**Пример решения контрольной задачи**

**на применение методов Лагранжа и Ньютона**

**к выводу дифференциального уравнения движения**

**системы c 1ой степенью свободы.**

Три тела связаны нерастяжимой нитью. Каток массы m1 движется без проскальзывания, но с сопротивлением качению (коэффициент k), и сопротивлением дороги (k1) . Радиус инерции катка относительно центральной оси 𝜚. Груз m3 скользит с трением (коэффициент f)

1. Приложите к одному из тел силу или момент так, чтобы нити были натянуты, и система двигалась из состояния покоя в соответствующем силе (моменту) направлении.

𝛼

m3g

m2g

m1g

1. Выведите дифференциальное уравнение движения системы методом Лагранжа.
2. Напишите дифференциальные уравнения движения каждого из тел методом Ньютона и соотношения ускорений тел.
3. К следующему занятию из уравнений Ньютона получите то же дифференциальное уравнение движения системы, что и методом Лагранжа.

А.Костарев

1. К блоку 1 можно приложить момент, направленный против часовой стрелки. К телу 2 нельзя ничего приложить поскольку может ослабнуть одна из нитей. Приложим к телу 3 силу **F**, направленную вниз вдоль наклонной плоскости. Будем считать, что система движется из состояния покоя в направлении силы F
   1. Положение системы можно задать несколькими обобщенными координатами: углами поворота φ и φ1, координатой s центра катка 2, координатой *x* тела 3. Система остановится, если зафиксировать любую из перечисленных координат при натянутых нитях. Значит, система имеет одну степень свободы, и только одна из обобщенных координат является независимой. Выберем угол поворота 𝜑 катка 2 за независимую координату, и согласуем направления всех координат так, чтобы они одновременно увеличивались.

**F**

𝜌

**Fтр**

**N3**

**N2**

𝛼

m3g

Mтк

𝜑

**Fс**

**F\*тр**

m2g

m1g

𝜑1

s

x

Р

**R1**

R

r

T2

T1

Запишем единственное уравнение Лагранжа

* 1. Найдем кинетическую энергию системы, как сумму энергий, соответствующих типу движения тел: вращательного для тела 1, плоского для тела 2 и поступательного для тела 3.

Моменты инерции тел 1 (пусть будет сплошным диском) и 2:

Поскольку система имеет одну степень свободы, то все скорости выражаем через обобщенную скорость . В катке скорости линейно зависят от расстояния до МЦС (Р).

Скорость верхней части нити

Угловая скорость блока 1:

Подставив формулы кинематических связей, получаем выражение кинетической энергии через обобщенную скорость .

Постоянную величину в квадратных скобках можно назвать моментом инерции J системы, приведенным к оси катка.

А.Костарев

Левая часть уравнения Лагранжа приобретает вид:

* 1. Найдем обобщенную силу , как коэффициент при обобщенной скорости в выражении возможной мощности активных сил. Реакции неидеальных связей можно условно рассматривать как неизвестные активные силы. Изобразим все внешние силы системы.

Реакция податливой «дороги» на податливое колесо сводится к нормальной реакции N2 , силе трения Fтр, моменту трения качения Mтк ,

направленному против вращения колеса, и силе сопротивления **F**с

направленной против движения его центра.

Сила трения скольжения F\*тр связана ( в отличие от Fтр) с нормальной реакцией N3 законом Кулона

Мощность сил во вращательном и плоском движениях будем вычислять как произведение момента сил относительно центра скоростей на угловую скорость тела. Мощность положительна при совпадении направлений сомножителей.

Перечислим силы, не имеющие мощности

Дадим системе возможную обобщенную скорость . Чтобы не ошибиться в знаке, даем положительную возможную скорость

Вычислим мощность всех сил.

Подставив сюда соотношения скоростей, находим

Постоянная величина в квадратных скобках является обобщенной силой , имеющей размерность момента.

* 1. Из уравнения Лагранжа:

получаем дифференциальное уравнение равноускоренного движения системы:

1. Составим дифференциальные уравнения движения каждого из тел системы. Для этого мысленно разрезаем нити и вводим в рассмотрение их натяжения Т1 и Т2.

**Блок**

совершает вращательное движение. Дифференциальное уравнение вращения

**Каток**

совершает плоское движение. Составляем три уравнения Ньютона

(моменты относительно цента катка !)

**Тело**

совершает поступательное движение. Уравнения Ньютона:

В полученных 6ти уравнениях 9 неизвестных:

Недостающие 3 уравнения находятся интегрированием уравнений кинематических связей

Конец решения контрольной задачи

1. К следующему занятию следует из полученных 9 уравнений найти угловое ускорение (дифференциальное уравнение движения системы) и сравнить с результатом контрольной.

А.Костарев