Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого
Кафедра теоретической механики

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛА С УСЛОВИЯМИ КОНТАКТА НА ГРАНИЦАХ

Выполнил студент гр.63604/1 Шубин А.В.

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доц. Носов Вячеслав Николаевич
к.ф.-м.н., доц. Лобода Ольга Сергеевна

Тема работы

Магистерская работа посвящена исследованию задачи о движении системы объектов, состоящих из нескольких звеньев, при наличии упругих связей между ними в среде с сухим трением.

Основные направления работы:

- ***Механика:***

  Постановка задачи, в которой реализуется движение системы, состоящей из цепи твердых тел, соединенных упругими связями.
- ***Математическое моделирование:***

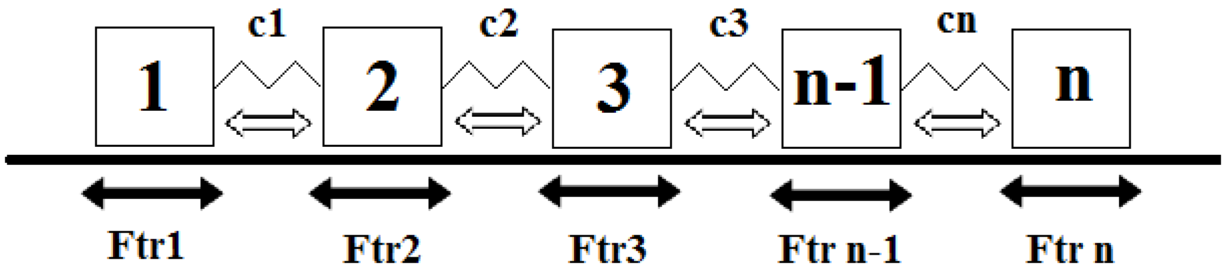
  Создание модели алгоритма описания механической задачи для численного решения заданных уравнений; представление эмпирической силы трения.

Актуальность:

Рассмотренная в работе задача описывает возможные режимы движения в некоторых живых организмах (бионика).
Построение работоспособных моделей движения таких систем является полезной задачей, как с исследовательской точки зрения, так и с прикладной.
Разнообразие способов организации движения в биологических объектах велико и не изучено.

Механическая задача

Рассматривается изолированная (замкнутая) система, состоящая из n материальных точек с одинаковой массой m с учетом связей между звеньями.



Система дифференциальных уравнений движения звеньев:

$$P = \begin{cases} m\ddot{x}_1(t) = cU_{12} - Ftr_1(t), \\ m\ddot{x}_2(t) = cU_{23} - cU_{12} - Ftr_2(t), \\ m\ddot{x}_3(t) = cU_{34} - cU_{23} - Ftr_3(t), \\ \dots \\ m\ddot{x}_{n-1}(t) = cU_n - cU_{n-1} - Ftr_{n-1}(t), \\ m\ddot{x}_n(t) = -cU_n - Ftr_n(t), \end{cases}$$

Условные обозначения :

c - коэффициент жесткости пружины,

m - масса звена,

U - перемещение звеньев, относительно друг друга

Ftr - сила трения.

Граничные условия

Граничные условия:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = d, x_3(0) = 2d, x_{n-1}(0) = (n-2)d, x_n(0) = (n-1)d,$$
$$\dot{x_1}(0) = 0, \dot{x_2}(0) = 0, \dot{x_3}(0) = 0, \dot{x}_{n-1}(0) = 0, \dot{x}_n(0) = 0.$$

Ограничения на максимальное растяжение, равное 2d и максимальное сжатие пружины (0). Применены граничные условия на ход элементов при близком приближении друг к другу и на растяжение по длине двойного расстояния между звеньями системы. Эти условия не позволяют звеньям расползаться и соударяться друг с другом.

$$U_n = \begin{cases} -d, x_n(t) - x_{n-1}(t) < 0, \\ d, x_n(t) - x_{n-1}(t) > 2d, \\ x_n(t) - x_{n-1}(t) - d. \end{cases}$$

Условные обозначения :
d – расстояние между звеньями.

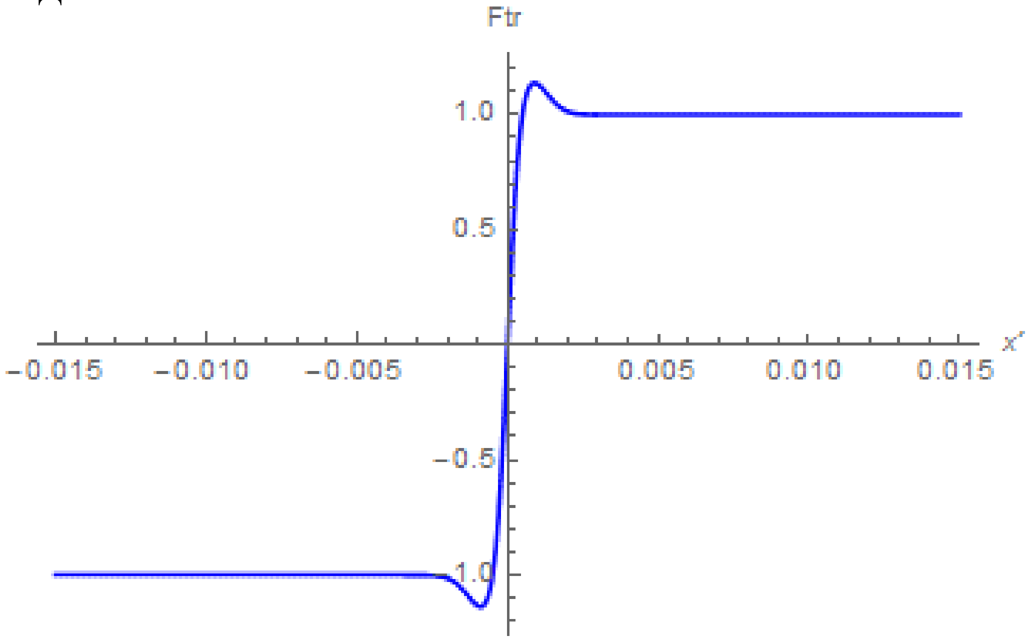
Представление силы трения

В данной работе формула и форма сухого трения среды получена эмпирическим путем на основе s-образной силы трения, как наиболее подходящая по постановке задачи. Введены численные коэффициенты K, L и M для варьирования формы и подбора оптимальной силы трения.

