму. В качестве примера для рассмотрения возьмем распределение изолиний вертикальной скорости и модуля горизонтальной скорости в сосуде.

На рис. 2.1.3. показано изменение модуля горизонтальной скорости во времени. На нем видно, что:

- На первом и втором верхних графиках видна большая область красного цвета. В нем компонента скорости  $\bar{v}_x$  близка к нулю, как и следовало ожидать, из-за характера потока, близкого к потоку Пуазейлевского типа, и начальных условий.
- Горизонтальная компонента скорости  $\bar{v}_x$ , изначально равная нулю, постепенно меняет свое значение.
- В первые моменты времени горизонтальная составляющая скорости появляется только в области сужения.

- Области, в которых горизонтальная скорость отличается от нуля, изначально не очень велики. Однако со временем они растут.
- Также легко прослеживается увеличение модуля горизонтальной скорости со временем.
- В более поздние моменты времени (на 3 и 4 фрагменте) горизонтальная составляющая скорости  $\bar{v}_x$  появляется не только в области сужения, но и во всем сосуде (включая небольшие оранжевые области вблизи верхней границы сосуда).
- Четвертый фрагмент на рисунке отвечает за распределение изолиний по истечении достаточно длительного времени, чтобы быть сопоставимым с устойчивым решением. Это предположение сделано потому, что относительная ошибка между двумя решениями, в момент времени  $\bar{t}_4$  и в следующий момент времени, меньше 0,0001.
- Также на последнем фрагменте видно, что область с нулевой горизонтальной скоростью приняла коническую форму. Такое поведение гранулированной среды в воронке кажется физически достоверным.

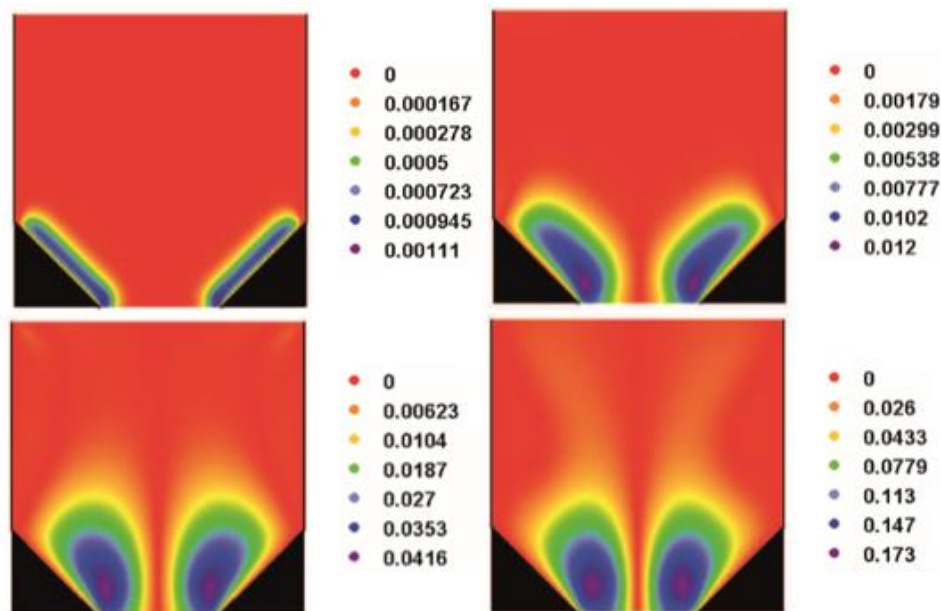


Рис. 2.1.3. Изменение изолиний модуля горизонтальной скорости в разные моменты времени:  $\bar{t}_1 = 0.0001$ ,  $\bar{t}_2 = 0.005$ ,  $\bar{t}_3 = 0.01$ ,  $\bar{t}_4 = 10$  (слева направо, сверху вниз).

На рис. 2.1.4. показано изменение вертикальной скорости во времени. Для

данной величины можно утверждать, что:

- Вертикальная составляющая скорости  $\bar{v}_y$  изначально одинакова практически во всей области и имеет сравнительно небольшое численное значение.
- На верхнем правом графике видно, что область (красно-желтая) с небольшой вертикальной скоростью увеличивается со временем благодаря области сужения.
- Можно увидеть, как вертикальная скорость увеличивается в области центра дробилки и уменьшается ближе к стенкам.
- Четвертый фрагмент на рисунке отвечает за распределение изолиний по истечении достаточно длительного времени, чтобы быть сопоставимым с устойчивым решением. Это предположение сделано потому, что относительная ошибка между двумя решениями, в момент времени  $\bar{t}_4$  и в следующий момент времени, меньше 0,0001.
- В стационарном режиме видны две красные почти прямоугольные области, где вертикальная скорость равна нулю. Это означает, что в этих областях частицы почти не движутся вертикально.

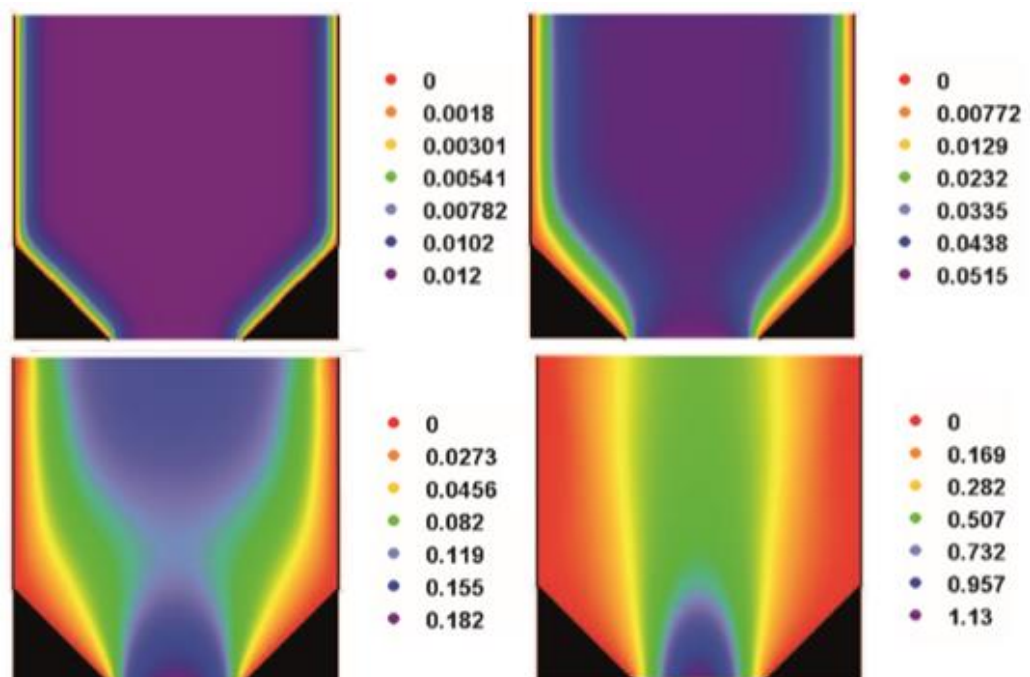


Рис. 2.1.4. Изменение изолиний вертикальной скорости в разные моменты времени:

$\bar{t}_1 = 0.0001, \bar{t}_2 = 0.005, \bar{t}_3 = 0.01, \bar{t}_4 = 10$  (слева направо, сверху вниз).



