Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

Директор ВШТМ

А.М. Кривцов

«___»_____20__ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

АСИМПТОТИКА ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В ДВУМЕРНОМ ДИССИПАТИВНОМ ГАРМОНИЧЕСКОМ КРИСТАЛЛЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

По направлению подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование

Направленность 01.04.03_1 Механика деформируемого твердого тела

Выполнил
студент гр. 3640103/80401 А.Т. Иващенко

Руководитель
Профессор, д.ф.-м.н. С.Н. Гаврилов

Консультант
по нормоконтролю Е.А. Хайбулова

Санкт-Петербург

2020

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

УТВЕРЖДАЮ
Директор ВШТМ
А.М. Кривцов
«22» января 2020 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы

студенту Иващенко Андрею Тарасовичу, гр. 3640103/80401

1. Тема работы: Асимптотика дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры в двумерном диссипативном гармоническом кристалле при действии точечного источника тепла.

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 08.06.2020

3. Исходные данные по работе:

1) Gavrilov S.N., Krivtsov A.M. Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source //Continuum Mechanics and Thermodynamics.–2020–Т.32–№1–С.41-61.

2) Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. — М., Наука, 1989.

3) Федорюк М.В. Метод перевала — М., Наука, 1977.

4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):

1) Получить асимптотику дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры для горизонтального ряда, содержащего точечный источник тепла;

2) Получить асимптотику дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры для произвольной прямой, проходящей через точку подвода тепла;

3) Проверить справедливость полученных асимптотических формул при помощи численных расчетов.

5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): нет
6. Консультанты по работе: нет

7. Дата выдачи задания: 22.01.2020

Руководитель ВКР _____ С.Н. Гаврилов

Задание принял к исполнению _____

Студент _____ А.Т. Иващенко

РЕФЕРАТ

На 58с., 26 рисунков, 2 таблицы.

ГАРМОНИЧЕСКАЯ РЕШЕТКА, ДВУМЕРНЫЙ КРИСТАЛЛ, СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ, ИНТЕГРАЛ ЛАПЛАСА, АСИМПТОТИКА ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ, БАЛЛИСТИЧЕСКАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Работа посвящена анализу стационарного распределения кинетической температуры в двумерном гармоническом демпфированном кристалле с использованием асимптотических методов. В качестве теоретической основы используется выражение для температурного поля в интегральном представлении. В работе используются подходы, учитывающие специфику интегралов Лапласа. Результаты численно проверяются и визуализируются, графики интерпретируются. Основными результатами работы являются уравнения асимптотики дальнего температурного поля.

THE ABSTRACT

58 pages, 26 pictures, 2 tables

HARMONIC LATTICE, TWO-DIMENSIONAL CRYSTAL, STEADY-STATE TEMPERATURE DISTRIBUTION, LAPLACE INTEGRAL, FAR-FIELD ASYMPTOTICS, BALLISTIC HEAT TRANSFER

The research is dedicated to analysis steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional damped harmonic lattice via asymptotic methods. The expressions for the kinetic temperature in integral form are the base of current research. The methods which take into account the Laplace integral specificity are used. Results are visualized and verified by numerics, plots are interpreted. The main result of the research are the analytical formulae for the far-field asymptotics kinetic temperature distribution.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день наноматериалы являются полем активных научных исследований. Современное оборудование позволяет проводить сложнейшие численные симуляции, а развитие научных знаний в области нанотехнологий открывает новые возможности проверки гипотез экспериментально. Важной областью являются тепловые эффекты в микроструктурах. В макромире, температурное поле в твердых телах прекрасно описывается уравнением теплопроводности, а поток тепла подчиняется закону Фурье. В микроструктурах закон Фурье выполняется не всегда [15, 18]. При этом реальное температурное поле важно правильно предсказывать при разработке широкого спектра современных устройств, например, при создании микроэлектроники [11].

В 1967 году учеными впервые была теоретически обнаружена баллистическая теплопроводность в гармоническом кристалле [18]. Поток тепла в среде оказался независимым от длины образца. В то время результат показался не соответствующим действительности, и было предположено, что в постановке задачи содержится ошибка. Долгое время исследователи не возвращались к проблеме аномальной теплопроводности, пока в начале 2000-х не произошло ее экспериментальное подтверждение в наноструктурах. На сегодняшний день проведено достаточно много экспериментов, подтверждающих наличие аномальной теплопроводности в микроструктурах меньшей размерности [5,6,7,16]. Тепловые эффекты в одномерных кристаллах изучены достаточно хорошо. Двумерному случаю посвящено гораздо меньше работ. При этом даже в простых двумерных моделях имеют место нетривиальные эффекты.

Объект текущего исследования – двумерный гармонический диссипативный кристалл. Такая структура была рассмотрена Гавриловым С.Н. и Кривцовым А.М. в своей недавней работе [9]. Исследовано распределение температуры при наличии точечного источника тепла постоянной интенсивности. Для стационарной постановки было получено решение в интегральном представле-

нии, которое имеет достаточно громоздкий вид. Интегралы, присутствующие в полученном решении, являются интегралами Лапласа.

Предмет текущего исследования – полученное в работе [9] стационарное решение дифференциального уравнения, описывающего температурное поле. В интегральном представлении решение трудно анализировать. Асимптотический анализ является ключевым инструментом для исследования уравнений, которые возникают в математическом моделировании реальных явлений [10]. Асимптотическое приближение температурного поля откроет новые возможности изучения его свойств. Одним из важных полученных авторами результатов в [9] является то, что температурное поле T состоит из суммы двух независимых функций T_1 и T_2. Явление распада температурного поля на несколько слагаемых было обнаружено так же и в других работах. При этом физический смысл как самого распада на два слагаемых, так и величина вклада каждого из слагаемых в температурное поле на сегодняшний день не до конца понятна, что подчеркивает актуальность текущей работы.

Основная цель текущего исследования – провести анализ асимптотики дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры в двумерном диссипативном гармоническом кристалле при действии точечного источника тепла. В процессе работы необходимо выполнить следующие задачи:

1. Изучить асимптотические методы, применимые к интегралам в исходном выражении для температурного поля;

2. Рассмотреть частный случай и вычислить асимптотику температурного поля вдоль горизонтального ряда кристалла, содержащего источник тепла;

3. Вычислить асимптотику температурного поля вдоль произвольной прямой, содержащей точечный источник тепла;

4. Оценить вклад каждого из слагаемых T_1 и T_2 в температурное поле на основе полученной асимптотики;

5. Верифицировать полученную асимптотику численно.

В текущей работе используются подходы, учитывающие специфику интегралов Лапласа в слагаемых температурного поля в интегральном представлении. При выводе асимптотики используются метод Лапласа и лемма Ватсона. Промежуточные результаты визуализируются, графики интерпретируются. Для верификации полученной асимптотики проверяется ее сходимость к численному значению исходной функции на большом удалении от источника нагрева.

Глава 1 содержит подготовительные сведения. Вначале анализируется теоретическая основа текущего исследования. Далее описываются методы, используемые в текущем исследовании. В главах 2 и 3 содержаться результаты исследования. В главе 2 описано построение асимптотики в частном случае, а в главе 3 - в общем.

ГЛАВА 1. ОБЪЕКТ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Теоретическая основа исследования

Текущее исследование главным образом опирается на результаты, полученные С.Н. Гавриловым и А.М. Кривцовым в своей работе “Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source” [9]. Авторами рассматривается бесконечная двумерная квадратная гармоническая решетка (рис.1.1).

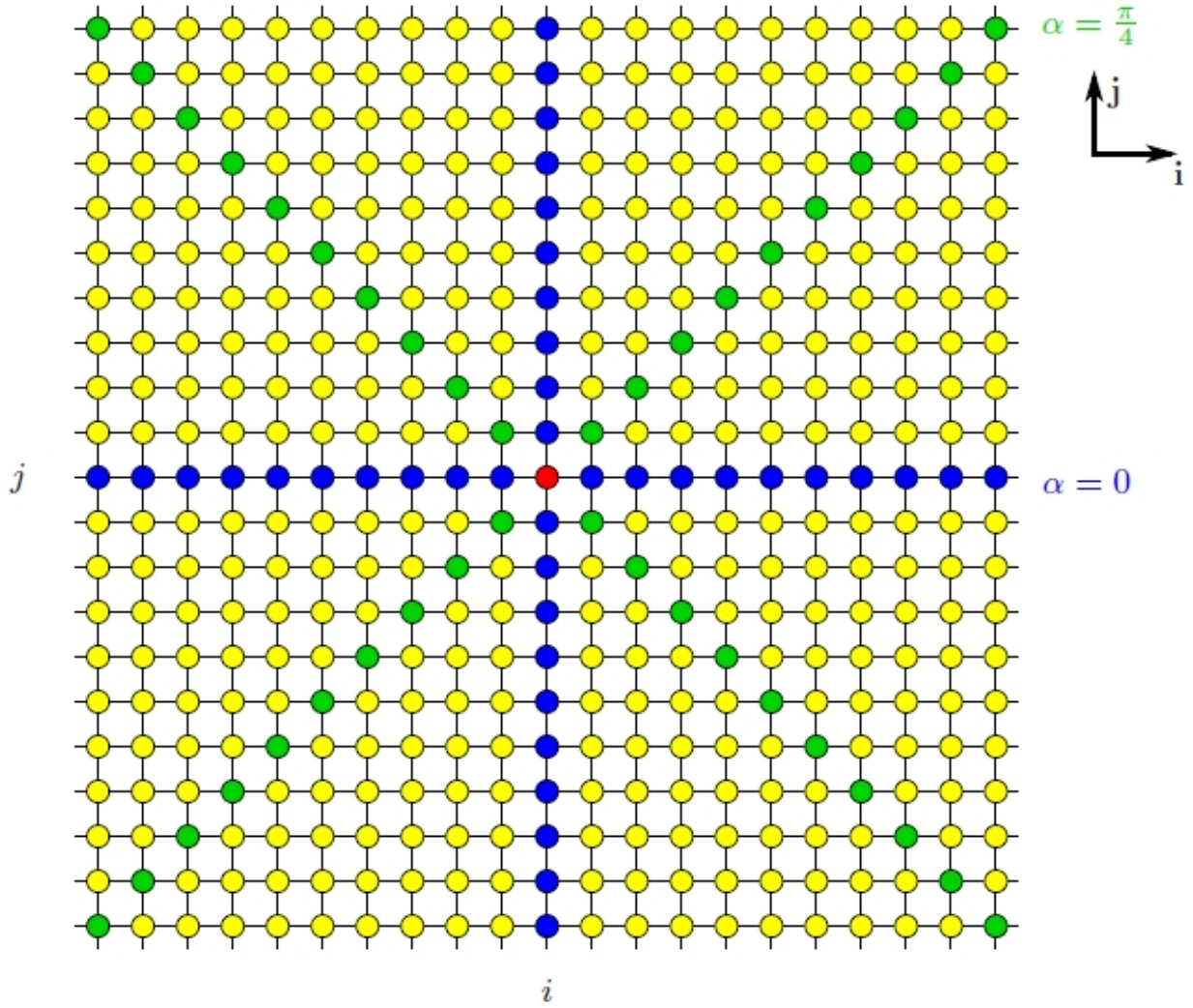


Рис.1.1. Квадратная решетка. Красным цветом обозначена точка подвода тепла. Угол α отсчитывается относительно точки нагрева, от горизонтального ряда. Синим цветом обозначены горизонтальный и вертикальный ряд, содержащие источник нагрева (α=0 и α=π/2). Зеленым цветом обозначены диагональные ряды (α=±π/4), на которых температурное поле T становится сингулярным. Источник: [9].

Рассматриваются поперечные колебания натянутой решетки. Положения равновесия всех частиц лежат в плоскости. Каждый элемент решетки может осциллировать в окрестности своего положения равновесия только вдоль прямой, перпендикулярной плоскости, натянутой на ортогональные векторы **i**, **j**. Продольные колебания не рассматриваются, так как смещения в плоскости в натянутой решетке будут много меньше, чем перпендикулярно плоскости. Таким образом, каждая частица решетки обладает только одной степенью свободы. Динамика такой системы описывается бесконечной системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} dv_{i,j} = F_{i,j}dt + \delta_{i;0}\delta_{j;0}b\,dW \\ du_{i,j} = v_{i,j}dt \end{cases}, \tag{1.1}$$

где

$$dW = \rho\sqrt{dt},$$

$$F_{i,j} = {\omega_0}^2 L_{i,j}u_{i,j} - \eta v_{i,j},$$

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{C}{m}}.$$

Здесь функция смещения $u_{i,j}(t)$ и функция $v_{i,j}(t)$ скорости частицы являются стохастическими процессами [2], $F_{i,j}$ – удельная сила, действующая на частицу. Слагаемое $\delta_{i;0}\delta_{j;0}b\,dW$ представляет собой белый шум, локализированный в точке с нулевыми координатами, с помощью которого удобно моделировать подвод тепла в систему, b – интенсивность случайного внешнего воздействия, $\delta_{p;\,r}$ – дельта Кронекера. Слагаемое W представляет собой Винеровский процесс, ρ – нормально распределенная случайная величина, независимая от $u_{i,j}$ и $v_{i,j}$. Параметр η – удельная вязкость окружающей кристалл среды, ω_0 – собственная частота осцилляторов, C – жесткость связи частиц, m – масса частицы, $L_{i,j}$ – линейный конечно-разностный оператор:

$$L_i u_{i,j} = u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j},$$
$$L_{i,j} u_{i,j} = L_i u_{i,j} + L_j u_{i,j}. \qquad (1.2)$$

Разностный оператор $L_{i,j}$ описывает бесконечную двумерную квадратную натянутую скалярную решетку, и учитывает взаимодействие только ближайших соседей (слагаемое $L_i u_{i,j}$ учитывает отклонение соседних частиц от текущей частицы по горизонтали, а слагаемое $L_i u_{i,j}$ – по вертикали соответственно). Рассматриваемый кристалл является гармоническим, так как оператор $L_{i,j}$ – линейный. Функции $u_{i,j}(t)$ и $v_{i,j}(t)$ являются скалярными, так как частицам доступна только одна степень свободы. Индексы i, j принимают целочисленные значения и указывают на позицию частицы в решетке. За начало отсчета принимается точка подвода тепла в кристалл.

Начальные условия принимаются нулевыми для всех частиц: $u_{i,j}(0) = 0$, $v_{i,j}(0) = 0$. Внешнее воздействие локализировано: $b \equiv 0$ при $\max\{i, j\} > 0$, что вместе с нулевыми начальными условиями гарантирует отсутствие источников энергии на бесконечности. Таким образом, отпадает необходимость добавлять граничное условие на бесконечности для корректной постановки задачи.

Выражение для распределения температуры в гармоническом кристалле в работе [9] выводится в виде непрерывной функции в рамках континуализации уравнений динамики (1.1), для чего используется подход, впервые предложенный А.М. Кривцовым в работе [8]. Ниже алгоритм континуализации приводится поэтапно.