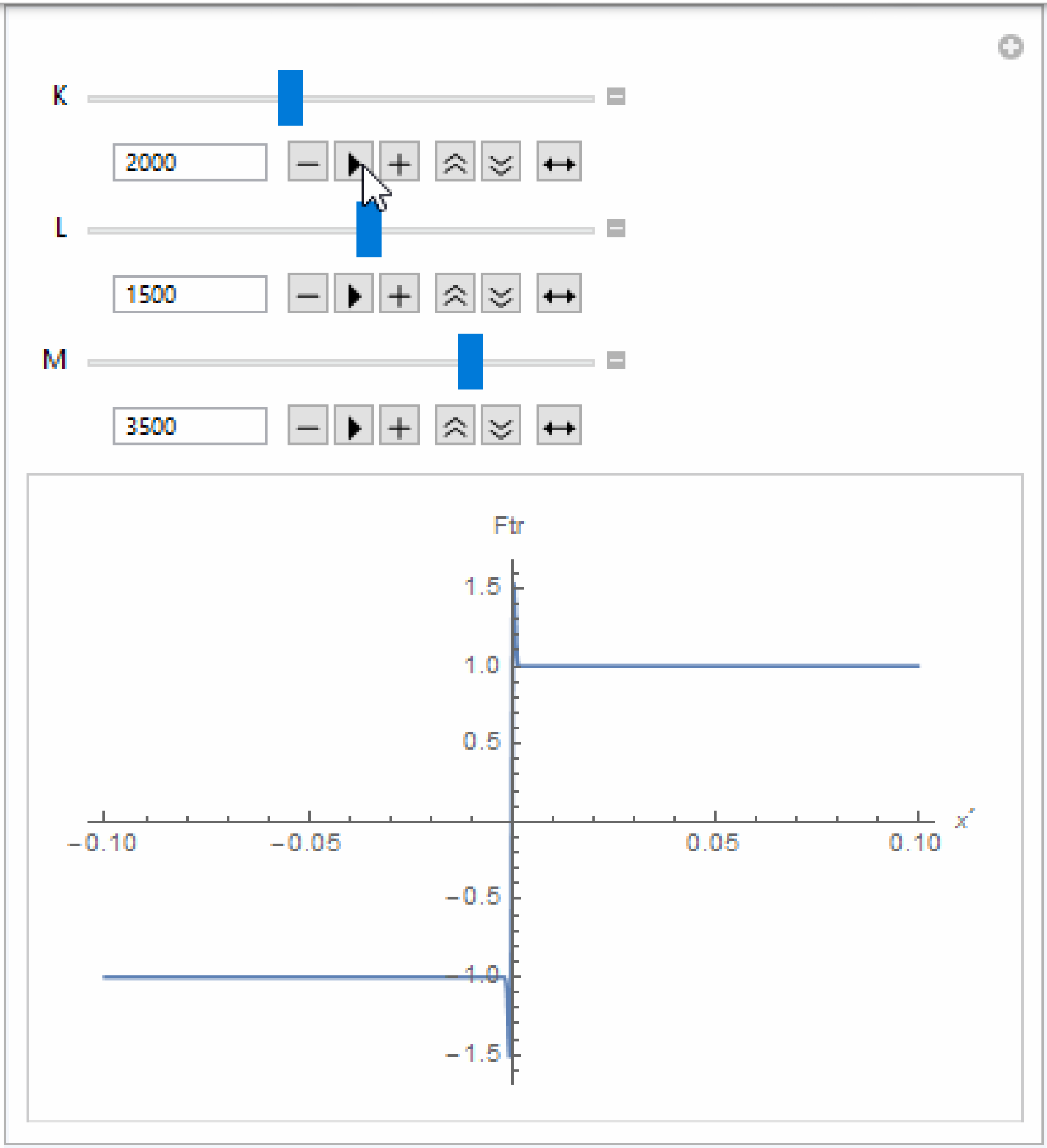
$$F_{tr} = K\left(\dot{x}e^{-(L\dot{x})^2}\right) + \tanh(M\dot{x})\,.$$

Данная форма была взята, так как удовлетворяет условиям гладкости и непрерывности функции, что дает возможность более точно численно решать дифференциальные уравнения.

Преимуществом такой формы является то, что одной функцией задаются 2 типа взаимодействия – сила трения покоя и сила трения движения.

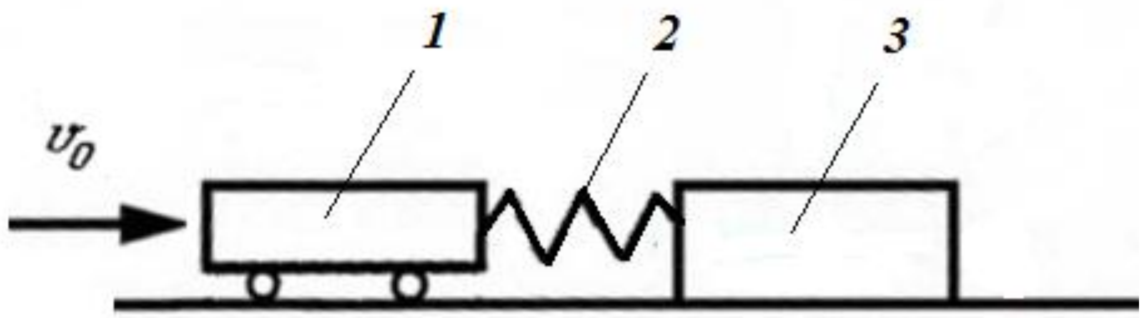


Влияние параметров силы трения

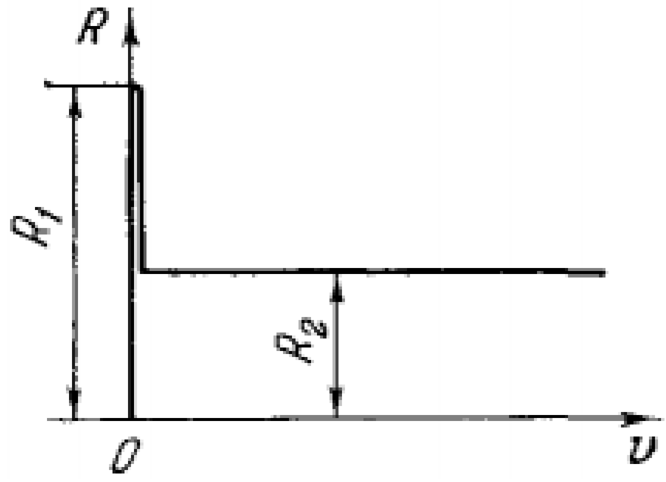


Модельная задача

Механическая система в данной задаче состоит из равномерно движущегося ведущего звена 1, приводящего через пружину 2 в движение груз 3. Между грузом и поверхностью, по которой он двигается, развивается сила сухого трения.



Сила трения имеет ступенчатый вид и схематически отражает различие между предельной силой трения покоя и силой трения движения известное из экспериментов.



Условные обозначения:
R_1 - предельная сила трения покоя,
R_2 - сила трения движения.

Модельная задача

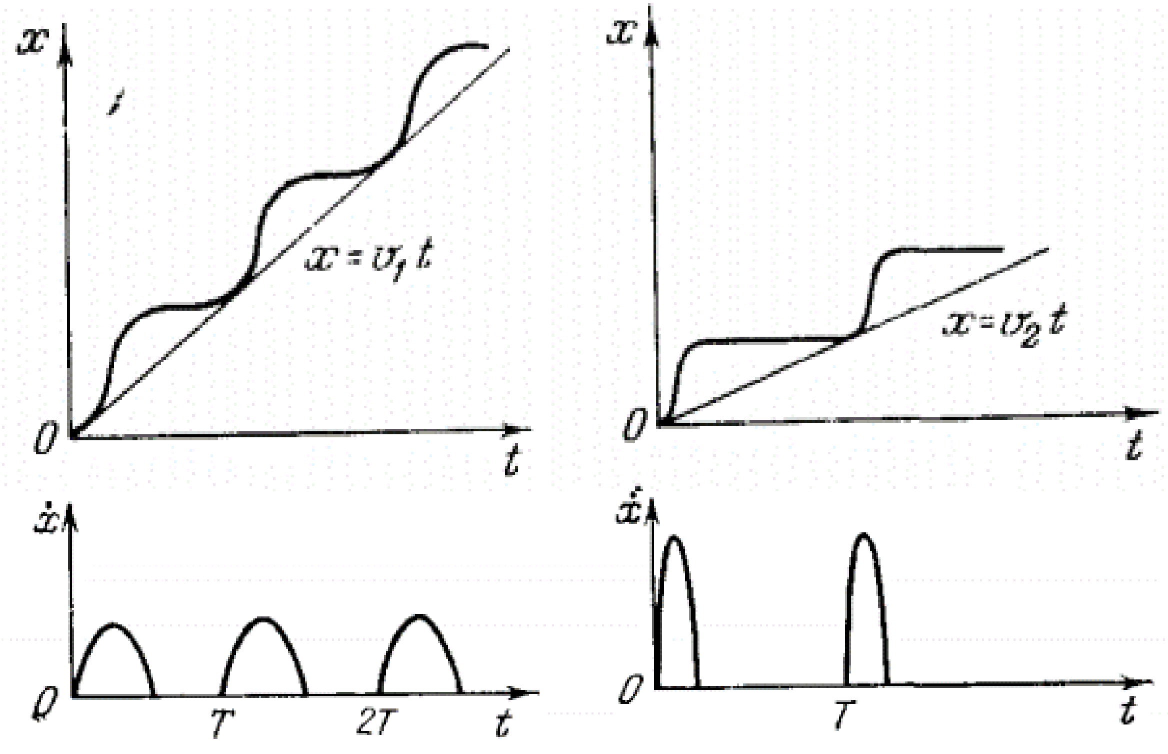
Совместим с моментом срыва начало отсчета времени $t = 0$ и заметим, что в этот момент равны нулю как координата x, так и скорость $\dot{x}$:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