Далее рассмотрим установившееся решение. Для более удобного анализа, на рис. 2.1.5. приведены вместе изолинии давления, момента инерции, вертикальной и модуля горизонтальной скорости в сосуде.

- На первом графике видно, что давление в верхней части сосуда является постоянным вдоль горизонтальной оси, что совпадает с аналитическим решением Пуазейля.
- Видно, что давление в дробилке увеличивается постепенно, и достигает своего максимума в области сужения.
- На выходе из сосуда также есть красная область, где давление близко к нулю. Это связано с тем, что частицы выходят из сосуда в свободное пространство, что обуславливает переход частиц из напряженного состояния в область пространства, где отсутствуют сдвливающие напряжения.
- На втором фрагменте в верхнем ряду представлены изолинии момента инерции. В верхней части сосуда есть фиолетовая область, которая соответствует начальному моменту инерции  $J_0$ . В этой области находятся те частицы, которые находились под давлением недостаточно времени, чтобы измельчиться.
- Красная область соответствует минимально возможному моменту инерции  $\bar{J}_*$ , который достигается в областях, близких к стенкам сосуда, а также в области сужения.
- Сравнивая два верхних фрагмента, видно, что в областях мельниц с высоким давлением момент инерции меньше, и наоборот. Это то, что ожидается интуитивно, ведь высокое давление способствует процессу дробления. Отметим, что момент инерции зависит не только от давления, но и от времени, на протяжении которого давление воздействует на частицы.
- Момент инерции не имеет максимального значения  $J_0$  в центре выходного сечения (зеленая зона). Это связано с тем, что частицы из сужаю-

щейся области с высокой горизонтальной скоростью замедляют частицы, которые движутся вдоль вертикальной оси симметрии дробилки. Поэтому частицы вблизи этой линии дольше находятся под давлением и сильнее измельчаются.

- Изолинии для коэффициента вязкости не показаны на этом рисунке, поскольку момент инерции и коэффициент вязкости обратно пропорциональны друг другу.
- Распределение всех величин симметрично, а ось симметрии равна ожидаемой.
- Видно, что на линии симметрии вертикальная скорость имеет максимальное значение, и момент инерции практически не изменяется при движении частиц к нижнему сечению сосуда. Это происходит потому, что частицы с высокой скоростью не находятся под давлением достаточно долго, что приводит к меньшему их измельчению.

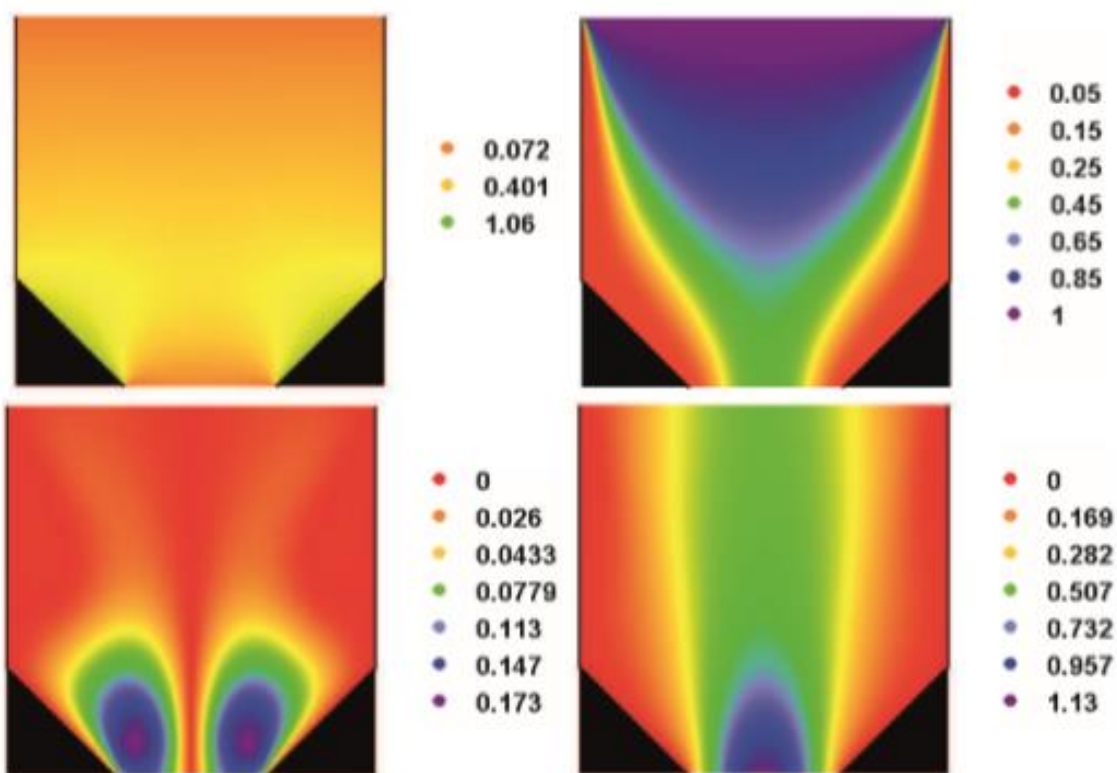


Рис. 2.1.5. Распределение изолиний давления, момента инерции, модуля горизонтальной скорости и вертикальной скоростей в сосуде (слева направо, сверху вниз).

Как уже было отмечено ранее, не существует аналитического решения для рассматриваемой задачи. Однако можно проверить правильность численного алгоритма, если рассмотреть течение описанного материала в прямой трубе. Т.е. будем рассматривать решение в мельнице, но при  $\alpha = 90^\circ$ . В таком случае можно рассмотреть вариант решения, наиболее приближенного к рассматриваемой проблеме. Одним из таких является стационарное решение Пуазейля: для стационарного течения несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью в тонкой цилиндрической трубе круглого сечения под влиянием постоянного перепада давления можно записать следующие уравнение:

$$v_y = - \left( q + \rho_0 g \frac{1}{2\eta} (L^2 - x^2) \right) \quad (2.1.1)$$

где  $\frac{\partial p}{\partial y} = \text{const} = q$

$2L$  - ширина рассматриваемой трубы.