Шаг №1. Вводятся переменные, являющимися ковариациями функций смещения и скорости:

$$\xi_{p,q;\,r,s} \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_{p,q} u_{r,s} \rangle, \qquad \nu_{p,q;\,r,s} \stackrel{\text{def}}{=} \langle u_{p,q} v_{r,s} \rangle, \qquad \kappa_{p,q;\,r,s} \stackrel{\text{def}}{=} \langle v_{p,q} v_{r,s} \rangle, \qquad (1.3)$$

где индексы p, q определяют позицию одной частицы, а индексы r, s – другой. Ковариации определены для всех пар частиц в решетке. При $p = r$ и $q = s$

переменные $\xi_{p,q;\,r,s}$ и $\kappa_{p,q;\,r,s}$ будут выражать величину дисперсии смещения и скорости частицы с порядковым номером p вдоль горизонтальной оси и q вдоль вертикальной оси соответственно (см. рис.1.1).

Шаг №2. На этом этапе происходит переход от стохастической системы ОДУ (1.1), описывающей динамику решетки, к детерминированной системе. Принимая во внимание стохастический характер функций смещения и скорости $\left(\langle u_{i,j}\rangle = 0, \langle v_{i,j}\rangle = 0\right)$, а так же уравнения движения (1.1), переменные (1.3) дифференцируются по времени. В результате получается детерминированная система дифференциальных уравнений для ковариаций:

$$\begin{cases} \partial_t \xi = \nu + \nu^T \\ \partial_t \nu + \eta \nu = {\omega_0}^2 L_{r,s} \xi + \kappa \\ \partial_t \kappa + 2\eta\kappa = {\omega_0}^2 L_{p,q} \nu + {\omega_0}^2 L_{r,s} \nu^T + \beta \end{cases} \tag{1.4}$$

Здесь для упрощения записи у переменных $\xi_{p,q;\,r,s}$, $\nu_{p,q;\,r,s}$, $\kappa_{p,q;\,r,s}$, $\beta_{p,q;\,r,s}$ отброшены индексы. Слагаемое β добавлено для учета точечного внешнего подвода тепла и определено таким образом, чтобы равняться нулю везде, кроме точки в центре системы координат решетки (частицы с нулевыми индексами): $\beta_{p,q;\,r,s} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{p;\,r}\delta_{q;\,s} b_{p,q} b_{r,s}$.

Шаг №3. Полученная система (1.4) сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка для ковариаций скоростей частиц:

$$\begin{aligned} &\left((\partial_t + \eta)^2({\partial_t}^2 + 2\eta\partial_t - 4{\omega_0}^2 L^S) + 4({\omega_0}^2 L^A)^2\right)\kappa \\ &\qquad = (\partial_t + \eta)({\partial_t}^2 + \eta\partial_t - 2{\omega_0}^2 L^S)\beta \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $L^S = \frac{1}{2}\left(L_{p,q} + L_{r,s}\right)$, $L^A = \frac{1}{2}\left(L_{p,q} - L_{r,s}\right)$ – симметричный и антисимметричный конечно-разностные операторы соответственно.

Шаг №4. На этом этапе производится континуализация конечно-разностных операторов. Вводятся дискретные пространственные переменные: $k \stackrel{\text{def}}{=} p + r$, $l \stackrel{\text{def}}{=} q + s$, и дискретные корелляционные переменные:

$m \stackrel{\text{def}}{=} r - p,\ \ n \stackrel{\text{def}}{=} s - q$, вместо дискретных переменных p, q, r, s. Вводится пространственная континуальная переменная

$$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{2}(k\boldsymbol{i} + l\boldsymbol{j}) = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}, \tag{1.6}$$

где $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ - единичные ортогональные векторы, направленные вдоль горизонтальной и вертикальной оси соответственно (см. рис.1.1), x_1 и x_2 – пространственные координаты по осям в решетке, a - постоянная решетки, значение которой считается маленькой величиной:

$$a = \varepsilon\,\bar{a},$$

где ε – безразмерный малый параметр, $\bar{a} = O(1)$. Таким образом, вектор (1.6) является медленно меняющейся величиной по сравнению с корелляционными переменными m и n. Чтобы ограничить скорость звука в решетке, принимается $c \stackrel{\text{def}}{=} a\omega_0$. Также принимается $\omega_0 = \varepsilon^{-1}\bar{\omega}_0$, где $\bar{\omega}_0 = O(1)$. Имеем $\mathrm{c} = \bar{a}\bar{\omega}_0 = O(1)$.

Главное предположение, позволяющее провести континуализацию, заключается в том, что функции, определяемые через дискретные параметры по формулам (1.3), можно вычислить как значение гладкой функции $\breve{\zeta}_{m,n}(\mathbf{x})$, определяемой медленно меняющимися пространственными координатами (1.6) и быстро меняющимися корелляционными переменными m и n:

$$\breve{\zeta}_{m,n}(\mathbf{x}) = \zeta_{p,q;r,s}. \tag{1.7}$$

Разностные операторы (1.2) переписываются с учетом (1.7)

$$\begin{aligned} L_{p,q}\zeta_{p,q;r,s} = {} & \breve{\zeta}_{m-1,n}\left(\mathbf{x} + \frac{a}{2}\boldsymbol{i}\right) + \breve{\zeta}_{m+1,n}\left(\mathbf{x} - \frac{a}{2}\boldsymbol{i}\right) + \breve{\zeta}_{m,n-1}\left(\mathbf{x} + \frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right) \\ & + \breve{\zeta}_{m,n+1}\left(\mathbf{x} - \frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right) - 4\breve{\zeta}_{m,n}(\mathbf{x}), \\ L_{r,s}\zeta_{p,q;r,s} = {} & \breve{\zeta}_{m+1,n}\left(\mathbf{x} + \frac{a}{2}\boldsymbol{i}\right) + \breve{\zeta}_{m-1,n}\left(\mathbf{x} - \frac{a}{2}\boldsymbol{i}\right) + \breve{\zeta}_{m,n+1}\left(\mathbf{x} + \frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right) \\ & + \breve{\zeta}_{m,n-1}\left(\mathbf{x} - \frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right) - 4\breve{\zeta}_{m,n}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

и аппроксимируются квадратичной функцией, что дает:

$$L_{p,q}\zeta_{p,q;r,s} = L_{m,n}\check{\zeta}_{m,n} + \frac{a}{2}\partial_{x_1}\left(\check{\zeta}_{m-1,n} - \check{\zeta}_{m+1,n}\right) + \frac{a}{2}\partial_{x_2}\left(\check{\zeta}_{m,n-1} - \check{\zeta}_{m,n+1}\right) + o(\varepsilon^2),$$

$$L_{r,s}\zeta_{p,q;r,s} = L_{m,n}\check{\zeta}_{m,n} + \frac{a}{2}\partial_{x_1}\left(\check{\zeta}_{m+1,n} - \check{\zeta}_{m-1,n}\right) + \frac{a}{2}\partial_{x_2}\left(\check{\zeta}_{m,n+1} - \check{\zeta}_{m,n-1}\right) + o(\varepsilon^2),$$

$$L^S = L_{m,n} + O(\varepsilon^2),$$

$$L^A = -\frac{a}{2}D_m\partial_{x_1} - \frac{a}{2}D_n\partial_{x_2} + O(\varepsilon^2),$$

где $$D_n f_n = f_{n+1} - f_{n-1}.$$

Шаг №5. Уравнение (1.5) переписывается с учетом континуализированных разностных операторов, получается бесконечная система уравнений в частных производных:

$$\left((\partial_t + \eta)^2(\varepsilon^2(\partial_t^2 + 2\eta\partial_t) - 4\overline{\omega}_0^2 L^S) + 4\left(\frac{\overline{\omega}_0^4}{\varepsilon^2}L^A\right)^2\right)\kappa = (\partial_t + \eta)\left((\partial_t^2 + \eta\partial_t) - 2\overline{\omega}_0^2 L^S\right)\beta \tag{1.8}$$

После процедуры континуализации уравнение динамики содержит старшие производные по времени, умноженные на малый параметр. Уравнение такого типа может содержать два типа решений: быстро меняющиеся во времени, и медленно меняющиеся во времени [17, 12]. В задаче не рассматриваются быстро меняющиеся решения, которые зависят от производных высших порядков и имеют смысл осцилляций температур в связи с установлением равновесия кинетической и потенциальной энергии в решетке. Учитываются только медленно меняющиеся решения, которые связаны с макроскопическим распространением тепла. Исключив из (1.8) слагаемые, характеризующие быстро меняющиеся решения [4,13,14], получим бесконечную систему уравнений:

$$\left((\partial_t+\eta)^2 L_{m,n}-\frac{c^2}{4}\left(D_m\partial_{x_1}-D_n\partial_{x_2}\right)^2\right)\breve{\kappa}_{m,n}=\frac{1}{2}(\partial_t+\eta)L_{m,n}\breve{\beta}_{m,n}, \qquad (1.9)$$

где $\breve{\beta}_{m,n}=\breve{\beta}_{0,0}(\mathbf{x})\delta_{m;0}\delta_{n;0}$.

Вводятся величины, зависящие от континуальной переменной (1.6):

$$\theta_{m,n}(\mathbf{x},t)\stackrel{\text{def}}{=}mk_B^{-1}\breve{\kappa}_{m,n}(\mathbf{x},t),$$

$$T=\theta_{0,0}(\mathbf{x},t)\stackrel{\text{def}}{=}mk_B^{-1}\breve{\kappa}_{0,0}(\mathbf{x},t),$$

$$\chi(\mathbf{x},t)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{1}{2}mk_B^{-1}\breve{\beta}_{0,0}(\mathbf{x},t),$$

где $\theta_{m,n}(\mathbf{x},t)$ – величины, которые в работе [8] авторы называют “нелокальными температурам”, T – кинетическая температура, $\chi(\mathbf{x},t)$ – интенсивность источника тепла, k_B – постоянная Больцмана.

Из (1.9) получается бесконечная система уравнений в частных производных, описывающая нестационарное распространение тепла в решетке:

$$\left((\partial_t+\eta)^2 L_{m,n}-\frac{c^2}{4}\left(D_m\partial_{x_1}-D_n\partial_{x_2}\right)^2\right)\theta_{m,n}=(\partial_t\chi+\eta\chi)L_{m,n}\delta_{m;0}\delta_{n;0}. \quad (1.10)$$

Рассматривается стационарная постановка задачи, где интенсивность источника тепла является постоянной:

$$\chi=\bar{\chi}_0\delta(\mathbf{x}),$$

где $\delta(\mathbf{x})$ – дельта-функция Дирака, $\bar{\chi}_0$ – постоянная.

Уравнение (1.10) преобразовывается, с учетом стационарной постановки:

$$\left(\eta^2 L_{m,n}-\frac{c^2}{4}\left(D_m\partial_{x_1}-D_n\partial_{x_2}\right)^2\right)\theta_{m,n}=\eta\bar{\chi}_0\delta(\mathbf{x})L_{m,n}\delta_{m;0}\delta_{n;0}, \qquad (1.11)$$

граничные условия задачи имеют вид: $\theta_{m,n}\to 0$ при $\mathbf{x}\to\infty$.

К уравнению (1.11) применяется дискретное по времени преобразование Фурье по быстро меняющимся параметрам m,n:

$$\theta_F(p_1, p_2, \mathbf{x}, t) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \theta_{m,n}(\mathbf{x}) \exp(-imp_1 - inp_2),$$

где p_1, p_2 – дискретные волновые числа Фурье-образа функции $\theta_{m,n}(\mathbf{x})$.

В результате система уравнений (1.11) приобретает вид:

$$\eta^2 \theta_F - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{C})\left(\hat{\mathbf{C}} \cdot \nabla\right)^2 \theta_F = \bar{\chi}_0 \eta \delta(\mathbf{x}), \tag{1.12}$$

где
$$\boldsymbol{C} = C_0(\sin p_1 \mathbf{i} + \sin p_2 \mathbf{j}),$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{C}}{|\mathbf{C}|},$$

$$C_0 = \frac{c}{2\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{p_2}{2}\right)^2}}.$$

Здесь ∇ – плоский оператор Набла.

Вводится угловая переменная $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{x_2}{x_1}$ таким образом, что

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}|(\sin\alpha\, \mathbf{i} + \cos\alpha\, \mathbf{j}).$$

В силу симметрии, задача рассматривается в секторе $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$ (см. рис.1.1). Решив систему (1.12) и взяв обратное преобразование Фурье с учетом того, что $T = \theta_{0,0}(\mathbf{x}, t)$, было получено континуальное выражение распределения кинетической температуры:

$$T(x_1, \alpha) = T_1(x_1, \alpha) + T_2(x_1, \alpha)$$
$$= \frac{\bar{\chi}_0}{4\pi^2|x_1|} \sum_{j=1}^{2} \int_0^{\pi} \frac{\exp\left(-\eta\left|\frac{x_1}{C_0\left(p_1, p_2^{(j)}\right)\sin(p_1)}\right|\right)}{C_0\left(p_1, p_2^{(j)}\right)\sqrt{1 - \tan^2(\alpha)\sin^2(p_1)}}\, dp_1, \tag{1.13}$$

где
$$C_0\left(p_1, p_2^{(1)}\right) = \frac{c}{2\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\arcsin(\tan\alpha\, \sin p_1)}{2}\right)^2}},$$

$$C_0\left(p_1, p_2^{(2)}\right) = \frac{c}{2\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\pi - \arcsin(\tan\alpha\ \sin p_1)}{2}\right)^2}}.$$

Одним из важнейших полученных результатов является то, что знаменатель подынтегральной функции имеет сингулярность в точке в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, из-за чего слагаемые $T_1(x_1, \alpha)$ и $T_2(x_1, \alpha)$ имеют сингулярность при угле $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Так же важным результатом является то, что решение распадается на два слагаемых. Математически это произошло, когда в процессе решения была получена зависимость:

$$\frac{\sin p_2}{\sin p_1} = \tan\alpha.$$

Здесь решение относительно p_2 распадается на два семейства:

$$p_2^{(1,k)} \equiv \arcsin(\tan\alpha\ \sin p_1) + 2\pi k,$$

$$p_2^{(2,k)} \equiv \pi - \arcsin(\tan\alpha\ \sin p_1) + 2\pi k,$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Структура корней при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $0 < p_1 < \pi$ показана на рис.1.2.

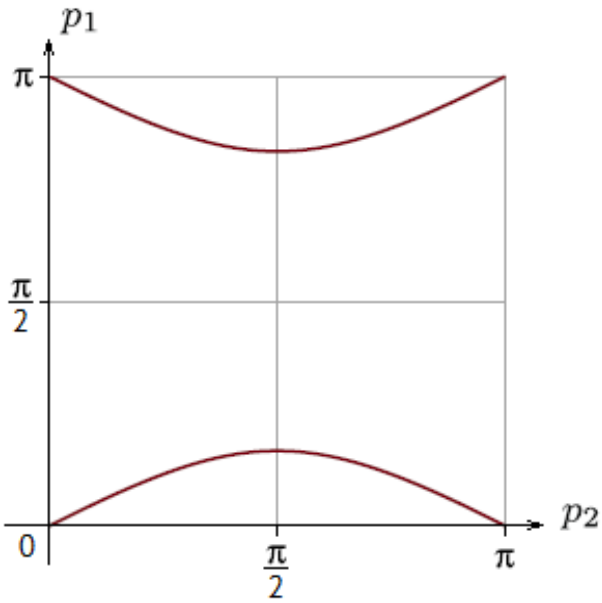


Рис.1.2. Зависимость дискретных волновых чисел p_1 и p_2 при $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{2}$.
Источник: [9].

