

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН  
\_\_\_\_\_ А. М. Кривцов  
« \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

## **ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

### **Разработка численного метода для вычисления напряжений в абсолютно твердом теле**

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.03.03\_01 Механика и математическое моделирование сред с  
микроструктурой

Выполнил

студент гр. 5030103/90101

Литвинова Я. И.

Руководитель

Доцент ВШТМиМФ, к. ф.-м. н.

Фролова К. П.

Санкт-Петербург  
2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

**Физико-механический институт**

**Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**

студенту Литвиновой Ярославе Игоревне, гр. 5030103/90101

1. Тема работы: Разработка численного метода для вычисления напряжений в абсолютно твердом теле.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: справочная литература, актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): разработка численного метода решения задачи, программная реализация алгоритма, обработка и верификация результатов.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: отсутствуют.
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР: \_\_\_\_\_ К. П. Фролова, доцент ВШТМиМФ, к. ф-м. н.

Задание принял к исполнению: 27.02.2023

Студент: \_\_\_\_\_ Я. И. Литвинова

## РЕФЕРАТ

На 40 с., 13 рисунков

АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО, УПРУГОЕ ТЕЛО, НАПРЯЖЕНИЕ В АБСОЛЮТНО ТВЕДОМ ТЕЛЕ, ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Данная работа посвящена разработке численного метода для вычисления напряжений в абсолютно твердом теле с использованием языка программирования C++. Рассмотрены теоретические аспекты, связанные с моделью абсолютно твердого тела и вычислением напряжений в нем. Разработанный метод основан на конечно-элементном анализе и учете законов механики Ньютона и Эйлера. Для их определения решается стационарная задача нагружения абсолютно твердого тела. В процессе решения в модели материала учитывается эффект несжимаемости. Поля напряжений получены также для упругого материала. В работе произведены численные эксперименты. Результаты вычислений для абсолютно твердого тела сравниваются с результатами вычислений для упругого тела.

Реализация алгоритма произведена на языке программирования C++ с использованием таких инструментов, как собственноручно написанная библиотека для работы с матрицами и векторами, а также Boost для обеспечения производительности и портативности. Результаты тестирования показали, что метод предлагает точные и стабильные результаты, что подтверждает его пригодность для использования в приложениях, связанных с механикой твердых тел.

## THE ABSTRACT

On 40 p., 13 figures

ABSOLUTELY SOLID, ELASTIC BODY, TENSION IN AN ABSOLUTELY SOLID BODY, NUMERICAL METHOD

This work is devoted to the development of a numerical method for calculating stresses in an absolutely rigid body using the C++ programming language. The developed method is based on finite element analysis and taking into account the laws of mechanics of Newton and Euler. To determine them, the stationary problem of loading an absolutely rigid body is solved. During the solution process, the effect of incompressibility is taken into account in the material model. Stress fields are also obtained for an elastic material. Numerical experiments were carried out in the work. The results of calculations for an absolutely rigid body are compared with the results of calculations for an elastic body.

The algorithm is implemented in the C++ programming language using tools such as a handwritten library for working with matrices and

vectors, as well as Boost for performance and portability. The test results showed that the method offers accurate and consistent results, which confirms its suitability for use in applications related to solid mechanics.

# Содержание

|  |    |
|--|----|
| <b>Введение</b> .....  | 5  |
| <b>Глава 1. Теоретическая база</b> .....                             | 6  |
| 1.1 История развития модели абсолютно твердого тела в механике ..... | 6  |
| 1.2 Анализ статей по теме исследования.....                          | 7  |
| 1.3 Актуальность проблемы.....                                       | 9  |
| 1.4 Постановка задачи .....  | 10 |
| 1.5 Обезразмеривание .....   | 11 |
| 1.6 Определение несжимаемости .....                                  | 12 |
| <b>Глава 2. Численный метод</b> .....                                | 15 |
| 2.1 Описание метода .....  | 15 |
| 2.2 Алгоритм для абсолютно твердого тела.....                        | 16 |
| 2.3 Алгоритм для упругого тела .....                                 | 17 |
| 2.4 Метод конечных объемов .....                                     | 18 |
| 2.4 Расчетная сетка.....   | 20 |
| 2.5 Численный метод для 3д области.....                              | 22 |
| <b>Глава 3. Программная реализация</b> .....                         | 25 |
| <b>Глава 4. Численные эксперименты</b> .....                         | 28 |
| 4.1 Плоский квадрат.....   | 28 |
| 4.2 Двутавр.....   | 29 |
| 4.3 Швеллер .....  | 31 |
| 4.4 Прямоугольный канал .....  | 33 |
| 4.5 Анализ результатов.....  | 34 |
| <b>Заключение</b> .....  | 37 |
| <b>Список использованной литературы</b> .....                        | 38 |

## Введение

Абсолютно твердое тело — модельное понятие классической механики, обозначающее совокупность материальных точек, расстояния между которыми сохраняются в процессе любых движений, совершаемых этим телом. Иными словами, абсолютно твердое тело не только не меняет своей формы, но и сохраняет неизменным распределение массы внутри.

Модель абсолютно твердого тела используется в аналитической механике для решения динамических задач. Однако аналитическая механика не позволяет заглянуть внутрь твердого тела и рассмотреть задачу нахождения напряжений. С другой стороны, можно обратиться к теории упругости, которая детально изучает напряжения в упругих телах. Поскольку данная модель далека от реальных материалов почти никто не задавался вопросом о существовании и виде напряжений в абсолютно твердом теле с точки зрения теории упругости.

Традиционно считается, что для жесткого материала напряжение не определено. Эта идея подтверждается наблюдением, что для определения движения твердого тела не требуется никакого определяющего отношения, связывающего напряжение с движением, в отличие от того, что происходит для деформируемых сред.

Цель данной работы — рассмотреть проблему нахождения полей напряжений в абсолютно твердом теле с точки зрения численного моделирования.

Данная цель определяет основные задачи исследования:

1. Изучить ранее написанные статьи по теме исследования
2. Определить теоретическую базу будущих вычислений
3. Разработать численный метод для решения задачи
4. Написать код программы
5. Провести численные эксперименты
6. Проанализировать полученные результаты

## Глава 1. Теоретическая база

Модель абсолютно твердого тела была введена в научный оборот уже довольно давно, в XIX веке. Она была разработана в рамках классической механики. Классическая механика — это раздел физики, который изучает движение тел и взаимодействие между ними. Она описывает законы, которым подчиняются материальные объекты в макроскопическом мире (то есть в обычных условиях, где размеры тел значительно превышают размеры атомов и молекул), а также их движение и изменение состояния. Классическая механика включает в себя такие темы, как кинематика (описание движения тел без учета причин его возникновения), динамика (изучение причин возникновения движения и его изменения), статика (изучение равновесия тел) и теорию колебаний и волн. В общем, классическая механика является основой для изучения всех других разделов физики, таких как электродинамика, оптика, термодинамика и квантовая механика.

### 1.1 История развития модели абсолютно твердого тела в механике

Модель абсолютно твердого тела является одной из основных концепций в классической механике и её развитие можно проследить на протяжении нескольких веков, начиная с работ великих ученых, таких как Ньютон и Эйлер.

1. Эпоха Ньютона (17 век): Понятие абсолютно твердого тела введено в механику Исааком Ньютоном. В своей работе "Математические начала натуральной философии" (1687 г.) Ньютон ввел основные понятия и законы классической механики, включая законы движения и закон всемирного тяготения. Он представил абсолютно твердое тело как систему точек, которые перемещаются вместе без изменения расстояний между ними.

2. Эпоха Эйлера (18 век): В 18 веке Леонард Эйлер сделал значительный вклад в развитие концепции твердого тела, в частности, ввел уравнения Эйлера

для движения твердого тела [3]. Эти уравнения описывают вращательное движение твердого тела без внешних сил.

