**Пример решения контрольной задачи**

**на применение методов Лагранжа и Ньютона**

**к выводу дифференциального уравнения движения**

**системы c 1ой степенью свободы.**

Три тела связаны нерастяжимой нитью. Каток массы m1 движется без проскальзывания, но с сопротивлением качению (коэффициент k), и сопротивлением дороги (k1) . Радиус инерции катка относительно центральной оси 𝜚. Груз m3 скользит с трением (коэффициент f)

1. Приложите к одному из тел силу или момент так, чтобы нити были натянуты, и система двигалась из состояния покоя в соответствующем силе (моменту) направлении.

𝛼

m3g

m2g

m1g

1. Выведите дифференциальное уравнение движения системы методом Лагранжа.
2. Напишите дифференциальные уравнения движения каждого из тел методом Ньютона и соотношения ускорений тел.
3. К следующему занятию из уравнений Ньютона получите то же дифференциальное уравнение движения системы, что и методом Лагранжа.

А.Костарев

1. К блоку 1 можно приложить момент, направленный против часовой стрелки. К телу 2 нельзя ничего приложить поскольку может ослабнуть одна из нитей. Приложим к телу 3 силу **F**, направленную вниз вдоль наклонной плоскости. Будем считать, что система движется из состояния покоя в направлении силы F
	1. Положение системы можно задать несколькими обобщенными координатами: углами поворота φ и φ1, координатой s центра катка 2, координатой *x* тела 3. Система остановится, если зафиксировать любую из перечисленных координат при натянутых нитях. Значит, система имеет одну степень свободы, и только одна из обобщенных координат является независимой. Выберем угол поворота 𝜑 катка 2 за независимую координату, и согласуем направления всех координат так, чтобы они одновременно увеличивались.

**F**

𝜌

**Fтр**

**N3**

**N2**

𝛼

m3g

Mтк

𝜑

**Fс**

**F\*тр**

m2g

m1g

𝜑1

s

x

Р

**R1**

R

r

$$T\_{1}$$

$$T\_{2}$$

T2

T1

 Запишем единственное уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=Q\_{φ}$$

* 1. Найдем кинетическую энергию системы, как сумму энергий, соответствующих типу движения тел: вращательного для тела 1, плоского для тела 2 и поступательного для тела 3.

$$T=\frac{J\_{1}}{2}\dot{φ}\_{1}^{2}+\frac{m\_{2}}{2}\dot{s}^{2}+\frac{J\_{2}}{2}\dot{φ}^{2}+\frac{m\_{3}}{2}\dot{x}^{2}$$

 Моменты инерции тел 1 (пусть будет сплошным диском) и 2:

$$J\_{1}=\frac{m\_{1}}{2}r\_{1}^{2}; J\_{2}=m\_{2}ρ^{2}$$

 Поскольку система имеет одну степень свободы, то все скорости выражаем через обобщенную скорость $\dot{φ}$. В катке скорости линейно зависят от расстояния до МЦС (Р).

$$\dot{s}=R\dot{φ}; \dot{x}=(R-r)\dot{φ}; $$

Скорость верхней части нити

$$v=(R+r)\dot{φ}$$

Угловая скорость блока 1:

$$\dot{φ}\_{1}=\frac{v}{r\_{1}}=\frac{R+r}{r\_{1}}\dot{φ}$$

Подставив формулы кинематических связей, получаем выражение кинетической энергии через обобщенную скорость $\dot{φ}$.

$$T=\frac{m\_{1}}{4}r\_{1}^{2}\left(\frac{R+r}{r\_{1}}\right)^{2}\dot{φ}^{2}+\frac{m\_{2}}{2}R^{2} \dot{φ}^{2}+\frac{m\_{2}ρ^{2}}{2}\dot{φ}^{2}+\frac{m\_{3}}{2}(R-r)^{2}\dot{φ}^{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{m\_{1}}{2}\left(R+r\right)^{2}+m\_{2}\left(R^{2}+ρ^{2}\right)+m\_{3}(R-r)^{2}\right]\dot{φ}^{2}$$

$$T=\frac{J}{2}\dot{φ}^{2}$$

Постоянную величину в квадратных скобках можно назвать моментом инерции J системы, приведенным к оси катка.

А.Костарев

Левая часть уравнения Лагранжа приобретает вид:

$$\frac{∂T}{∂φ}=0; \frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}=J\ddot{φ}$$

* 1. Найдем обобщенную силу $Q\_{φ}$, как коэффициент при обобщенной скорости $\dot{φ} $в выражении возможной мощности активных сил. Реакции неидеальных связей можно условно рассматривать как неизвестные активные силы. Изобразим все внешние силы системы.