В выражении (1.13) слагаемое T_1 содержит ветвь решения при $p_2^{(1)} = \arcsin(\tan\alpha\ \sin p_1)$, а слагаемое T_2 – при $p_2^{(2)} = \pi - \arcsin(\tan\alpha\ \sin p_1)$.

1.2 Постановка задачи

Полученное в [9] решение в интегральном представлении (1.13) имеет достаточно громоздкий вид. Также было получено решение в интегральном представлении в частном случае для горизонтального ряда ($\alpha = 0$), проходящего через точку подвода тепла, которое имеет более простой вид. Причем интеграл в слагаемом $T_1(x_1, 0)$ удалость свести к экспоненциальному интегралу $E_1(z)$:

$$T_1(x_1, 0) = \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}\left(\exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\right) - \frac{\eta|x_1|}{c}E_1\left(\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\right), \tag{1.14}$$

где
$$E_1(z) = \int_1^\infty \frac{1}{\gamma}\exp(-\gamma z)\,d\gamma, \quad Re(z) > 0, \tag{1.15}$$

$$T_2(x_1, 0) = \frac{\bar{\chi}_0}{2\pi^2|x_1|c}\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2} + 1}\ \exp\left(-\frac{2\eta|x_1|\sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2} + 1}}{c\sin p_1}\right)dp_1. \tag{1.16}$$

Интегралы в стационарном решении, полученном авторами в работе [9], являются интегралами Лапласа. Для таких интегралов существует ряд методов [1,3], позволяющих получить асимптотику дальнего поля.

Вклад каждого из слагаемых $T_1(x_1, 0)$ и $T_2(x_1, 0)$ в температурное поле вдоль горизонтального ряда можно видеть на рис.1.3.

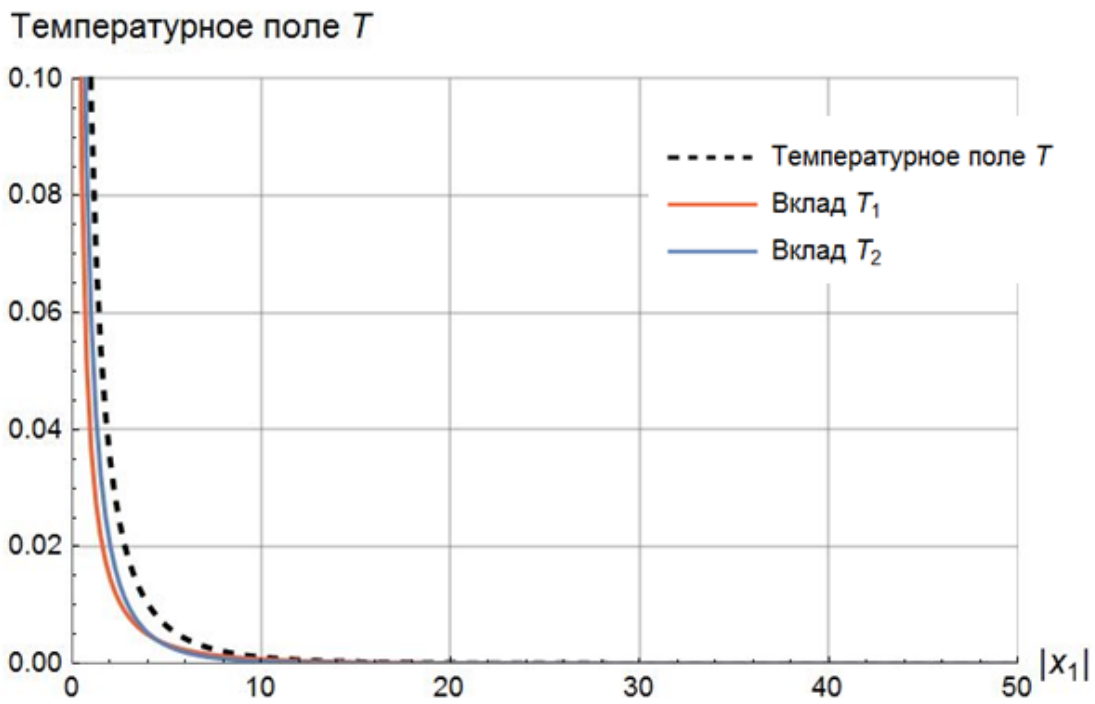


Рис.1.3. Вклад слагаемых T_1 и T_2 в температурное поле при $\alpha = 0$.

Численное построение решения не дает информации о характере T_1 и T_2 даже при фиксированном угле. Чтобы получить удовлетворительную информацию о вкладе каждого из слагаемых, необходимо применить методы математического анализа.

Основная цель текущей работы – получить асимптотику дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры вдоль произвольной прямой, содержащей источник тепла. Сначала необходимо получить асимптотику в частном случае: вдоль горизонтального ряда, содержащего источник тепла. Уравнения в интегральном представлении для $\alpha = 0$ позволят проверить промежуточные результаты текущего исследования численно, а так же оценить применимость используемых методов.

В работе во всех численных вычислениях значения постоянных в уравнении (1.13) принимаются: $\bar{\chi}_0 = 0.5,\ c = 1,\ \eta = 0.1$. Вычисления проводятся с использованием программного пакета Mathematica.

1.3 Лемма Ватсона

Асимптотика многих интегралов Лапласа сводится [1] к вычислению асимптотики эталонного интеграла

$$\phi(\lambda) = \int_0^a \exp(-\lambda t^{\alpha})\, t^{\beta-1} f(t)\, dt, \tag{1.17}$$

Лемма Ватсона. Пусть $\alpha > 0$, $\beta > 0$, функция $f(t)$ непрерывна при $0 \le t \le a$ и бесконечно дифференцируема в окрестности точки $t = 0$. Тогда при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in S_{\varepsilon}$, где S_{ε} - сектор $|\arg\lambda| \le \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ в комплексной плоскости λ, и $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, для (1.17) справедливо асимптотическое разложение:

$$\hat{\phi}(\lambda) \sim \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{\frac{-(n+\beta)}{\alpha}}\, \Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right) \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \tag{1.18}$$

где $\Gamma\left(\frac{n+\beta}{\alpha}\right)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство можно найти в [1]. Лемма Ватсона используется при выводе асимптотических формул интегралов в методе Лапласа. Помимо этого, лемма используется при вычислениях в текущей работе.

1.4 Метод Лапласа

Строгий вывод всех формул, приведенных в данном разделе, можно найти в [1].

Интегралами Лапласа называются интегралы следующего вида:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \mathrm{e}^{\lambda S(x)} dx. \tag{1.19}$$

Метод Лапласа позволяет получать асимптотику таких интегралов при больших значениях показателя экспоненты $\lambda S(x)$. Заметим, что при возрастании λ гра-

фик функции $g(x,\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\, S(x)}$ приобретает более локализированный характер (рис.1.4).

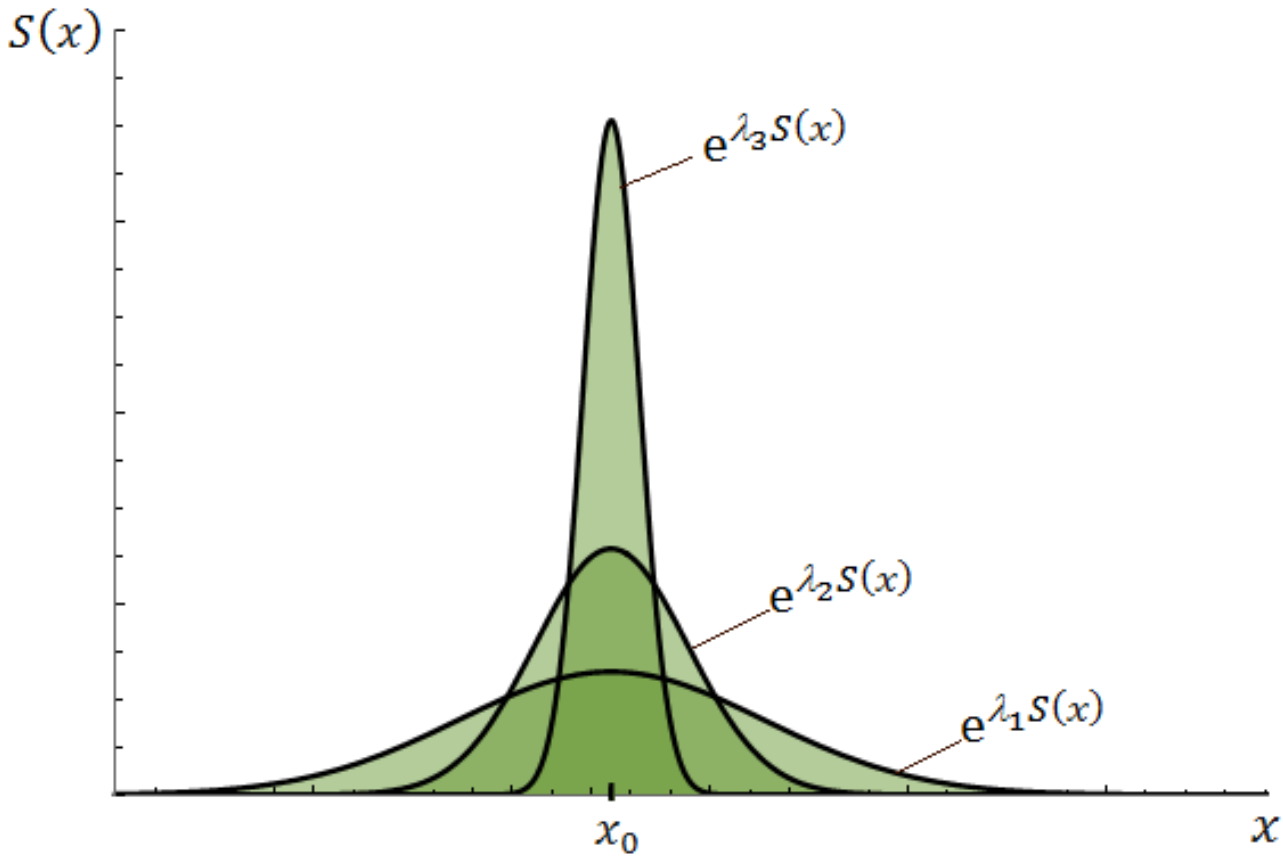


Рис.1.4. Схематичное изображение экспоненциальной функции в интеграле Лапласа с разными показателями. x_0 – точка глобального максимума функции $S(x)$. Здесь $|\lambda_3| > |\lambda_2| > |\lambda_1|$.

При достаточно больших $\lambda > 0$ в окрестности точки x_0, являющейся глобальным максимумом показателя экспоненты $S(x)$, функцию $S(x)$ можно аппроксимировать квадратичной функцией, а амплитудную функцию $f(x)$ – линейной:

$$S(x) - S(x_0) \approx \frac{1}{2}\, S''(x_0)(x - x_0)^2,$$

$$f(x) \approx f(x_0).$$

В таком случае можно получить формулу для асимптотики:

$$\hat{F}(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda\, S''(x_0)}}\ \mathrm{e}^{\lambda\, S(x_0)}\left[f(x_0) + O\left(\lambda^{-1}\right)\right]. \tag{1.20}$$

В частном случае, глобальный максимум показателя экспоненты $S(x)$ будет совпадать с границей области интегрирования: $x_0 = a$ (таблица 1, случай II). Тогда функции $S(x)$ и $f(x)$ аппроксимируются так же, как и в общем случае, а формула для асимптотики будет иметь вид:

$$\hat{F}(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda\, S''(a)}}\ \mathrm{e}^{\lambda\, S(a)}\left[f(a) + O\left(\lambda^{-1}\right)\right]. \tag{1.21}$$

В некоторых случаях глобальный максимум функции $S(x)$ будет лежать за пределами интегрирования: $x_0 \notin [a; b]$, или отсутствовать вовсе. Тогда, при достаточно больших $\lambda > 0$, в окрестности локального максимума показателя экспоненты $S(x)$, являющегося границей области интегрирования, функция $S(x)$ будет иметь линейный вид (см. табл.1, случай III). В этом случае, и функцию $f(x)$, и функцию $S(x)$ можно аппроксимировать линейными функциями:

$$S(x) \approx S(a) + (x - a)S'(a),$$

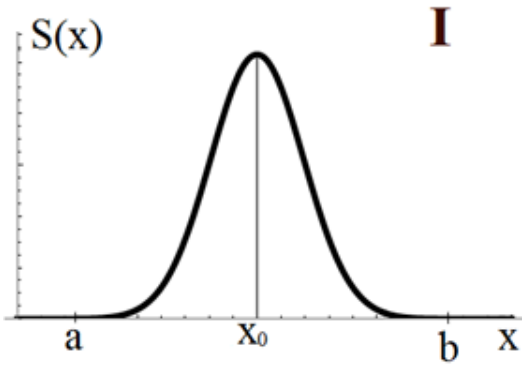
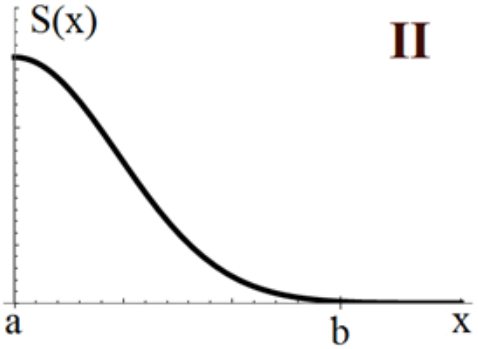
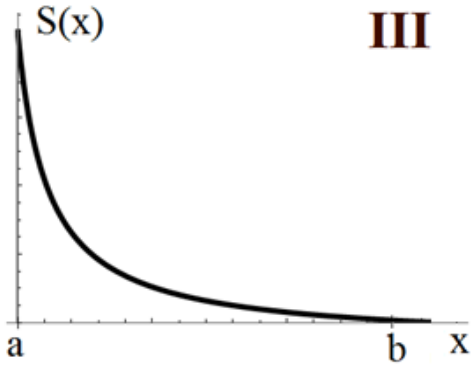
$$f(x) \approx f(a).$$

Формула для асимптотики имеет вид:

$$\hat{F}(\lambda) = -\frac{\mathrm{e}^{\lambda\, S(a)}}{\lambda\, S'(a)}\ \left[f(a) + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Таблица 1.

Основные асимптотические формулы для интегралов Лапласа в зависимости от вида показателя экспоненты.