3. 19–20 век: в течение 19 и 20 веков было проделано много работы по дальнейшему изучению движения твердых тел. Это включает в себя работу таких ученых, как Пуанкаре, который развивал теорию трехмерного вращения, и Кориолис, который ввел важные понятия, такие как силы Кориолиса, которые влияют на движение вращающихся систем.

4. Современная механика (20–21 век): В более поздние периоды вводятся более сложные модели, включающие эффекты, такие как упругость и пластичность. Это позволяет применять модель твердого тела к более широкому кругу задач, включая многие из тех, что возникают в современной технике.

Важно помнить, что модель абсолютно твердого тела — это идеализация. В реальности все тела подвержены некоторым деформациям при приложении сил. Тем не менее, для многих задач в механике это хорошее приближение.

## 1.2 Анализ статей по теме исследования

Существуют несколько статей, посвященных изучению твердого тела с точки зрения теории упругости. Вопрос о предельном переходе от упругого к твердому телу изучался в статьях Г. Гриолли [15] и Д. Ройер-Карфагни [13].

Первым вопрос о возможности существования напряжений в абсолютно твердом теле поднял Г. Гриолли в статье «On the stress in rigid bodies» в журнале *Meccanica* в 1983 году. Автор рассматривает различные типы напряжений, возникающие в твердых телах при их деформациях, и анализирует их свойства и характеристики. Особое внимание уделяется исследованию напряжений, возникающих в результате воздействия внешних сил на твердое тело, а также их распределению внутри тела. Статья представляет интерес для специалистов в области механики и материаловедения, а также для всех, кто интересуется принципами работы твердых тел. Г. Гриолли смог записать систему уравнений, позволяющую определить напряжения для абсолютно твердого тела,

находящегося в равновесии. Данная система уравнений совпала с уравнениями, полученными из предельных и граничных уравнений линейной упругости.

Позднее в 2004 году Роджер Фосдик и Джианни Ройер-Карфагни опубликовали статью «Stress as a constraint reaction in rigid bodies» в журнале "Journal of Elasticity", где также попытались ответить на вопрос: могут ли существовать напряжения в модели абсолютно твердого тела? В статье объясняется причина возникновения «псевдо-напряжения» в твердых телах в ответ на ограничение на движение частиц тела. Авторы представляют новую математическую модель, которая позволяет определить напряжение в твердых телах как реакцию на наложенные ограничения на их движение. Р. Фосдик и Д. Ройер-Карфагни также обсуждают различные применения созданной модели в инженерии и физике, включая способы определения механических свойств материалов и проектирования структурных элементов. Основная концепция статьи: несмотря на то, что принципиально и, конечно, философски, концепция жесткого тела отличается от концепции упругого тела, можно представить развитие первого как предел из последовательности последнего, поскольку подходящий параметр жесткости увеличивается.

Поиск в Интернете ответа на вопрос: «Есть ли и если есть, то можно ли найти напряжения в абсолютно твердом теле?» дает два варианта ответов. Первый: «То, о чем вы спрашиваете, не является физическим. В абсолютно твердом теле не может быть никаких деформаций, поэтому напряжения в нем также отсутствуют. Это следует из определения модели абсолютно твердого тела, которое описывает твердое тело как идеальный объект, не подверженный никаким деформациям и сохраняющий свою форму и размеры при любых воздействиях.» А второй: «Если жесткость бесконечна, а деформация равна нулю, то напряжение математически неопределенно.»

### 1.3 Актуальность проблемы

Одним из возможных применений усовершенствованной модели абсолютно твердого тела является решение задач, посвященных изучению напряжений в резиноподобных средах. Поиск напряжений в резиноподобных средах — это сложная задача, связанная с теорией упругости и механикой деформируемого твердого тела. Резиноподобные материалы, такие как эластомеры, отличаются от обычных упругих материалов тем, что они могут значительно деформироваться под действием нагрузки и восстанавливать свою форму после снятия нагрузки. Их поведение описывается нелинейной теорией упругости [16], [20].

Процесс нахождения напряжений в резиноподобных средах включает в себя следующие этапы:

1. Определение свойств материала: для начала нужно знать основные свойства материала, такие как модуль упругости, коэффициент Пуассона, предел текучести и другие параметры, которые влияют на его поведение под нагрузкой.

2. Формулировка математической модели: Следующим шагом является построение математической модели, которая описывает поведение материала. Для резиноподобных сред часто используются модели гиперупругости или модели Mooney-Rivlin и Neo-Hookean, которые могут описать их нелинейное поведение.

3. Решение уравнений: после формулировки модели следующим шагом является решение соответствующих дифференциальных уравнений. Это может быть сложной задачей, особенно в трехмерном случае, и часто требует использования численных методов, таких как метод конечных элементов.

4. Проверка результатов: после получения решения следует проверить его на соответствие физической реальности и провести сравнение с экспериментальными данными, если таковые имеются.

Однако важно помнить, что поведение резиноподобных материалов может значительно меняться в зависимости от условий эксплуатации, таких как температура, влажность и скорость нагружения. Поэтому для наиболее точного

предсказания поведения этих материалов может потребоваться более сложная модель, учитывающая эти факторы.

Эластомеры или резиноподобные материалы обычно используются в тех случаях, когда материал должен легко деформироваться. Этот материал демонстрирует очень нелинейное поведение, характеризующееся гиперупругой деформируемостью и несжимаемостью. Изучение резиноподобных тел представляет большой практический интерес, поэтому разработано множество различных методов нахождения напряжений и деформаций в таких телах. Моделированию стационарного и нестационарного поведения эластомеров посвящена обширная литература.

#### 1.4 Постановка задачи

В данной работе будет рассмотрена стационарная задача нагружения абсолютно твердого тела, находящегося в положении равновесия.

Основным уравнением, применяемым для решения данной задачи, является уравнение баланса количества движения – фундаментальный закон механики. Рассмотрим интегральную форму баланса количества движения:

$$\int_V \left[ \rho \frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] dV = 0,$$

где  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $\mathbf{f}$  – вектор объемных сил,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений.

В рассматриваемой задаче можно пренебречь воздействием массовых сил (силы тяжести) и обнулить второе слагаемое. Первое слагаемое также обратится в ноль из-за стационарности задачи. Итоговое выражение для баланса количества движения в локальной форме:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{1.1}$$

В общем случае тензор напряжений содержит 9 неизвестных компонент. Можно сделать предположение о симметрии тензора напряжений, что вытекает из общих законов сохранения. Таким образом останется определить 6 неизвестных компонент. Однако баланс количества движения позволяет найти не более трех неизвестных. Необходимо дополнить постановку задачи уравнениями состояния. Уравнения состояния — это некие дополнительные уравнения, которые связывают между собой неизвестные величины, входящие в систему. Основное отличие определяющих соотношений от фундаментальных законов состоит в следующем: уравнения состояния зависят от конкретного типа рассматриваемого материала.

Основным определяющим соотношением для упругих тел является закон Гука. Это физический закон, устанавливающий связь между силой, действующей на упругое тело, и изменением его формы.

Будем рассматривать систему (1.2):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \\ p = -K(\nabla \cdot \mathbf{u}), \\ \mathbf{S} = G \left( \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla - \frac{2}{3} \mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right), \end{cases} \quad (1.2)$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$ ;  $\mathbf{u}$  — смещение.

### 1.5 Обезразмеривание

Важнейшим этапом моделирования является разделение переменных, с помощью которых строится модель, по степени важности влияния их изменений на выходные характеристики модели объекта. Этот этап способствует пониманию главных свойств и закономерностей существования объекта моделирования. В частности, для понимания характера движения динамических объектов очень полезен прием, называемый обезразмериванием [7]. Идея обезразмеривания заключается в переходе от абсолютных значений расстояний,

скоростей, времени и т. д. к относительным, причем отношения строятся к величинам, типичным для данной ситуации. Важнейшая роль обезразмеривания - установление законов подобия.