На Рис. 2.1.6. представлено сравнение вертикальной скорости, которая была получена численно (точки), с аналитическим решением Пуазейля (сплошная линия). Видно, что оба решения имеют параболический характер и с достаточной точностью совпадают. Относительная ошибка между численным и аналитическим решением составляет меньше 1 процента, что говорит о высокой точности решения поставленной задачи.

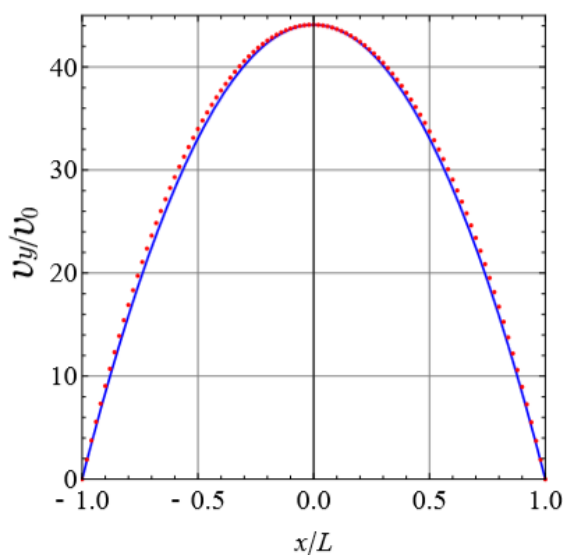


Рис. 2.1.6. Сравнение полученного решения с аналитическим.

Кроме того, будем сравнивать решение Пуазейля с решением поставленной задачи в исходной геометрии, т.е. для мельницы с сужением. Однако стоит отметить, что решение Пуазейля является физическим законом для жидкости, проходящей через длинную цилиндрическую трубу постоянного сечения. Поэтому будет возможно сравнить только значения в верхней части нашего сосуда с решением Пуазейля, где нет сужающегося поперечного сечения. Другими словами, его нельзя использовать для сравнения со скоростями в области сужающейся мельницы. Стоит отметить, что несмотря на то, что внешнее давление на верхней и нижней границах нашего сосуда равно нулю, мы все же можем сравнить некоторые наши результаты с решением Пуазейля. Действительно, как уже можно было увидеть, давление в области сужения постепенно увеличивается, и это обеспечивает градиент давления в части сосуда без сужения.

Для того чтобы обсудить полученные результаты более детально, рассмотрим распределение интересующих нас величин в различных вертикальных и горизонтальных сечениях. Отметим, что из-за симметрии задачи представлены результаты только для правой полуплоскости. Чтобы лучше понять, для каких именно сечений построены последующие графики, сечения схематично изображены на Рис. 2.1.7.

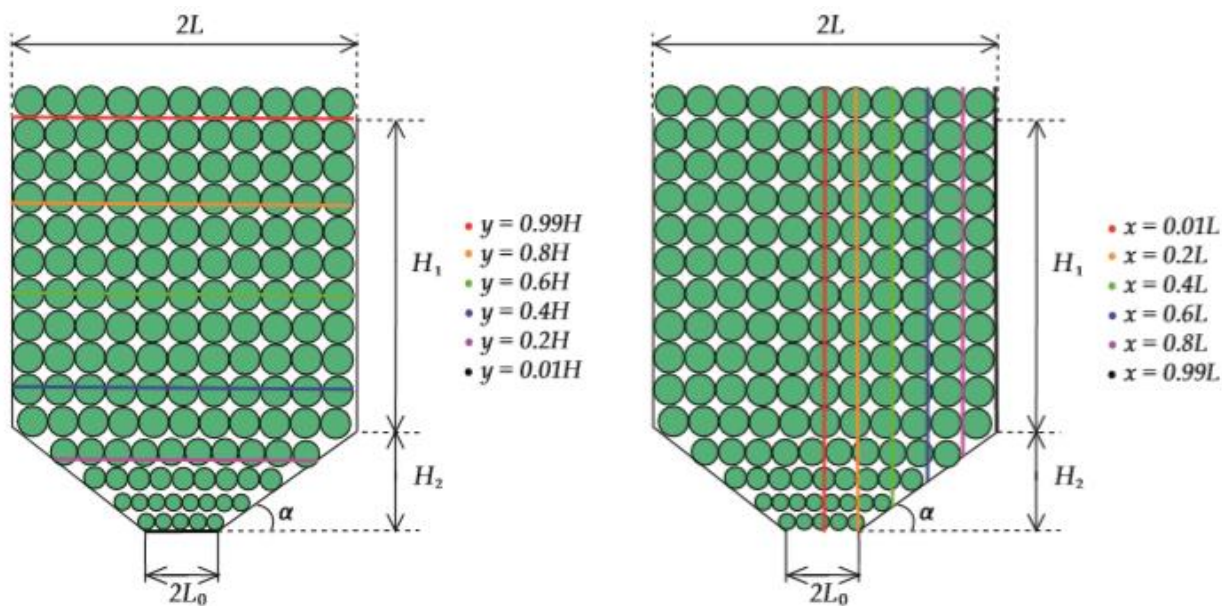


Рис. 2.1.7. Рассматриваемые сечения.

Проанализируем изменение давления в сосуде (Рис. 2.1.8.).

- На левом графике видно, что давление в нескольких поперечных сечениях на большой высоте постоянно, как и ожидалось. Действительно, при отсутствии сужения рассматриваемый сосуд похож на цилиндрическую трубу, в котором давление не изменяется в поперечных сечениях.
- Правый график четко показывает, как резко увеличивается давление при приближении к выходу из сосуда. Это связано с тем, что частицы попадают в более узкую область. Из-за этого частицы начинают больше размалываться, и момент инерции резко начинает уменьшаться.
- На выходе из сосуда давление близко к нулю из-за выброса частиц в свободное пространство. Также из-за этого видно резкое снижение давления при очень малых  $\bar{y}$ .
- Здесь и далее видно, что для некоторых сечений кривые на графиках короче, чем для других. Это связано с тем, что поперечные сечения сосуда имеют неодинаковую длину из-за сужения. Поэтому здесь и далее некоторые горизонтальные сечения не достигают значения  $\bar{x} = 1$ , а некоторые вертикальные сечения не достигают  $\bar{y} = 0$ .