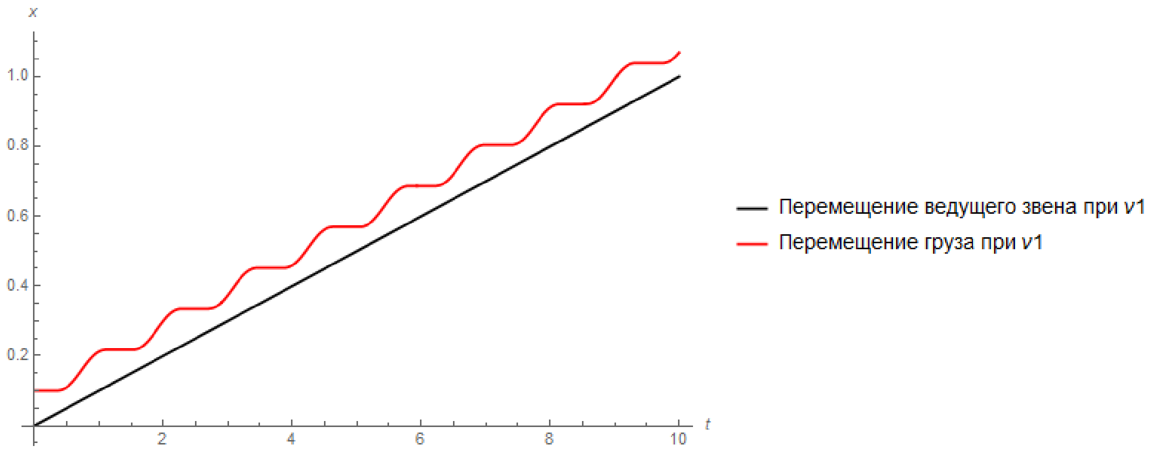
$$\ddot{x} + k^2 x = k^2 v_0 + \frac{R_1 - R_2}{m}.$$

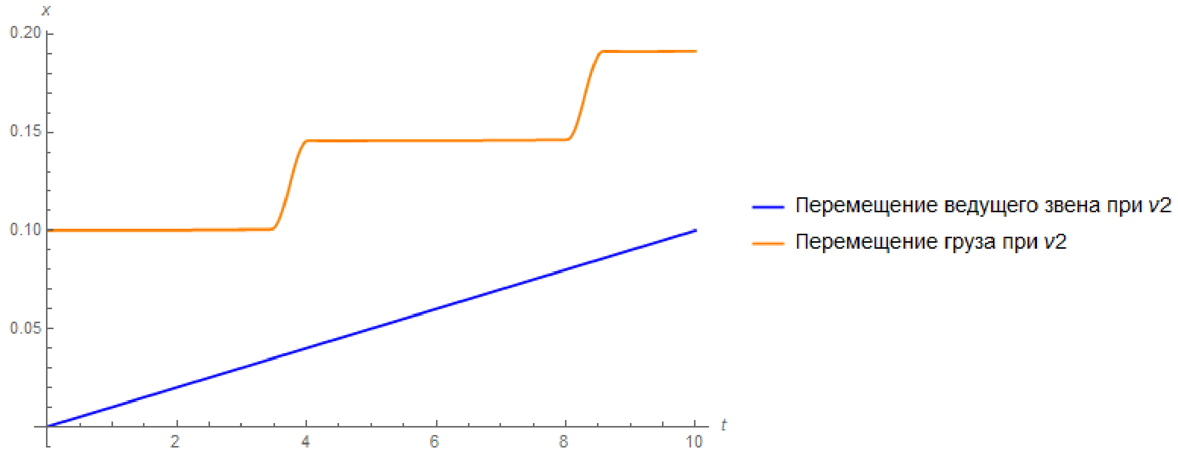
Результаты аналитического решения

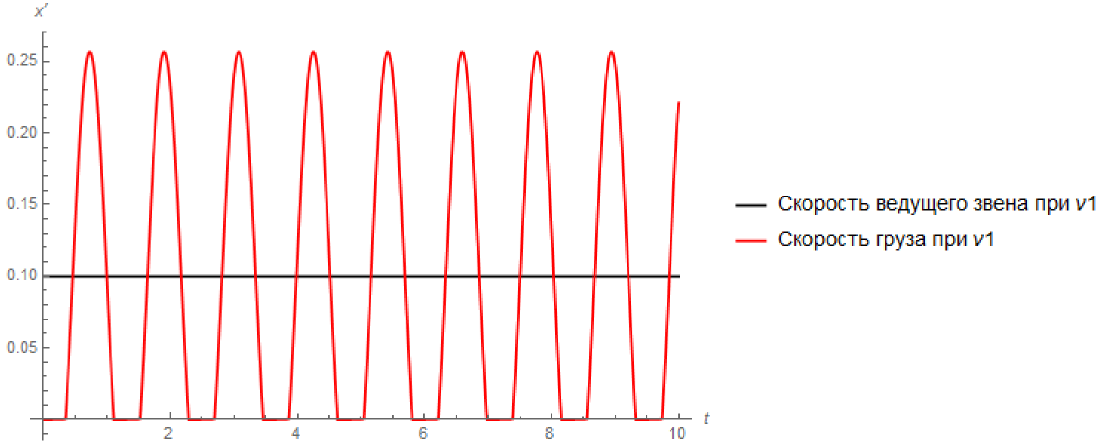


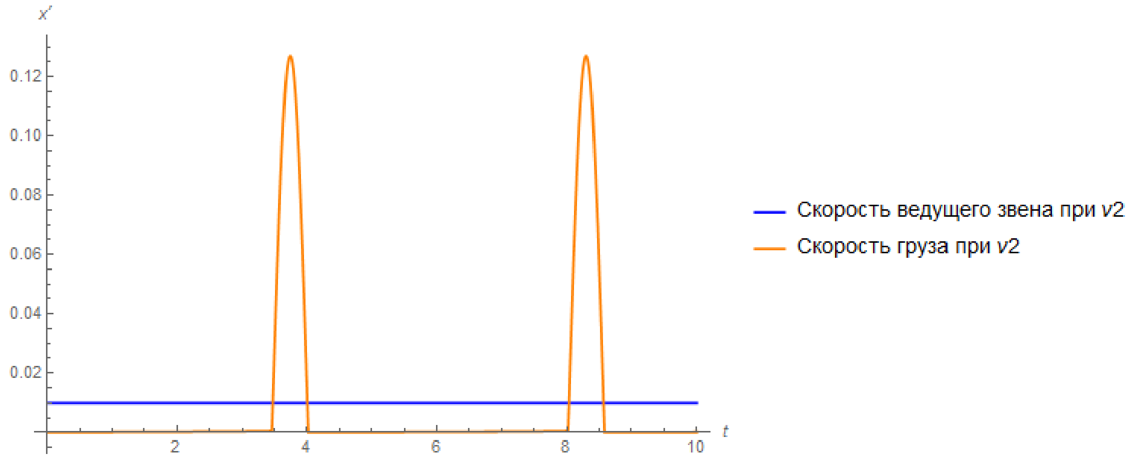
Условные обозначения:
v_0 - скорость ведущего звена,
c - коэффициент жесткости пружины,
m - масса груза,
$k = \sqrt{\frac{c}{m}},$
R_1 - предельная сила трения покоя,
R_2 - сила трения движения.