Пусть напряжение, заданное на части внешней границы тела —  $\sigma^*$ . Давайте представим шкалы следующим образом:  $[L]$  — длина,  $[U]$  — смещение и  $[|\sigma^*|]$  — напряжение. Подставляя шкалы в (1.2), получаются безразмерные уравнения:

$$\begin{cases} \nabla \cdot [|\sigma^*|] = 0, \\ p = -\frac{K[U]}{[L][|\sigma^*|]} (\nabla \cdot \mathbf{u}), \\ \mathbf{S} = \frac{G[U]}{[L][|\sigma^*|]} \left( \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla - \frac{2}{3} \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right), \end{cases} \quad (1.3)$$

Пусть  $[U] = \frac{[L][|\sigma^*|]}{K}$ , тогда система (1.3) примет вид:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma = 0, \\ p = -(\nabla \cdot \mathbf{u}), \\ \mathbf{S} = \frac{G}{K} \left( \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla - \frac{2}{3} \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right). \end{cases} \quad (1.4)$$

## 1.6 Определение несжимаемости

В механике сплошных сред несжимаемость определяется как свойство среды, при котором ее плотность остается постоянной при изменении давления. Это означает, что объем рассматриваемой среды не изменяется при изменении давления на нее. Несжимаемость является аппроксимацией реального поведения среды, так как на самом деле все среды сжимаемы в той или иной степени.

Математически несжимаемость выражается уравнением неразрывности, которое гласит, что произведение плотности на скорость ее движения через любую поверхность, ограничивающую жидкость, остается постоянным во

времени [5]. Данное уравнение вытекает из закона баланса массы:  $\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0$ . Поскольку  $\rho = \text{const}$  или  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , следовательно, выражение закона баланса массы упрощается до уравнения неразрывности:  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ .

Физически же несжимаемость обычно принимается в качестве приближения для жидкостей со значительно меньшим коэффициентом сжимаемости, чем у газов.

В гидродинамике несжимаемость определяется как свойство жидкости, при котором ее плотность остается постоянной при изменении давления и температуры. Это означает, что объем жидкости не изменяется при изменении давления и температуры на нее. В гидродинамике несжимаемость является одним из основных приближений, которое используется для описания движения жидкостей. Математически несжимаемость выражается уравнением неразрывности, которое гласит, что  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . В реальности жидкости не являются абсолютно несжимаемыми, так как даже при малых изменениях давления и температуры происходит некоторое изменение плотности. Однако для большинства задач в гидродинамике можно считать, что жидкость является несжимаемой, если изменение плотности не превышает 5–10% от начального значения.

Для несжимаемого упругого тела условие  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  также должно выполняться.

Таким образом, система (1.4) для несжимаемого упругого тела может быть переписана в виде:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \boldsymbol{S} = \frac{G}{K} \left( \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla - \frac{2}{3} \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right). \end{cases} \quad (1.5)$$

Продолжим этот логический путь и введем второе уравнение несжимаемости. Тогда система для абсолютно твердого тела будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla - \frac{2}{3} I(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0. \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Таким образом, в дополнение ко второму уравнению условия несжимаемости (1.6б) в третье уравнение вводится условие, связанное с неизменной формой тела (1.6в).

## Глава 2. Численный метод

Для решения задачи был использован модифицированный метод установления. Метод установления является простым и надежным методом, так как он дает приближенное решение, которое сходится к точному решению стационарной задачи при любом начальном условии.

### 2.1 Описание метода

Метод установления используется для решения стационарных задач. При его использовании для нахождения решения строится нестационарный процесс по псевдо-времени, решение этого процесса с определенной итерации оказывается независимым от него и стремится к решению исходной стационарной задачи.

Большинство известных методов установления описываются уравнениями вида

$$A_0 \left( x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} + A_1 \left( x, \frac{dx}{dt}, \text{grad}\Phi(x) \right) = 0$$

или

$$B_0 \left( x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{d^2x}{dt^2} + B_1 \left( x, \frac{dx}{dt}, \text{grad}\Phi(x) \right) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_0(X, 0) &\neq 0, & A_1(X, 0, 0) &= 0 \\ B_0(X, 0) &\neq 0, & B_1(X, 0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

и выполнены условия диссипативности, обеспечивающие сходимость к точке экстремума  $X$ . Можно обратить операторы  $A_0, B_0$  и преобразовать эти уравнения к виду, где  $A_0, B_0$  – тождественные операторы. Однако исходная форма записи часто практически удобнее.

## 2.2 Алгоритм для абсолютно твердого тела

Введем переменную псевдо-времени  $\tau$  и преобразуем правые части системы.

Система (1.6) примет вид:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^n &= 0 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta \tau} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^n &= 0 = \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta \tau} \\ \nabla \mathbf{u}^n + \mathbf{u}^n \nabla - \frac{2}{3} \mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{u}^n) &= 0 = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} = \frac{\mathbf{S}^{n+1} - \mathbf{S}^n}{\Delta \tau}\end{aligned}$$

Для ускорения расчета преобразуем первое уравнение системы. Будем добиваться стремления к нулю не производной, а самой итерационной величины  $\mathbf{u}^{n+1}$ . Таким образом алгоритм не прекратится пока перемещения не будут равны нулю. Первое уравнение системы после модификации:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^n = 0 = \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n+1}$$

Тогда итоговая система для численного метода будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^n &= \mathbf{u}^{n+1} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^n &= \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta \tau} \\ \nabla \mathbf{u}^n + \mathbf{u}^n \nabla - \frac{2}{3} \mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{u}^n) &= \frac{\mathbf{S}^{n+1} - \mathbf{S}^n}{\Delta \tau}\end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть  $\mathbf{u}^0$ ,  $p^0$ ,  $\mathbf{S}^0$  являются первоначальными оценками величин  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathbf{S}$  для  $k = 0$ , где  $k$  – число итераций.

Распишем пошагово численный алгоритм.

Первый шаг:

$$\xi_u^k = -\tau_u (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^k)$$

$$\begin{aligned}\xi_p^k &= -\tau_p (\nabla \cdot \mathbf{u}^k), \\ \xi_S^k &= \tau_S (\nabla \mathbf{u}^k + \mathbf{u}^k \nabla - 2/3 I (\nabla \cdot \mathbf{u}^k)),\end{aligned}$$

Если выполняется условие выхода (2.2), то  $\mathbf{u}^k, p^k, \mathbf{S}^k$  считаются решением системы (2.1) и действие алгоритма прерывается. Если неравенство не выполняется, то переходим ко второму шагу.

$$\max \left( \frac{|\xi_u^k|}{\tau_u}, \frac{|\xi_p^k|}{\tau_p}, \frac{|\xi_S^k|}{\tau_S} \right) < \varepsilon \quad (2.2)$$

Второй шаг:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{k+1} &= \xi_u^k, \\ p^{k+1} &= p^k + \xi_p^k, \\ \mathbf{S}^{k+1} &= \mathbf{S}^k + \xi_S^k,\end{aligned}$$

После выполнение второго шага необходимо заново начать алгоритм.

Здесь  $\tau_u, \tau_S$  и  $\tau_p$  являются итерационными параметрами;  $\varepsilon$  — это маленький параметр. Численные расчеты проводились с удвоенной точностью. Значение  $\varepsilon$  было выбрано равным  $10^{16} \dots 10^{18}$  или меньше.

### 2.3 Алгоритм для упругого тела

Для поиска напряжений в упругом теле применим метод установления к первому уравнению системы (1.4). Тогда численный алгоритм будет выглядеть следующим образом:

Первый шаг:

$$\begin{aligned}\xi_u^k &= -\tau (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^k) \\ \xi_p^k &= \nabla \cdot \mathbf{u}^k, \\ \xi_S^k &= \frac{G}{K} (\nabla \mathbf{u}^k + \mathbf{u}^k \nabla - 2/3 I (\nabla \cdot \mathbf{u}^k)),\end{aligned}$$

Если выполняется условие выхода (2.3), то  $\mathbf{u}^k, p^k, \mathbf{S}^k$  считаются решением системы и действие алгоритма прерывается. Если неравенство не выполняется, то переходим ко второму шагу.

$$\max \left( \frac{|\xi_u^k|}{\tau} \right) < \varepsilon \quad (2.3)$$

Второй шаг:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{k+1} &= \mathbf{u}^k + \xi_u^k, \\ p^{k+1} &= \xi_p^k, \\ \mathbf{S}^{k+1} &= \xi_S^k. \end{aligned}$$

После выполнение второго шага необходимо заново начать алгоритм.

