

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
«__» _____ 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

«Стабилизация многозвенного сферического маятника в положении неустойчивого равновесия»

по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование
профиль
01.03.03_03 Математическое моделирование
процессов нефтегазодобычи

Выполнил студент
группы 5030103/80301

К. В. Стамлер

Руководитель
доцент ВШМиПУ, к.т.н.

А. А. Суханов

Санкт-Петербург
2022

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико – механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Стамлер Кириллу Вадимовичу, гр. 5030103/80301

1. Тема работы: Стабилизация многозвенного сферического маятника в положении неустойчивого равновесия.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 06.06.2022
3. Исходные данные по работе: Актуальные научные публикации по теме работы, исследования в области управления многозвенным сферическим маятником.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): Постановка задачи квалификационной работы, вывод уравнений движений для многозвенного маятника, определение управляющего воздействия для стабилизации в положении равновесия, анализ результатов.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания 13.05.2022

Руководитель ВКР _____ А. А. Суханов

Задание принял к исполнению 13.05.2022

Студент _____ К. В. Стамлер

РЕФЕРАТ

На 34 с., 6 рисунков, 3 таблицы

ПЕРЕВЕРНУТЫЙ МАЯТНИК, МНОГОЗВЕННЫЙ МАЯТНИК, ПЛОСКИЙ МАЯТНИК, СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК, ЛИНЕЙНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ РЕГУЛЯТОР, КРИТЕРИЙ КАЛМАНА, СТАБИЛИЗАЦИЯ СФЕРИЧЕСКОГО МНОГОЗВЕННОГО МАЯТНИКА, СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЛОСКОГО МНОГОЗВЕННОГО МАЯТНИКА.

Объектом исследования в данной работе является модель плоского и модель сферического многозвенного маятника. Исследуются их уравнения движения и рассматривается стабилизация с помощью линейного квадратичного регулятора вблизи положения неустойчивого равновесия. Для линеаризованной формы уравнений анализируется управляемость на основе критерия Калмана. Производится численное интегрирование систем уравнений движений (плоского и сферического) в системе MATLAB.

THE ABSTRACT

34 pages, 6 pictures, 3 tables

INVERTED PENDULUM, MULTI-LINK PENDULUM, FLAT PENDULUM, SPHERICAL PENDULUM, LINEAR QUADRATIC REGULATOR, KALMAN CRITERION, STABILIZATION OF A SPHERICAL MULTI-LINK PENDULUM, STABILIZATION OF A FLAT MULTI-LINK PENDULUM.

The object of the study in this paper is a model of a planar and a model of a spherical multi-link pendulum. Their equations of motion are investigated and stabilization with a linear quadratic regulator near the unstable equilibrium position is considered. The controllability based on the Kalman criterion is analyzed for the linearized form of the equations. Numerical integration of systems of equations of motion (planar and spherical) by MATLAB system is performed.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
ГЛАВА 1 Постановка задачи	6
ГЛАВА 2 Плоский многозвенный маятник	7
2.1 Линеаризованная система	9
ГЛАВА 3 Сферический многозвенный маятник	11
3.1 Энергия многозвенного сферического маятника	11
3.2 Вывод уравнений Эйлера–Лагранжа	13
3.3 Уравнения движения в матричной форме	16
3.4 Линеаризованная система	17
ГЛАВА 4 Моделирование свободного движения многозвенного маятника	19
ГЛАВА 5 Задача стабилизации маятника в положении равновесия	25
ГЛАВА 6 Устойчивость и управляемость линейных систем	26
ГЛАВА 7 Устойчивость и управляемость линеаризованной системы многозвенного маятника	27
ГЛАВА 8 Построение управления для линеаризованной системы	31
8.1 Численные примеры	31
Заключение	36
Список использованных источников	37

Введение

Появление и развитие сложных роботехнических систем требует решения все более нетривиальных задач управления. Часто на практике требуется исследовать динамику системы с многими степенями свободы под действием обобщенных сил. Если число управляющих входов меньше числа степеней свободы, то говорят, что решают задачу управления с дефицитом управляющих воздействий.

Модель многозвенного маятника является классическим примером сложного кинематического механизма, который является прекрасным источником для изучения нелинейной динамики и разработки систем управления. Особенно важно отметить, что перевернутый маятник на тележке представляет собой яркий пример динамической системы с дефицитом управляющих воздействий. А возможность стабилизации многозвенного маятника в положении неустойчивого равновесия не очевидна даже для двузвенного случая. Исследование стабилизации такого рода систем имеет широкое практическое приложение. Теоретические разработки применяются в управлении различного рода манипуляторами, шагающими механизмами, в маятниковоподобных и гироскопических системах, в различных цепных механизмах и т. д. Стоит отметить, что маятниковые модели столь значительны в практических приложениях и теоретических изысканиях, что благодаря многочисленным исследованиям, послужили источником разработки и уточнения таких важных понятий современной механики как резонанс, устойчивость, изохронность, диссипативность и т.д.

В данной работе решается задача локального синтеза, то есть ищутся ограниченные кусочно непрерывные управления (вектор входных воздействий $\mathbf{u}(t)$) по отрицательной обратной связи, обеспечивающие приведение системы в положение неустойчивого равновесия из некоторой ее окрестности.

Изучаются также различные способы построения уравнений движения, особое внимание уделяется регулярной параметризации с помощью единичного направляющего вектора. Для линеаризованной системы уравнений исследуется управляемость на основе критерия Калмана.

ГЛАВА 1. Постановка задачи

Многозвенный сферический маятник представляет собой механическую систему, состоящую из цепи N звеньев, соединенных идеальными сферическими шарнирами. Один конец цепи шарнирно закреплен на подвижной опоре — тележке, которая имеет массу m_0 и может свободно перемещаться в плоскости. Движение тележки в плоскости управляется силовым воздействием $\mathbf{u}(t)$.

Требуется определить, возможно ли управлять равновесием маятника, находящегося в перевернутом положении (неустойчивого равновесия).

Движение отдельного звена маятника удобно рассматривать в поступательно движущейся системе координат с началом в шарнире, ближайшем по цепи к тележке. Например, положение k -го звена можно задавать углами (φ, θ) сферической системы координат, как обычно и поступают. Однако сферическая система координат имеет особенности, связанные с неопределённостью значений азимутального угла φ в полюсах. Это может быть особенно неудобно при изучении движения в окрестности положений равновесия.

От указанного недостатка свободна однородная параметризация, когда положение звена задаётся декартовыми координатами *единичного* направляющего вектора с началом в соответствующем шарнире. Платой за регулярность этой параметризации является увеличение размерности системы (три координаты вместо двух), но, как будет показано, можно записать систему в векторном виде, даже более компактном, чем при использовании угловой параметризации.

Итак, будем считать, что конфигурация цепи звеньев задается единичными векторами $\mathbf{v}_k(t)$ ($|\mathbf{v}_k| = 1$), $k = 1, \dots, N$, определяющими направления звеньев в пространстве. Длину k -го звена обозначим ℓ_k , а массу — m_k .

Чаще всего принимается, что вся масса звена сосредоточена на его втором, дальнем от тележки, конце. Но интересно также рассмотреть *физический маятник* с другим распределением масс. Чтобы иметь такую возможность, мы примем, что центр масс k -го звена находится на расстоянии $\alpha_k \ell_k$ ($\alpha_k \in (0, 1]$) от его начала (шарнира, ближайшего по цепи к тележке), а момент инерции звена относительно центра масс равен J_k . При этом шарниры считаются невесомыми.

Конфигурация системы определяется набором векторов

$$\mathbf{x}(t) = (x^1(t), x^2(t)), \quad \mathbf{v}_k(t) = (v_k^1(t), v_k^2(t), v_k^3(t)), \quad k = 1, \dots, N,$$

где $\mathbf{x}(t)$ задаёт положение тележки в плоскости (x^1, x^2) . Таким образом, конфигурационное пространство N -звенного сферического маятника есть

$$K = \mathbb{R}^2 \times \underbrace{\mathbb{S}^2 \times \dots \times \mathbb{S}^2}_N.$$

ГЛАВА 2. Плоский многозвенный маятник

Прежде чем приступить к выводу уравнений движения сферического маятника, опишем более простой случай плоского маятника. Результаты, полученные здесь мы используем для проверки модели сферического маятника.

Положение звена плоского маятника задаётся одним углом — углом θ отклонения от вертикали. Это регулярная параметризация, и переходить к декартовому представлению здесь нет смысла.

Угол θ отсчитывается от оси y , которую мы считаем направленной вверх — против направления силы тяжести.

Рассмотрим простейшую модель с точечными массами на концах стержней. Координаты концевой точки k -го звена маятника определяются формулами

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^k \ell_i \sin \theta_i, \quad y_k = \sum_{i=1}^k \ell_i \cos \theta_i, \quad (2.1)$$

где x_0 — координата тележки.

Обозначим m_0 массу тележки и m_1, \dots, m_N точечные массы на концах звеньев. Дальнейшие формулы существенно упрощаются, если ввести обозначения

$$\mu_k := \sum_{i=k}^N m_i, \quad \mu_0 := m_0 + \mu_1, \quad \mu_{ij} := \mu_{\max(i,j)}. \quad (2.2)$$

Величина μ_k — не что иное как полная масса участка цепи от начала k -го звена до свободного конца цепи, μ_0 — полная масса системы, включая массу тележки.

Запишем выражения для кинетической и потенциальной энергии всей цепи

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2), \quad U = g \sum_{i=1}^N m_i y_i.$$

С учётом формул (2.1) и обозначений (2.2), после простых преобразований получим

$$T = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{x}_0^2 + \dot{x}_0 \sum_{i=1}^N \mu_i \ell_i \cos \theta_i \dot{\theta}_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \mu_{ij} \ell_i \ell_j \cos(\theta_i - \theta_j) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j,$$

$$U = g \sum_{i=1}^N \mu_i \ell_i \cos \theta_i.$$

Введём лагранжиан $\mathcal{L}(x_0, \theta_k, \dot{\theta}_k) = T - U$ и запишем уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial \theta_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Вычислим необходимые производные по отдельности. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0} &= \mu_0 \dot{x}_0 + \sum_{i=1}^N \mu_i l_i \cos \theta_i \dot{\theta}_i, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_0} &= \mu_0 \ddot{x}_0 + \sum_{i=1}^N \mu_i l_i \cos \theta_i \ddot{\theta}_i - \sum_{i=1}^N \mu_i l_i \sin \theta_i \dot{\theta}_i^2 = 0, \\
\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_\alpha} &= \dot{x}_0 \mu_\alpha l_\alpha \cos \theta_\alpha + \sum_{i=1}^N \mu_{i\alpha} l_i l_\alpha \cos(\theta_i - \theta_\alpha) \dot{\theta}_i, \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_\alpha} &= \ddot{x}_0 \mu_\alpha l_\alpha \cos \theta_\alpha - \dot{x}_0 \mu_\alpha l_\alpha \sin \theta_\alpha \dot{\theta}_\alpha + \sum_{i=1}^N \mu_{i\alpha} l_i l_\alpha \cos(\theta_i - \theta_\alpha) \ddot{\theta}_i - \\
&\quad - \sum_{i=1}^N \mu_{i\alpha} l_i l_\alpha \sin(\theta_i - \theta_\alpha) (\dot{\theta}_i - \dot{\theta}_\alpha) \dot{\theta}_i, \\
\frac{\partial T}{\partial \theta_\alpha} &= -\dot{x}_0 \mu_\alpha l_\alpha \sin \theta_\alpha \dot{\theta}_\alpha + \sum_{i=1}^N \mu_{i\alpha} l_i l_\alpha \sin(\theta_i - \theta_\alpha) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_\alpha, \\
\frac{\partial U}{\partial \theta_\alpha} &= g \mu_\alpha l_\alpha \sin \theta_\alpha.
\end{aligned}$$

Окончательный вид уравнений движения плоского многозвенного маятника получается следующим:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_0 \ddot{x}_0 + \sum_{i=1}^N \mu_i l_i \cos \theta_i \ddot{\theta}_i - \sum_{i=1}^N \mu_i l_i \sin \theta_i \dot{\theta}_i^2 = 0, \\
\mu_\alpha l_\alpha \cos \theta_\alpha \ddot{x}_0 + \sum_{i=1}^N \mu_{i\alpha} l_i l_\alpha \cos(\theta_i - \theta_\alpha) \ddot{\theta}_i - \\
- \sum_{i=1}^N \mu_{i\alpha} l_i l_\alpha \sin(\theta_i - \theta_\alpha) \dot{\theta}_i^2 - g \mu_\alpha l_\alpha \sin \theta_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N.
\end{array} \right. \quad (2.3)$$

Отметим, что в полученных уравнениях сократились смешанные произведения производных $\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$.