Вид показателя экспоненты	Условия в алгебраическом виде и асимптотическая формула для интеграла
 Глобальный максимум показателя экспоненты S(x) лежит в пределах интегрирования	$S_{max} = S(x_0)$ $S'(x_0) = 0$ $\hat{F}(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(x_0)}}\, e^{\lambda S(x_0)} \left[f(x_0) + O(\lambda^{-1})\right]$
 Локальный максимум показателя экспоненты S(x) лежит на границе интегрирования и совпадает с глобальным.	$S_{max} = S(a)$ $S'(a) = 0$ $\hat{F}(\lambda) = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda S''(a)}}\, e^{\lambda S(a)} \left[f(a) + O(\lambda^{-1})\right]$
 Локальный максимум показателя экспоненты S(x) лежит на границе интегрирования и не совпадает с глобальным.	$S_{max} = S(a)$ $S'(x_0) \neq 0$ $\hat{F}(\lambda) = -\frac{e^{\lambda S(a)}}{\lambda S'(a)} \left[f(a) + O(\lambda^{-1})\right]$

ГЛАВА 2. Асимптотика для горизонтального ряда, проходящего через точку подвода тепла

2.1 Асимптотика T_1 в случае α=0

Рассмотрим интеграл (1.15), стоящий в слагаемом $T_1(x_1, 0)$:

$$E_1\left(\frac{\eta|x_1|}{c}\right) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\gamma} \exp\left(-\frac{\gamma\eta|x_1|}{c}\right) d\gamma$$

– экспоненциальный интеграл с аргументом $\frac{\eta|x_1|}{c} > 0$, является специальной функцией. Экспоненциальный интеграл относится к семейству интегралов Лапласа. Сведем интеграл (1.15) к виду (1.17), чтобы воспользоваться леммой Ватсона. Сделаем замену переменных: $\gamma = t + 1$, $t = \gamma - 1$, $dt = d\gamma$.

Везде ниже независимые от переменной интегрирования параметры обозначаются как $\lambda = \frac{\eta|x_1|}{c}$. Тогда экспоненциальный интеграл можно записать как

$$E_1(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{t+1} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dt = \mathrm{e}^{-\lambda} J_1,$$

$$J_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{t+1} \mathrm{e}^{-\lambda t}\, dt = \int_0^{a} \exp(-\lambda t^{\alpha})\, t^{\beta-1} f(t)\, dt,$$

где $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $f(t) = \frac{1}{t+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

По Лемме Ватсона, имеем:

$$\hat{J}_1 \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)}\, \Gamma(n+1) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{2.1}$$

Определение нескольких членов асимптотического разложения в дальнейшем позволит исследовать скорость сходимости асимптотики в зависимости от порядка точности. Вычисленные коэффициенты первых семи элементов разложения (2.1) представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Вычисление первых нескольких членов асимптотического ряда для J_1.

Параметр n	Значение Гамма-функции $\Gamma(n+1)$	Значение множителя $\frac{1}{n!}$	Значение $f^{(n)}(0)$, где $f(t) = \frac{1}{t+1}$
0	1	1	$\left\{ \frac{1}{t+1},\ t=0 \right\} = 1$
1	1	1	$\left\{ -\frac{1}{(t+1)^2},\ t=0 \right\} = -1$
2	2	$\frac{1}{2}$	$\left\{ \frac{2}{(t+1)^3},\ t=0 \right\} = 2$
3	6	$\frac{1}{6}$	$\left\{ -\frac{6}{(t+1)^4},\ t=0 \right\} = -6$
4	24	$\frac{1}{24}$	$\left\{ \frac{24}{(t+1)^5},\ t=0 \right\} = 24$
5	120	$\frac{1}{120}$	$\left\{ -\frac{120}{(t+1)^6},\ t=0 \right\} = -120$
6	720	$\frac{1}{720}$	$\left\{ \frac{720}{(t+1)^7},\ t=0 \right\} = 720$

Подставив посчитанные слагаемые в (2.1), получим:

$$\hat{J}_1 = \lambda^{-1} - \lambda^{-2} + 2\lambda^{-3} - 6\lambda^{-4} + 24\lambda^{-5} - 120\lambda^{-6} + 720\lambda^{-7} + O(\lambda^{-8})$$

Асимптотика экспоненциального интеграла имеет вид:

$$\hat{E}_1\left(\frac{\eta|x_1|}{c}\right) = e^{-\frac{\eta|x_1|}{c}} \left(\frac{c}{\eta|x_1|} - \left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^3 - 6\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^4 + 24\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^5 - 120\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^6 + 720\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^7 + O\left(\frac{1}{|x_1|}\right)^8\right)$$

Подставив полученное разложение в (1.14), получим асимптотику слагаемого $T_1(x_1, 0)$:

$$\hat{T}_1(x_1,0) \sim \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}\Bigg(e^{-\frac{\eta|x_1|}{c}} - \frac{\eta|x_1|}{c}\, e^{-\frac{\eta|x_1|}{c}}\left(\frac{c}{\eta|x_1|} - \left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^3 - 6\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^4 + 24\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^5 - 120\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^6 + 720\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^7\right)\Bigg)$$

$$\hat{T}_1(x_1,0) \sim e^{-\frac{\eta|x_1|}{c}}\Bigg(\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c} - \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}\frac{\eta|x_1|}{c}\frac{c}{\eta|x_1|} + \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}\frac{\eta|x_1|}{c}\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^2 - 2\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}\frac{\eta|x_1|}{c}\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^3 + 6\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}\frac{\eta|x_1|}{c}\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^4 - 24\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}\frac{\eta|x_1|}{c}\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^5 + 120\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}\frac{\eta|x_1|}{c}\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^6 - 720\frac{\eta|x_1|}{c}\left(\frac{c}{\eta|x_1|}\right)^7\Bigg)$$

Первый член асимптотического разложения (2.1) сокращается при раскрытии скобок. Слагаемое $\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2|x_1|c}e^{-\frac{\eta|x_1|}{c}}$, нивелирующее первый член ряда (2.1), содержится в самом $T_1(x_1,0)$ в интегральном представлении (1.14). Раскрыв скобки, получим окончательный вид асимптотического приближения слагаемого $T_1(x_1,0)$, при разложении (2.1) с точностью $O(|x_1|^{-8})$:

$$T_1(x_1,0) \sim e^{-\frac{\eta|x_1|}{c}}\left(\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta\,|x_1|^2} - 2\frac{\bar{\chi}_0 c}{\pi^2\eta^2|x_1|^3} + 6\frac{\bar{\chi}_0 c^2}{\pi^2\eta^3|x_1|^4} - 24\frac{\bar{\chi}_0 c^3}{\pi^2\eta^4|x_1|^5} + 120\frac{\bar{\chi}_0 c^4}{\pi^2\eta^5|x_1|^6} - 720\frac{\bar{\chi}_0 c^5}{\pi^2\eta^6|x_1|^7}\right)$$

Главный член асимптотики имеет вид:

$$\hat{T}_1(x_1,0) = \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta\,|x_1|^2}e^{-\frac{\eta|x_1|}{c}} + O(|x_1|^{-3})\ . \tag{2.2}$$

Построим график, чтобы посмотреть, как увеличивается точность асимптотического приближения с увеличением количества членов разложения (рис. 2.1).

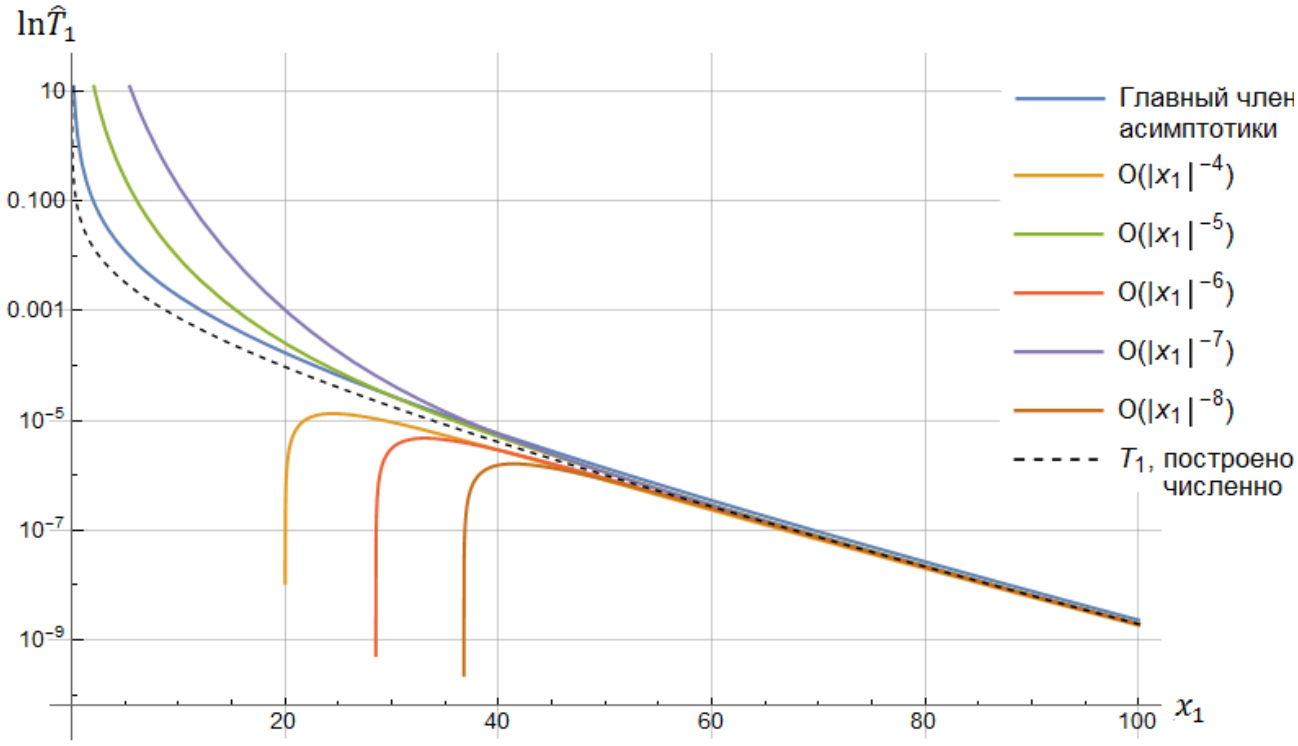


Рис.2.1. По оси ординат шкала скалирована натуральным логарифмом. На графике сравнивается поведение асимптотик слагаемого $T_1(x_1, 0)$ разного порядка точности:
пунктирной линией показан численно поостренный график слагаемого $T_1(x_1, 0)$;
синим цветом обозначен главный член асимптотики;
желтый цвет – первые два слагаемых в асимптотическом разложении;
зеленый цвет – первые три слагаемых;
красный цвет – первые четыре слагаемых;
фиолетовый цвет – первые пять слагаемых;
коричневый цвет – первые шесть слагаемых.

.

Выбранный масштаб не позволяет судить о повышении точности аппроксимации при большем порядке асимптотического приближения. Построим этот же самый график, но на другом масштабе (рис.2.2).

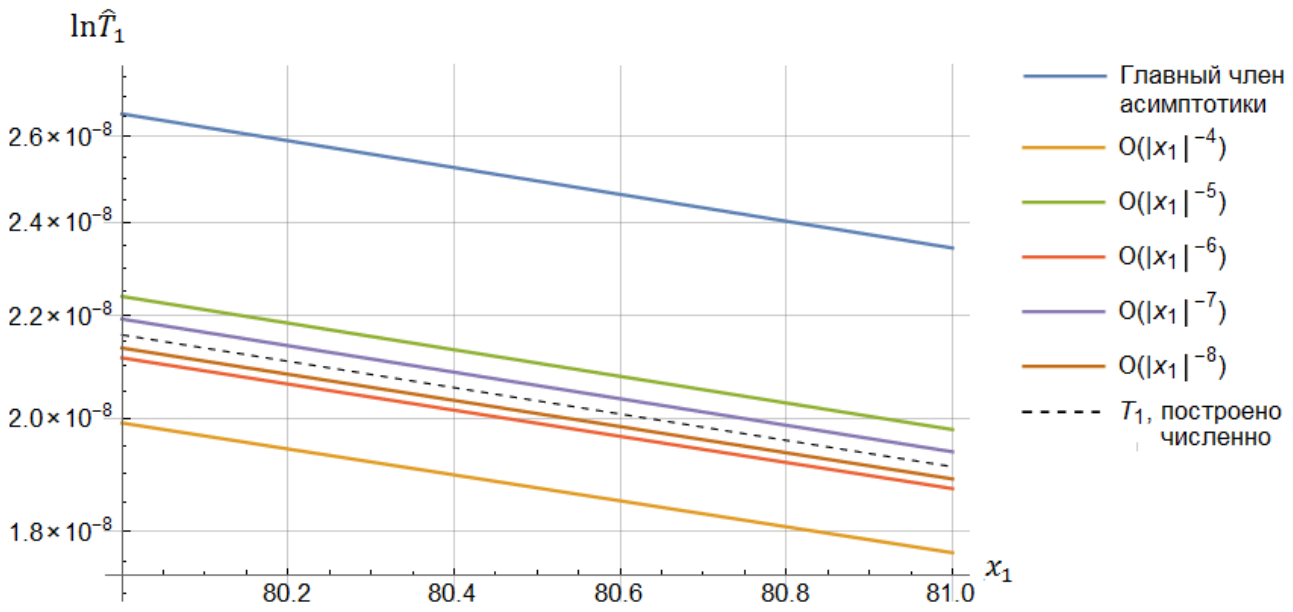


Рис.2.2. По оси ординат шкала скалирована натуральным логарифмом. На графике показан участок при $x_1 \in [80; 81]$, на котором сравнивается поведение асимптотик слагаемого $T_1(x_1, 0)$ разного порядка точности.

Из рисунка видно, что асимптотика с большим порядком точности дольше сходится к значению аппроксимируемой функции, но на дальних расстояниях оказывается более точной. Убедимся, что асимптотическое приближение получено правильно. В таком случае, должно выполняться:

$$\lim_{|x_1|\to\infty} K_{T_1} = 1,$$

где

$$K_{T_1} = \frac{\hat{T}_1(x_1, 0)}{T_1(x_1, 0)}.$$

На рис.2.3 представлен график сходимости главного члена полученной асимптотики $T_1(x_1, 0)$.

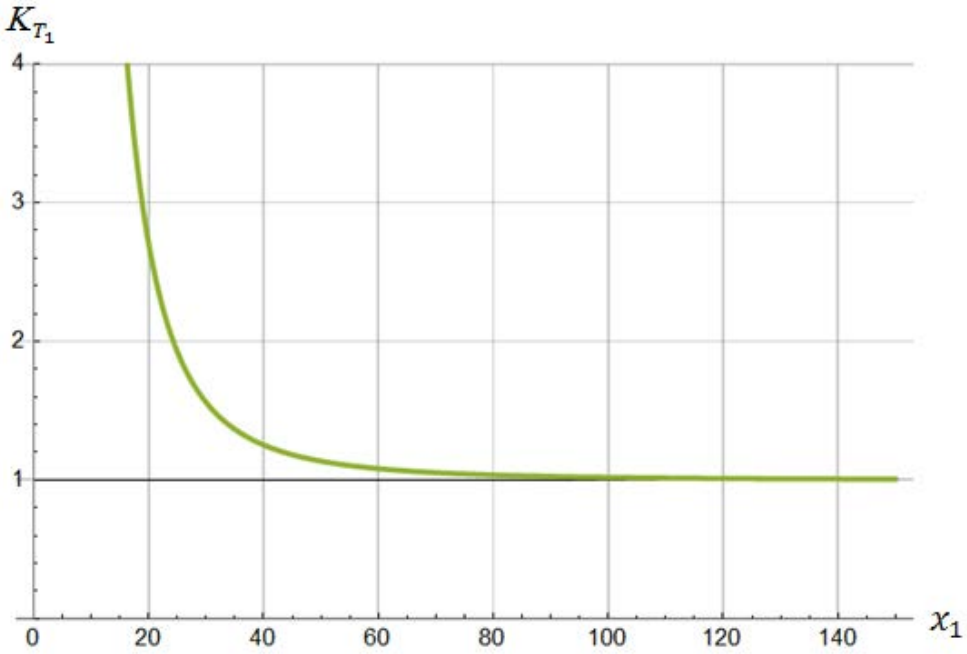


Рис.2.3. Функция K_{T_1} показывает, во сколько раз полученная асимптотика слагаемого $T_1(x_1, 0)$ отличается от значения, посчитанного численно.