Здесь  $\tau$  является итерационным параметром.

#### 2.4 Метод конечных объемов

Метод конечных объёмов — численный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений в частных производных [10]. Он заключается в выборе замкнутой области рассматриваемой среды, для которой осуществляется поиск полей макроскопических величин, таких как скорость и давление. Метод конечных элементов отталкивается от интегральной формулировки законов сохранения.

Балансовые соотношения записываются для небольшого контрольного объема; их дискретный аналог получается суммированием по всем граням выделенного объема потоков массы, импульса и т. д., вычисленных по каким-либо квадратурным формулам. Поскольку интегральная формулировка законов сохранения не накладывает ограничений на форму контрольного объема. Метод конечных объемов пригоден для дискретизации уравнений и на структурированных, и на неструктурированных сетках, имеющих различную

форму ячеек, что полностью решает проблему сложной геометрии расчетной области.

Основные положения МКО удобно излагать, рассматривая «стандартное» уравнение баланса некой величины  $\varphi$  в контрольном объеме  $\Omega$ , ограниченном поверхностью  $S = \sum S_k$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} d\Omega + \sum_k \int_{S_k} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} ds = \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (2.4)$$

Здесь  $\mathbf{q} = \rho \mathbf{v} \varphi - \alpha \nabla \varphi$  – вектор плотности потока величины  $\varphi$ , включающий конвективную и диффузионную составляющие,  $Q$  – плотность распределения объемных источников,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность среды,  $\alpha$  – коэффициент диффузии. В качестве  $\varphi$  может фигурировать, например, внутренняя энергия текущей среды, концентрация примеси, кинетическая энергия турбулентности и т. д. В пределе, при стягивании объема в точку, можно на основании формулы Остроградского-Гаусса переписать это уравнение в дифференциальной форме:  $\partial \rho \varphi / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q$ . Отметим, что последняя, в силу более частого использования в литературе, иногда считается первичной, а интегральная формулировка закона сохранения (2.4) «выводится» из дифференциальной путем интегрирования по объему.

Согласно методу конечных элементов пространственная дискретизация задачи осуществляется путем разбиения расчетной области на небольшие соприкасающиеся объемы, для каждого из которых записывается балансовое соотношение (2.4). Внутри каждого контрольного объема находится одна (и только одна) точка «привязки» искомого сеточного решения. В большинстве разработок, ориентированных на решение трехмерных задач для областей сложной геометрии, в качестве контрольного объема используются ячейки расчетной сетки: узлы сетки располагаются в вершинах многогранника (для структурированных сеток – гексаэдра, см. рис.1), сеточные линии идут вдоль его

ребер, а значения искомых величин приписываются геометрическому центру ячейки.

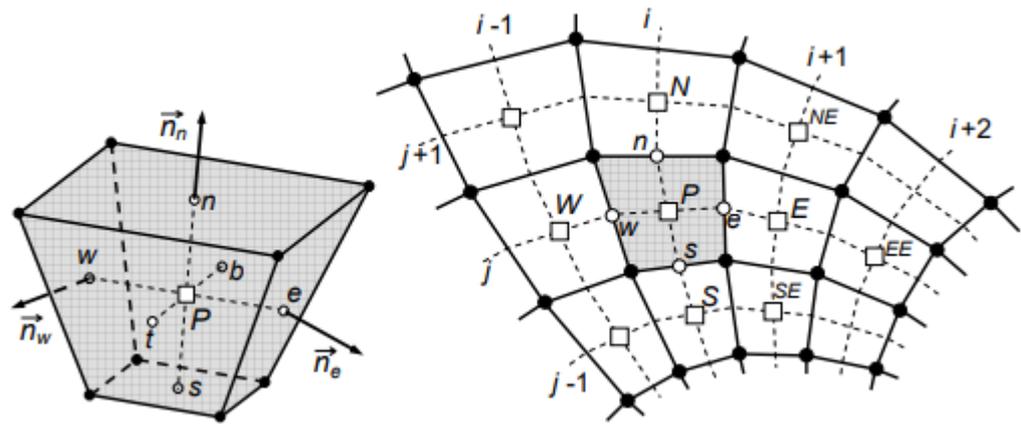


Рисунок 1 – структурированная сетка контрольных объемов с привязкой переменных к центру ячеек

Для получения дискретного аналога балансового уравнения в выбранной ячейке необходимо вычислить интегралы, входящие в (2.4), используя какие-либо квадратурные формулы. При этом крайне важно, чтобы для соприкасающихся ячеек поверхностный интеграл по их общей грани  $S_k$  вычислялся идентично. Последнее требование, легко реализуемое при составлении компьютерной программы, обеспечивает консервативность численной схемы, т. е. точное (в рамках принятого способа вычисления интегралов) соблюдение баланса  $\phi$  согласно уравнению (2.4) для всей области течения. Это свойство метода конечных объемов выгодно отличает его от метода конечных разностей и метода конечных элементов, в которых реализация строгой консервативности схемы является скорее исключением, чем правилом.

## 2.4 Расчетная сетка

В ходе работы рассматриваются случаи нагружения тел разной формы, однако принцип построения сетки для всех случаев одинаков. В предположении о дальнейшем развитии программы была выбрана треугольная сетка [6]. При построении данной сетки треугольники близки к равносторонним и сетка

строится равномерной. Существует несколько подходов к построению разностных схем на треугольных сетках: метод опорных операторов, метод конечных элементов, метод контрольного объема.

Для получения более точного решения расчет проводится на удвоенной сетке и в конце вычисляется среднее значение от результатов обеих сеток.

Пример наложения двух треугольных сеток на квадратную область представлен на рис. 2. Первая сетка выделена красным цветом, вторая – синим цветом.

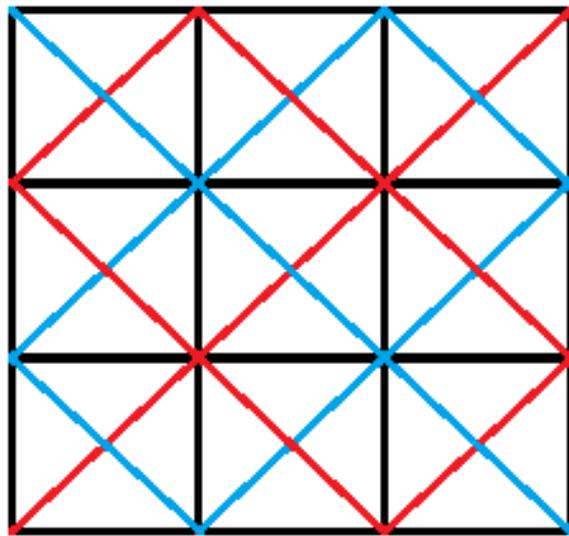


Рисунок 2 – удвоенная треугольная сетка

Таким образом квадратная ячейка будет состоять из четырех наложенных друг на друга треугольников (рис. 3). Найденное напряжение в треугольнике распределяется по узлам по правилу, описанному формулами (2.5), (2.6). К значению напряжения в узле прибавляется величина воздействия напряжения в ячейке на срединную площадку.

$$q \leftarrow = \Delta s \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.5)$$

$$q \downarrow = \Delta s \mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.6)$$

Здесь  $e_1, e_2$  – единичные вектора, направленные по нормали к срединным площадкам.