Систему уравнений (2.3) можно переписать в матричной форме. Введём матрицу $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \cdots & \Lambda_{0N} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1N} \\ \Lambda_{20} & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N0} & \Lambda_{N1} & \Lambda_{N2} & \cdots & \Lambda_{NN} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 l_1 & \mu_2 l_2 & \cdots & \mu_N l_N \\ \mu_1 l_1 & \mu_1 l_1^2 & \mu_{12} l_1 l_2 & \cdots & \mu_{1N} l_1 l_N \\ \mu_2 l_2 & \mu_{21} l_2 l_1 & \mu_2 l_2^2 & \cdots & \mu_{2N} l_2 l_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_N l_N & \mu_{N1} l_N l_1 & \mu_{N2} l_N l_2 & \cdots & \mu_N l_N^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\Lambda_{00} = \mu_0, \quad \Lambda_{0k} = \Lambda_{k0} = \mu_k \ell_k, \quad \Lambda_{ij} = \mu_{ij} \ell_i \ell_j, \quad i, j, k = 1, \dots, N.$$

Симметричную матрицу Λ будем называть *матрицей инерции* многозвенного маятника.

Приведём в матричной форме явный вид системы уравнений (2.3) для трёхзвенного маятника на тележке:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} \cos \theta_1 & \Lambda_{02} \cos \theta_2 & \Lambda_{03} \cos \theta_3 \\ \Lambda_{10} \cos \theta_1 & \Lambda_{11} & \Lambda_{21} \cos(\theta_2 - \theta_1) & \Lambda_{31} \cos(\theta_3 - \theta_1) \\ \Lambda_{20} \cos \theta_2 & \Lambda_{12} \cos(\theta_1 - \theta_2) & \Lambda_{22} & \Lambda_{32} \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ \Lambda_{30} \cos \theta_3 & \Lambda_{13} \cos(\theta_1 - \theta_3) & \Lambda_{23} \cos(\theta_2 - \theta_3) & \Lambda_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \quad (2.4)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{01} \sin \theta_1 & \Lambda_{02} \sin \theta_2 & \Lambda_{03} \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & \Lambda_{21} \sin(\theta_2 - \theta_1) & \Lambda_{31} \sin(\theta_3 - \theta_1) \\ 0 & \Lambda_{12} \sin(\theta_1 - \theta_2) & 0 & \Lambda_{32} \sin(\theta_3 - \theta_2) \\ 0 & \Lambda_{13} \sin(\theta_1 - \theta_3) & \Lambda_{23} \sin(\theta_2 - \theta_3) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_{10} \sin \theta_1 \\ \Lambda_{20} \sin \theta_2 \\ \Lambda_{30} \sin \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Легко понять, как система выглядит при произвольном N .

2.1. Линеаризованная система

Нетрудно записать линеаризованную форму системы (2.4) в окрестности положения равновесия.

Маятник с N звеньями имеет 2^N положений равновесия: конец каждого звена может быть направлен либо вверх (против силы тяжести), либо вниз. Чтобы задавать различные положения равновесия, введём индексы звеньев σ_i

$$\sigma_i = \begin{cases} +1, & \text{звено направлено вверх,} \\ -1, & \text{звено направлено вниз.} \end{cases}$$

Вектор $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ определяет конкретное положение равновесия.

Ниже мы будем задавать положение равновесия маятника также целым числом $s_{\boldsymbol{\sigma}}$, которое введём как десятичный эквивалент бинарного вектора $(\boldsymbol{\sigma} + 1)/2$. Таким образом $s_{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ для положения «все звенья вниз» и $s_{\boldsymbol{\sigma}} = 2^N - 1$ для положения «все звенья вверх», а, например, для состояния $\boldsymbol{\sigma} = (+1, -1, +1, +1, -1)$ 5-звенного маятника получим $s_{\boldsymbol{\sigma}} = 22$.

В окрестности положения равновесия с точностью до бесконечно малых второго порядка имеем

$$\cos \theta_i = \sigma_i, \quad \sin \theta_i = \sigma_i \theta_i + \rho_i \pi, \quad \rho_i = (1 - \sigma_i)/2.$$

Линеаризованная в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ си-

стема уравнений движения плоского маятника на тележке имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \sigma_1\Lambda_{01} & \sigma_2\Lambda_{02} & \cdots & \sigma_{0N}\Lambda_{0N} \\ \sigma_1\Lambda_{10} & \sigma_{11}\Lambda_{11} & \sigma_{12}\Lambda_{12} & \cdots & \sigma_{1N}\Lambda_{1N} \\ \sigma_2\Lambda_{20} & \sigma_{21}\Lambda_{21} & \sigma_{22}\Lambda_{22} & \cdots & \sigma_{2N}\Lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N0}\Lambda_{N0} & \sigma_{N1}\Lambda_{N1} & \sigma_{N2}\Lambda_{N2} & \cdots & \sigma_{NN}\Lambda_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \cdots \\ \ddot{\theta}_N \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_{10}(\sigma_1\theta_1 + \rho_1\pi) \\ \Lambda_{20}(\sigma_2\theta_2 + \rho_2\pi) \\ \cdots \\ \Lambda_{N0}(\sigma_N\theta_N + \rho_N\pi) \end{pmatrix}.$$

Здесь по аналогии с обозначением μ_{ij} мы полагаем $\sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j$.

В качестве примера приведём вид системы трёхзвенного маятника, линеаризованной в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\sigma} = (+1, -1, +1)$:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.06 & -0.04 & 0.02 \\ 0.06 & 0.012 & -0.008 & 0.004 \\ -0.04 & -0.008 & 0.008 & -0.004 \\ 0.02 & 0.004 & -0.004 & 0.004 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0.06\theta_1 \\ 0.04(\pi - \theta_2) \\ 0.02\theta_3 \end{pmatrix}.$$

Параметры маятника были взяты следующими:

$$m_0 = 0.2, \quad m_i = 0.1, \quad \ell_i = 0.2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим, что в полностью выпрямленном — «верхнем» положении равновесия ($\sigma_i = +1$). Матрица линеаризованной системы есть просто матрица $\mathbf{\Lambda}$.

Для численного интегрирования системы (2.3) плоского маятника написана программа `pend2()` в системе MATLAB (код программы приводится в приложении). Результаты расчётов приводятся ниже, в разделе 4, посвящённом численному моделированию.

```
function [U,p,t]=pend2(d)
```

ГЛАВА 3. Сферический многозвенный маятник

Звенья сферического многозвенного маятника мы представляем, как бесконечно тонкие стержни, соединенные идеальными невесомыми сферическими шарнирами. Возможными взаимодействиями (пересечениями) стержней или шарниров при движении маятника пренебрегаем.

Рассмотрим некоторые простые механические модели отдельного звена маятника.

Простейшая модель получается, если считать, что вся масса цепи сосредоточена на концах стержней. В этом случае стержни не имеют моментов инерции, и маятник представляет собой цепочку точечных масс.

Естественным обобщением этой модели является схема с точечными массами, произвольно расположенными на невесомых стержнях: масса звена сосредоточена на расстоянии $\alpha\ell \in (0, \ell]$ от начала звена. Моменты инерции звеньев равны нулю. При $\alpha = 1$ получается простейшая модель.

Рассмотрим ещё модель, более близкую к физическому маятнику. Будем считать, что центр масс находится на расстоянии $\alpha\ell$ от начала звена, а масса слева и справа от центра масс распределена равномерно. Это соответствует модели стержня, составленного из двух кусков разной плотности, распределенной так, что центр масс находится на стыке. (Понятно, что в рамках такой модели описать произвольное распределение масс не получится.)

Обозначим p и q массы слева и справа от центра масс соответственно. Имеем $p + q = m$. Условие, что центр масс находится в точке $\alpha\ell$ имеет вид

$$\alpha\ell p = (1 - \alpha)\ell q,$$

откуда получаем $p = (1 - \alpha)m$, $q = \alpha m$.

Такой составной стержень будет иметь ненулевой момент инерции J относительно центра масс. Вычислим его:

$$J = \frac{p(\alpha\ell)^2}{3} + \frac{q((1 - \alpha)\ell)^2}{3} = \frac{m\ell^2}{3}\alpha(1 - \alpha).$$

Отметим, что при $\alpha = 1/2$ получается случай однородного стержня с моментом инерции $J = m\ell^2/12$, а при $\alpha = 1$ приходим к описанной выше простейшей модели со сосредоточенной массой на конце.

В общем случае параметры k -го звена определяются положением центра масс α_k и моментом инерции J_k .

3.1. Энергия многозвенного сферического маятника

Обозначим $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t)$ радиус-вектор центра масс k -го звена, а $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k(t)$ — единичный вектор направления k -го звена. Поскольку центр масс располагается

на расстоянии $\alpha_k \ell_k$ от начала звена, мы имеем

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \mathbf{v}_i + \alpha_k \ell_k \mathbf{v}_k. \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{r}_0 = (x_0^1, x_0^2)$ — координаты тележки.

Ось x^3 системы координат (x^1, x^2, x^3) мы считаем направленной вверх — против силы тяжести.

Кинетическая энергия звена при сложном движении есть сумма энергий поступательного движения центра масс и вращательного движения относительно центра масс:

$$T_k = \frac{m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2}{2} + \frac{J_k \boldsymbol{\omega}_k^2}{2}.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}_k$ — угловая скорость звена.

В силу условия $|\mathbf{v}_k| = 1$ векторы \mathbf{v}_k , $\dot{\mathbf{v}}_k$ и $\boldsymbol{\omega}_k$ образуют ортогональную тройку. Действительно,

$$|\mathbf{v}_k| = 1 \iff \frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = 0 \iff \langle \mathbf{v}_k, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle = 0, \quad \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{v}_k \times \dot{\mathbf{v}}_k.$$

С учетом векторного тождества $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2$ получаем также

$$\boldsymbol{\omega}_k^2 = |\mathbf{v}_k \times \dot{\mathbf{v}}_k|^2 = \mathbf{v}_k^2 \dot{\mathbf{v}}_k^2 = \dot{\mathbf{v}}_k^2.$$

Угловыми скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается скалярное произведение векторов.