Сходимость K_{T_1} к единице с ростом $|x_1|$ свидетельствует о правильности проведенных операций при асимптотическом приближении $T_1(x_1, 0)$. Поведение K_{T_1} в зависимости от изменения количества элементов асимптотического разложения $\hat{T}_1(x_1, 0)$ показано на рис.2.4.

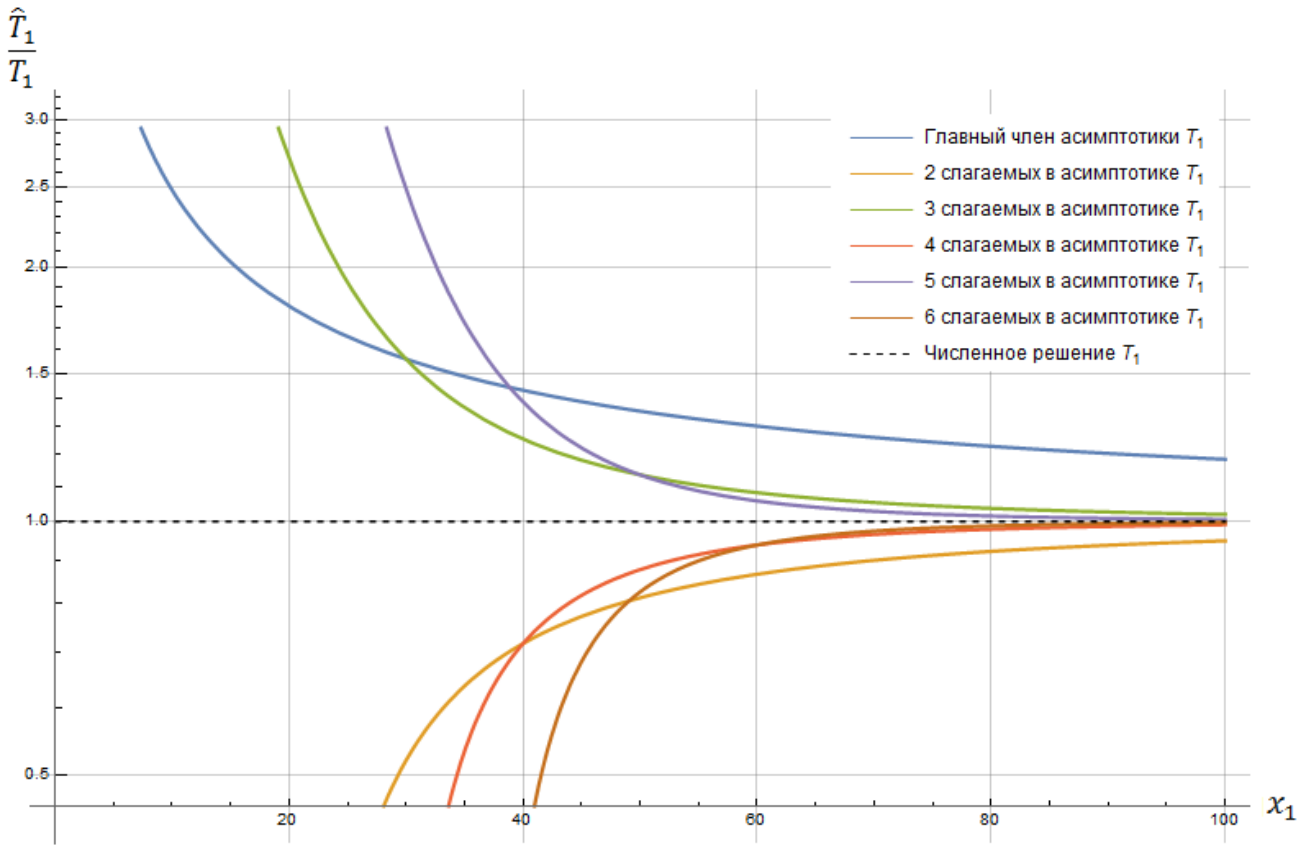


Рис.2.4. По оси ординат шкала скалирована натуральным логарифмом. График показывает поведение функции K_{T_1} для асимптотик $T_1(x_1, 0)$, вычисленных с разной точностью:
синим цветом обозначен главный член асимптотики;
желтый цвет – первые два слагаемых в асимптотическом разложении;
зеленый цвет – первые три слагаемых;
красный цвет – первые четыре слагаемых;
фиолетовый цвет – первые пять слагаемых;
коричневый цвет – первые шесть слагаемых.
Пунктирной линией выделена прямая, соответствующая $K_{T_1} = 1$.

При большем количестве членов асимптотического разложения, дальнее поле $T_1(x_1, 0)$ аппроксимируется более точно. При большей точности асимптотического приближения, увеличивается зона вблизи источника тепла, в которой наблюдается сильное расхождение приближения с самой функцией $T_1(x_1, 0)$, что делает неприемлемым использование в вычислениях полученной асимптотики (2.2) на небольшом удалении от источника тепла.

2.3 Асимптотика T_2 в случае α=0

Рассмотрим функцию (1.16):

$$T_2(x_1,0)=\frac{\bar{\chi}_0}{2\pi^2|x_1|c}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2}+1}\ \exp\left(-\frac{2\eta|x_1|\sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2}+1}}{c\sin p_1}\right)dp_1.$$

Здесь интеграл

$$J_2(x_1,0)=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2}+1}\ \exp\left(-\frac{2\eta|x_1|\sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2}+1}}{c\sin p_1}\right)dp_1 \qquad (2.3)$$

– является интегралом Лапласа. Запишем его в виде

$$J_2(x_1,0)=\int_0^{\pi}f(p_1)\mathrm{e}^{\lambda S(p_1)}dp_1,$$

где $f(p_1)=\sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2}+1}$, $S(p_1)=-\frac{\sqrt{\sin^2\frac{p_1}{2}+1}}{\sin p_1}$, $\lambda=\frac{2\eta|x_1|}{c}$.

Для дальнейшего разложения мы должны понимать поведение показателя экспоненты $S(p_1)$. Построим график функции $S(p_1)$ (рис.2.5).

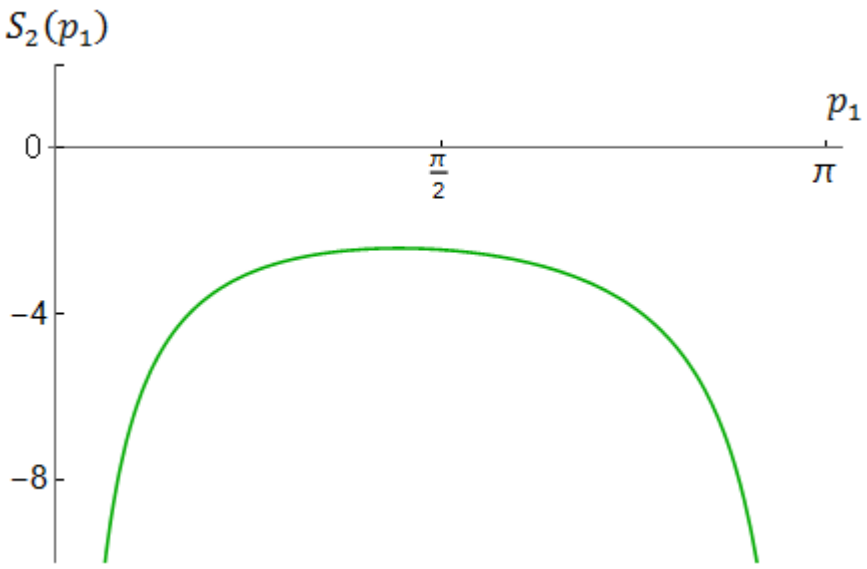


Рис.2.5. График показателя экспоненты $S(p_1)$ в интеграле $J_2(x_1,0)$. Глобальный максимум содержится внутри промежутка интегрирования.

Как видно из графика, интеграл (2.3) подходит под критерии I-го случая (см. табл.1) интеграла Лапласа. Асимптотику можно получить по формуле (1.20). Найдем точку p_1^*, в которой показатель экспоненты достигает максимума. Для этого вычислим производную функции $S(p_1)$ и приравняем ее к нулю: $S'(p_1) = 0$.

Полученная точка максимума: $p_1^* = 2\mathrm{arcctg}\left(\sqrt[4]{2}\right) \approx 1.39837$.

Проведем остальные необходимые вычисления согласно формуле (1.20).

$$f(p_1^*) = \left(\sqrt[4]{2}\right) \approx 1.18921,$$

$$S(p_1^*) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -1.20711,$$

$$S''(p_1^*) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -1.20711.$$

Интересно, что значения функций $S(p_1^*)$ и $S''(p_1^*)$ в точке максимума p_1^* совпали. Подставив $S(p_1^*)$, $f(p_1^*)$, $S''(p_1^*)$ в (1.20), получим главный член асимптотического разложения для (2.3):

$$\hat{J}_2 = \sqrt{-\frac{2\pi c}{2\,\eta|x_1|\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}\,\exp\left(\frac{2\eta|x_1|}{c}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left[\left(\sqrt[4]{2}\right) + O(|x_1|^{-1})\right],$$

$$\hat{J}_2 \sim \sqrt[4]{2}\sqrt{\frac{\pi c}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\eta|x_1|}}\,\exp\left(-\frac{2\eta|x_1|}{c}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\left[1 + O(|x_1|^{-1})\right],$$

$$\hat{J}_2 \sim \sqrt{\left(4 - 2\sqrt{2}\right)\frac{\pi c}{\eta|x_1|}}\,\exp\left(-\left(1 + \sqrt{2}\right)\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left[1 + O(|x_1|^{-1})\right].$$

Главный член асимптотики слагаемого $T_2(x_1, 0)$ имеет вид:

$$\hat{T}_2(x_1,0) = \frac{\bar{\chi}_0}{2\pi^2|x_1|c}\sqrt{\left(4-2\sqrt{2}\right)\frac{\pi c}{\eta|x_1|}}\,\exp\left(-\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\eta|x_1|}{c}\right)[1+O(|x_1|^{-1})].$$

Внеся множитель под знак корня, получим окончательный вид главного члена асимптотики:

$$\hat{T}_2(x_1,0) = \exp\left(-\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\bar{\chi}_0\sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi^3|x_1|^3\,\eta\,c}}+O\left(|x_1|^{-\frac{5}{2}}\right)\right). \qquad (2.4)$$

Проверим корректность полученной асимптотики, убедившись в выполнении

$$\lim_{|x_1|\to\infty} K_{T_2} = 1,$$

где $K_{T_2} = \dfrac{\hat{T}_2(x_1,0)}{T_2(x_1,0)}$.

Как видно из рис.2.6, значение функции K_{T_2} на больших расстояниях стремится к единице.

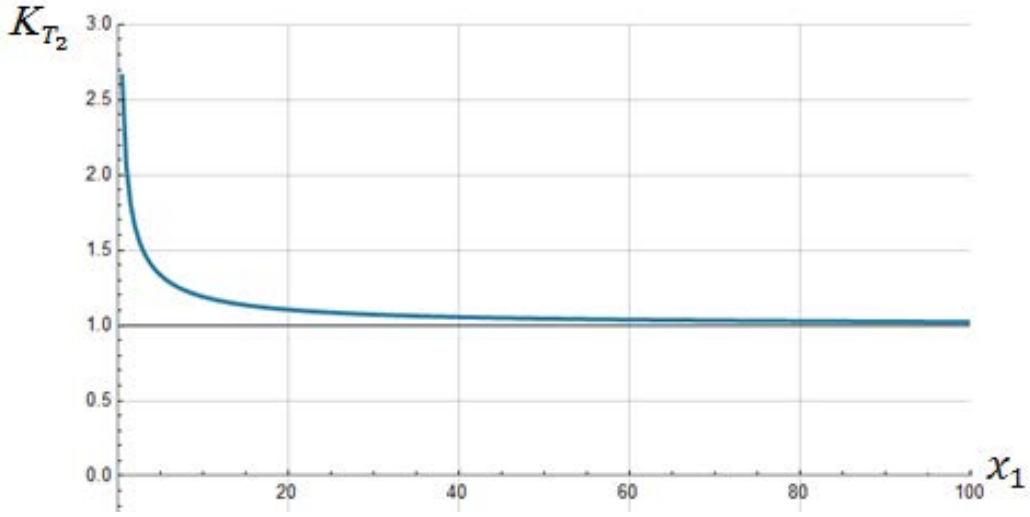


Рис.2.6. Функция K_{T_2} показывает, во сколько раз полученная асимптотика слагаемого $T_2(x_1,0)$ отличается от значения, посчитанного численно.

.

Сравнение главного члена полученной асимптотики слагаемого $T_2(x_1,0)$ и численно посчитанного значения показано на рис.2.7.

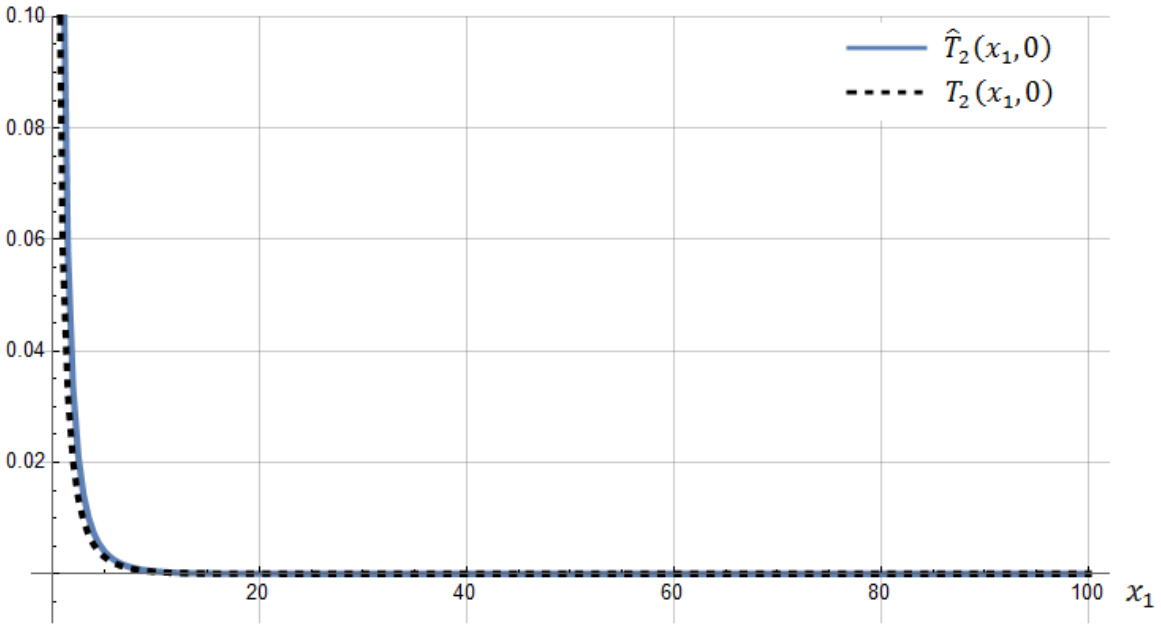


Рис.2.7. Сравнение главного члена асимптотики $\hat{T}_2(x_1,0)$ (сплошная линия) и слагаемого $T_2(x_1,0)$ в интегральном представлении (пунктирная линяя).