Качественное сравнение результатов

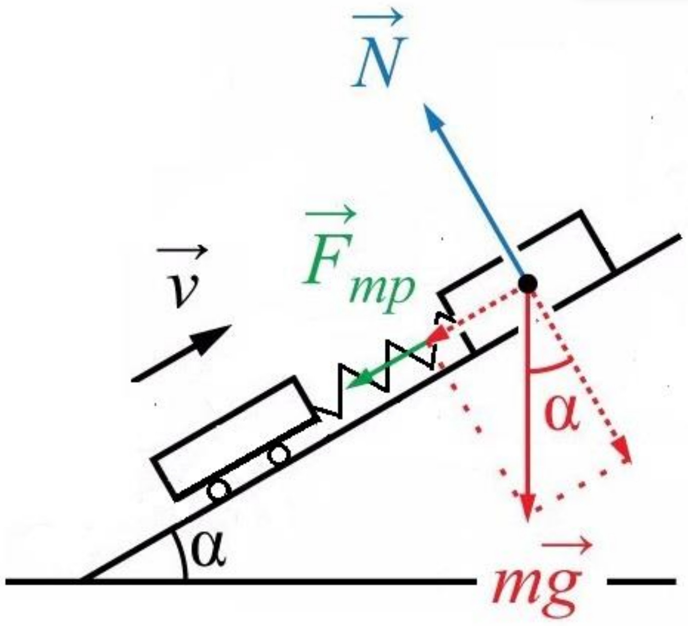


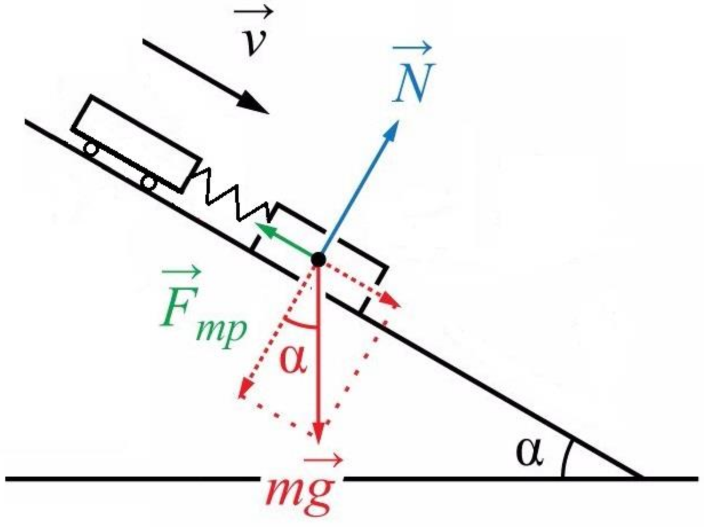






Ввод угла наклона поверхности





Для осуществления реализации задачи движения системы по наклонной поверхности были добавлены характеристики влияния условной силы притяжения. Введена зависимость от угла наклона, рассматривалось 3 случая: ровная поверхность $\alpha = 0°$, поверхность с уклонов наверх $\alpha = 45°$, поверхность с уклоном вниз $\alpha = -45°$.
Сила реакции опоры N, действующая на звено:

$$N = mgcos(\alpha),$$

Тогда реальная сила трения F_{tr} , действующая в системе с коэффициентом сухого трения μ

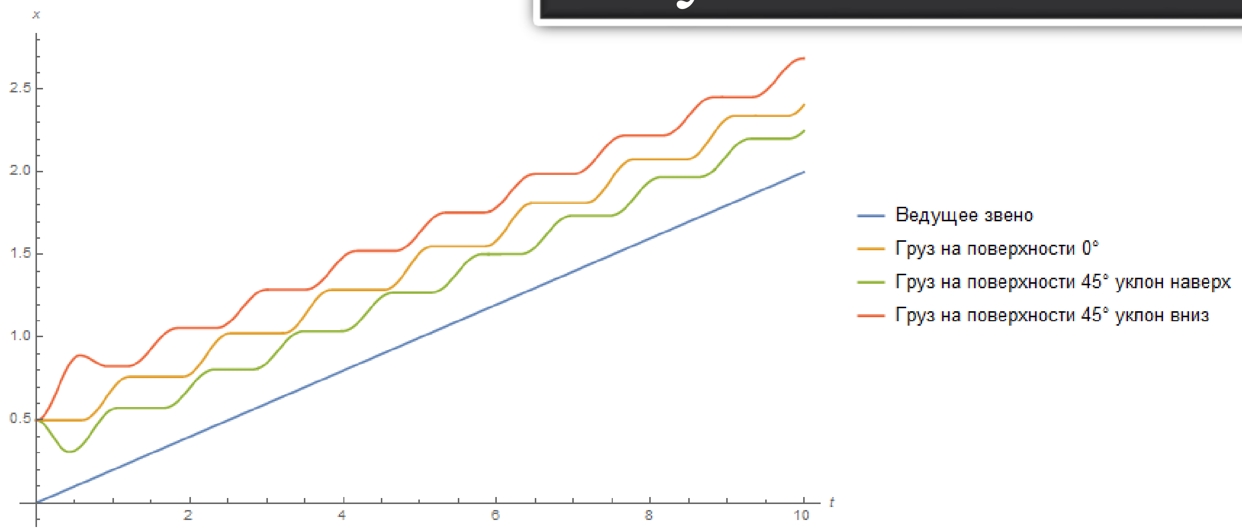
$$F_{tr} = \mu N\left(K\left(\dot{x}e^{-(L\dot{x})^2}\right) + \tanh(M\dot{x})\right).$$

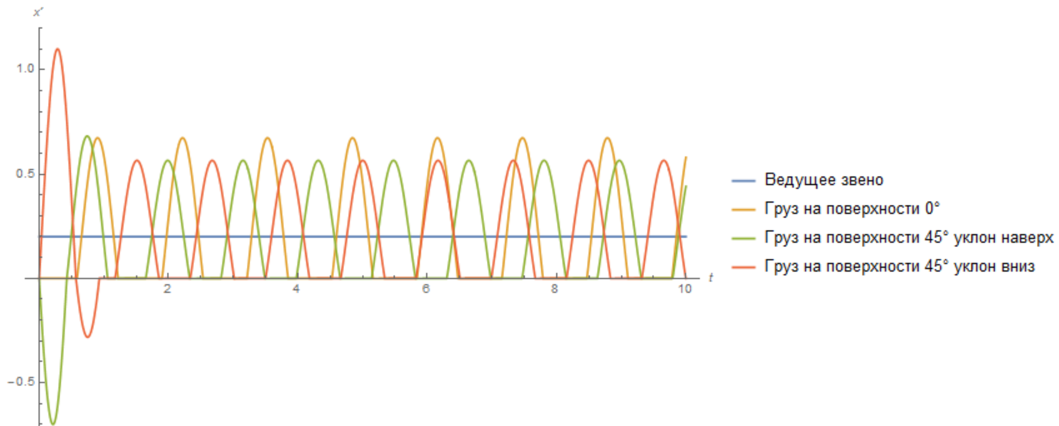
В правую часть каждого дифференциального уравнение добавляется слагаемое, определяемое влиянием силы тяжести