Таким образом, для кинетической энергии звена получаем выражение

$$T_k = \frac{m_k}{2} \left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \dot{\mathbf{v}}_i + \alpha_k \ell_k \dot{\mathbf{v}}_k \right)^2 + \frac{J_k \dot{\mathbf{v}}_k^2}{2}.$$

Суммируя по всем звеньям и добавляя кинетическую энергию тележки, можем записать полную кинетическую энергию N -звенного сферического маятника на тележке в форме

$$\begin{aligned} T = & \left(\frac{m_0}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \right) \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \sum_{k=1}^N m_k \left(\alpha_k \ell_k \langle \dot{\mathbf{r}}_0, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle + \left\langle \dot{\mathbf{r}}_0, \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \dot{\mathbf{v}}_i \right\rangle \right) + \\ & + \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{2} \left(\left\langle \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \dot{\mathbf{v}}_i, \sum_{j=1}^{k-1} \ell_j \dot{\mathbf{v}}_j \right\rangle + 2 \alpha_k \ell_k \left\langle \dot{\mathbf{v}}_k, \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \dot{\mathbf{v}}_i \right\rangle + \alpha_k^2 \ell_k^2 \dot{\mathbf{v}}_k^2 \right) + \sum_{k=1}^N \frac{J_k \dot{\mathbf{v}}_k^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Потенциальная энергия системы с учётом (3.1) записывается в виде

$$U = g \sum_{k=1}^N m_k \left\langle \sum_{i=1}^{k-1} \ell_i \mathbf{v}_i + \alpha_k \ell_k \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_3 \right\rangle, \quad (3.3)$$

где \mathbf{e}_3 — орт вертикальной оси. Это выражение записано с учётом равенства $\langle \mathbf{r}_0, \mathbf{e}_3 \rangle = 0$ (вектор \mathbf{r}_0 лежит в плоскости, перпендикулярной \mathbf{e}_3).

Выражения для кинетической энергии (3.2) и потенциальной энергии (3.3) можно сильно упростить, если ввести обозначения, аналогичные обозначениям (2.2) для плоского маятника, но с учётом произвольного расположения центров масс звеньев:

$$\mu_k = \alpha_k m_k + \sum_{i=k+1}^N m_i, \quad \mu_0 := m_0 + \mu_1, \quad \mu_{ij} := \mu_{\max(i,j)}. \quad (3.4)$$

По-прежнему, μ_k — это полная масса участка цепи от начала k -го звена до свободного конца цепи.

И совершенно аналогично «плоскому» случаю, но с учётом ненулевых моментов инерции определяется симметричная матрица инерции $\Lambda = (\Lambda_{ij})$:

$$\begin{aligned} \Lambda_{00} &= \mu_0, & \Lambda_{0k} &= \Lambda_{k0} = \mu_k \ell_k, \\ \Lambda_{ij} &= \ell_i \ell_j \mu_{ij} + 2\delta_{ij} J_i, & i, j, k &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера.

Через матрицу инерции выражение (3.2) записывается весьма просто:

$$T = \frac{1}{2} \Lambda_{00} \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \sum_{k=1}^N \Lambda_{0k} \langle \dot{\mathbf{r}}_0, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \Lambda_{ij} \langle \dot{\mathbf{v}}_i, \dot{\mathbf{v}}_j \rangle. \quad (3.5)$$

Заметим, что здесь, в отличие от плоского случая (система (2.3)), присутствуют слагаемые «смешанного» типа $\langle \dot{\mathbf{v}}_i, \dot{\mathbf{v}}_j \rangle$, $i \neq j$. (потом исправлю: речь должна идти об уравнениях движения, а не о выражении для энергии)

Выражение (3.3) для потенциальной энергии также компактно записывается через элементы матрицы инерции:

$$U = g \sum_{k=1}^N \Lambda_{0k} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_3 \rangle. \quad (3.6)$$

3.2. Вывод уравнений Эйлера–Лагранжа

Уравнения движения сферического маятника будем выводить, используя векторные обозначения: так получаются более компактные и понятные формулы. Идею подобных обозначений мы заимствуем из статьи [14].

Для функции $F(\mathbf{a})$ векторного аргумента $\mathbf{a} = (a^1, a^2, a^3)$ договоримся использовать «векторную производную»

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} := \left(\frac{\partial F}{\partial a^1}, \frac{\partial F}{\partial a^2}, \frac{\partial F}{\partial a^3} \right).$$

Таким образом, производная $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}}$ — это вектор. С помощью этого обозначения,

например, производную по времени от функции $F(\mathbf{a}(t))$ можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}F(\mathbf{a}(t)) = \frac{\partial F}{\partial a^1}\dot{a}^1 + \frac{\partial F}{\partial a^2}\dot{a}^2 + \frac{\partial F}{\partial a^3}\dot{a}^3 = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}} \right\rangle.$$

Для простейшего функционала от векторного аргумента

$$J[\mathbf{a}] = \int_0^T G(\mathbf{a}(t), \dot{\mathbf{a}}(t)) dt$$

введённое обозначение позволяет записать вариацию в компактном виде

$$\begin{aligned} \delta J[\mathbf{a}] = & \int_0^T \left[\left(\frac{\partial G}{\partial a^1} \delta a^1 + \frac{\partial G}{\partial a^2} \delta a^2 + \frac{\partial G}{\partial a^3} \delta a^3 \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{a}^1} \delta \dot{a}^1 + \frac{\partial G}{\partial \dot{a}^2} \delta \dot{a}^2 + \frac{\partial G}{\partial \dot{a}^3} \delta \dot{a}^3 \right) \right] dt = \int_0^T \left[\left\langle \frac{\partial G}{\partial \mathbf{a}}, \delta \mathbf{a} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial G}{\partial \dot{\mathbf{a}}}, \delta \dot{\mathbf{a}} \right\rangle \right] dt. \end{aligned}$$

Перейдём к выводу уравнений движения. Лагранжиан $\mathcal{L} = T - U$ сферического N -звенного маятника, согласно формулам (3.5),(3.6), имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Lambda_{00} \dot{\mathbf{r}}_0^2 + \sum_{k=1}^N \Lambda_{0k} \langle \dot{\mathbf{r}}_0, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \Lambda_{ij} \langle \dot{\mathbf{v}}_i, \dot{\mathbf{v}}_j \rangle - g \sum_{k=1}^N \Lambda_{0k} \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{e}_3 \rangle. \quad (3.7)$$

Записать уравнения Эйлера–Лагранжа напрямую здесь, в отличие от случая плоского маятника, нельзя. Причина в том, что функции $v_k^1(t)$, $v_k^2(t)$, $v_k^3(t)$ не являются независимыми (связаны условием $|\mathbf{v}_k| = 1$), а следовательно вариация $\delta \mathbf{v}_k(t)$ не произвольна: она принадлежит касательному пространству $T\mathbb{S}_{\mathbf{v}_k(t)}^2$. Для вывода уравнений движения мы воспользуемся способом, изложенным в статье [14].

Согласно принципу Гамильтона, истинное движение механической системы на отрезке времени $[0, T]$ реализует минимум функционала действия:

$$S[\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_k] = \int_0^T \mathcal{L}(\mathbf{r}_0(t), \mathbf{v}_k(t), \dot{\mathbf{r}}_0(t), \dot{\mathbf{v}}_k(t)) dt \rightarrow \min.$$

Необходимым условием для этого является обращение в ноль вариации $\delta S = \delta S[\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_k; \delta \mathbf{r}_0, \delta \mathbf{v}_k]$ функционала действия:

$$\delta S = \int_0^T \left[\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_0}, \delta \mathbf{r}_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}, \delta \dot{\mathbf{r}}_0 \right\rangle + \sum_{k=1}^N \left(\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k}, \delta \mathbf{v}_k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k}, \delta \dot{\mathbf{v}}_k \right\rangle \right) \right] dt = 0.$$

Здесь вариации $\delta \mathbf{r}_0(t)$, $\delta \mathbf{v}_k(t)$, $k = 1, \dots, N$, — гладкие вектор-функции, обращающиеся в ноль на концах интервала интегрирования $[0, T]$. При этом для

каждого k и в каждый момент времени вектор $\delta \mathbf{v}_k(t)$ должен лежать в касательном пространстве $TS_{\mathbf{v}_k(t)}^2$ к единичной сфере.

В последнем интеграле рассмотрим для некоторого k слагаемое с $\delta \dot{\mathbf{v}}_k$. Следуя [14], заметим, что вектор $\delta \mathbf{v}_k$ можно представить в виде векторного произведения

$$\delta \mathbf{v}_k = \boldsymbol{\xi}_k \times \mathbf{v}_k,$$

где вектор $\boldsymbol{\xi}_k = \boldsymbol{\xi}_k(t)$ удовлетворяет условию $\langle \boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{v}_k \rangle = 0$, т. е. тоже является вектором касательного пространства. Тогда будем иметь

$$\delta \dot{\mathbf{v}}_k = \dot{\boldsymbol{\xi}}_k \times \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\xi}_k \times \dot{\mathbf{v}}_k.$$

Пользуясь векторным тождеством $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{c} \times \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, получим

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k}, \delta \mathbf{v}_k \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k}, \delta \dot{\mathbf{v}}_k \right\rangle = \left\langle \mathbf{v}_k \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k} + \dot{\mathbf{v}}_k \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k}, \boldsymbol{\xi}_k \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}_k \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k}, \dot{\boldsymbol{\xi}}_k \right\rangle.$$

Последнее слагаемое при интегрировании по частям преобразуется следующим образом:

$$\int_0^T \left\langle \mathbf{v}_k \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k}, \dot{\boldsymbol{\xi}}_k \right\rangle dt = - \int_0^T \left\langle \dot{\mathbf{v}}_k \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k} + \mathbf{v}_k \times \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k}, \boldsymbol{\xi}_k \right\rangle dt.$$

Здесь учтены условия для вариации $\delta \mathbf{v}_k(t)$ на концах: $\boldsymbol{\xi}_k(0) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\xi}_k(T) = \mathbf{0}$.

Следовательно, вариацию действия можно переписать в форме

$$\delta S = \int_0^T \left[\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}, \delta \mathbf{r}_0 \right\rangle + \sum_{k=1}^N \left\langle \mathbf{v}_k \times \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k} \right), \boldsymbol{\xi}_k \right\rangle \right] dt = 0.$$

Далее, поскольку вариации $\delta \mathbf{r}_0, \delta \mathbf{v}_1, \dots, \delta \mathbf{v}_N$ независимы, все скалярные произведения в подинтегральном выражении должны обращаться в ноль тождественно:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}, \delta \mathbf{r}_0 \right\rangle &\equiv 0, \\ \left\langle \mathbf{v}_k \times \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k} \right), \boldsymbol{\xi}_k \right\rangle &\equiv 0, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Учитывая, что последнее условие должно выполняться для произвольного $\boldsymbol{\xi}_k \in TS_{\mathbf{v}_k(t)}^2$ (или $\boldsymbol{\xi}_k \perp \mathbf{v}_k$), его можно записать так:

$$\mathbf{v}_k \times \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k} \right) = \psi_k(t) \mathbf{v}_k.$$

Здесь ψ_k — некоторая скалярная функция времени.

Остаётся векторно умножить это равенство на \mathbf{v}_k , и из уравнений (3.8) мы получим уравнения Эйлера–Лагранжа в векторной форме

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}_0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_k \times \left(\mathbf{v}_k \times \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k} \right) \right) = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, N. \end{cases} \tag{3.9}$$

3.3. Уравнения движения в матричной форме

Аналогично плоскому случаю, для сферического маятника можно получить систему уравнений движения в векторно-матричной форме.