Учитывая сингулярность в точке $x_1 = 0$, асимптотическое приближение (2.4) аппроксимирует исходную функцию достаточно точно вблизи источника тепла.

2.4 Вклад слагаемых T_1 и T_2 в температурное поле в случае α=0

Полученные главные члены асимптотик (2.2), (2.4) имеют вид:

$$\hat{T}_1(x_1,0) = \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta\,|x_1|^2} + O(|x_1|^{-3})\right),$$

$$\hat{T}_2(x_1,0) = \exp\left(-\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\bar{\chi}_0\sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi^3|x_1|^{\frac{3}{2}}\,\eta\,c}} + O\left(|x_1|^{-\frac{5}{2}}\right)\right).$$

Сравним точность полученных главных членов асимптотик, построив графики (рис.2.8).

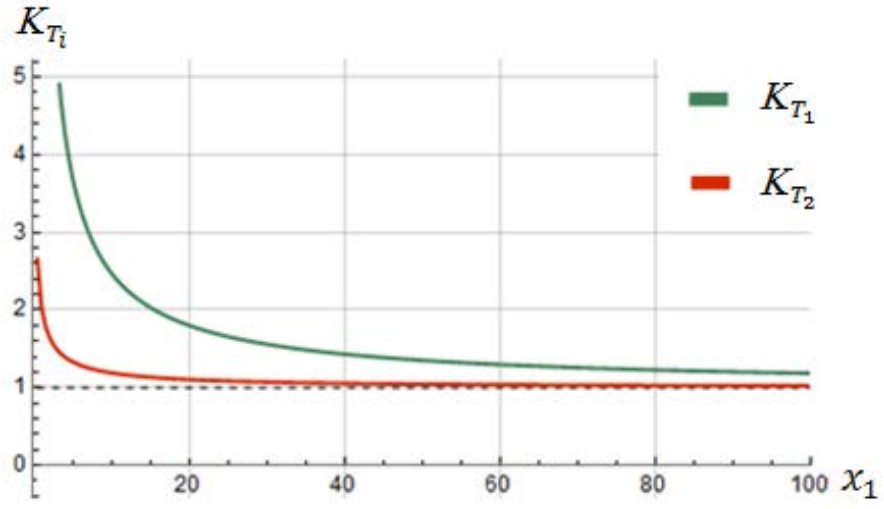


Рис.2.8. Сравнение функций $K_{T_1} = \frac{\hat{T}_1}{T_1}$ и $K_{T_2} = \frac{\hat{T}_2}{T_2}$. Главный член асимптотики $\hat{T}_2$ приближается к значению аппроксимируемой функции быстрее, чем главный член асимптотики $\hat{T}_1$.

Асимптотики $\hat{T}_1(x_1, 0)$ и $\hat{T}_2(x_1, 0)$ представимы в виде:

$$\hat{T}_1(x_1, 0) \sim C_1 \frac{1}{|x_1|^2} \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\right), \quad \hat{T}_2(x_1, 0) \sim C_1 \frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-(1+\sqrt{2})\frac{\eta|x_1|}{c}\right)$$

Показатель экспоненты в главном члене асимптотики $\hat{T}_2(x_1, 0)$ больше, чем в главном члене асимптотики $\hat{T}_1(x_1, 0)$, а порядок амплитудной функции – меньше. Только при малых значениях x_1 слагаемое $\hat{T}_2(x_1, 0)$ должно вносить больший вклад, чем $\hat{T}_1(x_1, 0)$. Однако на дальнем поле влияние слагаемого $\hat{T}_2(x_1, 0)$ будет убывать быстрее, чем $\hat{T}_1(x_1, 0)$, так как показательная функция растет быстрее степенной на бесконечности. Убедимся в этом, численно построив график функции

$$L(x_1) = \frac{\hat{T}_1(x_1, 0)}{\hat{T}_2(x_1, 0)} \quad \text{(рис.2.9).}$$

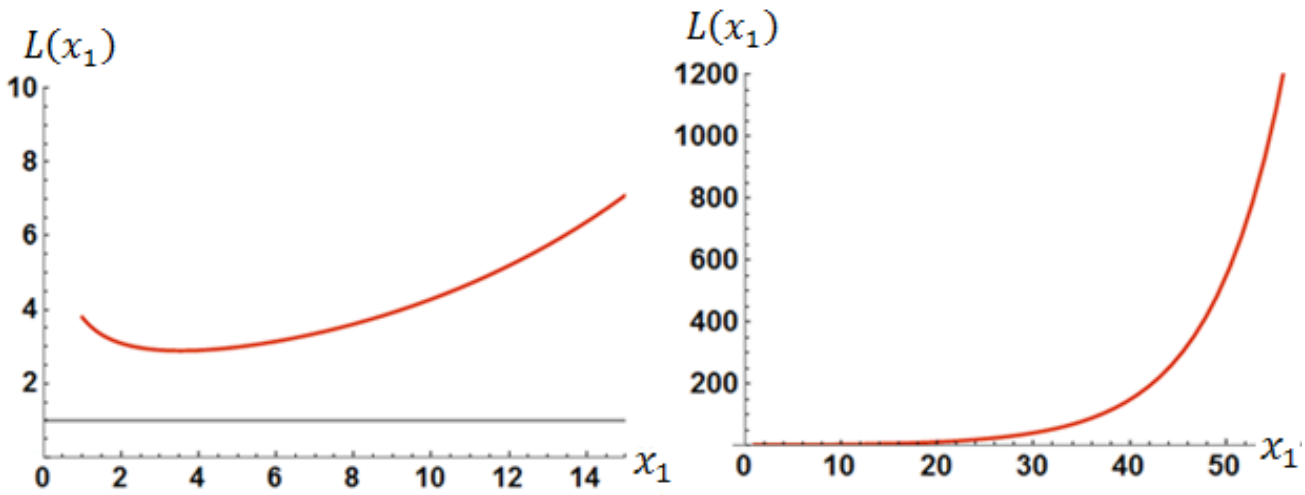


Рис.2.9. Поведение функции $L(x_1)$ на разных масштабах.

Ясно, что слагаемое $\hat{T}_2(x_1, 0)$ имеет влияние только на небольшом расстоянии от источника. Можем сделать вывод, что для горизонтального ряда в кристалле слагаемое $\hat{T}_1(x_1, 0)$ является главным членом асимптотики дальнего поля. По сравнению с членом $\hat{T}_1(x_1, 0)$, слагаемое $\hat{T}_2(x_1, 0)$ при вычислениях допустимо отбросить. Таким образом, для дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры вдоль горизонтального ряда, включающего источник нагрева, в двумерном диссипативном гармоническом кристалле при действии точечного источника тепла, справедливо равенство:

$$T(x_1, 0) = \hat{T}_1(x_1, 0)\big(1 + o(1)\big). \tag{2.5}$$

Глава 3. Асимптотика для ряда вдоль произвольной прямой, проходящей через точку подвода тепла

3.1 Асимптотика T_1 в случае $\alpha \in [0; \pi/4)$

Слагаемое T_1 в интегральном представлении можно записать в виде:

$$T_1(x_1, \alpha) = \frac{\bar{\chi}_0}{2\pi^2 |x_1|\, c} \int_0^{\pi} f_1(p_1, \alpha)\ \exp\big(\lambda\, S_1(p_1, \alpha)\big)\, dp_1,$$

$$G_1(x_1, \alpha) = \int_0^{\pi} f_1(p_1, \alpha)\ \exp\big(\lambda\, S_1(p_1, \alpha)\big)\, dp_1, \tag{3.1}$$

где
$$f_1(p_1, \alpha) = \frac{\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\arcsin(\tan\alpha \sin p_1)}{2}\right)^2}}{\sqrt{1 - \tan^2\alpha\ \sin^2 p_1}} \tag{3.2}$$

– амплитудная функция. $\lambda\, S_1(p_1, \alpha)$ – показатель экспоненты,

где
$$S_1(p_1, \alpha) = -2\,\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\arcsin(\tan\alpha \sin p_1)}{2}\right)^2}}{|\sin p_1|},$$

$\lambda = \dfrac{\eta\ |x_1|}{c}$ – множитель, независящий от переменной интегрирования p_1.

Для получения асимптотики по методу Лапласа, определим, при каких значениях аргумента p_1 показатель экспоненты принимает максимальные значения. Построим поверхность для предварительной оценки поведения функции $S_1(p_1, \alpha)$ (рис.3.1). Отметим, что задача рассматривается в области $p_1 \in [0;\ \pi]$. Однако построение функции $S_1(p_1, \alpha)$ в области $p_1 \in [-\pi;\ \pi]$ позволяет понять, что происходит в плоскости $p_1 = 0$.

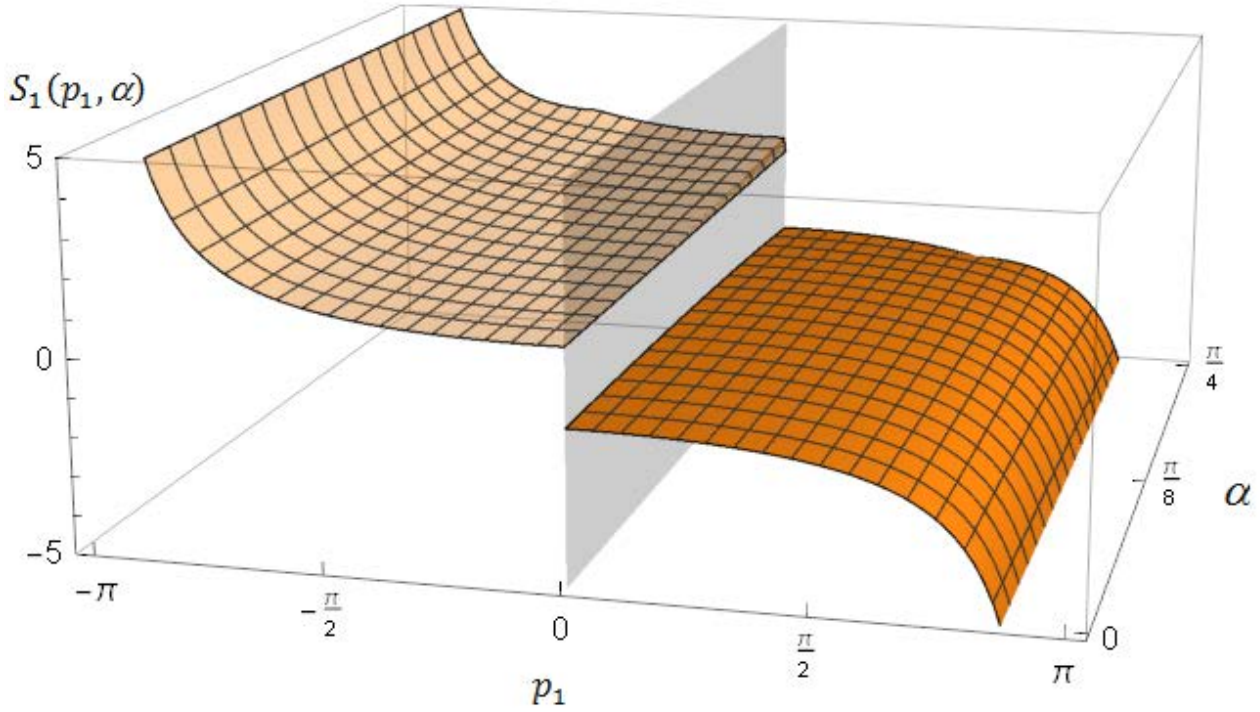


Рис.3.1. $S_1(p_1, \alpha)$ на промежутке $\alpha \in [0;\ \pi/4)$, $p_1 \in [-\pi;\ \pi]$.

При значении $p_1(\alpha) = 0$ функция $S_1(p_1, \alpha)$ терпит разрыв. Функцию $S_1(p_1, \alpha)$ доопределим до непрерывной. Тогда, на промежутке $p_1 \in [0;\ \pi]$, показатель экспоненты принимает максимальное значение вдоль прямой $p_1(\alpha) = 0$:

$$\lim_{p_1 \to 0} \frac{\partial S_1(p_1, \alpha)}{\partial p_1} = 0.$$

Таким образом, интеграл (3. 1) подходит под случай **II** (см. рис.1.3), главный член его асимптотики выражается формулой (1.21):

$$\hat{G}_1(x_1, \alpha) \approx f_1(p_1^*(\alpha), \alpha)\ \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\pi c}{\eta |x_1|\ S_1''(p_1^*(\alpha), \alpha)}}\ \mathrm{e}^{\frac{2\eta |x_1|}{c} S_1(p_1^*(\alpha), \alpha)},$$

где $p_1^*(\alpha)$ – значение p_1, при котором показатель экспоненты принимает максимальное значение на промежутке $[0;\ \pi]$. При попытке вычислить $f_1(p_1^*(\alpha), \alpha)$ оказывается, что в точке $p_1 = 0$ амплитудная функция вырождена: $f_1(0, \alpha) = 0$. Таким образом, асимптотическая формула (1.21) оказывается неприменима к интегралу (3.1). Для получения асимптотики слагаемого $T_1(x_1, \alpha)$ необходимы дополнительные вычисления.

Приведем (3.1) к виду (1.17), чтобы можно было воспользоваться леммой Ватсона, которая позволяет получить асимптотику интегралов Лапласа, если показатель экспоненты является степенной функцией. Разложим функции $f_1(p_1, \alpha)$, $S_1(p_1, \alpha)$ до главных членов ряда Тейлора в окрестности точки $p_1 = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{f_1}^{(n)}(0, \alpha)}{n!} {p_1}^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{S_1}^{(n)}(0, \alpha)}{n!} {p_1}^n.$$

Член ряда $f_1(0, \alpha) = 0$ уже был получен ранее. Найдем следующий член ряда:

$$\frac{\partial f_1(p_1, \alpha)}{\partial p_1} = z_1 + z_2 + z_3,$$

где

$$z_1 = \frac{\cos(p_1)\sin(p_1)\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\mathrm{Arcsin}\left(\tan(\alpha)\sin(p_1)\right)}{2}\right)^2}\tan^2(\alpha)}{\left(1 - \tan^2(\alpha)\sin^2(p_1)\right)^{3/2}},$$

$$z_2 = \frac{\sin(p_1)}{2\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\mathrm{Arcsin}\left(\tan(\alpha)\sin(p_1)\right)}{2}\right)^2}\sqrt{1 - \tan^2(\alpha)\sin^2(p_1)}},$$

$$z_3 = \frac{\sin(2p_1)\tan^2(\alpha)}{8\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\mathrm{Arcsin}\left(\tan(\alpha)\sin(p_1)\right)}{2}\right)^2}\left(1 - \tan^2(\alpha)\sin^2(p_1)\right)}.$$

Слагаемое $z_2(0) = 0$, а в слагаемых z_2 и z_3 в точке $p_1 = 0$ присутствует неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Избавимся от неопределенности, посчитав пределы:

$$\lim_{p_1 \to 0} z_2(p_1, \alpha) = \frac{1}{2}|\cos(\alpha)|, \qquad \lim_{p_1 \to 0} z_3(p_1, \alpha) = \frac{1}{2}|\sin(\alpha)\tan(\alpha)|.$$

Так как мы рассматриваем задачу в секторе $\alpha \in [0;\ \pi/4)$, операцию взятия модуля можно отбросить.

$$\lim_{p_1 \to 0} f_1(p_1, \alpha) = \frac{1}{2}\cos(\alpha) + \frac{1}{2}\sin(\alpha)\tan(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) = \frac{1}{2}\sec(\alpha)$$

Получим главный член разложения $f_1(p_1, \alpha)$ в окрестности $p_1 = 0$:

$$\hat{f}_1(p_1, \alpha) = \frac{1}{2}\sec(\alpha)\,\boldsymbol{p_1} + O({p_1}^2) \tag{3.3}$$

Теперь разложим функцию $S_1(p_1, \alpha)$ в ряд Тейлора в окрестности $p_1 = 0$.