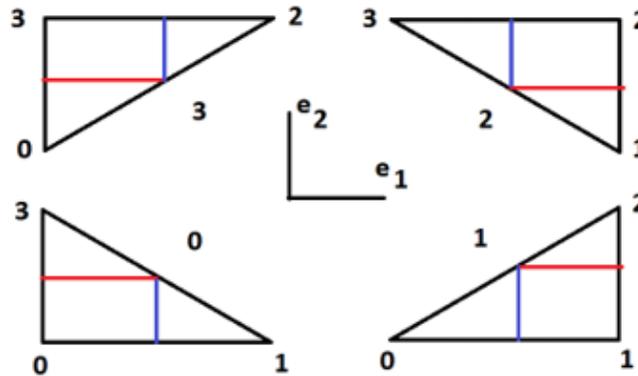


Рисунок 3 – квадратная ячейка

## 2.5 Численный метод для 3д области

Численные методы, описанные выше в разделах 2.2 и 2.3, подходят для описания плоских задач, однако при дальнейшей модернизации программы будет осуществлен расчет задачи нагружения абсолютно твердого тела на объемной сетке. В данном параграфе приведен неявный метод альтернативного направления.

Предположим, что мы решаем 3д постановку, заданную уравнениями:

$$\Lambda f + af + b = 0, \quad (2.7)$$

где  $f$  – неизвестный вектор;  $\Lambda$  – дифференциальный оператор;  $a, b$  – коэффициенты.

Пусть  $f^1 = f$  является первоначальной оценкой  $f$ .

Тогда первым шагом алгоритма будет нахождение невязки:

Шаг 1: 
$$\xi^k = \tau(\Lambda f^k + af^k + b),$$

Если выполняется условие выхода (2.8), то  $f^k$  считается решением системы (2.7) и действие алгоритма прерывается.

$$\max|\xi^k| < \varepsilon \quad (2.8)$$

Если неравенство не выполняется, то переходим к последующим шагам.

$$\text{Шаг 2:} \quad \frac{\xi^{k+\frac{1}{3}} - \xi^k}{\tau} = \Lambda_1 \xi^{k+\frac{1}{3}} + a_1 \xi^{k+\frac{1}{3}},$$

$$\text{Шаг 3:} \quad \frac{\xi^{k+\frac{2}{3}} - \xi^{k-\frac{1}{3}}}{\tau} = \Lambda_2 \xi^{k+\frac{2}{3}} + a_2 \xi^{k+\frac{2}{3}},$$

$$\text{Шаг 4:} \quad \frac{\xi^{k+1} - \xi^{k+\frac{2}{3}}}{\tau} = \Lambda_3 \xi^{k+1} + a_3 \xi^{k+1}$$

$$\text{Шаг 5:} \quad f^{k+1} = f^k + \xi^{k+1}$$

где  $k$  – число итераций;  $\max|\xi^k|$  – максимум  $\xi$  по всем узлам сетки;  $\varepsilon$  – малый параметр;  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  – дифференциальные операторы;  $a_1, a_2, a_3$  – коэффициенты;  $\tau$  – итерационный параметр.

Пусть  $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$  и  $a = a_1 + a_2 + a_3$ , тогда из шагов 2–4 следует:

$$\begin{cases} (I - \tau\Lambda_1 - \tau a_1)\xi^{k+\frac{1}{3}} = \xi^k \\ (I - \tau\Lambda_2 - \tau a_2)\xi^{k+\frac{2}{3}} = \xi^{k+\frac{1}{3}}, \\ (I - \tau\Lambda_3 - \tau a_3)\xi^{k+1} = \xi^{k+\frac{2}{3}} \end{cases}$$

или

$$(I - \tau\Lambda_1 - \tau a_1)(I - \tau\Lambda_2 - \tau a_2)(I - \tau\Lambda_3 - \tau a_3)\xi^{k+1} = \xi^k,$$

или

$$\xi^{k+1} - \xi^k = \tau(\Lambda\xi^{k+1} + a\xi^{k+1}) + \tau^2(\Lambda_1\Lambda_2 + \dots)\xi^{k+1}.$$

Тогда

$$\xi^{k+1} = \tau(\Lambda\xi^{k+1} + a\xi^{k+1} + b) + \tau^2(\Lambda_1\Lambda_2 + \dots)\xi^{k+1}. \quad (2.9)$$

Из уравнения (2,9) следует, что если данный метод имеет точность  $O(\tau^2)$ , то полная запись для итерационной схемы будет иметь вид:

$$\frac{f^{k+1} - f^k}{\tau} = \Lambda \xi^{k+1} + a \xi^{k+1} + b \quad (2.10)$$

### Глава 3. Программная реализация

Разработанный ранее алгоритм реализован с помощью языка программирования C++. C++ — это язык программирования общего назначения, который был разработан в 1983 году Бьярном Страуструпом. Он является расширением языка C и поддерживает объектно-ориентированное программирование, шаблоны и многопоточность. C++ используется для создания различных приложений, включая операционные системы, игры, браузеры, базы данных и многое другое. Данный язык отличается высокой скоростью и вычислительной мощностью, что выгодно при вычислениях с большим количеством итераций.

В работе активно использовались принципы объектно-ориентированного программирования [18], [19]. С его помощью осуществляется упорядоченное хранение данных с простым доступом к любому свойству класса, количество которых не ограничено. Таким образом нет необходимости создавать различные массивы для хранения данных о значениях перемещений, скоростей, напряжений и т. д. в каждом узле сетки. Также объектно-ориентированное программирование позволяет создавать классы, которые наследуют свойства и методы других классов, что упрощает создание новых классов и повторное использование кода.

Программа построена на двух классах:

- CNode – класс описывает узел сетки, его свойства хранят параметры узла, а также все узловые переменные – перемещения, скорости, силы и итерационные коэффициенты.
- CCell – класс описывает ячейку сетки, его свойства хранят указатели на узлы, принадлежащие данной ячейке, а также переменные, относящиеся к ячейке – давление.

Для ускорения расчетов и оптимизации программа использует написанную вручную библиотеку, описывающую все действия тензорной алгебры, такие как

скалярное и векторное умножения, нахождение инвариантов, сложение и перемножение тензоров, вычисление обратного тензора, состоящую из классов векторов и тензоров второго, третьего и четвертого рангов. С ее помощью многие вычисления ускоряются, так как не обязательно расписывать все уравнения по компонентной форме.

Программа состоит из множества функций. Основные функции, используемые в программе:

- *void CCell::GetForce()* – обеспечивает распределение сил между узлами в ячейках
- *void CCell::GetSigma* – вычисляет итоговое напряжение в ячейках
- *void CCell::SigmaFromCellToNodes()* – распределяет напряжения в узлы
- *void Calculus::PROGONKA()* – осуществляет метод прогонки
- *void Calculus::Paint()* – отвечает за отрисовку результатов

Для удобства работы с программой был создан простейший интерфейс. С помощью него пользователь может переключаться между различными численными экспериментами, моделями упругого и абсолютно твердого тела, менять параметры сетки и размеры расчетной области, величину и расположение внешней нагрузки. Также в программе предусмотрены поля для задания итерационных параметров  $\tau_u$ ,  $\tau_S$  и  $\tau_p$ .

Результаты расчета выводятся с помощью графика. На графике можно отобразить изолинии и цветовую шкалу для большей наглядности. Пример интерфейса программы представлен на рис. 4.