Прежде всего, используя выражение (3.7), вычислим производные, участвующие в системе уравнений движения (3.9):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0} &= \Lambda_{00} \ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{k=1}^N \Lambda_{0k} \ddot{\mathbf{v}}_k, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{v}}_k} &= \Lambda_{k0} \ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^N \Lambda_{ki} \ddot{\mathbf{v}}_i, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}_k} &= -g \Lambda_{k0} \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Уравнения (3.9) приобретают вид

$$\begin{cases} \Lambda_{00} \ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{k=1}^N \Lambda_{0k} \ddot{\mathbf{v}}_k = \mathbf{0}, \\ \mathbf{v}_k \times \left(\mathbf{v}_k \times \left(\Lambda_{k0} \ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{i=1}^N \Lambda_{ki} \ddot{\mathbf{v}}_i + g \Lambda_{k0} \mathbf{e}_3 \right) \right) = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.10)$$

Преобразуем последнее уравнение. Для этого, во-первых, перепишем векторное произведение в матричной форме: для вектора $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ определим матрицу векторного умножения

$$\hat{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} 0 & -v^3 & v^2 \\ v^3 & 0 & -v^1 \\ -v^2 & v^1 & 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{v} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{v}} \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{b}.$$

Учитывая структуру уравнений (3.10), сразу вычислим

$$\hat{\mathbf{v}}^2 = \hat{\mathbf{v}} \hat{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -(v^2)^2 - (v^3)^2 & v^1 v^2 & v^1 v^3 \\ v^1 v^2 & -(v^1)^2 - (v^3)^2 & v^2 v^3 \\ v^1 v^3 & v^2 v^3 & -(v^1)^2 - (v^2)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Во-вторых, преобразуем слагаемые вида $\mathbf{v}_k \times (\mathbf{v}_k \times \ddot{\mathbf{v}}_k)$ («диагональные» элементы). Для этого воспользуемся векторным тождеством $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}$, а также равенством $\langle \mathbf{v}_k, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle = 0$, из которого следует

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{v}_k, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_k, \ddot{\mathbf{v}}_k \rangle + \langle \dot{\mathbf{v}}_k, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle = 0.$$

Тогда будем иметь

$$\mathbf{v}_k \times (\mathbf{v}_k \times \ddot{\mathbf{v}}_k) = \langle \mathbf{v}_k, \ddot{\mathbf{v}}_k \rangle \mathbf{v}_k - \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle \ddot{\mathbf{v}}_k = -\langle \dot{\mathbf{v}}_k, \dot{\mathbf{v}}_k \rangle \mathbf{v}_k - \ddot{\mathbf{v}}_k.$$

Здесь мы учли ещё, что $\langle \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k \rangle = |\mathbf{v}_k|^2 = 1$.

С учётом описанных преобразований, уравнения движения можно записать в следующей окончательной форме:

$$\begin{cases} \Lambda_{00}\ddot{\mathbf{r}}_0 + \sum_{k=1}^N \Lambda_{0k}\ddot{\mathbf{v}}_k = \mathbf{0}, \\ \Lambda_{kk}\ddot{\mathbf{v}}_k - \Lambda_{k0}\widehat{\mathbf{v}}_k^2\ddot{\mathbf{r}}_0 - \sum_{i \neq k} \Lambda_{ki}\widehat{\mathbf{v}}_k^2\ddot{\mathbf{v}}_i = -\Lambda_{kk}|\dot{\mathbf{v}}_k|^2\mathbf{v}_k + g\Lambda_{k0}\widehat{\mathbf{v}}_k^2\mathbf{e}_3. \end{cases} \quad (3.12)$$

Теперь можно записать уравнения движения в матричной форме. Договоримся обозначать \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 единичные матрицы 2×2 и 3×3 , а запись $\mathbf{E}_{2 \times 3}$ будет означать прямоугольную единичную матрицу 2×3 . Матричная форма уравнений (3.12) такова:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00}\mathbf{E}_2 & \Lambda_{01}\mathbf{E}_{2 \times 3} & \Lambda_{02}\mathbf{E}_{2 \times 3} & \cdots & \Lambda_{0N}\mathbf{E}_{2 \times 3} \\ -\Lambda_{10}\widehat{\mathbf{v}}_1^2\mathbf{E}_{3 \times 2} & \Lambda_{11}\mathbf{E}_3 & -\Lambda_{12}\widehat{\mathbf{v}}_1^2 & \cdots & -\Lambda_{1N}\widehat{\mathbf{v}}_1^2 \\ -\Lambda_{20}\widehat{\mathbf{v}}_2^2\mathbf{E}_{3 \times 2} & -\Lambda_{21}\widehat{\mathbf{v}}_2^2 & \Lambda_{22}\mathbf{E}_3 & \cdots & -\Lambda_{2N}\widehat{\mathbf{v}}_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\Lambda_{N0}\widehat{\mathbf{v}}_N^2\mathbf{E}_{3 \times 2} & -\Lambda_{N1}\widehat{\mathbf{v}}_N^2 & -\Lambda_{N2}\widehat{\mathbf{v}}_N^2 & \cdots & \Lambda_{NN}\mathbf{E}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_0 \\ \ddot{\mathbf{v}}_1 \\ \ddot{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{v}}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 \\ -\Lambda_{11}|\dot{\mathbf{v}}_1|^2\mathbf{v}_1 + g\Lambda_{10}\widehat{\mathbf{v}}_1^2\mathbf{e}_3 \\ -\Lambda_{22}|\dot{\mathbf{v}}_2|^2\mathbf{v}_2 + g\Lambda_{20}\widehat{\mathbf{v}}_2^2\mathbf{e}_3 \\ \vdots \\ -\Lambda_{NN}|\dot{\mathbf{v}}_N|^2\mathbf{v}_N + g\Lambda_{N0}\widehat{\mathbf{v}}_N^2\mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Прямоугольные матрицы $\mathbf{E}_{2 \times 3}$ и $\mathbf{E}_{3 \times 2}$ приходится использовать, чтобы исключить нулевые строку и столбец, соответствующие равной нулю третьей компоненте радиус-вектора тележки \mathbf{r}_0 . В матричной записи (3.13) мы предполагаем, что $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^2$, а $\mathbf{0}_2$ означает нулевой вектор пространства \mathbb{R}^2 .

Векторно-матричная запись (3.13) уравнений движения сферического маятника существенно более компактна по сравнению с системой, записанной в угловых переменных. Структура её не зависит от числа звеньев маятника и позволяет легко получить линеаризованную форму.

3.4. Линеаризованная система

Положения равновесия сферического маятника определяются точно так же, как и для плоского (см. раздел 2.1). В окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \boldsymbol{\varepsilon}_k(t) := \mathbf{v}_k - (0, 0, \sigma_k) = (v_k^1, v_k^2, v_k^3 - \sigma_k)$$

являются малыми. При линеаризации уравнений движения вблизи положения равновесия $\boldsymbol{\sigma}$ мы пренебрегаем величинами порядка $|\boldsymbol{\varepsilon}_k|^2$ и выше. Такие члены мы будем записывать как $o(\boldsymbol{\varepsilon}_k)$.

Запишем матрицу $\widehat{\mathbf{v}}_k^2$, определяемую формулой (3.11), с точностью до бесконечно малых величин:

$$\widehat{\mathbf{v}}_k^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sigma_k v_k^1 \\ 0 & -1 & \sigma_k v_k^2 \\ \sigma_k v_k^1 & \sigma_k v_k^2 & 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon_k).$$

Теперь посмотрим, как линейризуются основные компоненты матричной системы (3.13). Мы имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{v}}_k^2 \mathbf{E}_{3 \times 2} \ddot{\mathbf{r}}_0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sigma_k v_k^1 \\ 0 & -1 & \sigma_k v_k^2 \\ \sigma_k v_k^1 & \sigma_k v_k^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}_0^1 \\ \ddot{r}_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{E}_{3 \times 2} \ddot{\mathbf{r}}_0 + o(\varepsilon_k), \\ \widehat{\mathbf{v}}_k^2 \ddot{\mathbf{v}}_i &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sigma_k v_k^1 \\ 0 & -1 & \sigma_k v_k^2 \\ \sigma_k v_k^1 & \sigma_k v_k^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{v}_i^1 \\ \ddot{v}_i^2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{E}_3 \ddot{\mathbf{v}}_i + o(\varepsilon_k), \quad |\dot{\mathbf{v}}_k|^2 \mathbf{v}_k = o(\varepsilon_k) \\ \widehat{\mathbf{v}}_k^2 \mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sigma_k v_k^1 \\ 0 & -1 & \sigma_k v_k^2 \\ \sigma_k v_k^1 & \sigma_k v_k^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_k v_k^1 \\ \sigma_k v_k^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_k \mathbf{v}_k + o(\varepsilon_k). \end{aligned}$$

Поскольку третья компонента векторов \mathbf{v}_k в окрестности положения равновесия постоянна с точностью до бесконечно малых — $v_k^3 = \sigma_k + o(\varepsilon_k)$, соответствующие строки в матрице линейризованной системы оказываются нулевыми. Естественно поэтому считать неизвестные \mathbf{v}_k двумерными векторами: $\mathbf{v}_k = (v_k^1, v_k^2)$. Тогда линейризованная в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\sigma}$ система (3.13) получается такой:

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} \mathbf{E}_2 & \Lambda_{01} \mathbf{E}_2 & \Lambda_{02} \mathbf{E}_2 & \cdots & \Lambda_{0N} \mathbf{E}_2 \\ \Lambda_{10} \mathbf{E}_2 & \Lambda_{11} \mathbf{E}_2 & \Lambda_{12} \mathbf{E}_2 & \cdots & \Lambda_{1N} \mathbf{E}_2 \\ \Lambda_{20} \mathbf{E}_2 & \Lambda_{21} \mathbf{E}_2 & \Lambda_{22} \mathbf{E}_2 & \cdots & \Lambda_{2N} \mathbf{E}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N0} \mathbf{E}_2 & \Lambda_{N1} \mathbf{E}_2 & \Lambda_{N2} \mathbf{E}_2 & \cdots & \Lambda_{NN} \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_0 \\ \ddot{\mathbf{v}}_1 \\ \ddot{\mathbf{v}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{v}}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 \\ g\Lambda_{10}\sigma_1 \mathbf{v}_1 \\ g\Lambda_{20}\sigma_2 \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ g\Lambda_{N0}\sigma_N \mathbf{v}_N \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Матрица системы (3.14) может быть записана, как тензорное произведение $(\boldsymbol{\Lambda} \otimes \mathbf{E}_2)$ матрицы инерции $\boldsymbol{\Lambda}$ и единичной матрицы \mathbf{E}_2 . Как и матрица инерции, эта матрица является положительно определённой, её собственные значения двукратны и совпадают с собственными значениями матрицы инерции $\boldsymbol{\Lambda}$. Для трёхзвенного маятника из численного примера, рассмотренного на стр. 10, собственные значения матрицы $\boldsymbol{\Lambda}$ таковы:

$$\lambda_1 = 0.001207, \quad \lambda_2 = 0.002272, \quad \lambda_3 = 0.009124, \quad \lambda_4 = 0.511396.$$

Важно отметить, что матрица линейризованной системы сферического маятника не зависит от положения равновесия $\boldsymbol{\sigma}$, что удобно. Для плоского маятника мы наблюдали иную ситуацию.

ГЛАВА 4. Моделирование свободного движения многозвенного маятника

Матричная форма (3.13) уравнений движения удобна для численной реализации. В системе MATLAB написана программа `pend3()` для интегрирования системы (3.13) при помощи стандартного солвера `ode45()`. Ниже приводятся результаты некоторых расчётов. Эти результаты свидетельствуют о правильности построенной математической модели и эффективности численной реализации векторно-матричной модели сферического маятника.

В приведённых примерах мы используем простейшую модель звена маятника: вся масса m_k сосредоточена на конце звена ($\alpha_k = 1$).

Отметим также, что из-за большой неустойчивости системы уравнений движения маятника при интегрировании задавались минимальные возможные допуски по погрешности. (Известно, что уже при $N = 2$ даже система плоского маятника демонстрирует хаотическое поведение.)