Так как при $p_1 = 0$ функция $S_1(p_1, \alpha)$ терпит разрыв, то при вычислении членов разложения используется предельный переход так же, как его использовали при вычислении членов разложения $f_1(p_1, \alpha)$.

$$\lim_{p_1 \to 0} S_1(p_1, \alpha) = -\sec(\alpha),$$

$$\lim_{p_1 \to 0} \frac{\partial S_1(p_1, \alpha)}{\partial p_1} = 0,$$

$$\lim_{p_1 \to 0} \frac{\partial^2 S_1(p_1, \alpha)}{\partial {p_1}^2} = -\frac{1}{4}\cos(\alpha)\big(1 + \tan^4(\alpha)\big).$$

Таким образом, в окрестности $p_1 = 0$:

$$\hat{S}_1(p_1, \alpha) = -\sec(\alpha) - \frac{1}{8}\cos(\alpha)\big(1 + \tan^4(\alpha)\big)\,\boldsymbol{p_1^2} + O({p_1}^3).$$

Подставив полученные выражения в (3.1), получим приближение для слагаемого T_1:

$$\hat{T}_1(x_1, \alpha) = \frac{\bar{\chi}_0}{2\,\pi^2 |x_1|\, c}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sec(\alpha)\,\boldsymbol{p_1} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(\frac{\eta\,|x_1|}{c}\left(-\sec(\alpha) - \frac{1}{8}\cos(\alpha)\big(1 + \tan^4(\alpha)\big)\,\boldsymbol{p_1}^2\right)\right) dp_1. \tag{3.4}$$

Приведем уравнение (3.4) к виду (1.17). Вынесем множители, не зависящие от p_1, за знак интеграла.

$$\hat{T}_1(x_1,\alpha) = \frac{\bar{\chi}_0}{4\,\pi^2|x_1|\,c}\sec(\alpha)\ \exp\left(\frac{\eta\,|x_1|}{c}\,(-\sec(\alpha)\,)\right)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\pi}\boldsymbol{p_1}\ \exp\left(\frac{\eta\,|x_1|}{c}\left(-\frac{1+\tan^4\alpha}{8\sec(\alpha)}\,\boldsymbol{p_1}^2\right)\right)dp_1, \qquad (3.5)$$

или $$\hat{T}_1(x_1,\alpha) = A\int_0^{\pi}{p_1}^{\beta-1}\exp(-k\,{p_1}^{\sigma})\,dp_1,$$

где $$A = \frac{\bar{\chi}_0}{4\,\pi^2|x_1|\,c}\sec(\alpha)\ \exp\left(-\sec(\alpha)\frac{\eta|x_1|}{c}\right),$$

$$k = \frac{1+\tan^4\alpha}{8\sec(\alpha)}\,\frac{\eta|x_1|}{c},$$

$$\sigma = 2,$$

$$\beta = 2.$$

Теперь можно воспользоваться леммой Ватсона, чтобы получить асимптотику $T_1(x_1,\alpha)$. Так как мы аппроксимировали $S_1(p_1,\alpha)$ квадратичной функцией, то удастся получить только первый член разложения (1.18). Все поправочные члены будут зависеть от высших производных функции $S_1(p_1,\alpha)$ [1]. В рамках текущей задачи для описания дальнего поля главного члена асимптотики $T_1(x_1,\alpha)$ вполне достаточно. По лемме Ватсона имеем:

$$\hat{T}_1(x_1,\alpha) = A\,\frac{1}{\sigma}\,k^{\frac{-(0+\beta)}{\sigma}}\Gamma\left(\frac{0+\beta}{\sigma}\right)\frac{f^{(0)}(0)}{0!} + O\left(|k|^{\frac{-(1+\beta+1)}{\sigma}}\right).$$

Здесь $$f(p_1) = 1, \quad \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = 1,$$

$$k^{\frac{-(0+2)}{2}} = \frac{8\sec(\alpha)}{1+\tan^4\alpha}\,\frac{c}{\eta|x_1|},$$

$$\Gamma\left(\frac{0+2}{2}\right) = 1.$$

Получим выражение для главного члена асимптотики (3.1):

$$\hat{T}_1(x_1, \alpha) = A\left(\frac{1}{2}\frac{8\sec(\alpha)}{1+\tan^4\alpha}\frac{c}{\eta|x_1|} + O(|x_1|^{-2})\right).$$

Подставив коэффициент А, имеем:

$$\hat{T}_1(x_1, \alpha) = \frac{\bar{\chi}_0 \sec(\alpha)}{4\,\pi^2|x_1|\,c}\exp\left(-\sec(\alpha)\,\frac{\eta\,|x_1|}{c}\right)\left(\frac{4\sec(\alpha)}{1+\tan^4\alpha}\frac{c}{\eta|x_1|} + O(|x_1|^{-2})\right).$$

Упростив выражение, получим окончательный вид главного члена асимптотики слагаемого $T_1(x_1, \alpha)$:

$$\hat{T}_1(x_1, \alpha) = \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta|x_1|^2}\frac{\sec^2\alpha}{1+\tan^4\alpha}\exp\left(-\sec(\alpha)\,\frac{\eta\,|x_1|}{c}\right) + O(|x_1|^{-3}). \quad (3.6)$$

Сравним выражение (3.6) с главным членом асимптотики T_1 при нулевом угле, полученным ранее (2.2):

$$\hat{T}_1(x_1, 0) = \frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta|x_1|^2}\exp\left(-\frac{\eta\,|x_1|}{c}\right) + O(|x_1|^{-3}).$$

При $\alpha = 0$:

$$B_1(0) = \frac{\sec^2(0)}{1+\tan^4(0)} = 1,$$

$$B_2(0) = \sec(0) = 1,$$

выражение (3.6) совпадает с выражением (2.2). При $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

$$B_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan^4\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 1,$$

$$B_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

Поведение функций

Обратим внимание, что в полученном разложении (3.3) отсутствует сингулярная точка, которая присутствует в исходной амплитудной функции (3.2). На рис.3.2, 3.3 построена амплитудная функция $f_1(p_1, \alpha)$ и ее аппроксимация (3.3).

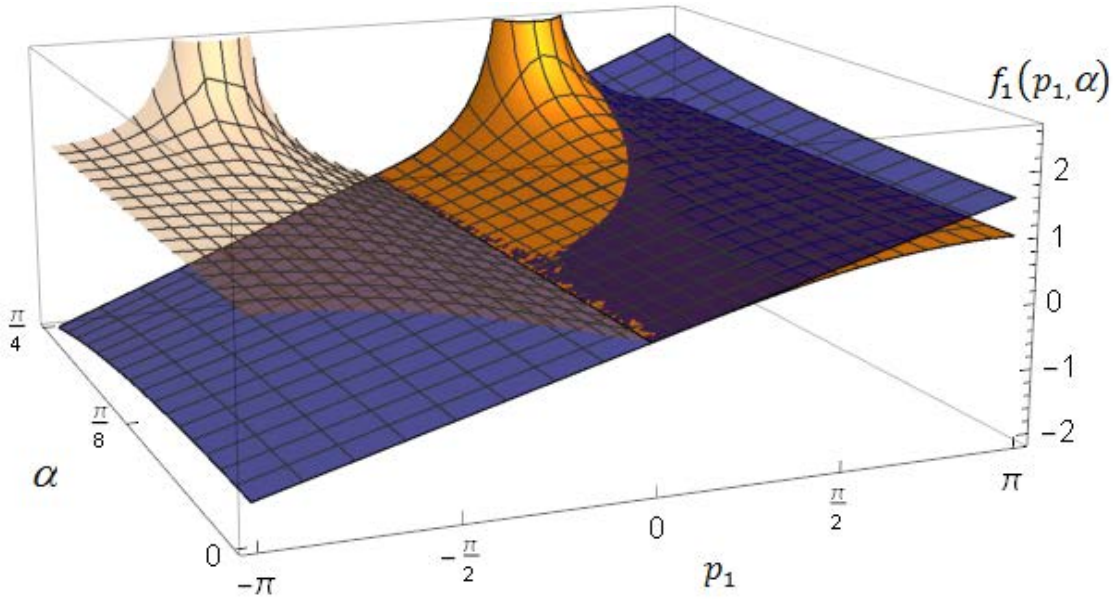


Рис.3.2. Оранжевым цветом показана функция $f_1(p_1, \alpha)$. Синим цветом – полученная аппроксимация $\hat{f}_1(p_1, \alpha)$. Мы рассматриваем задачу при $p_1 \in [0;\ \pi]$. Участок графика в ти $p_1 \in [-\pi;\ 0]$ построен для понимания происходящего при $p_1 = 0$.

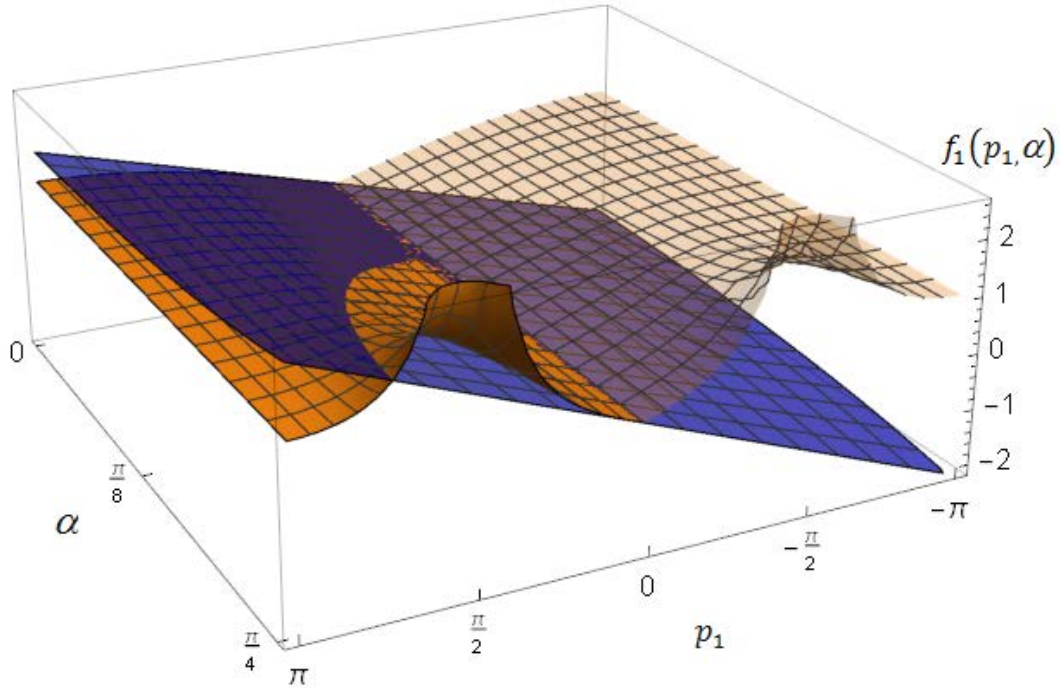


Рис.3.3. Функция $f_1(p_1, \alpha)$ (оранжевый цвет) и полученная аппроксимация $\hat{f}_1(p_1, \alpha)$ (синий цвет) показаны с другого ракурса. Мы рассматриваем задачу при $p_1 \in [0;\ \pi]$. Участок графика в области $p_1 \in [-\pi;\ 0]$ построен для понимания происходящего при $p_1 = 0$.

Как видно из графиков, функция $f_1(p_1, \alpha)$ является симметричной относительно плоскости $p_1 = 0$, где имеет излом. Также на графиках видно, что разложение (3.3) действительно не учитывает сингулярную точку $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Исследуем применимость полученной асимптотики (3.6), проверив сходимость отношения $\frac{\hat{T}_1}{T_1}(x_1, \alpha)$ к единице (рис.3.4).

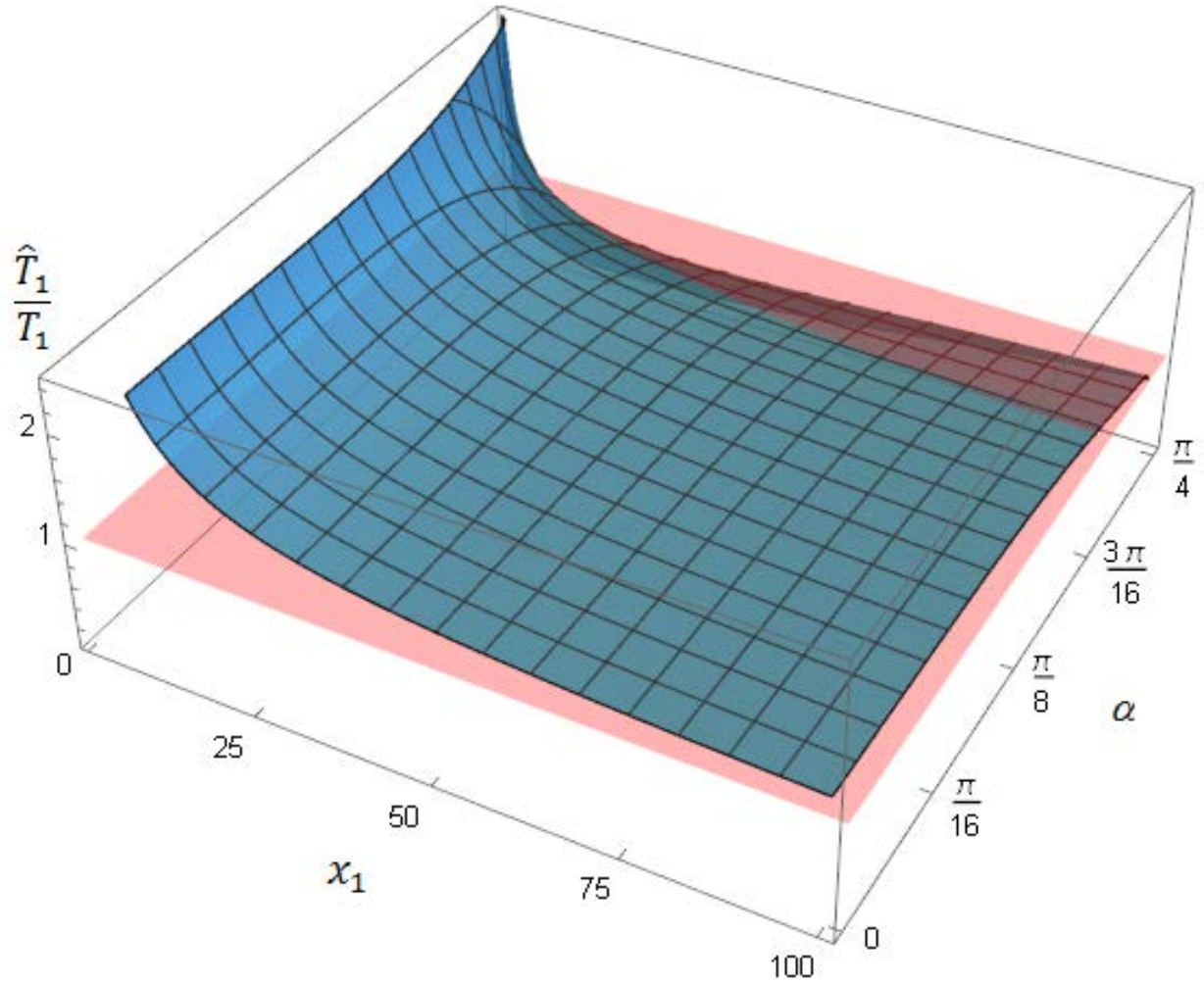


Рис.3.4. Синяя поверхность показывает поведение функции $\frac{\hat{T}_1}{T_1}(x_1, \alpha)$.
Розовая плоскость соответствует значению $\frac{\hat{T}_1}{T_1}(x_1, \alpha) = 1$.