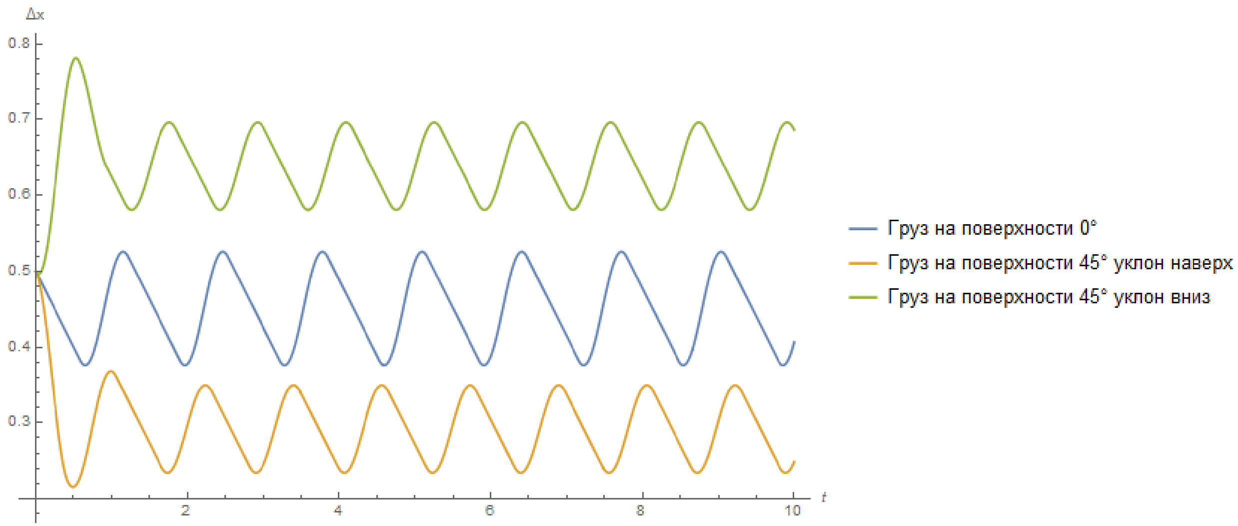
$$F_t = mgsin(\alpha)$$

Условные обозначения:
m – масса звена;
g – коэффициент, характеризующий ускорение свободного падения;
α – угол уклона.

Результаты численного эксперимента



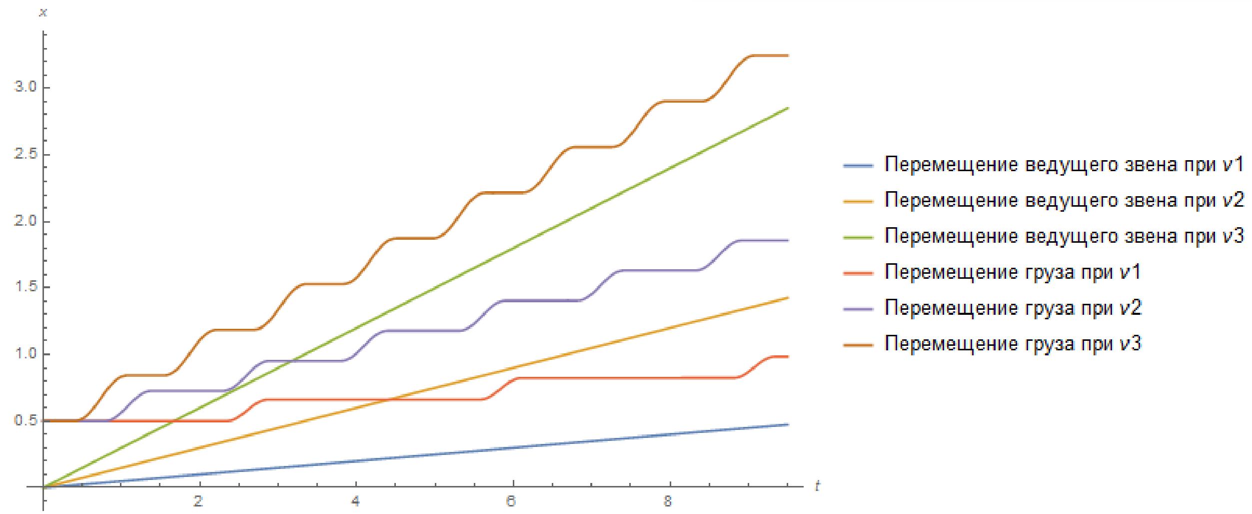


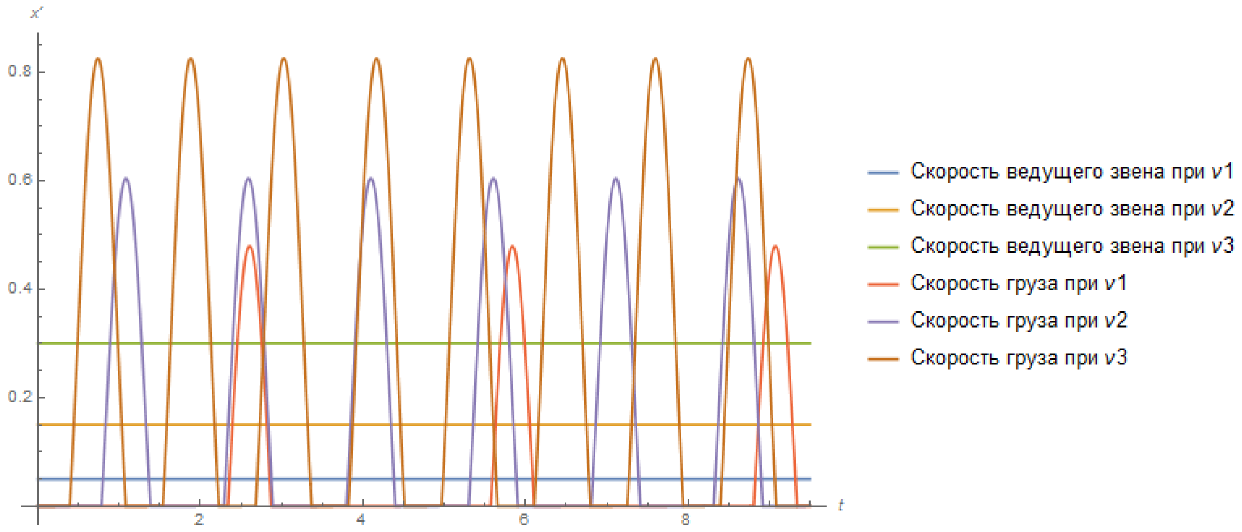


Выводы:

- система переходит в автоколебательный режим во всех случаях;
- резкие скачки в скоростях отображают переходный режим и влияния уклона поверхности, груз начинается приближаться к ведущему звену и отдаляться соответственно до перехода в режим автоколебаний;
- график влияния упругой связи отображает разные амплитуды перемещений груза относительно ведущего звена в зависимости от удлинения пружины

Влияние скорости на систему





Соотношение скоростей

$$v_3 > v_2 > v_1$$

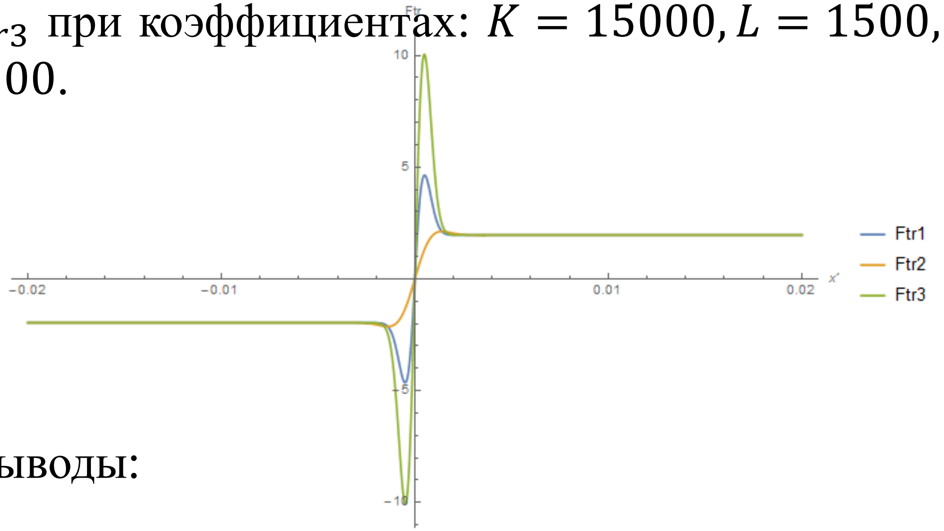
Выводы:

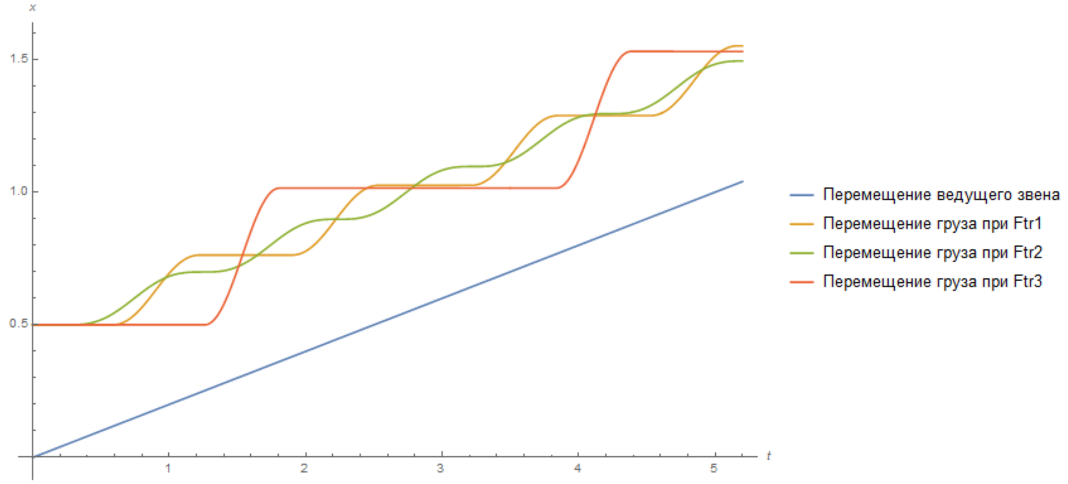
- чем меньше скорость, тем меньше период движения груза и больше период, когда груз стоит на месте;
- период колебания груза увеличивается при уменьшении скорости;
- амплитуда скорости груза возрастает с увеличением скорости ведущего звена.

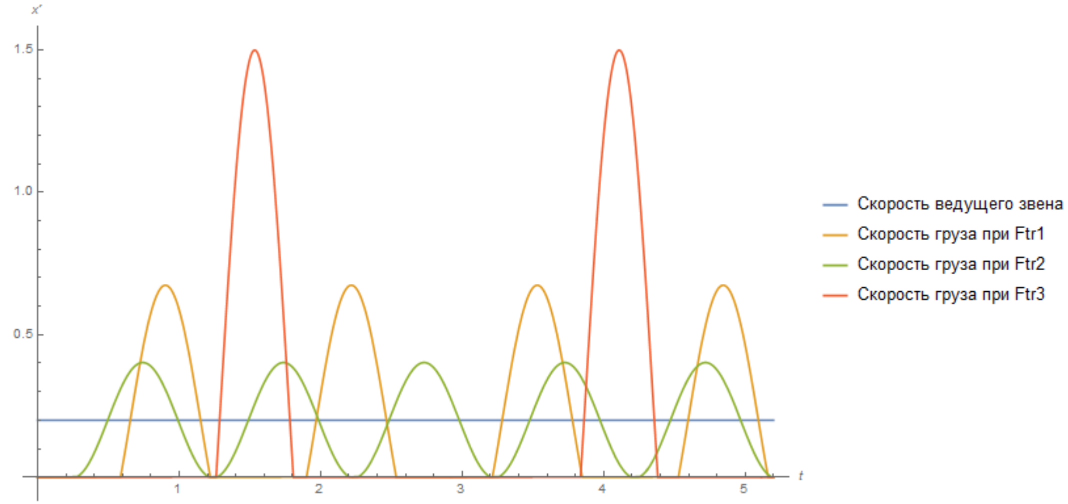
Влияние параметров силы трения

Рассмотрено 3 случая:

- F_{tr1} при коэффициентах: $K = 5000, L = 1500, M = 3500$;
- F_{tr2} при коэффициентах: $K = 500, L = 800, M = 1000$;
- F_{tr3} при коэффициентах: $K = 15000, L = 1500, M = 2500$.



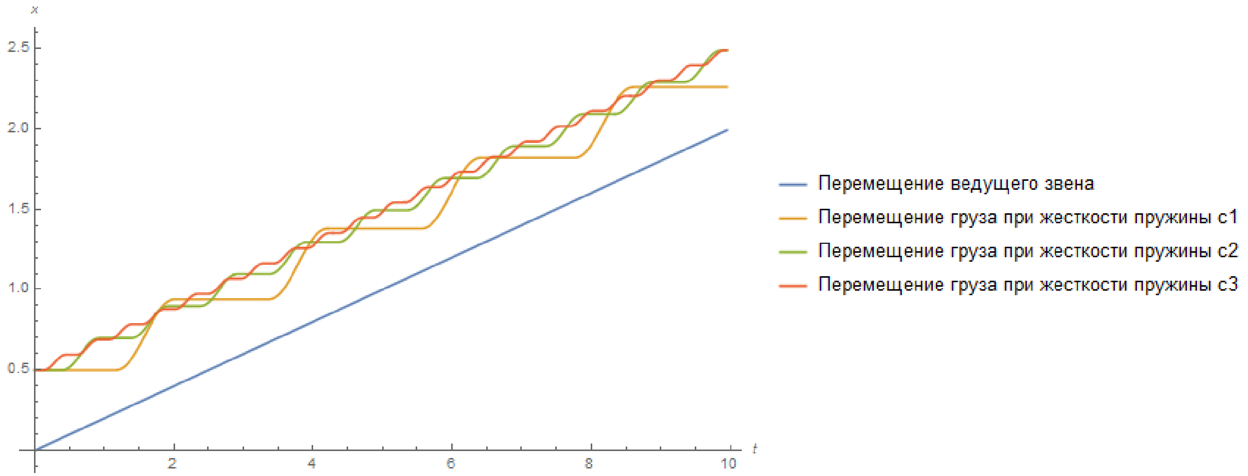




Выводы:

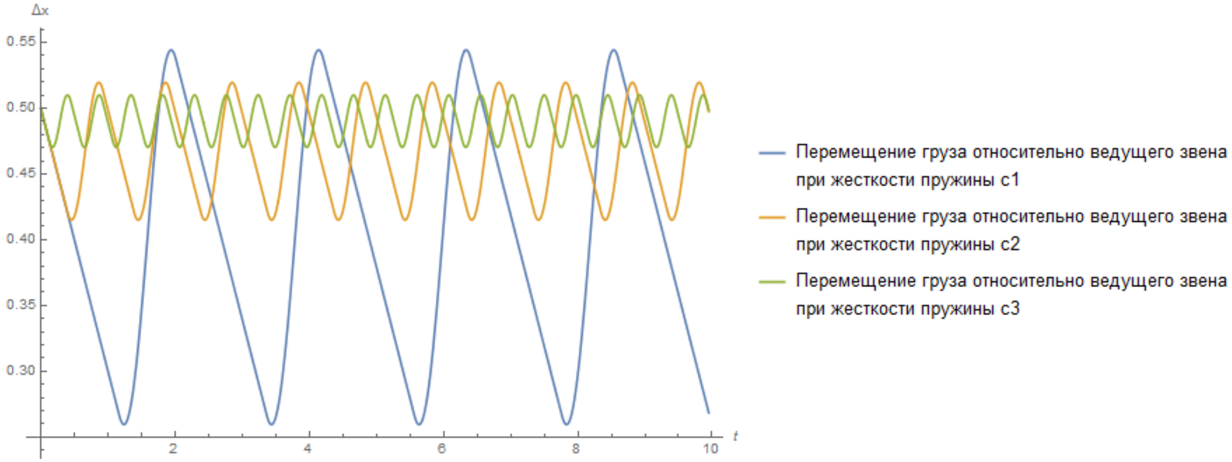
- система отзывается на возрастание силы трения покоя, большим периодом колебаний и большей амплитудой скорости.