В дальнейшем маятники с одинаковыми (по длине и по массе) звеньями мы будем называть *равнозвенными*.

Пример 1. Плоское движение трёхзвенного маятника.

Рассматривая начальные условия, при которых сферический маятник будет совершать плоское движения, мы имеем возможность сравнить результаты интегрирования системы (2.4) плоского маятника и системы (3.13) сферического маятника. Совпадение результатов означает одновременную верификацию соответствующих программ `pend2()` и `pend3()`.

В этом расчёте рассматривался равнозвенный 3-звенный маятник с параметрами

$$m_0 = 0.2, \quad m_k = 0.1, \quad \ell_k = 0.2, \quad k = 1, 2, 3$$

при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(0) &= (0, 0), & \mathbf{v}_1(0) &= \mathbf{v}_3(0) = (0, 0, 1), & \mathbf{v}_2(0) &= (\cos 89^\circ, 0, -\sin 89^\circ), \\ \dot{\mathbf{r}}_0(0) &= (0, 0), & \dot{\mathbf{v}}_1(0) &= \dot{\mathbf{v}}_2(0) = \dot{\mathbf{v}}_3(0) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

То есть в начальный момент маятник неподвижен и находится в «сложенном» состоянии, вблизи точки равновесия $\boldsymbol{\sigma} = (+1, -1, +1)$. При указанных начальных условиях маятник движется, оставаясь в вертикальной плоскости $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$.

Системы (2.4) и (3.13) интегрировались на интервале $t \in [0, 10]$.

На рис. 4.1 изображена траектория свободного конца маятника (конца третьего звена) в плоскости колебаний относительно положения тележки. Кривые, полученные с помощью программ `pend2()` и `pend3()` совпадают на протяжении всего промежутка интегрирования, что свидетельствует об эффективности обеих моделей.

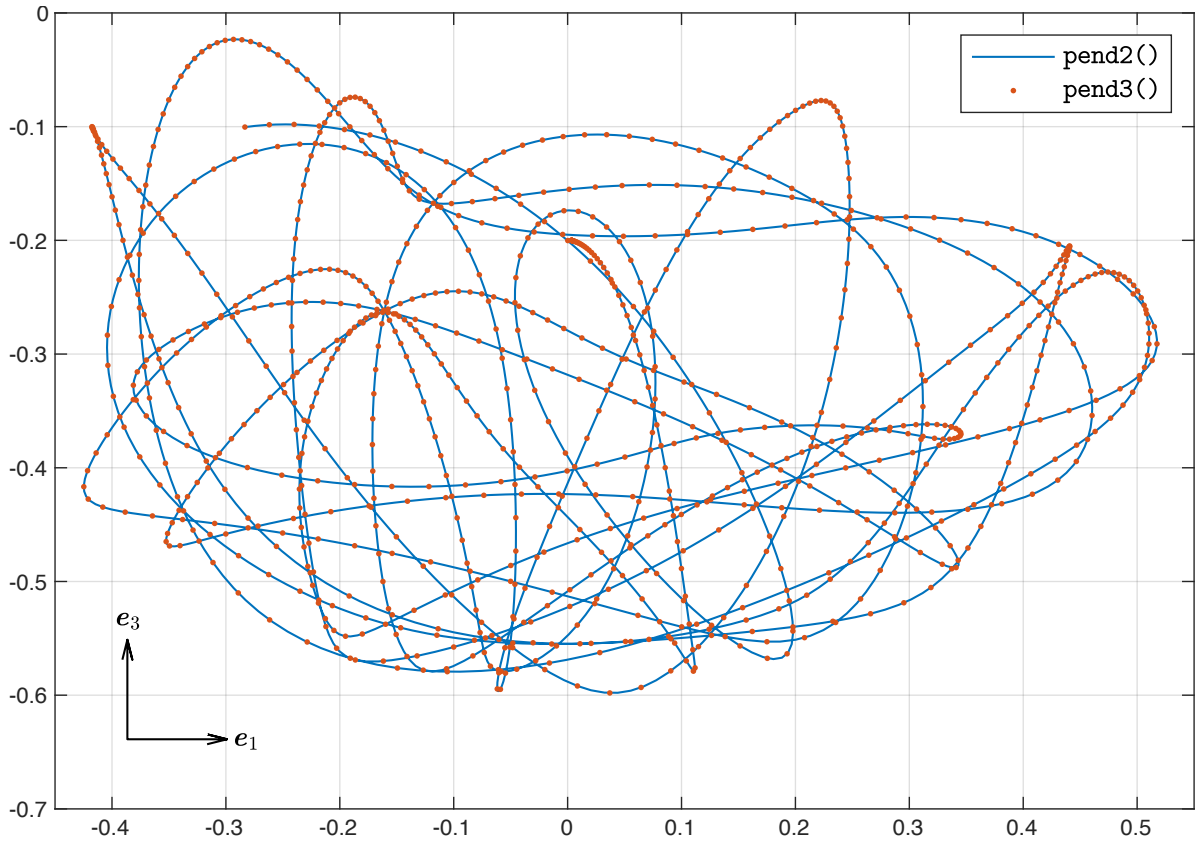


Рис. 4.1: Траектория свободного конца маятника относительно тележки

Приведём также график изменения кинетической энергии маятника (рис. 4.2).

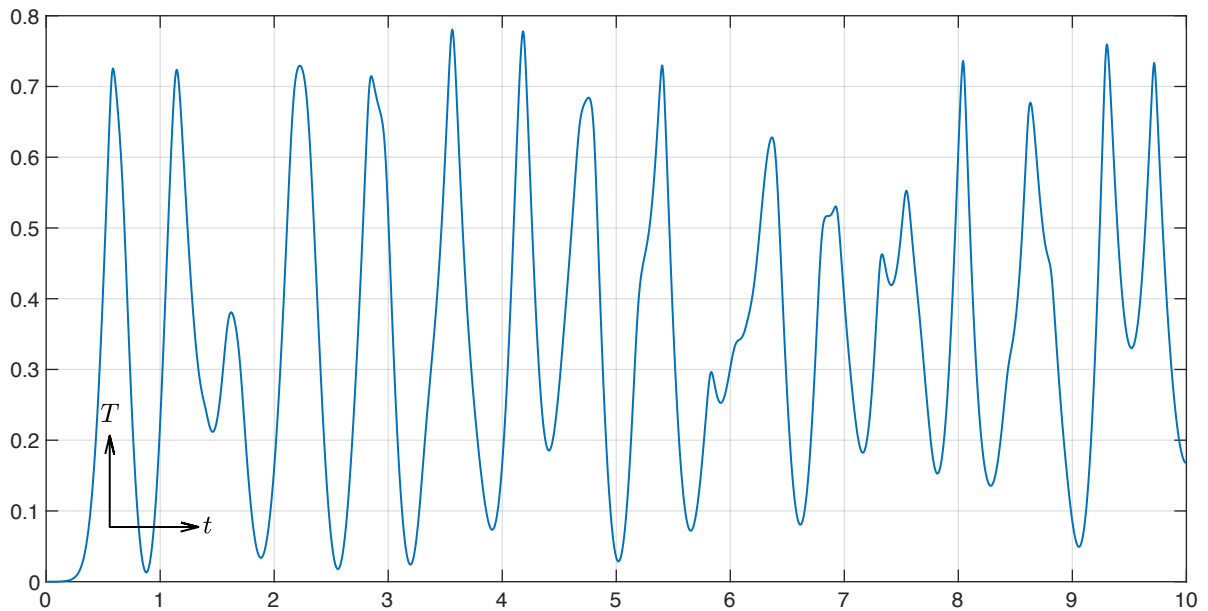


Рис. 4.2: Кинетическая энергия трёхзвенного маятника

О точности вычислений можно судить по величине отклонения полной энергии $E = T + U$ от начального значения. На рис. 4.3 показаны графики погрешности ΔE вычисления полной энергии системы. Как видно, сохранение энергии обеспечивается с высокой точностью. Двумерная модель `pend2()` имеет преиму-

щество по точности, что кажется естественным, учитывая простоту этой модели по сравнению с трёхмерной.

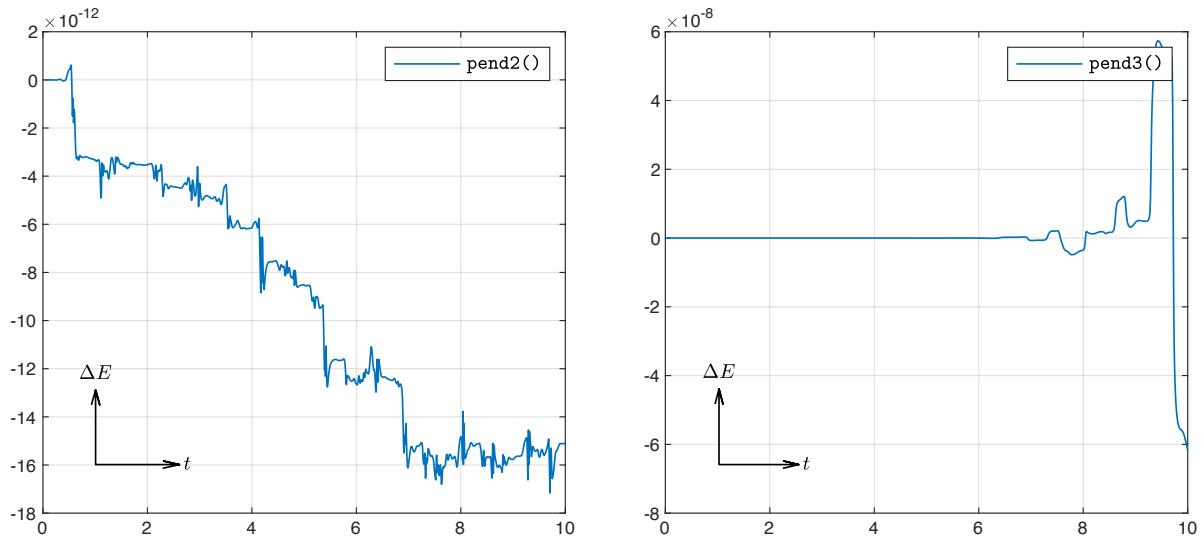


Рис. 4.3: Погрешность выполнения закона сохранения энергии

Пример 2. Плоское движение многозвенной цепи.

Для изучения возможности применения построенных моделей к маятникам с большим числом звеньев было проведено моделирование плоского движения 11-звенной цепи со следующими параметрами:

$$m_0 = 0.5, \quad m_k = 0.2, \quad \ell_k = 0.2, \quad k = 1, \dots, 11.$$

В начальный момент цепь расположена горизонтально, неподвижна и прямолинейна:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(0) &= (0, 0), & \mathbf{v}_k(0) &= (1, 0, 0), \\ \dot{\mathbf{r}}_0(0) &= (0, 0), & \dot{\mathbf{v}}_k(0) &= (0, 0, 0), \quad k = 1, \dots, 11. \end{aligned}$$

При таких начальных условиях движение цепи является плоским и происходит в плоскости $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3$.

На рис. 4.4 изображены траектории свободного конца цепи, вычисленные по двумерной и трёхмерной моделям. Движение здесь весьма сложно, и результаты расчётов начинают расходиться спустя приблизительно 4 сек после начала движения. Объясняется это тем, что столь сложная система крайне чувствительна к любым вычислительным погрешностям — т. н. «эффект бабочки».