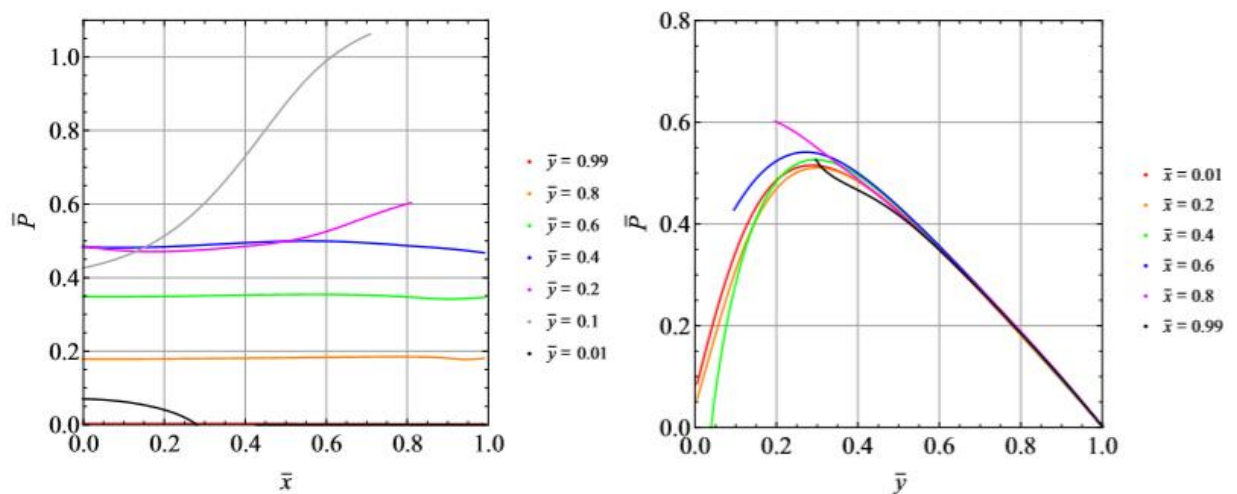


Рис. 2.1.8. Распределение давления в горизонтальном и вертикальном сечениях (левая и правая вставки соответственно).

Рассмотрим изменение момента инерции и коэффициента вязкости среды. На Рис. 2.1.9. показано распределение момента инерции в различных сечениях. Из рисунка видно, что:

- На высоте  $y = H$  момент инерции равен начальному значению  $J_0$ .
- Момент инерции резко уменьшается при приближении к стенке сосуда и достигает минимального значения  $\bar{J}_*$  непосредственно у стенки сосуда для всех высот.
- Кроме того, момент инерции стремится к экспоненциальной функции, что хорошо видно в сечении  $\bar{x} = 0.8$ .
- Момент инерции принимает наименьшее значение для всех вертикальных сечений в области сужения, как и ожидалось.

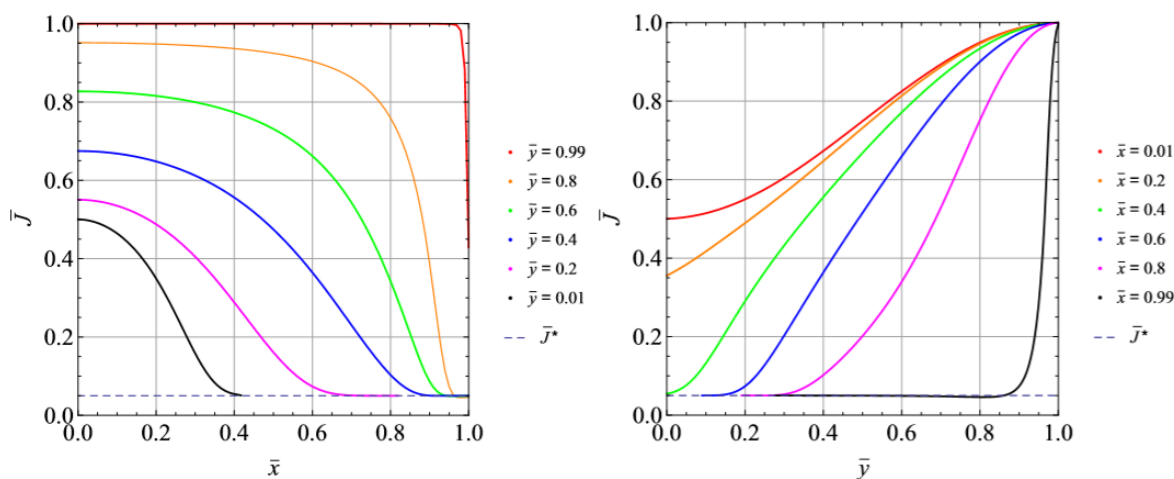


Рис. 2.1.9. Распределение момента инерции в горизонтальном и вертикальном сечениях (левая и правая вставки соответственно).

Рис. 2.1.10. показывает распределение коэффициента вязкости в различных сечениях. Из рисунка видно, что:

- Когда момент инерции наибольший, коэффициент вязкости наименьший и наоборот, т.е. коэффициент вязкости имеет обратный характер поведения к моменту инерции.
- Из уравнения (2.1.1.) видно, что скорость обратно пропорциональна коэффициенту вязкости. В сечении  $\bar{y} = 0.99$  наблюдается, что коэффициент

вязкости достигает своего наименьшего значения и постоянен в этом сечении. Из-за этого постоянства далее можно будет наблюдать распределение  $\bar{v}_y$  - компоненты скорости, наиболее близкое к решению Пуазейля.

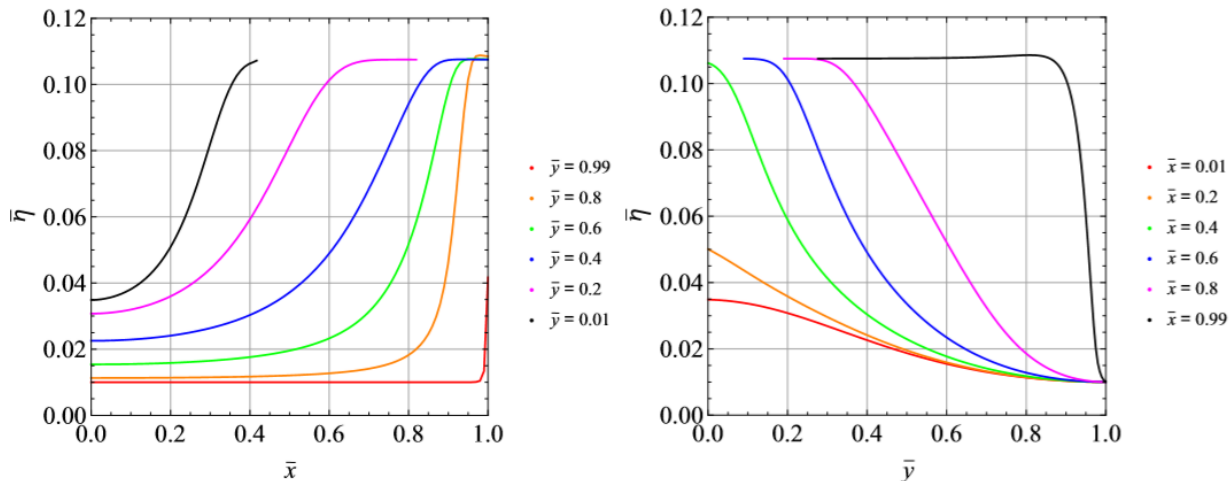


Рис. 2.1.10. Распределение момента инерции в горизонтальном и вертикальном сечениях (левая и правая вставки соответственно).