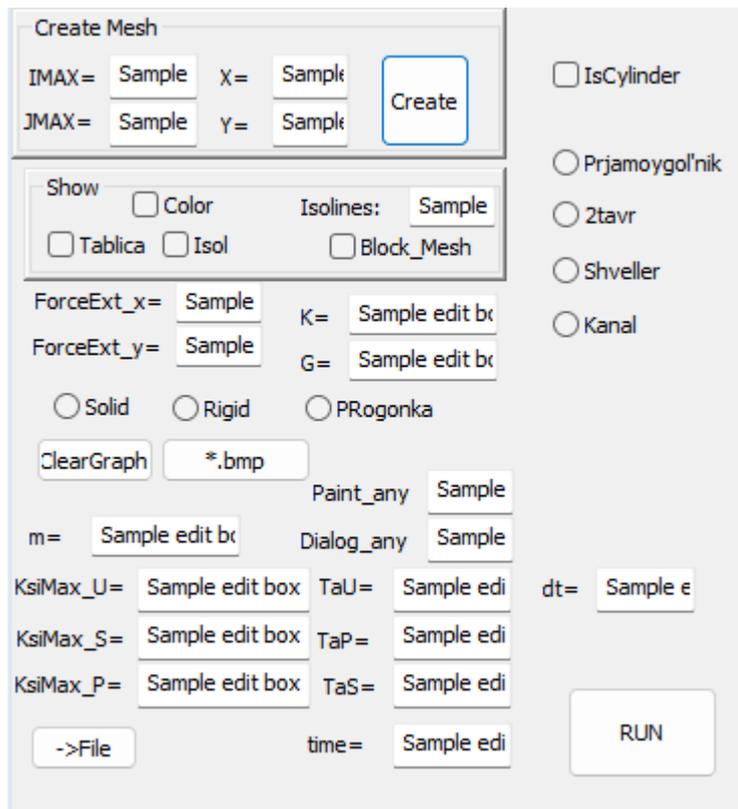


Рисунок 4 – интерфейс программы

Готовый результат можно сохранить как изображение в формате .bmp или же записать в текстовый файл.

## Глава 4. Численные эксперименты

Для анализа результатов было проведено четыре численных эксперимента, в которых сравнивались поля напряжений и перемещений упругого и абсолютно твердого тел одинаковой формы под воздействием одинаковых нагрузок.

### 4.1 Плоский квадрат

В качестве первого эксперимента (рис. 5) был выбран плоский квадрат размером  $1 \times 1$ , находящийся под давлением сжатия. Моделирование проводилось в декартовых координатах  $(x, y)$ . Квадрат крепится на жесткое основание с возможностью скольжения. Внешнее нормальное напряжение, равное 1, прикладывается к области длиной 0,5.

Численно найдено нетривиальное решение системы (1.6). Распределение давления и модуля смещения  $|\mathbf{u}|$  в твердом теле показаны на рис. 5. Как видно из рис. 5, смещения в любой точке вычислительной области имеют порядок не больше  $10^{-17}$ , что указывает на полное выполнение условий несжимаемости (1.6) (второе и третье уравнения). Значение  $\sim 5 \times 10^{-17}$  близко к нулю для диапазона числовых значений величин, участвующих в расчетах с двойной точностью.

Расчет проводился при следующих итерационных параметрах:  $\tau_u = 10^{-6}$ ,  $\tau_p = 2$ ,  $\tau_s = 1$ .

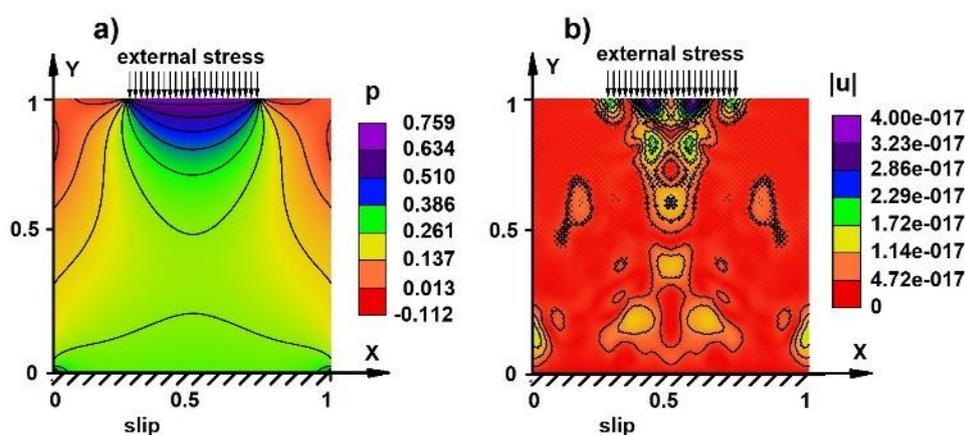


Рисунок 5 – поле напряжений и перемещений жесткого квадрата

Как видно из рис. 5 распределение давления в расчетной области внешне соответствует задаче о вдавливании штампа в упругое основание, за исключением того, что на рис. 5 смещения в расчётной области отсутствуют.

На рис. 6 показано распределение давления и модуля смещения  $|\mathbf{u}|$  в пределах сплошного квадрата для  $\frac{G}{K} = 0,5$ . Расчет проводился при следующих итерационных параметрах:  $\tau = 10^{-6}$ ,  $K = 2$ ,  $G = 1$ .

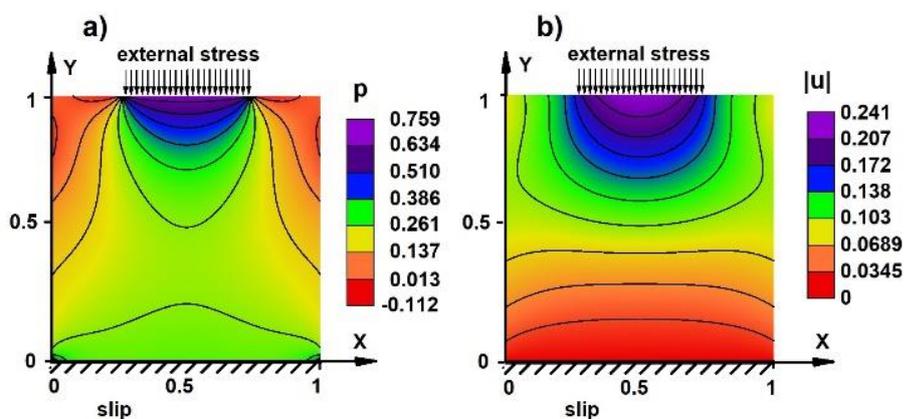


Рисунок 6 – поле напряжений и перемещений упругого квадрата

Распределения давления в жестком (рис. 5) и твердом (рис. 6) квадратах идентичны. Расчеты показывают, что значения других составляющих тензора напряжений полностью совпадают. В отличие от этого, как видно из сравнения рис. 5 и рис. 6, распределение перемещений совершенно разное.

## 4.2 Двутавр

Двутавр — это тип стального профиля, который используется в строительстве для создания несущих конструкций. Он представляет собой двутавровую балку с двумя параллельными полками и перегородкой между ними. Двутавр имеет высокую прочность и жесткость, что позволяет ему выдерживать большие нагрузки при малом весе. Он широко используется в

строительстве зданий, мостов, трубопроводов, а также в производстве автомобилей и железнодорожных вагонов.

Вторым рассматриваемым примером стала двутавровая балка под сжимающей нагрузкой (рис. 7). Расчет велся для двутавровой балки высотой 1 м и толщиной 0,5 м, толщина ее стенки выбрана 0,1.

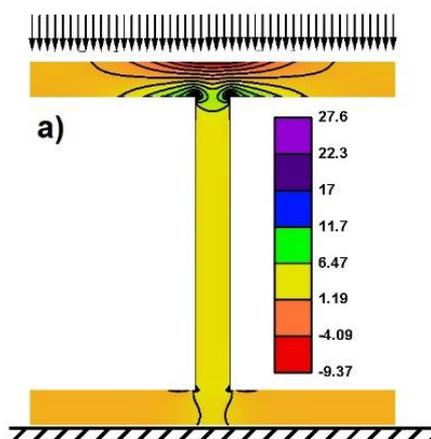
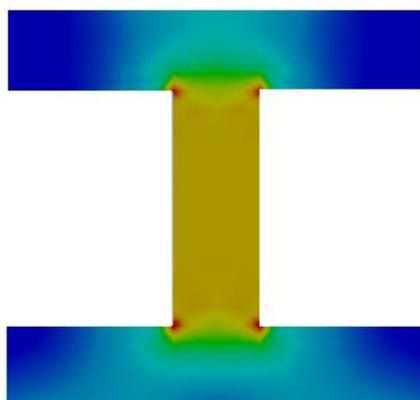


Рисунок 7 – поле напряжений жесткого двутавра

При приложении сжимающей нагрузки к абсолютно твердому двутавру основные напряжения концентрируются в центральной зоне нагружаемой полки. Причем верхняя часть полки испытывает сжимающие напряжения, в то время как нижняя часть этой же полки испытывает растягивающие напряжения. Также напряжения возникают в части перегородки, присоединенной к полке. Остальная площадь сечения остается практически ненагруженной.