Влияние жесткости пружин



Соотношение значений жесткости пружины

$$c_3 > c_2 > c_1$$

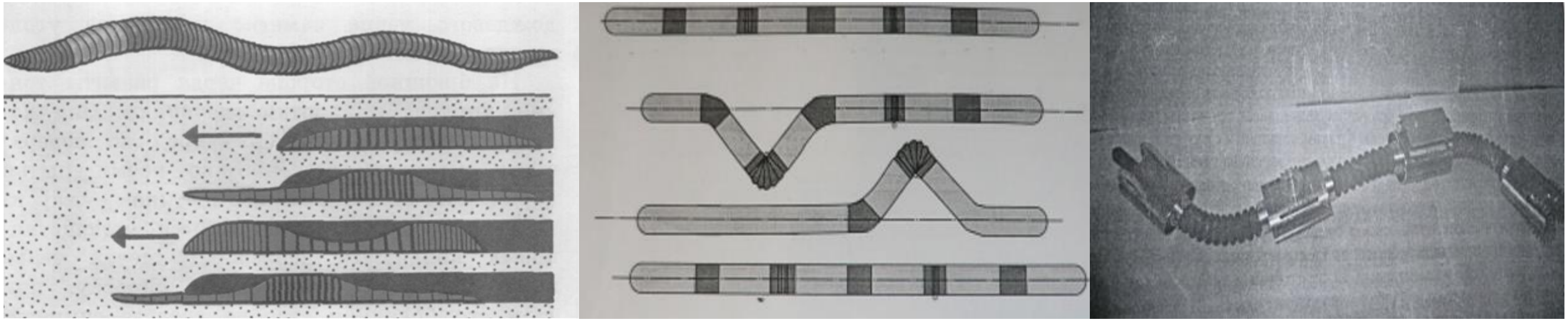


Выводы:

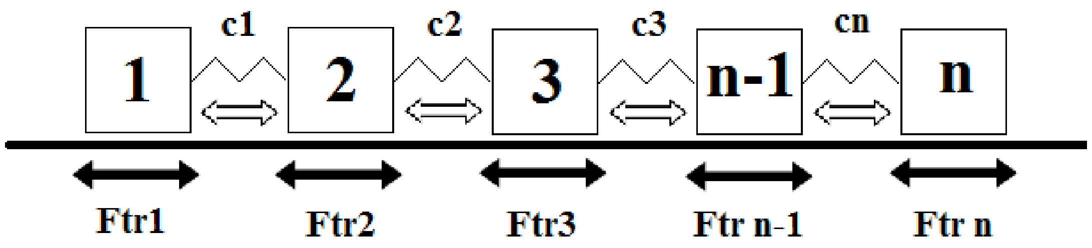
- чем меньше значение жесткости, тем с большей амплитудой перемещаются элементы механической системы;
- чем выше показатель жесткости, тем ниже период автоколебаний системы.

Бионические системы

Рассмотренная в магистерской работе математическая модель системы может быть использована в исследованиях возможных режимов движения некоторых живых организмов. Наиболее интересна и близка к расчетам задача о движении кольчатого червя.

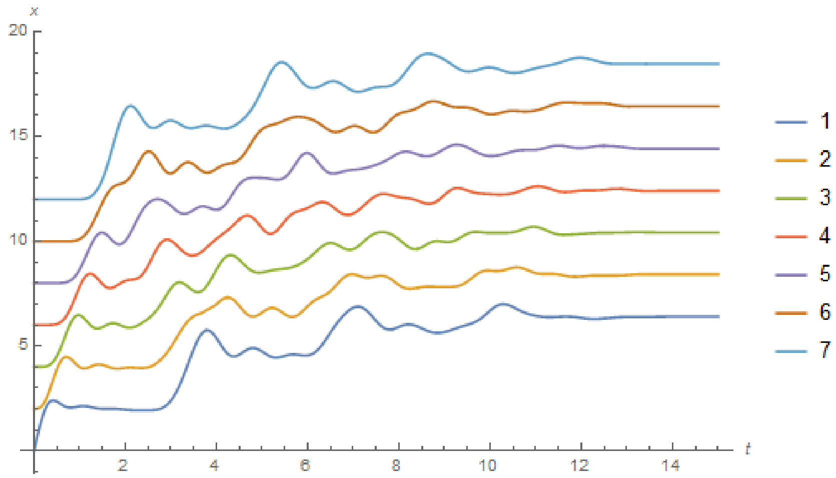


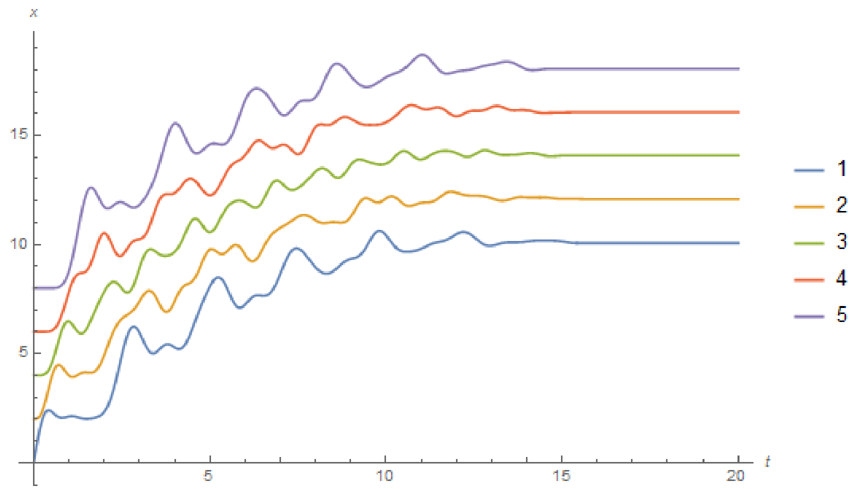
Основную роль в характерном для этих червей движении играет кожная мускулатура. Тело перистальтически сокращается. Укорачивающийся участок становится толще, что увеличивает силу трения на данном участке, удлиняющийся – тоньше, что уменьшает воздействие силы трения системы.