Теперь рассмотрим изменение скоростей в среде. На Рис. 2.1.11. показано распределение вертикальной и горизонтальной скоростей в горизонтальных сечениях. Из рисунка видно, что:

- Обе компоненты скорости равны нулю на стенках, как и должны.
- С увеличением  $\bar{y}$  обе компоненты скорости уменьшаются. Это кажется логичным, потому что скорость увеличивается с приближением к выходу из сосуда из-за сужения и воздействия на частицы силы тяжести.
- Вертикальная скорость достигает своего максимального значения в сечении  $\bar{y} = 0,01$ .
- Кроме того, при больших  $\bar{y}$ , компонента  $\bar{v}_y$  выглядит параболической, что имеет смысл для течения типа Пуазейля.



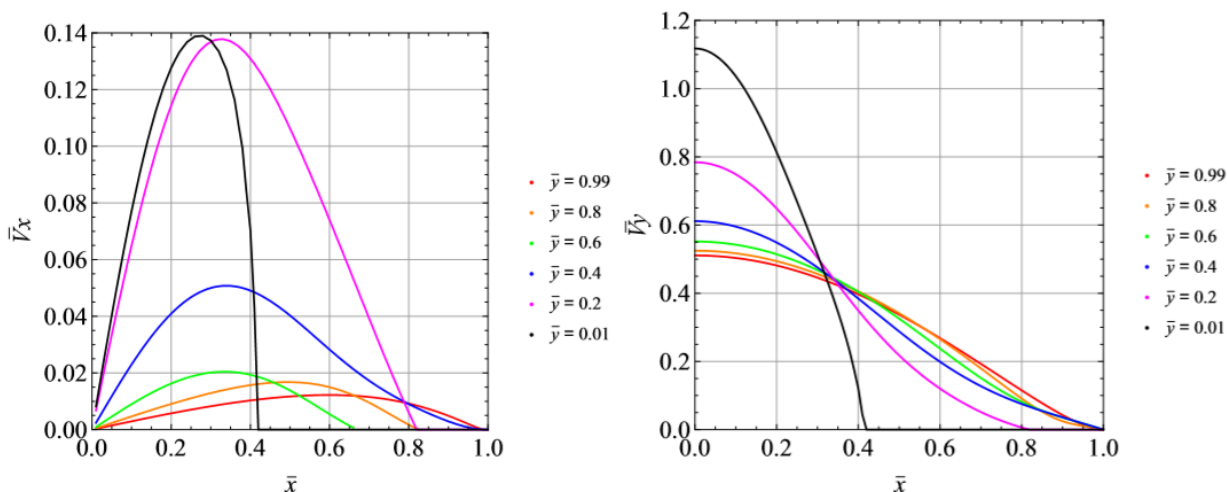


Рис. 2.1.11. Распределение горизонтальной и вертикальной скоростей в горизонтальных сечениях (левая и правая вставки соответственно).

На Рис. 2.1.12. показано распределение вертикальной и горизонтальной скоростей в вертикальных сечениях. Из рисунка видно, что:

- Составляющая скорости  $\bar{v}_y$  становится меньше при приближении к стенке сосуда.
- Кроме того, для вертикального сечения вдоль центральной оси сосуда компонента скорости  $\bar{v}_y$  резко возрастает с уменьшением  $\bar{y}$ .
- Что касается компоненты скорости  $\bar{v}_x$ , видно, что распределение имеет неоднозначный характер.

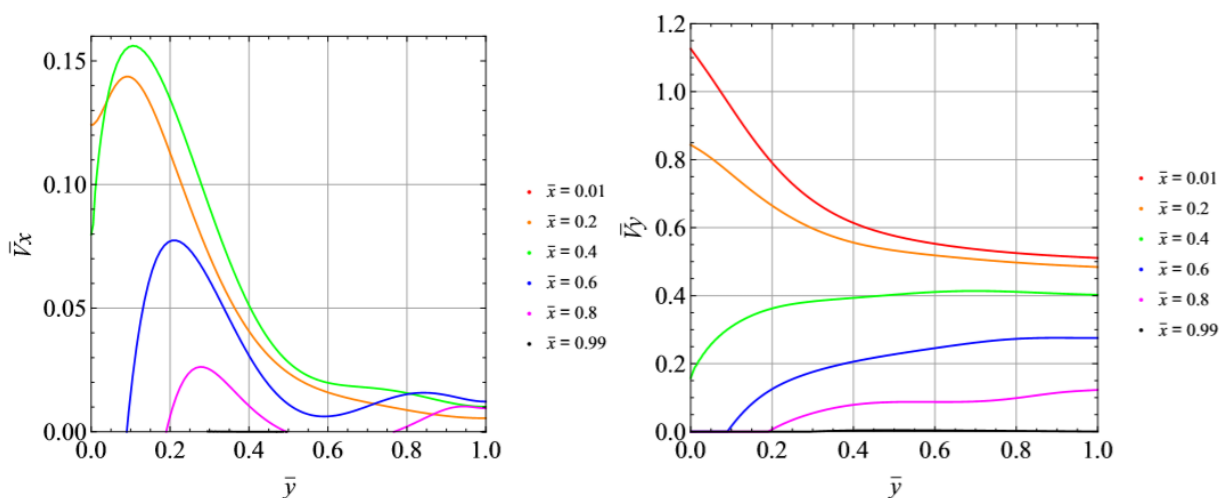


Рис. 2.1.12. Распределение горизонтальной и вертикальной скоростей в вертикальных сечениях (левая и правая вставки соответственно).