Отметим, что точность сохранения энергии в этом примере для моделей `pend2()` и `pend3()`, как и в примере 1, довольно высокая и составляет соответственно

$$\Delta E_1 = 7.3344\text{e-}10, \quad \Delta E_2 = 1.0159\text{e-}06.$$

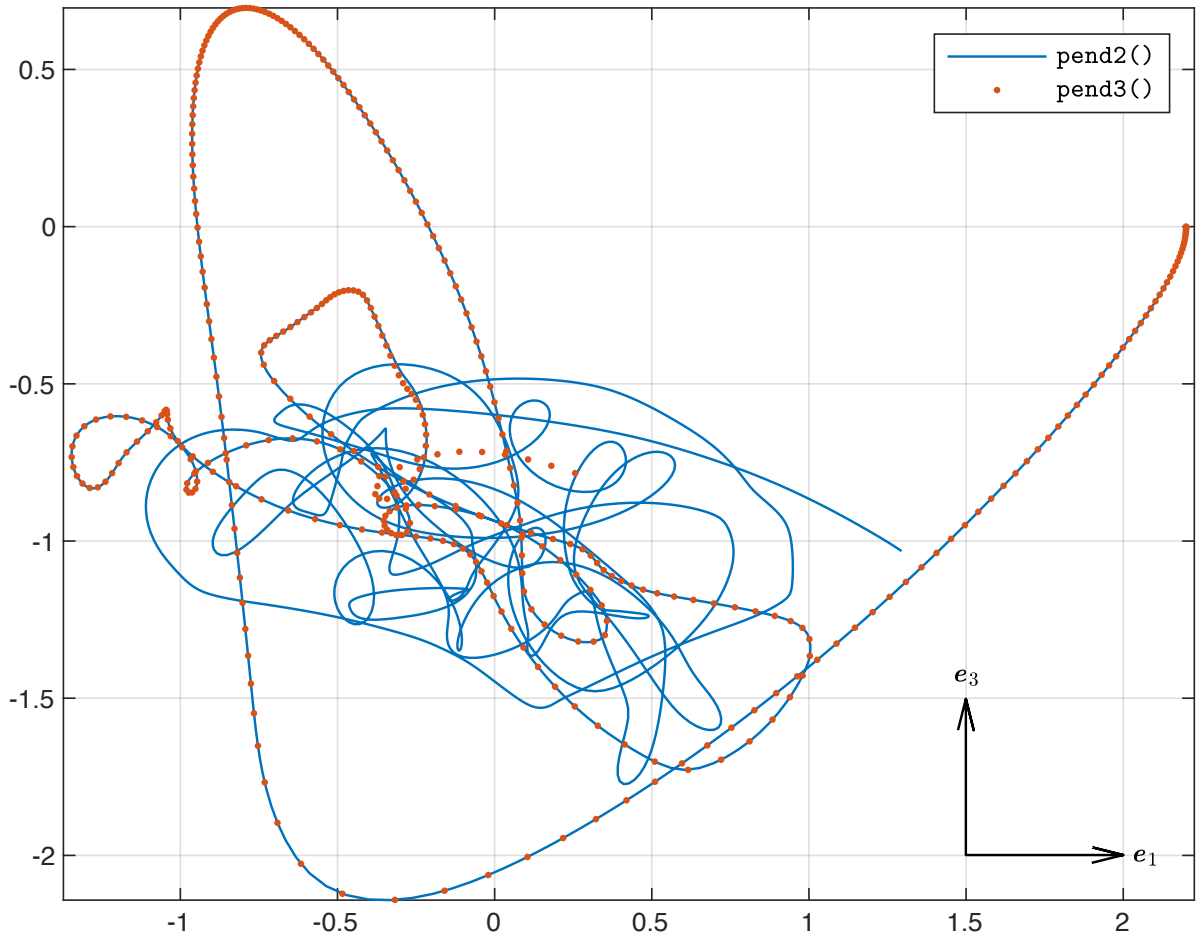


Рис. 4.4: Траектория свободного конца маятника относительно тележки

Пример 3. Пространственное движение 5-звенного маятника.

В этом примере для тестирования трёхмерной модели `pend3()` была выбрана пространственная конфигурация общего вида. Рассматривается 5-звенный маятник, звенья которого имеют различную массу и длину:

$$m_0 = 2, \quad \mathbf{m} = (1, 1, 1, 0.7, 0.5), \quad \ell = (0.6, 0.5, 0.5, 0.35, 0.3).$$

Начальное положение выбиралось случайным образом вблизи верхнего положения равновесия $\boldsymbol{\sigma} = (+1, +1, +1, +1, +1)$:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0.13551 & 0.01129 & 0.21537 & 0.27429 & -0.18213 \\ -0.21331 & 0.28717 & -0.03313 & -0.35121 & -0.06082 \\ 0.96754 & 0.95781 & 0.97597 & 0.89522 & 0.98139 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_0(0) = (0, 0), \quad \dot{\mathbf{r}}_0(0) = (0, 0), \quad \dot{\mathbf{v}}_k(0) = (0, 0, 0), \quad k = 1, \dots, 5.$$

В начале движения маятник падает вниз, а затем совершает сложное пространственное движение. На рисунке рис. 4.5 показана траектория тележки маятника, о скорости движения можно судить по точкам, нанесённым на график: они расставлены с интервалом $\Delta t = 0.01$.

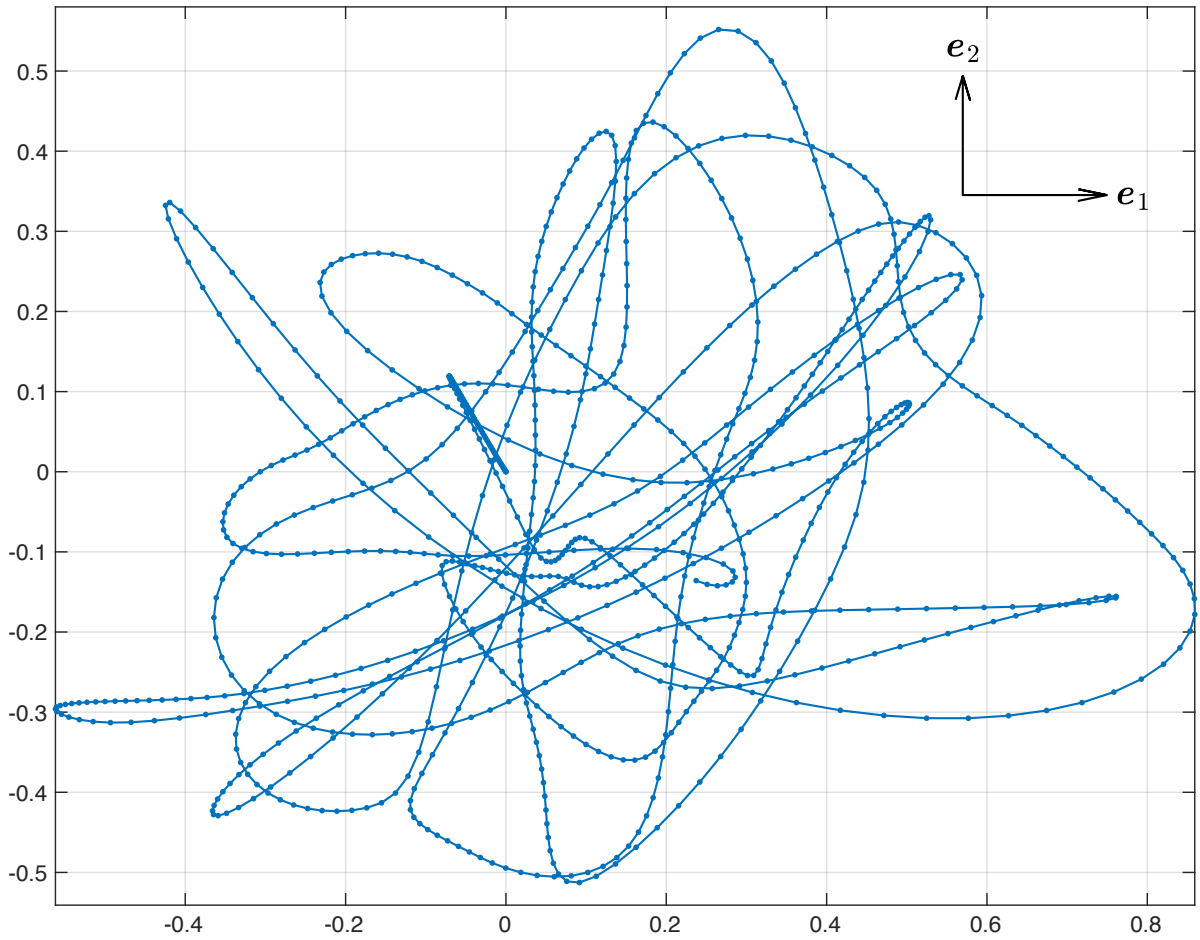


Рис. 4.5: Траектория тележки при движении 5-звенного маятника

Для оценки точности интегрирования на рис. 4.6 приведён график погрешности полной энергии. видно, что закон сохранения выполняется с высокой точностью.

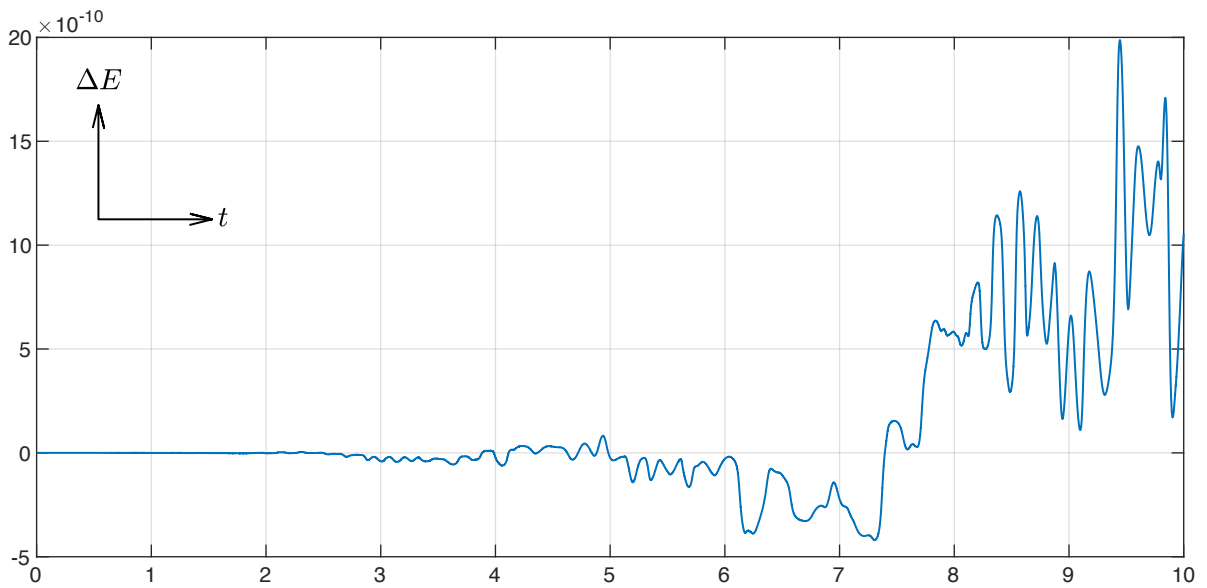


Рис. 4.6: Погрешность выполнения закона сохранения энергии

Приведённые примеры демонстрируют правильность построенных мате-

матических моделей плоского и сферического маятников, а также эффективность программной реализации.

По результатам расчётов выполнялась трёхмерная визуализация движения маятника для каждого из случаев.

ГЛАВА 5. Задача стабилизации маятника в положении равновесия

Система (3.13) описывает свободное движение сферического маятника на тележке. Предположим, что на тележку действует в плоскости $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ внешняя сила

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u^1(t), u^2(t)).$$

При помощи этой силы можно управлять движением маятника. В частности можно поставить задачу удержания (стабилизации) маятника в положении неустойчивого равновесия при помощи обратной связи, выбирая закон управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, исходя из текущего состояния системы.