## Рисунок 8 – поле напряжений упругого двутавра

Для упругого материала принято считать, что при наложении сжимающей нагрузки на двутавр возникают напряжения, которые распределены по всей его сечению. Поле напряжений можно описать следующим образом:

- В верхней и нижней частях двутавра возникают сжимающие напряжения ( $\sigma_{сж}$ ), которые направлены вдоль оси стержня и увеличиваются к середине его высоты.

- На боковых гранях двутавра возникают растягивающие напряжения ( $\sigma_{раст}$ ), которые направлены перпендикулярно оси стержня и увеличиваются к его концам.

- В центральной части двутавра возникает зона нулевых напряжений, где напряжения равны нулю. Таким образом, поле напряжений в двутавре под сжимающей нагрузкой характеризуется различными напряжениями в разных частях сечения, которые могут быть использованы для расчета прочности конструкции.

### 4.3 Швеллер

Третий численный эксперимент - швеллер, нагружающийся сверху распределенной нагрузкой величины 1 (рис. 8). Швеллер — это металлический профиль в форме буквы "С" из стали или алюминия, который используется в строительстве для создания несущих конструкций, таких как колонны, балки, фермы и т. д. Швеллер имеет высокую прочность и устойчивость к деформации, что делает его популярным материалом для строительства зданий и сооружений. Он также может быть использован в качестве элемента ограждения и забора. В зависимости от размеров и толщины, швеллер может выдерживать различные нагрузки и иметь различные функциональные свойства.

Расчет велся для швеллера высотой 1 м и толщиной 0,5 м, толщина стенки также выбрана 0,1.

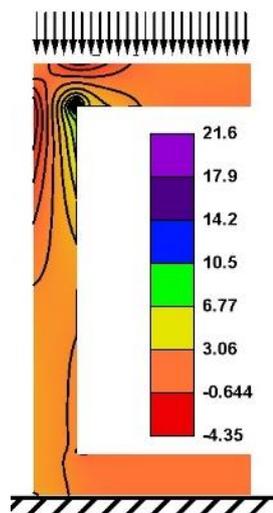


Рисунок 9 – поле напряжений жесткого швеллера

При нагружении жесткого швеллера поле напряжений оказывается несимметричным. Зона максимальных растягивающих и сжимающих напряжений находится в месте стыка ножки швеллера с нагружаемой полкой.

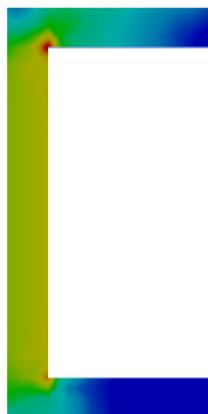


Рисунок 10 – поле напряжений упругого швеллера

Под действием сжимающей нагрузки поле напряжений в упругом швеллере будет иметь следующий вид:

- В верхней части швеллера (ближе к его верхней грани) будут возникать сжимающие напряжения, которые могут достигать максимальных значений. Это связано с тем, что именно здесь находится область наибольшего прогиба, а следовательно, и наибольшей деформации.

- В нижней части швеллера (ближе к его нижней грани) будут возникать растягивающие напряжения, которые будут уменьшаться по мере приближения к центру швеллера. Это связано с тем, что здесь находится область наименьшего прогиба и деформации.

- В центральной части швеллера напряжения будут близки к нулю, так как в этой области деформации минимальны.

- В стенках швеллера также будут возникать растягивающие напряжения, которые будут уменьшаться по мере удаления от центра швеллера.

#### 4.4 Прямоугольный канал

Четвертым экспериментом является нагружение прямоугольного канала. Высота и ширина прямоугольного канала равны 1. Ширина опор прямоугольного швеллера равна 0,2. Все параметры такие же, как и в предыдущем примере. Основание левой опоры прямоугольного канала закреплено. Зазор между основанием и ненагруженной правой опорой прямоугольного швеллера равен  $10^{-12}$ . Канал нагружен тем же внешним напряжением, равным 1.

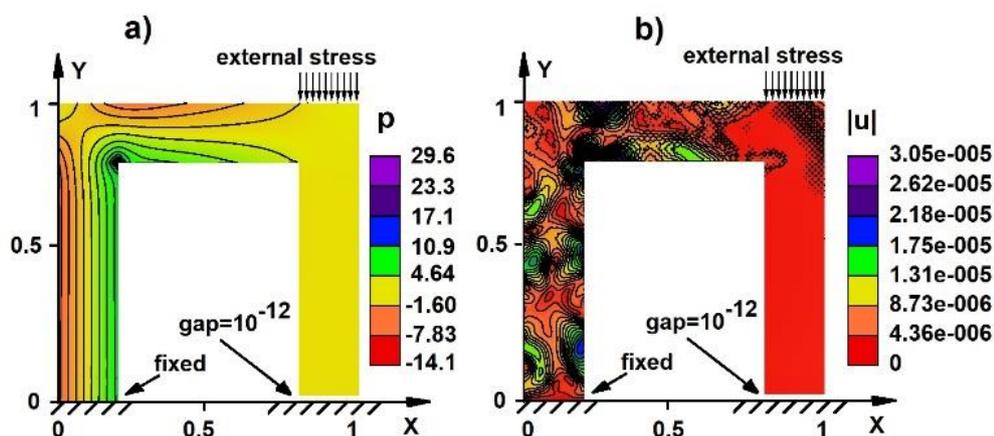


Рисунок 11 – Поле напряжений и перемещений жесткого канала

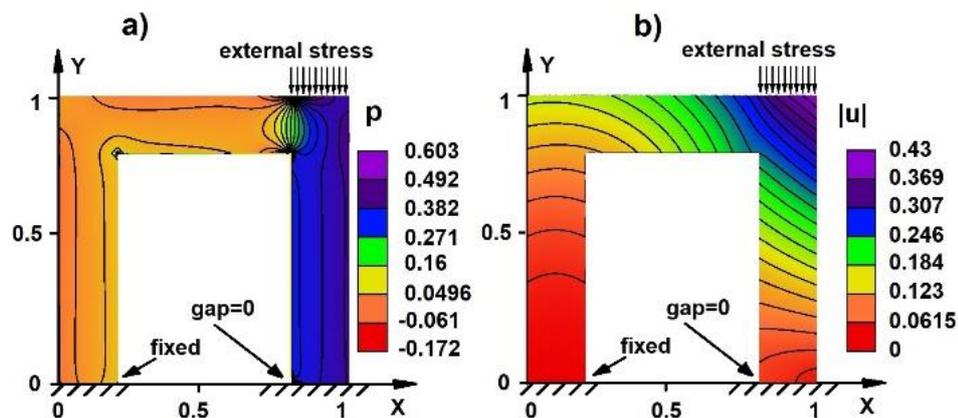


Рисунок 12 – Поле напряжений и перемещений упругого канала

Распределение  $p$  для жесткого прямоугольного канала показано на рис. 11а. Как видно из этого рисунка, зазор между правой опорой и основанием не изменился. В результате вся нагрузка легла на левую опору.

Распределение  $p$  для упругого прямоугольного канала показано на рис. 12а. Здесь картина противоположная по сравнению с рис. 11а. В результате внешнего напряжения зазор между прямоугольным швеллером и основанием стал равен нулю, и вся нагрузка легла на правую опору.