На Рис. 2.1.13. показано сравнение распределений вертикальной и горизонтальной скоростей для среды с постоянным ( $\lambda = 0$ , пунктирная линия) и переменным ( $\lambda = 2.5$ , сплошная линия) коэффициентом вязкости среды. Из рисунка видно, что:

- Скорости во всех сечениях ниже в случае переменного коэффициента вязкости.
- Обе скорости не так сильно увеличиваются с переменным коэффициентом вязкости при приближении к началу координат.
- Скорость на выходе из воронки уменьшалась в случае переменного коэффициента вязкости. Это связано с тем, что более мелкие частицы имеют более высокую вязкость.
- На левом графике в сечении  $\bar{y} = 0.6$  видно, что решения довольно похожи. Это связано с тем, что в верхней части сосуда частицы не были сильно измельчены, и коэффициент вязкости практически не изменился.
- Видно, что в обоих случаях вертикальная компонента скорости  $v_y$  максимальная на выходе из сосуда.
- В горизонтальном сечении на выходе из мельницы (левый верхний график) горизонтальная составляющая скорости  $\bar{v}_x$  отличается для случаев с переменной и постоянной вязкостью в 4 раза, что говорит о сильном влиянии на моделирование учета феномена зависимости коэффициента вязкости от момента инерции.

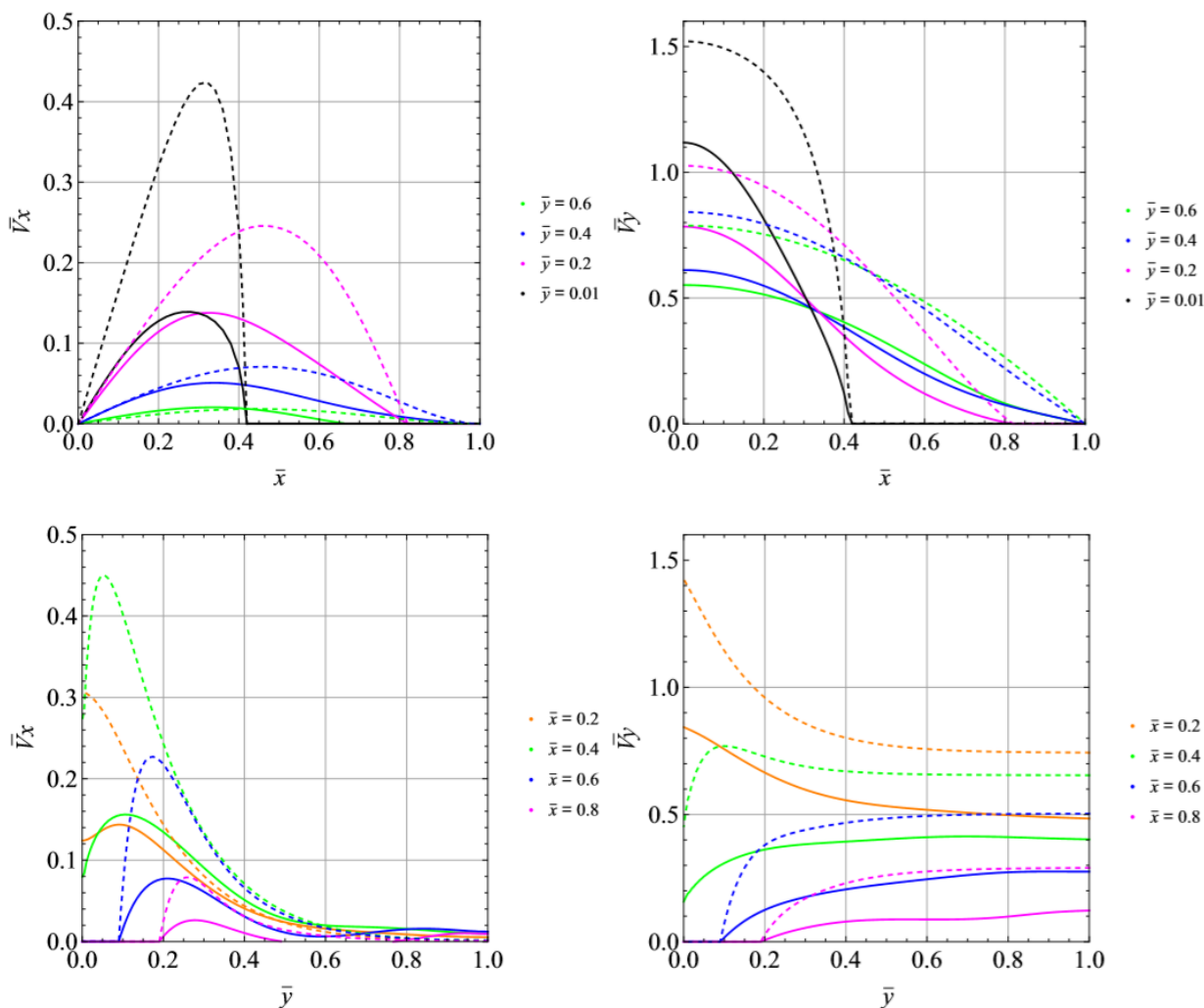


Рис. 2.1.13. Распределение горизонтальной и вертикальной скоростей для среды с переменным коэффициентом вязкости ( $\lambda = 2.5$ ) - сплошная линия и с постоянным коэффициентом вязкости ( $\lambda = 0$ ) - пунктирная линия).

Рис. 2.1.14. показывает, что для переменного коэффициента вязкости момент инерции во всех сечениях меньше относительно случая с постоянным коэффициентом. Это означает, что частицы измельчаются в большей степени, что приводит к увеличению коэффициента вязкости. Это кажется логичным, потому что с увеличением вязкости среды скорость среды уменьшается. Частицы движутся медленнее в области сужения, а значит дольше находятся в области высокого давления и сильнее измельчаются.

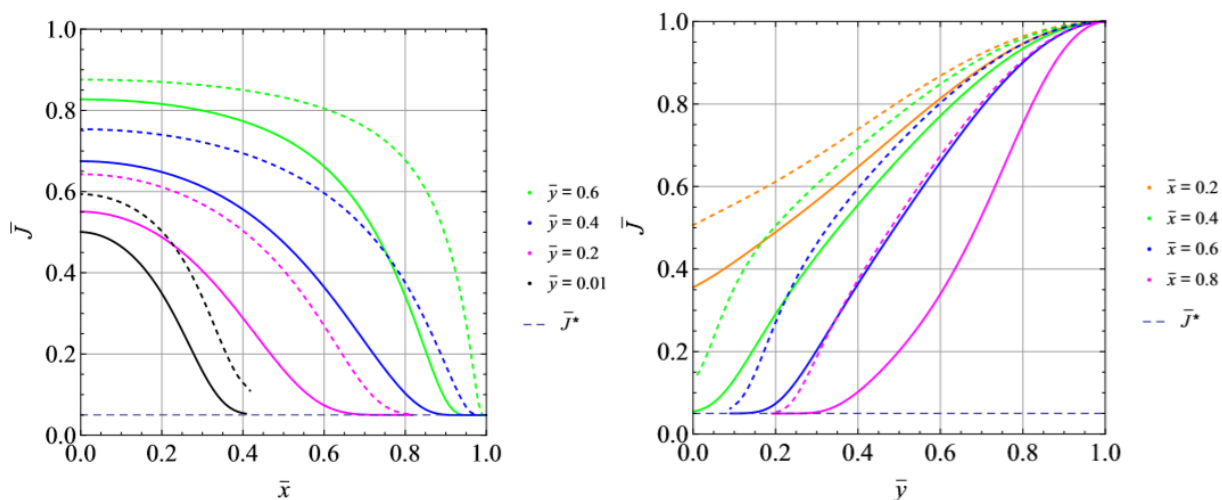


Рис. 2.1.14. Распределение момента инерции для среды с переменным коэффициентом вязкости ( $\lambda = 2.5$ ) - сплошная линия и с постоянным коэффициентом вязкости ( $\lambda = 0$ ) - пунктирная линия).