В случае системы (3.13) состояние механической системы определяется положениями и скоростями элементов системы — вектором \mathbf{x} длины $n = 6N + 4$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{y} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N).$$

Простейшим видом обратной связи является *линейный регулятор*, для которого управляющее воздействие линейно зависит от вектора \mathbf{y} состояния системы:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}, \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{K} называется *матрицей управления*, а её элементы — *параметрами управления*.

Синтез управления для нелинейной системы — сложная задача. Однако можно построить управление для линеаризованной в окрестности равновесия. Тогда применительно к исходной нелинейной возможно получить асимптотическую управляемость в окрестности равновесия.

Опишем процедуру синтеза управления для линеаризованной системы. Начнём с основных понятий линейной теории управления.

ГЛАВА 6. Устойчивость и управляемость линейных систем

Рассмотрим линейную стационарную систему дифференциальных уравнений порядка n в нормальной форме в матричном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (6.1)$$

Система (6.1) *устойчива*, если при любых начальных условиях её решение стремится к нулевому при $t \rightarrow \infty$. Известно [?], что система является устойчивой, если спектр матрицы \mathbf{A} целиком лежит в левой комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Введём в систему (6.1) линейное управление $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $p \leq n$ (обратную связь):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}. \quad (6.2)$$

Поставим задачу о синтезе управления, обеспечивающего стабилизацию системы в положении равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Для устойчивой системы вопрос о возможности её стабилизации не возникает. Если система (6.1) неустойчива, то задача выбора подходящего управления становится содержательной. При включении управления \mathbf{u} мы получаем систему, замкнутую линейной обратной связью

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}. \quad (6.3)$$

За счёт выбора матрицы управления \mathbf{K} можно пытаться обеспечивать устойчивость системы (6.3). Для этого необходимо, чтобы спектр матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}$ замкнутой системы лежал в левой комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Если подходящее управление (матрица \mathbf{K}) существует, то система (6.2) называется *вполне управляемой*. Известно условие, при котором возможно добиться устойчивости системы с управлением (6.3). Его даёт следующий критерий управляемости [?].

Критерий Калмана: Система (6.2) вполне управляема, если матрица управляемости $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times np}$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (6.4)$$

имеет полный ранг (равный n).

Полная управляемость системы (6.2) означает, что за счёт линейного управления $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ систему можно вернуть в состояние равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ из любого начального состояния.

Применим описанные критерии к линеаризованной системе уравнений движения сферического маятника.

ГЛАВА 7. Устойчивость и управляемость линеаризованной системы многозвенного маятника

Маятник с N звеньями имеет 2^N положений равновесия, задаваемых вектором $\boldsymbol{\sigma} = (\pm 1, \dots, \pm 1)$. В разделе 3.4 получена линеаризованная форма (3.14) уравнений движения маятника в окрестности произвольного положения равновесия $\boldsymbol{\sigma}$. В матричной форме она имеет вид

$$(\boldsymbol{\Lambda} \otimes \mathbf{E}_2)\ddot{\mathbf{y}} = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{E}_2)\mathbf{y}, \quad (7.1)$$

где матрица \mathbf{G} диагональна и может быть записана в виде

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & G_N \end{pmatrix}, \quad G_k = g\Lambda_{k0}\sigma_k.$$

Напомним, что вектор \mathbf{y} линеаризованной системы содержит только горизонтальные компоненты векторов \mathbf{v}_k и имеет, следовательно, длину $m = 2N + 2$:

$$\mathbf{y} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N), \quad \mathbf{r}_0 = (r_0^1, r_0^2), \quad \mathbf{v}_k = (v_k^1, v_k^2).$$

Ясно, что среди возможных 2^N состояний равновесия устойчивым является только состояние «все звенья вниз» $\boldsymbol{\sigma} = (-1, -1, \dots, -1)$. Обосновать это утверждение формально можно путём вычисления спектра матрицы линеаризованной системы. Ниже приводится пример для 3-звенного маятника.

Приведём систему уравнений движения (7.1) к нормальной форме (6.1). Для этого введём вектор производных $\mathbf{z} = \dot{\mathbf{y}}$. Тогда система (7.1) запишется так:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{z}, \\ \dot{\mathbf{z}} = ((\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{G}) \otimes \mathbf{E}_2)\mathbf{y}, \end{cases} \implies \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_m \\ (\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{G}) \otimes \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили нормальную форму (6.1) линеаризованной системы уравнений движения, где вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2m}$ и матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ имеют блочный вид

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_m \\ (\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{G}) \otimes \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Выясним, как устроен спектр матрицы \mathbf{A} .

Мы знаем, что матрица $\boldsymbol{\Lambda}$ симметрична, а матрица \mathbf{G} диагональна и имеет нулевой элемент на главной диагонали. В таком случае собственные значения матрицы $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{G}$ вещественны, причём одно из них нулевое. Обозначим этот спектр как $\{0, \mu_1, \dots, \mu_N\} \subset \mathbb{R}$.

Матрица $(\Lambda^{-1}\mathbf{G}) \otimes \mathbf{E}_2$ будет иметь тот же самый спектр, но только двукратный: каждое из собственных чисел $0, \mu_1, \dots, \mu_N$ повторяется дважды.

Теперь воспользуемся свойством определителя блочной матрицы

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{D}_{11}\mathbf{D}_{22} - \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_{21}),$$

если все блоки \mathbf{D}_{ij} одинакового размера и блоки $\mathbf{D}_{21}, \mathbf{D}_{22}$ второй строки коммутируют ($\mathbf{D}_{21}\mathbf{D}_{22} = \mathbf{D}_{22}\mathbf{D}_{21}$).

Применяя это соотношение к матрице $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$, получим

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det(\lambda^2\mathbf{E} - (\Lambda^{-1}\mathbf{G}) \otimes \mathbf{E}_2),$$

откуда следует, что собственные числа матрицы \mathbf{A} являются корнями из собственных чисел матрицы $(\Lambda^{-1}\mathbf{G}) \otimes \mathbf{E}_2$, то есть разбиваются на четвёрки

$$\lambda_i^{1,2,3,4} = \{-\sqrt{\mu_i}, -\sqrt{\mu_i}, \sqrt{\mu_i}, \sqrt{\mu_i}\}.$$

Таким образом, все ненулевые собственные числа матрицы \mathbf{A} двукратны и являются либо вещественными, либо чисто мнимыми, причём каждое собственное число λ_i входит в спектр вместе с противоположным ему числом $-\lambda_i$. Также у матрицы \mathbf{A} имеется четырёхкратное нулевое собственное число.

Проиллюстрируем эти свойства спектра на примере 3-звенного маятника с параметрами

$$m_0 = 0.2, \quad m_k = 0.1, \quad \ell_k = 1, \quad \alpha_k = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

В таблице приведены собственные числа (без учёта кратности) для всех $2^3 = 8$ положений равновесия. Для обозначения положений равновесия мы пользуемся индексом s_σ , введённым на стр. 9.

s_σ	0	1	2	3	4	5	6	7
λ_1	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_2	0	0	0	0	0	0	0	0
λ_3	-2.75i	-3.77i	-3.74i	-3.08	-3.08i	-3.74	-3.77	-2.75
λ_4	+2.75i	+3.77i	+3.74i	+3.08	+3.08i	+3.74	+3.77	+2.75
λ_5	-5.27i	-3.92	-5.20	-6.01i	-6.01	-5.20i	-3.92i	-5.27
λ_6	+5.27i	+3.92	+5.20	+6.01i	+6.01	+5.20i	+3.92i	+5.27
λ_7	-8.23i	-8.05i	-6.13i	-6.43	-6.43i	-6.13	-8.05	-8.23
λ_8	+8.23i	+8.05i	+6.13i	+6.43	+6.43i	+6.13	+8.05	+8.23

Таблица 7.1: Собственные числа матрицы \mathbf{A}

Мы видим, что нейтрально устойчивым является только положение $s_\sigma = 0$ (все звенья вниз). Для всех остальных положений в спектре матрицы \mathbf{A} присутствуют собственные числа с положительной вещественной частью. В положении

«все звенья вниз» система находится на границе устойчивости: ее колебания будут продолжаться бесконечно долго без уменьшения амплитуды.

Перейдём теперь к вопросу *управляемости* линеаризованной системы уравнений движения многозвенного маятника.

Как было сказано выше, управлять движением маятника можно за счёт силового воздействия $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (u^1(t), u^2(t))$ на тележку. Координаты тележки — это две первые компоненты вектора состояния \mathbf{y} системы (7.1). Следовательно, система с управлением будет иметь вид

$$(\Lambda \otimes \mathbf{E}_2)\ddot{\mathbf{y}} = (\mathbf{G} \otimes \mathbf{E}_2)\mathbf{y} + (\mathbf{C} \otimes \mathbf{E}_2)\mathbf{u}, \quad \text{где } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Эту систему мы приводим к нормальному виду

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

аналогично тому, как это было проделано выше с системой без управления (7.1). Мы получаем

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\Lambda^{-1}\mathbf{C}) \otimes \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, линеаризованная система уравнений движения многозвенного маятника в нормальной форме имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}_m \\ (\Lambda^{-1}\mathbf{G}) \otimes \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\Lambda^{-1}\mathbf{C}) \otimes \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} \mathbf{u}. \quad (7.3)$$

Вычисляя матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} для маятника с заданными параметрами и для выбранного положения равновесия $\boldsymbol{\sigma}$, а затем находя матрицу управляемости \mathbf{P} (6.4), с помощью критерия Калмана можно определить, является ли система (7.3) управляемой. Такие вычисления были проделаны для равнозвенных маятников с различным числом звеньев $N = 1, 2, 3, \dots$.

Напомним, что *равнозвенным* мы называем маятник с одинаковыми (по длине и по массе) звеньями. В этом разделе мы рассматриваем простейшую модель звена — модель с массой, сосредоточенной на конце $\alpha = 1$.

Равнозвенный маятник с заданной массой m_0 тележки определяется всего двумя физическими параметрами — массой m и длиной ℓ звена. Поэтому оказывается возможным для выбранного положения равновесия $\boldsymbol{\sigma}$ построить на параметрической плоскости m, ℓ *область управляемости* линеаризованной системы по критерию Калмана.

Система уравнений многозвенного маятника нелинейна, поэтому говорить о её управляемости вблизи того или иного положения равновесия в терминах

линейной теории мы можем лишь *асимптотически*, то есть в достаточно малой окрестности точки равновесия.

(заготовка — текст будет после раздела про управление)

Довольно очевидно, что с ростом числа звеньев N управляемость системы должна ухудшаться. Кроме того, ясно, что при достаточно больших N задача стабилизации неустойчивого равновесия невыполнима: невозможно стабилизировать велосипедную цепь.

Однако маятник с любым числом звеньев, находящийся точно в положении равновесия

$$\mathbf{v}_k = (0, 0, \sigma_k), \quad \dot{\mathbf{v}}_k = (0, 0, 0), \quad k = 1, \dots, N,$$

будет оставаться в нём бесконечно, поскольку такое состояние является стационарным решением системы (3.13).

Поэтому можно надеяться, что при достаточно малых отклонениях от равновесия найдётся управление, которое будет способно асимптотически стабилизировать систему.

ГЛАВА 8. Построение управления для линеаризованной системы

Критерий Калмана даёт лишь возможность утверждать, что искомый регулятор \mathbf{K} существует или не существует. Критерий не даёт рецепта выбора параметров управления (построения матрицы \mathbf{K}). Задача построения матрицы управления называется задачей *синтеза управления*.