Реакция податливой «дороги» на податливое колесо сводится к нормальной реакции N2 , силе трения Fтр, моменту трения качения Mтк ,

$$M\_{тк}=N\_{2}k=km\_{2}gCos∝; $$

направленному против вращения колеса, и силе сопротивления **F**с

$$F\_{c}=N\_{2}\frac{k\_{1}}{R}=\frac{k\_{1}}{R}m\_{2}gCos∝$$

направленной против движения его центра.

Сила трения скольжения F\*тр связана ( в отличие от Fтр) с нормальной реакцией N3 законом Кулона

$$F\_{тр}^{\*}=fN\_{3}=fm\_{3}gCos∝$$

Мощность сил во вращательном и плоском движениях будем вычислять как произведение момента сил относительно центра скоростей на угловую скорость тела. Мощность положительна при совпадении направлений сомножителей.

Перечислим силы, не имеющие мощности

$$N\left(R\_{1},m\_{2}g\right)=0 по неподвижности точки приложения$$

$$N\left(F\_{тр},N\_{2}\right)=0 по отсутствию момента относительно МЦС Р$$

$$N\left(N\_{3}\right)=0 по перпендикулярности скорости тела$$

$$N\left(T\_{1},T\_{2}\right)=0 как реакции нерастяжимой нити$$

Дадим системе возможную обобщенную скорость $\dot{φ}$. Чтобы не ошибиться в знаке, даем положительную возможную скорость $\dot{φ}>0.$

Вычислим мощность всех сил.

$$N=m\_{2}g\dot{s}Sin∝+m\_{3}g\dot{x}Sin∝+F\dot{x}-M\_{тк}\dot{φ}-F\_{c}\dot{s}-F\_{тр}^{\*}\dot{x}$$

Подставив сюда соотношения скоростей, находим

$$N=\left[g\left\{(m\_{2}R+m\_{3}(R-r)\right\}Sin∝+F\left(R-r\right)-g\left(k+k\_{1}\right)m\_{2}Cos∝-gfm\_{3}Cos∝(R-r)\right]\dot{φ}=Q\_{φ}\dot{φ}$$

Постоянная величина в квадратных скобках является обобщенной силой $Q\_{φ}$, имеющей размерность момента.

* 1. Из уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{∂T}{∂\dot{φ}}-\frac{∂T}{∂φ}=Q\_{φ}$$

получаем дифференциальное уравнение равноускоренного движения системы:

$$J\ddot{φ}=Q\_{φ}$$

1. Составим дифференциальные уравнения движения каждого из тел системы. Для этого мысленно разрезаем нити и вводим в рассмотрение их натяжения Т1 и Т2.

**Блок** $m\_{1}$

совершает вращательное движение. Дифференциальное уравнение вращения

$$J\_{1}\ddot{φ}\_{1}=T\_{1}r\_{1}$$

**Каток** $m\_{2}$

совершает плоское движение. Составляем три уравнения Ньютона

$$m\_{2}\ddot{s}=m\_{2}gSinα+T\_{2}-T\_{1}-F\_{c}-F\_{тр}$$

$$0=N\_{2}-m\_{2}gCosα$$

$J\_{2}\ddot{φ}=F\_{тр}R-\left(T\_{1}+T\_{2}\right)r-M\_{тк}$

(моменты относительно цента катка !)

**Тело** $m\_{3}$

совершает поступательное движение. Уравнения Ньютона:

$$m\_{3}\ddot{x}=F+m\_{3}gSinα-T\_{2}-F\_{тр}^{\*}$$

$$0=N\_{3}-m\_{3}gCosα$$

В полученных 6ти уравнениях 9 неизвестных: $\ddot{φ}\_{1}$ $T\_{1}$ $\ddot{s}$ $T\_{2}$ $N\_{2}$ $\ddot{φ}$ $F\_{тр}$ $\ddot{x}$ $N\_{3}$

Недостающие 3 уравнения находятся интегрированием уравнений кинематических связей

$$\ddot{s}=R\ddot{φ}; \ddot{x}=(R-r)\ddot{φ}; \ddot{φ}\_{1}=\frac{R+r}{r}\ddot{φ}$$

Конец решения контрольной задачи

1. К следующему занятию следует из полученных 9 уравнений найти угловое ускорение $\ddot{φ}$ (дифференциальное уравнение движения системы) и сравнить с результатом контрольной.

А.Костарев