Теперь сравним момент инерции для материала с разными коэффициентами вязкости, т.е. для разных значений параметра  $\lambda$  (Рис. 2.1.15.). Будем рассматривать изменение коэффициента вязкости в двух сечениях: горизонтальном  $\bar{y} = 0,01$  (на выходе из мельницы) и вертикальном  $\bar{x} = 0,2$  (нижняя часть сечения попадает в область сужения мельницы).

На рисунке видно, что

- При небольшом значении параметра  $\lambda$  момент инерции имеет большой разброс на выходе из сосуда.
- Чем больше параметр  $\lambda$ , тем быстрее достигается минимальный момент инерции внизу мельницы. Это связано с тем, что частицы на выходе из сосуда имеют меньший диаметр, чем в начале дробилки, а значит вязкость у таких частиц (более мелких) выше. За счет повышения вязкости среды, скорость частиц в нижней области сильно уменьшается, а значит частицы дольше находятся под действием давления, и как следствие сильнее измельчаются. Именно это и видно на левой вставке Рис 2.1.11.
- При  $\lambda = 4$  значение момента инерции практически по всему поперечному сечению на выходе из сосуда упало до минимального значения

$\bar{J}_*$ .

- На правом фрагменте видно, что чем выше вязкость среды, тем характер распределения момента инерции вдоль вертикальных сечений больше подобен экспоненциальной функции. Это свидетельствует о правильности полученного решения, т.к. в работе [14] было получено решение для одномерного случая измельчения гранулированной среды. Это решение представляет из себя комбинацию экспоненциальных функций от высоты слоя частиц. Похожую ситуацию видно и на правой вставке рисунка.

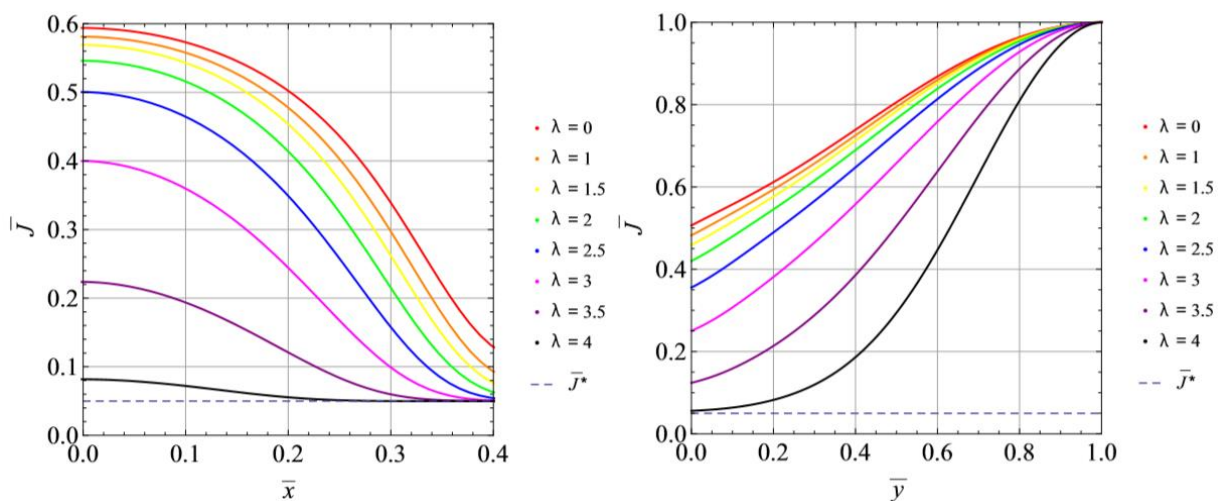


Рис. 2.1.15. Распределение момента инерции сред с различными коэффициентами вязкости в горизонтальном сечении  $\bar{y} = 0,01$  и вертикальном сечении  $\bar{x} = 0,2$  (левая и правая вставки соответственно).

Теперь сравним момент инерции для материала с разными коэффициентами вязкости в горизонтальном сечении  $\bar{y} = 0,2$  и вертикальном сечении  $\bar{x} = 0,8$ . На Рис. 2.1.16. можно увидеть похожие закономерности, которые были описаны выше. А именно, что при росте параметра  $\lambda$ , измельчение в области сужения происходит намного быстрее, а также что момент инерции больше похож на экспоненциальную функцию с ростом вязкости среды.

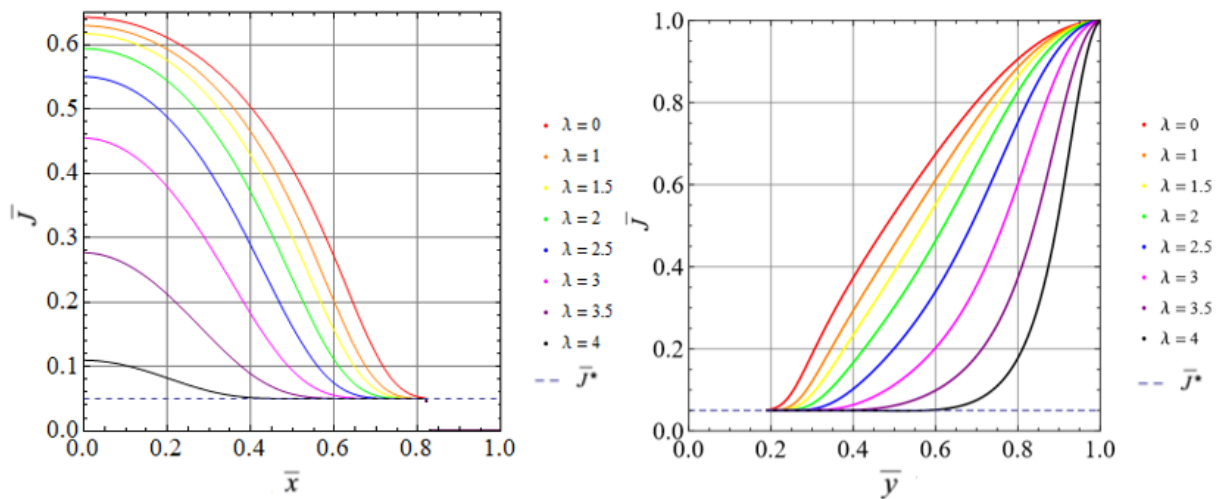


Рис. 2.1.16. Распределение момента инерции сред с различными коэффициентами вязкости в горизонтальном сечении  $\bar{y} = 0,2$  и вертикальном сечении  $\bar{x} = 0,8$  (левая и правая вставки соответственно).