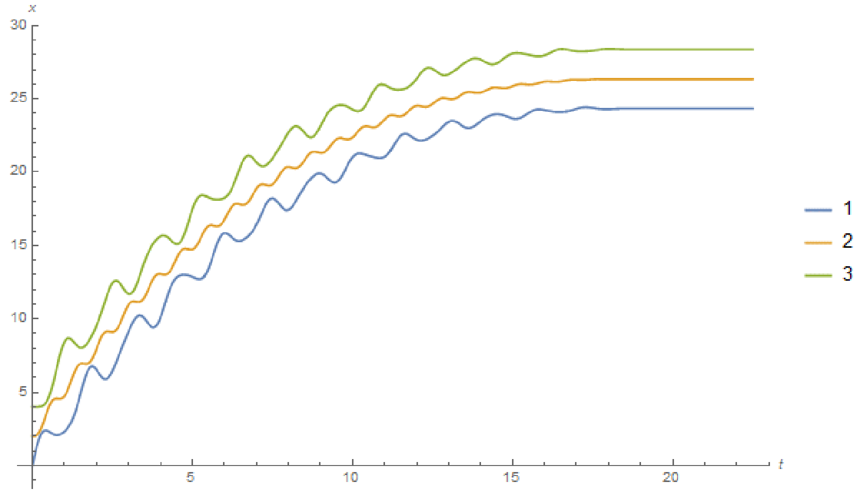


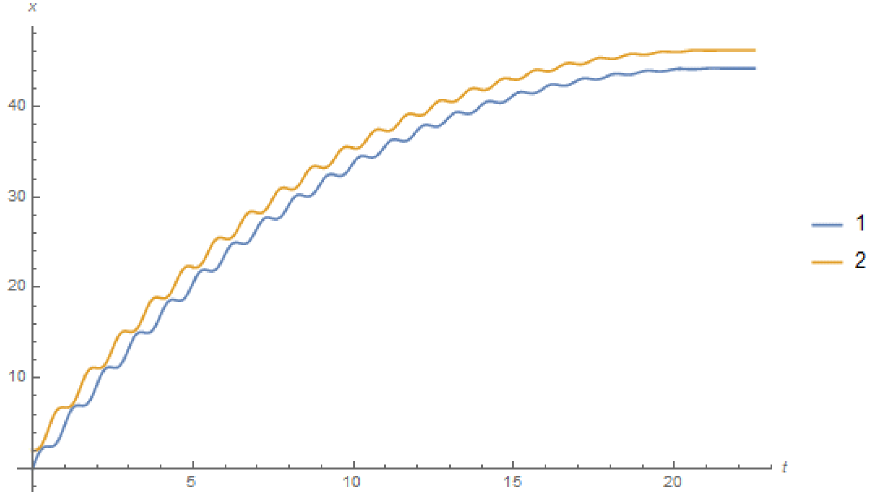
Влияние количества звеньев

Для исследования размера системы была взята прежняя модель за исключением отсутствия у 1 элемента системы постоянной скорости. Вместо этого задано условие наличия скорости в нулевой момент времени у 1 звена механической системы. В общем модель состоит из n количества элементов ($n = 2,3,4,5,7,9$).







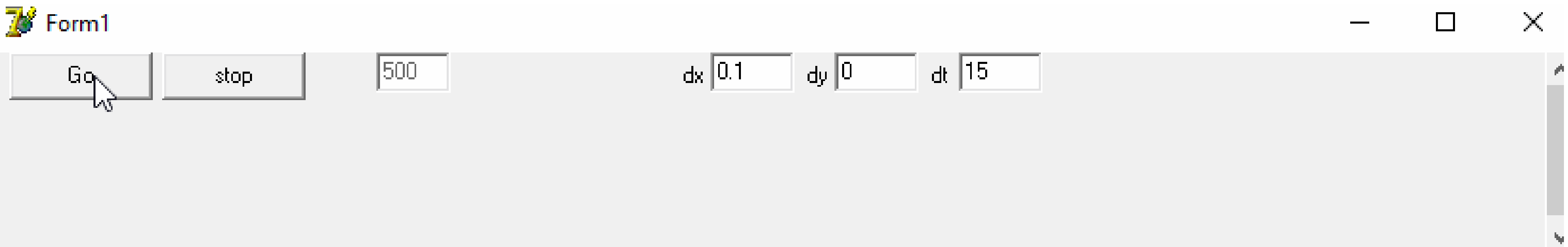


Выводы:

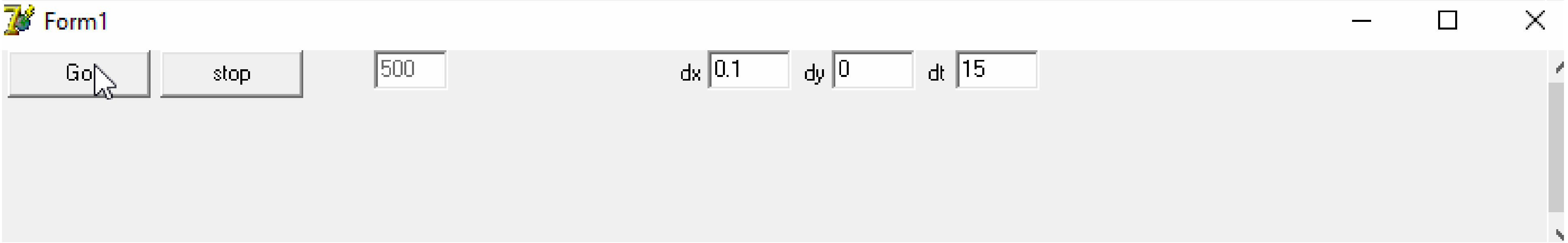
- при увеличении количества звеньев, система продвигается на меньший промежуток;
- движение происходит до тех пор, пока колебания не затухают из-за воздействия силы трения.

Визуализация движения

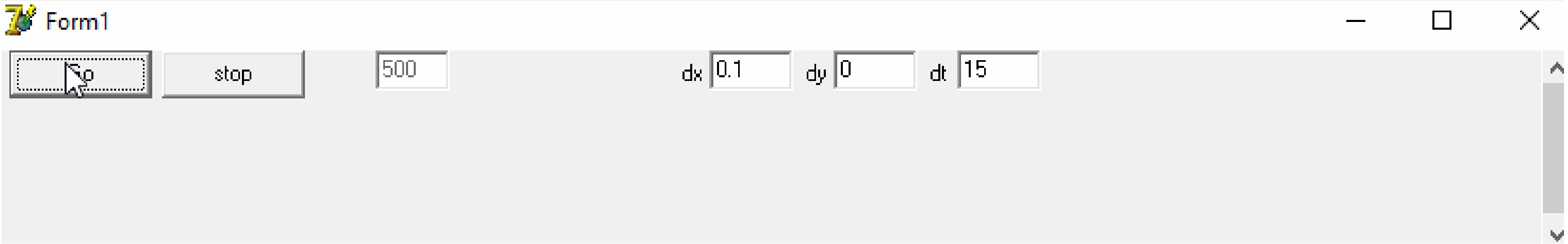
7 звеньев



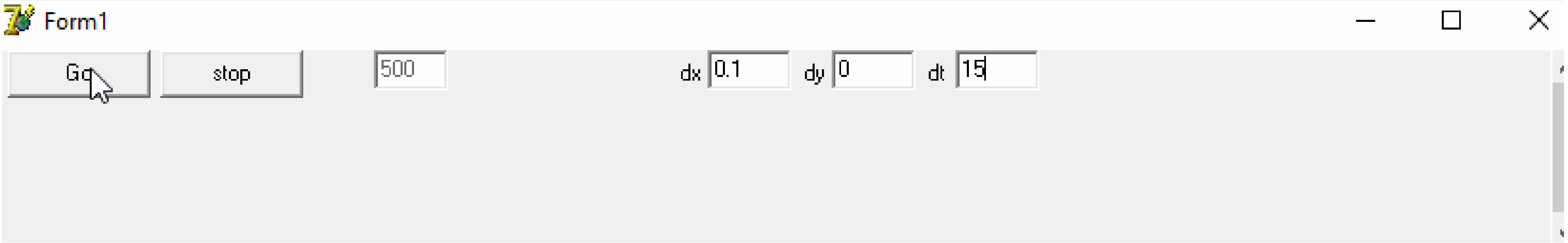
5 звеньев



3 звена



2 звена



Основные результаты

- Успешно описана математическая модель движения дискретной системы, состоящей из цепи твердых тел, соединенных упругими связями. Математическое моделирование выполнялось в программном пакете Wolfram Mathematica
- Найдено оптимальное представление силы трения
- Успешно проведена проверка работоспособности модели на основе качественного сравнения с аналитическим решением
- Произведено исследование влияния различных параметров на характер движения системы
- Создан алгоритм визуализации процесса движения системы в программном пакете на языке Delphi

Спасибо за внимание!