Одним из способов синтеза управления является использование вариационного подхода с квадратичным *функционалом качества*.

Линейный квадратичный регулятор

Для линейной системы непрерывного времени, описываемой системой уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}. \quad (8.1)$$

Необходимо найти закон управления, который бы минимизировал функционал качества

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \rightarrow \min,$$

где \mathbf{Q} — симметричная положительно определенная матрица $(4N+4) \times (4N+4)$, \mathbf{R} — положительно определенная матрица 2×2 .

Закон управления по отрицательной обратной связи имеет вид

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \text{ где } \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}.$$

\mathbf{P} находится из решения уравнения Риккати

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0.$$

8.1. Численные примеры

Пример 1. Для начала рассмотрим различные конфигурации s_σ системы однозвенного маятника. Параметры маятника выберем следующими:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \quad \ell_1 = 1, \\ m_0 &= 2, \quad m_1 = 1. \end{aligned}$$

λ_i	$s_\sigma = 0$	$s_\sigma = 1$
λ_1	0	0
λ_2	0	0
λ_3	$-3.8360i$	-3.8360
λ_4	$+3.8360i$	3.8360

Таблица 8.1: Алгебраическая кратность λ_i равна двум

Случай, когда $s_\sigma = 0$ (звено направлено вниз). Собственные числа матрицы \mathbf{A} имеют нулевые вещественные части, то есть система является нейтрально

устойчивой. Подобное поведение объясняется тем, что мы рассматриваем свободное движение без учета трения, поэтому маятник выведенный из положения равновесия будет качаться бесконечно долго. В реальности трение, безусловно, есть. Колебания маятника будут постепенно затухать (уменьшается амплитуда), и система возвращается в положение равновесия. Можно сказать, что маятник с трением обладает асимптотической устойчивостью.

Для случай, когда $s_\sigma = 1$ (звено направлено вверх). Некоторые собственные числа матрицы \mathbf{A} имеют положительные вещественные части, то есть система является неустойчивой: при небольшом отклонении маятник упадет вниз и продолжит качаться бесконечно долго.

Размерность пространства состояний для однозвенного ($N = 1$) маятника равна 8. Найдем ранг матрицы управляемости используя функцию `ctrb(.,.)` в системе MATLAB.

Для $s_\sigma = 1$: $rank(\mathbf{U}) = 8$. Критерий Калмана выполняется, следовательно найдется ограниченное кусочно непрерывное управление $\mathbf{u}(t)$; система управляема.

Воспользуемся встроенной функцией `[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R)` для нахождения оптимального статического матричного звена \mathbf{K} , которая принимает на вход следующие матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & -4.9050 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4.9050 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14.7150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14.7150 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.5000 & 0 \\ 0 & -0.5000 \\ 0.5000 & 0 \\ 0 & 0.5000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1, 8, 8, 1, 1, 8, 8), \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем закон управления по отрицательной обратной связи $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1.0000 & - & 73.2687 & - & 2.9896 & - & 19.9918 & - \\ & 1.0000 & - & 73.2687 & - & 2.9896 & - & 19.9918 \end{pmatrix}.$$

Окончательный вид системы (??), описывающей стабилизацию маятника при

$s_\sigma = 1$ имеет следующий вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}, \text{ где } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} r_0^1 \\ r_0^2 \\ v_1^1 \\ v_1^2 \\ \dot{r}_0^1 \\ \dot{r}_0^2 \\ \dot{v}_1^1 \\ \dot{v}_1^2 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Пример 2. Ранее в табл. (??) мы провели спектральный анализ матрицы \mathbf{A} для трехзвенного маятника с параметрами

$$m_0 = 0.2, \quad m_1 = m_2 = m_3 = 0.1, \\ \ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 1, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1.$$

Размерность пространства состояний для трехзвенного ($N = 3$) маятника равна 16. Найдем ранг матрицы управляемости, используя функцию `ctrb(.,.)` в системе MATLAB и представим результаты в форме таблицы.

$s_{\sigma i}$	$\text{rank}(\mathbf{U})$
$s_\sigma = 0$	16
$s_\sigma = 1$	16
$s_\sigma = 2$	16
$s_\sigma = 3$	16
$s_\sigma = 4$	16
$s_\sigma = 5$	16
$s_\sigma = 6$	16
$s_\sigma = 7$	16

Таблица 8.2: Ранг матрицы управляемости — $\text{rank}(\mathbf{U})$

Критерий Калмана выполняется для всех конфигураций $s_{\sigma i}$, следовательно найдется такое ограниченное кусочно непрерывное управление $\mathbf{u}(t)$, что будет минимизирован функционал качества J .

Построим закон управления для любых двух конфигураций кроме $s_\sigma = 0$, так как случай положения системы на границе устойчивости нас не интересует.

Первый случай $s_\sigma = 6$ (первые два звена направлены вверх, последнее вниз). На вход функции `[K,S,E]=lqr(A,B,Q,R)` подадим следующие матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{8 \times 8} & \mathbf{E}_{8 \times 8} \\ \Lambda^{-1} \otimes \mathbf{E}_2 \mathbf{G} & \mathbf{0}_{8 \times 8} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{8 \times 2} \\ \Lambda^{-1} \otimes \mathbf{E}_2 \mathbf{C} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\Lambda^{-1} \otimes \mathbf{E}_2 \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -14.7150 & 0 & - & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14.7150 & 0 & - & 0 & - \\ 0 & 0 & 44.1450 & 0 & -19.6200 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 44.1450 & 0 & -19.6200 & 0 & - \\ 0 & 0 & -29.4300 & 0 & 39.2400 & 0 & -9.8100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -29.4300 & 0 & 39.2400 & 0 & -9.8100 \\ 0 & 0 & - & 0 & -19.6200 & 0 & 19.6200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & -19.6200 & 0 & 19.6200 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{-1} \otimes \mathbf{E}_2 \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5.0000 & 0 \\ 0 & 5.0000 \\ -5.0000 & 0 \\ 0 & -5.0000 \\ & 0 \\ 0 & \\ - & 0 \\ 0 & - \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 1, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 1, 1, 8, 8, 8, 8, 8, 8), \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем закон управления по отрицательной обратной связи $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{K}^T = \begin{pmatrix} 1.0000 & \\ - & 1.0000 \\ -103.3028 & - \\ - & -103.3028 \\ 168.2394 & \\ & 168.2394 \\ 41.1375 & \\ & 41.1375 \\ 2.6176 & \\ - & 2.6176 \\ -4.5042 & \\ - & -4.5042 \\ 28.7110 & \\ & 28.7110 \\ 6.0853 & \\ & 6.0853 \end{pmatrix}.$$

Для второго случая $s_\sigma = 7$ (звенья направлены вверх) аналогично получаем

закон управления по отрицательной обратной связи $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$, где

$$\mathbf{K}^T = \begin{pmatrix} -1.0000 & -1.0000 \\ -162.5957 & -162.5957 \\ 494.6946 & - \\ - & 494.6946 \\ -378.8782 & -378.8782 \\ -3.0882 & -3.0882 \\ -11.6695 & -11.6695 \\ 54.3806 & - \\ - & 54.3806 \\ -78.0928 & -78.0928 \end{pmatrix}.$$

Окончательный вид системы, описывающей динамику маятника возле положения равновесия для конфигураций: $s_\sigma = 6$, $s_\sigma = 7$ — имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Заключение

В работе рассмотрена задача управления многозвенным сферическим маятником на тележке. Начальные рассуждения говорили в пользу того, что такая система является неуправляемой. Однако расчёты показали обратное.

- Получены уравнения движения плоского многозвенного маятника. Найдена компактная матричная форма системы уравнений движения, применимая для любого числа звеньев. Построена также линеаризованная форма этой системы для произвольного положения равновесия.
- В векторной форме получена система уравнений движения сферического маятника с произвольным числом звеньев и произвольными динамическими характеристиками звеньев. Как и в двумерном случае, выведена компактная векторно-матричная общая форма этих уравнений. Данный вид системы уравнений позволил найти также их форму, линеаризованную в окрестности произвольного положения равновесия.
- Для линеаризованной формы уравнений движения исследована управляемость на основе критерия Калмана. Для равнозвенных маятников с числом звеньев $N = 1, \dots, 8$ найдены области управляемости на плоскости параметров m, ℓ (масса звена, длина звена). Показано, что имеются как 1-звенные маятники, линеаризованная форма для которых неуправляема, так и 8-звенные маятники, для которых управление линеаризованной формой возможно.
- Для синтеза управления многозвенными маятниками в положении неустойчивого равновесия применена теория линейно-квадратичного управления. Большая серия численных экспериментов показала, что для многих случаев линейно-квадратичный регулятор позволяет стабилизировать маятник, несмотря на то, что критерий Калмана не выполняется. По этому направлению планируется продолжить исследования.
- Для интегрирования систем уравнений движения плоского и сферического маятника созданы программы `pend2()` и `pend3()`, а также ряд вспомогательных программ в системе MATLAB. Программы были верифицированы путём сравнения результатов расчётов разными методами, а также проверкой выполнения закона сохранения энергии. Интегрирование систем уравнений производилось при помощи стандартного солвера `ode45()` системы MATLAB.
- По результатам расчетов как свободного, так и управляемого движения маятников выполнена трёхмерная визуализация их динамики, которая позволяет наблюдать работу регулятора напрямую.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Аракелян Э.К., Пикина Г.А. Оптимизация и оптимальное управление: учебное пособие; под ред. Т.Е. Щедеркиной. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательский дом МЭИ, 2008. — 408 с. ISBN 978-5-383-00253-7.
- [2] Анохин Н.В. Управление нелинейными механическими системами с дефицитом управляющих воздействий в окрестности положения равновесия: диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. — Москва, 2014. — 72 с.
- [3] Бабаков Н.А., Воронов А.А., Воронова А.А., Дидук Г.А., Дмитриева Н.Д., Ким Д.П., Меиский Б.М., Попович П.Н. Теория автоматического управления: учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления; под ред. А.А.Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986. — 367 с., ил.
- [4] Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. — 4-е изд., испр. и доп. — СПб, Изд-во «Профессия», 2003. — 752 с. — (Серия: Специалист). ISBN 5-93913-035-6.
- [5] Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыркин Г.В. Вариационное исчисление и оптимальное управление: учебник для вузов; под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2018. — 488 с.: ил. — (Математика в техническом университете; вып. 15). ISBN 978-5-7038-3845-7, ISBN 978-5-7038-4876-0 (вып. 15).
- [6] Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования: учебное пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, серия «Учебники НГТУ», 2003. — 364 с. ISBN 5-7782-0389-6.
- [7] Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 160 с. ISBN 5-354-00622-8.
- [8] Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах: учебное пособие. — М.: Высш.шк., 2003. — 583 с.:ил. ISBN 5-06-004136-0.
- [9] Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: учебное пособие. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 616 с.
- [10] Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления: учебное пособие. — М.: «Ленард», 2019. — 500 с.: ил. ISBN 978-5-9710-6486-2.

- [11] Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: учебное пособие для вузов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 304 с. ISBN 5-02-014112-7.
- [12] Беллман Р., Динамическое программирование. — М.: Книга по Требованию, 2014. — 400 с. ISBN 978-5-458-29091-3.
- [13] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления, перев. с англ., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1972. — 576 с.
- [14] Taeyoung Lee, Melvin Leok and N.Harris McClamroch. Lagrangian mechanics and variational integrators on two-spheres. — *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 2009. 79:1147–1174.
- [15] Taeyoung Lee, Melvin Leok, N.Harris McClamroch. Dynamics and Control of a Chain Pendulum on a Cart. — DOI: 10.1109/CDC.2012.6427059.