Последние два рисунка показывают, что учет зависимости коэффициента вязкости среды от момента инерции, а значит и от диаметра характерной частицы, играет большую роль и очень сильно влияет на результаты моделирования и на точность описания процесса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. На примере измельчения гранулированной среды было проведено математическое моделирование микрополярной вязкой среды с коэффициентом вязкости, зависящим от момента инерции.
2. Было показано, что решение задачи об измельчении гранулированной среды с переменным коэффициентом вязкости невозможно для случая с одномерным профилем скоростей, и данную задачу необходимо решать в двумерной постановке.
3. Предложена аналитическая зависимость коэффициента вязкости от момента инерции на основе эмпирических данных.
4. Предложен вид для источникового члена из кинетического уравнения для момента инерции среды, описывающий измельчение материала.
5. Предложен численный алгоритм для решения такого типа задач. Алгоритм основан на комбинации трех типов численных методов (метода прогонки, метода расщепления и введения в исходные уравнения дополнительного нестационарного слагаемого с функцией ошибки).
6. Численно решена полностью связанная задача об измельчении и движении гранулированного материала в конусообразной дробилке.
7. Моделирование проводилось с использованием языка программирования C++.
8. Исследован процесс перехода к стационарному режиму.
9. Получено стационарное распределение компонент скорости, давления, момента инерции и коэффициента вязкости среды.
10. Была проведена верификация полученного решения с известными аналитическими решениями. Было показано, что точность решения высока, а именно составляет менее 1%.
11. Исследован учет влияния зависимости коэффициента вязкости от размера частиц на эффективность дробилки.
12. Установлено, что учет зависимости коэффициента вязкости среды от момента инерции, а значит и от диаметра частиц среды, играет большую роль,

значительно влияет на результаты моделирования и на точность описания процесса.

В будущем эта проблема может быть расширена и усложнена. Например, можно рассмотреть более сложную геометрию дробилки или гранулированный материал с неравномерным распределением частиц по размерам и формам. В этом случае вращение каждой частицы будет иметь значение для среды в целом, и средняя угловая скорость репрезентативного объема не будет равна нулю. Также для более реалистичного описания процесса можно усложнить решаемую систему уравнений, а именно уравнение несжимаемости заменить на баланс масс. Ведь из-за измельчения и перераспределения больших и маленьких частиц в системе, плотность материала может меняться. Кроме того, в некоторых областях, связанных с созданием материалов из гранулированных сред, влияние температуры является очень важным. Поэтому температурные процессы, а также зависимость вязкости среды от температуры могут быть добавлены к задаче, рассматриваемой в работе.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Вавилов А.В. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Учебное пособие для инженеров, (2012).
2. Вахитов М.Р., Хакимова Е.Г., Толмачева А.В., Кузнецов М.Г., Николаев А.Н. Измельчение угля в конусных мельницах с крупномасштабной искусственной шероховатостью // Вестник Казанского технологического университета. №20, (2015).
3. Вильчевская Е. Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ, (2012).
4. Колмогоров В.Л., Логинов Ю.Н., Исследование процесса прессования гранулированных материалов, (1976).
5. Марценко М.С. Моделирование гидродинамики и процессов усреднения высококонцентрированной гранулированной среды в аппаратах порошковой технологии, (2011).
6. Петряев А.А. Моделирование гранулированных сред в технологических машинах.
7. Смогунов В.В., Филиппов Б.А. Основы механики сплошных сред. Учебное пособие.
8. Bain O., Billingham J., Houston P., Lowndes I. Flows of granular material in two-dimensional channels, (2015).
9. Bertuola D. Volpato S., C.P.S.A.: Prediction of segregation in funnel and mass flow discharge. Chemical Engineering Science 150(-), 1625 (2016).
10. Chen, K.: Microcontinuum balance equations revisited: The mesoscopic approach. J. Non-Equilib. Thermodyn. 32, 435-458 (2007).
11. Ivanova Elena A., Vilchevskaya Elena N.. Micropolar continuum in spatial description. Continuum Mechanics and Thermodynamics, (2016).
12. Fomicheva Mariia, Vilchevskaya Elena N., Müller Wolfgang H., Bessonov Nikolay. «Milling matter in a crusher: modeling based on extended micropolar theory». April 2019 Continuum Mechanics and Thermodynamics 31, p. 1559-1570 DOI: 10.1007/s00161-019-00772-4, (2019).
13. Fomicheva M., Vilchevskaya E.N., Müller W.H., Bessonov N.. Funnel flow of a



- navier-stokes-fluid with potential applications to micropolar media. *Facta universitatis. Series mechanical engineering* 17, 255-267, (2019).
14. Glane, S., Rickert, W., Müller, W.H., Vilchevskaya, E.: Micropolar media with structural transformations: Numerical treatment of a particle crusher. In: *Proceedings of XLV International Summer School - Conference APM 2017*, pp. 197-211. IPME RAS, (2017).
  15. Härtla J. Ooia J.Y., R.J.W.M.D.S., G.G., E.: The influence of a cone-in-cone insert on flow pattern and wall pressure in a full-scale silo. *Chemical Engineering Research and Design* 86(4), 370378 (2008).
  16. Mueller W.H., Vilchevskaya E. N., Weiss W.. Micropolar theory with production of rotational inertia: A farewell to material description, (2017).
  17. Truesdell, C., Toupin, R.A.: *The classical field theories*. Springer, Heidelberg (1960).
  18. Volpatoa S., Artonib R., S.A.: Numerical study on the behavior of funnel flow silos with and without inserts through a continuum hydrodynamic approach. *Chemical Engineering Research and Design* 92(2), 256263 (2014).
  19. Yilmaz, H.A.M.: Discharge of granular materials from hoppers with various exit geometries. *Journal of International Mechanical Engineering Congress and Exposition* 6(1), 1-6 (2007).
  20. Zhao J., Luo Z., Ni M., Cen K. Dependence of nanofluid viscosity on particle size and ph value. *Chinese Physics Letters* 26(6(2009)06620), 1-3 (2009).