Как видно из рис. 11б, смещения в любой точке жесткого прямоугольного канала, равные или меньшие  $\sim 3 \times 10^{-5}$ , что указывает на полное выполнение условий несжимаемости (1.6) (второе и третье уравнения). Дальнейшее продолжение шагов алгоритма позволяет уменьшать эту величину до бесконечности. Однако при точности порядка  $10^3 \dots 10^4$  уже достаточно.

#### 4.5 Анализ результатов

Численные эксперименты показывают, что результаты моделирования не зависят от значений  $\tau_u$  и зависят только от отношения  $\frac{\tau_S}{\tau_p}$ . Разные значения этого соотношения приводят к разному распределению напряжений в теле (значения смещения оставались ниже заданного малого значения  $\varepsilon$  всегда).

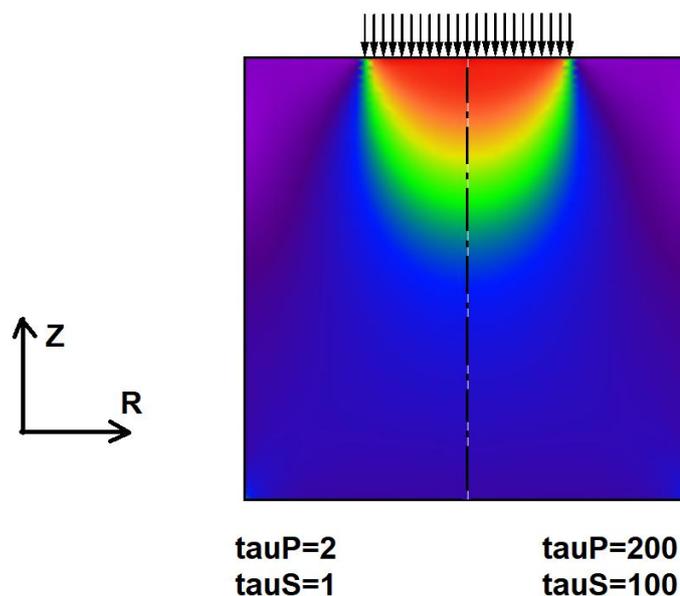


Рисунок 13 – Поле напряжений при разных итерационных параметрах

На рис. 13 показаны поля напряжений в абсолютно твердом теле (на примере  $\sigma_{RR}$ ) при  $\tau_p = 2, \tau_s = 1$  и  $\tau_p = 200, \tau_s = 100$ .

Одним из основных параметров любого материала является коэффициент Пуассона - коэффициент пропорциональности между относительным поперечным растяжением и относительным изменением длины. В модели абсолютно твердого тела все перемещения частиц нулевые, следовательно, и относительное поперечное растяжение и продольная деформация равны нулю. В таком случае задача неопределённая, и коэффициент Пуассона имеет бесконечное множество значений.

Уравнения Бельтрами-Митчелла являются ключевыми уравнениями в теории упругости и описывают поведение деформированных тел. Это система дифференциальных уравнений, которая включает уравнения равновесия, геометрическую связь и физическую связь. Они обычно записываются в тензорной форме следующим образом:

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0,$$

где  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжений,  $x_j$  - координаты,  $f_i$  - плотность сил.

Геометрическая связь:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} * \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где  $\varepsilon_{ij}$  - тензор деформаций,  $u_i$  - вектор перемещений.

Физическая связь (закон Гука):

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu * \varepsilon_{ij},$$

где  $\lambda, \mu$  - коэффициенты Ламе,  $\varepsilon_{kk}$  - след тензора деформаций,  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера.

Коэффициент Пуассона можно выразить через коэффициенты Ламе следующим образом:  $\nu = \lambda / (2 * (\lambda + \mu))$ .

Таким образом, можно подставить значение коэффициентов Ламе через коэффициент Пуассона и какой-либо другой известный параметр (например, модуль Юнга E) в уравнения Бельтрами-Митчелла.

Примечание: вся запись проведена в индексной нотации. В общем случае  $i, j, k = 1, 2, 3$ , соответствующие трем пространственным измерениям.

Для упругой модели коэффициент Пуассона может быть выражен через упругие параметры K, G, а также через их отношение следующим образом:

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} = \frac{\frac{3}{2} \frac{K}{G} - 1}{3 \frac{K}{G} + 1}$$

Поскольку при равенстве отношений  $\frac{K}{G}$  и  $\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s}$  поля напряжений в первом эксперименте были абсолютно идентичны, можно сделать предположение, что аналог коэффициента Пуассона для абсолютно твердого тела будет зависеть от отношения данных параметров.

## Заключение

В ходе работы был создан численный метод для вычисления напряжений в абсолютно твердом теле, удалось получить единственное решение. Условие равенства нулю перемещений всех точек тела было успешно достигнуто. При решении некоторых типов задач решение почти полностью совпадает с упругим телом с бесконечно большими коэффициентами. Однако полученное решение неоднозначно и зависит от отношения  $\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s}$ . Разработанный алгоритм является рабочим. Также имеется возможность дальнейшей модернизации.

Однако предположение о том, что модель абсолютно твердого тела является предельным случаем модели упругого тела при стремящихся к бесконечности коэффициентах не подтверждается. Из четырех проведенных численных экспериментов только в одном случае простейшей геометрии, не имеющей вырезов, поля напряжений изучаемой модели совпали с результатами, полученными из соображений теории упругости.

## Список использованной литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н. П., Кобельков Г.М.: «Численные методы», с. 345–352 (1987)
2. Гольдштейн Г. «Классическая механика.» – М.: Наука, 1981. - 368 с.
3. Эйлер Л. «О движении твердого тела вокруг неподвижной точки.» – СПб.: Изд-во Академии наук, 1765. – 48 с
4. Hughes T.J.R. «The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. » – Dover Publications, 2000. - 704 p.
5. Жилин П. А. Основы рациональной механики: учеб. пособие - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2018. – 637 с.
6. Ильин В. П., Свешников В. М., Сынах В.С.: «О сеточных технологиях для двумерных краевых задач», Сиб. журн. индустр. матем., 2000, том 3, номер 1, 124–136
7. Клепфиш Б.Р.: «Информационный подход к применению приема обезразмеривания при изучении компьютерного моделирования», В Фундаментальные исследования, № 8–2, с. 368–372. (2011)
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: «Теория упругости»: Учебное пособие - М.: Наука, 2007. – 187 с.
9. Львовский С.М.: «С++ в задачах и примерах.» – М.: ДМК Пресс, 2009. - 608 с.
10. Смирнов Е. М., Зайцев Д. К.: «Метод конечных объемов», Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2' 2004
11. Строуд Д.: «Компьютерные методы в физике.» – М.: Мир, 1980. - 544 с.
12. Bessonov N.M., Song D.J.: «Application of vector calculus to numerical simulation of continuum mechanics problems. » In: Journal of Computational Physics, vol.167/1. (2001)
13. Fosdick Roger, Royer-Carfagni Gianni: «Stress as a Constraint Reaction in Rigid Bodies. » In: Journal of Elasticity volume 74, pp. 265–276. (2004)

14. Gaul L., Kögl M., Wagner M.: «Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics. » – Springer, 2003. - 491 p.
15. Grioni G.: «On the stress in rigid bodies. » In: *Meccanica*, 18 (1), pp. 3-8. (1983)
16. Mooney M.: «A theory of large elastic deformation. » In: *Journal of Applied Physics*, 11(9), pp. 582–592. (1940)
17. Morman K.N.: «An adaptation of finite linear viscoelasticity theory for rubber-like viscoelasticity by use of a general strain measure. » In: *Rheologica Acta*, 27, pp.3-14. (1988)
18. Nicolai M. Josuttis: «C++ Standard Library: A Tutorial and Reference» – Addison-Wesley Professional, 2012. - 1128 p.
19. Prudhomme S., Romkes A., Tovar B.: «C++ and Object-Oriented Numeric Computing for Scientists and Engineers. » – Springer, 2000. - 440 p.
20. Rivlin R.S.: «Large elastic deformations. » In: *Rheology*, edited by Eirich F.R., Academic Press, New York. (1956)