Так как амплитудная функция $f_1(p_1, \alpha)$ имеет сингулярность в точке $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, то, формально, ее нельзя раскладывать в ряд Тейлора. Тем не менее, полученная асимптотика сходится достаточно хорошо, за исключением окрестности

$\alpha \in \left[\frac{\pi}{4} - \varepsilon; \frac{\pi}{4}\right]$, где ε – маленькое число. Поведение асимптотики на более дальнем расстоянии от источника нагрева показано на рис.3.5, из которого видно, что полученная асимптотика слагаемого $T_1(x_1, \alpha)$ хорошо аппроксимирует дальнее поле.

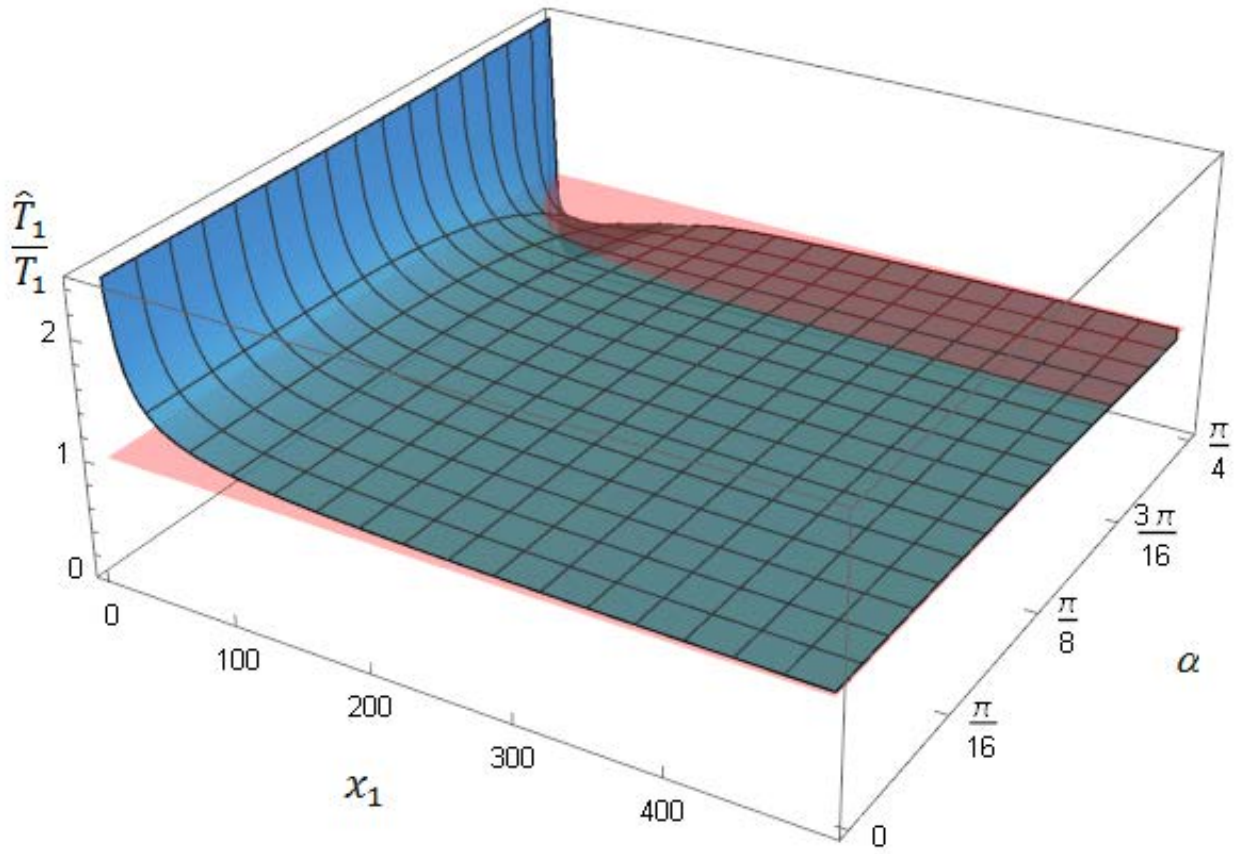


Рис.3.5. Синяя поверхность показывает поведение функции $\frac{\hat{T}_1}{T_1}(x_1, \alpha)$.
Розовая плоскость соответствует значению $\frac{\hat{T}_1}{T_1}(x_1, \alpha) = 1$.

Асимптотика функции $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$ сходится к численно посчитанной $T_1(x_1, \alpha)$ на большом удалении от источника. На дальнем расстоянии повышается качество аппроксимации в зоне $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{16}; \frac{\pi}{4}\right]$. Зона, в которой полученная асимптотика хорошо аппроксимирует не очень дальнее поле, зависит от параметров $\bar{\chi}_0$, c, η. Значения параметров, при которых строятся графики в текущем исследовании: $\bar{\chi}_0 = 0.5$, $c = 1$, $\eta = 0.1$. При таких параметрах полученная асимптотика $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$ на не очень дальнем поле хорошо работает в секторе $\alpha \in \left[0; \frac{3\pi}{16}\right]$.

3.2 Асимптотика T_2 в случае α∈[0; π/4)

Слагаемое T_2 в интегральном представлении:

$$T_2(x_1,\alpha)=\frac{\bar{\chi}_0}{2\pi^2|x_1|\,c}\int_0^{\pi} f_2(p_1,\alpha)\ \exp\big(\lambda\, S_2(p_1,\alpha)\big)\,dp_1,$$

$$G_2(\lambda,\alpha)=\int_0^{\pi} f_2(p_1,\alpha)\ \exp\big(\lambda\, S_2(p_1,\alpha)\big)\,dp_1, \qquad (3.7)$$

где $$f_2(p_1,\alpha)=\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi-\arcsin(\tan\alpha\,\sin p_1)}{2}\right)^2}}{\sqrt{1-\tan^2\alpha\ \sin^2 p_1}}$$

– амплитудная функция. $\lambda\, S_2(p_1,\alpha)$ – показатель экспоненты, где

$$S_2(p_1,\alpha)=-2\,\frac{\sqrt{\left(\sin\frac{p_1}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\pi-\arcsin(\tan\alpha\,\sin p_1)}{2}\right)^2}}{|\sin p_1|},$$

$$\lambda=\frac{\eta\,|x_1|}{c}.$$

Построим функцию $S_2(p_1,\alpha)$ (рис.3.6):

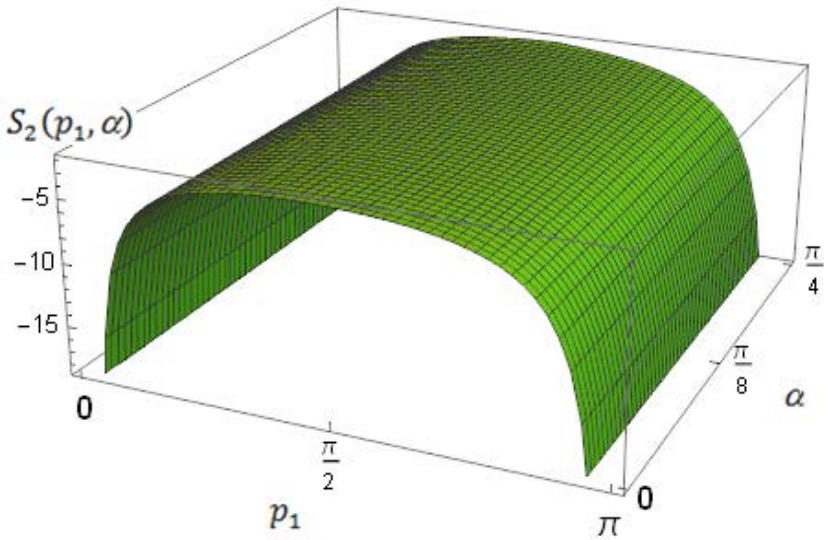


Рис.3.6. Поверхность, образованная функцией $S_2(p_1,\alpha)$. Кривая, соответствующая значениям α, при которых функция $S_2(p_1,\alpha)$ имеет абсолютный экстремум на промежутке $\alpha\in[0;\ \frac{\pi}{4})$, лежит внутри пределов интегрирования.

Показатель экспоненты $S_2(p_1, \alpha)$ имеет вид, подходящий под случай I (см. табл.1). Определим $p_1{}^*(\alpha)$ из выражения $S_2'(p_1^*, \alpha) = 0$. В аналитическом виде выразить $S_2'(p_1^*(\alpha), \alpha) = 0$ не удается, так как функция $p_1^*(\alpha)$ имеет неявный вид. Построим $p_1^*(\alpha)$ численно (рис.3.7).

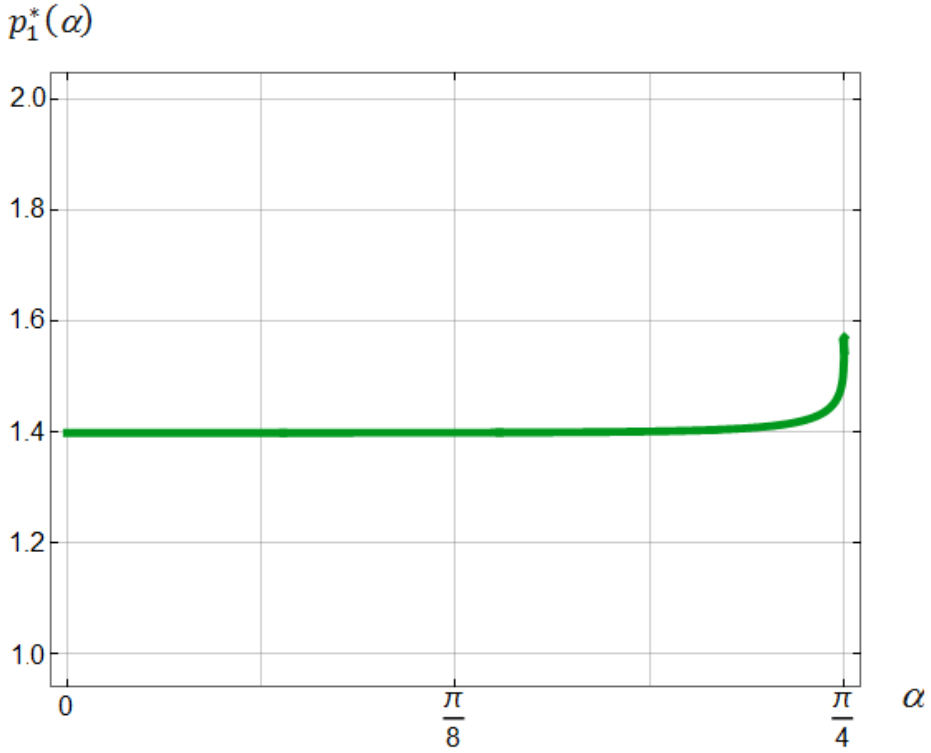


Рис.3.6. Функция $p_1^*(\alpha)$ быстро меняется в окрестности $\alpha = {}^{\pi}/_{4}$.

Значения функции $p_1^*(\alpha)$ на концах области определения удалось выразить в аналитическом виде:

$$p_1^*(0) = \operatorname{arcctg}(\sqrt[4]{2}),$$

$$p_1^*\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

При подстановке в асимптотическою формулу значения $p_1^*(\alpha)$, амплитудная функция $f_2(p_1, \alpha)$ будет содержать сингулярную точку $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Значит, в отличие от полученной асимптотики для $T_1(x_1, \alpha)$, асимптотика для слагаемого $T_2(x_1, \alpha)$ будет учитывать особенность при $\alpha \to \frac{\pi}{4}$.

По формуле (1.20), асимптотика интеграла (3.7) имеет вид:

$$\hat{G}_2(\lambda,\alpha) = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda\, S''(p_1^*(\alpha),\alpha)}}\ \mathrm{e}^{\lambda\, S(p_1^*(\alpha),\alpha)}\left[f(p_1^*(\alpha),\alpha) + O\left(\lambda^{-1}\right)\right].$$

Тогда, главный член асимптотики слагаемого $T_2(x_1,\alpha)$ будет иметь вид:

$$\hat{T}_2(x_1,\alpha) = \frac{\bar{\chi}_0}{2\pi^2|x_1|\,c}\sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda\, S''(p_1^*(\alpha),\alpha)}}\ \mathrm{e}^{\lambda\, S(p_1^*(\alpha),\alpha)}\, f(p_1^*(\alpha),\alpha)$$

Функции $S(p_1^*(\alpha),\alpha)$, $f(p_1^*(\alpha),\alpha)$, $S''(p_1^*(\alpha),\alpha)$ не удается выразить аналитически из-за содержащегося аргумента в виде неявной функции. Преобразуем выражение, отделив в $\hat{T}_2$ константы от переменных:

$$\hat{T}_2(x_1,\alpha) = f(p_1^*(\alpha),\alpha)\left(\bar{\chi}_0\sqrt{-\frac{1}{S''(p_1^*(\alpha),\alpha)\ 2\,\pi^3\,\eta\,c\,|x_1|^{\frac{3}{2}}}}\right)\exp\left(S(p_1^*(\alpha),\alpha)\ \frac{\eta|x_1|}{c}\right).$$

$$\hat{T}_2(x_1,\alpha) = A(p_1^*(\alpha),\alpha)\frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{2}}}\ \exp\left(S(p_1^*(\alpha),\alpha)\ \frac{\eta|x_1|}{c}\right), \tag{3.8}$$

где $$A(p_1^*(\alpha),\alpha) = \bar{\chi}_0\sqrt{-\frac{1}{S''(p_1^*(\alpha),\alpha)\ 2\,\pi^3\,\eta\,c}}\, f(p_1^*(\alpha),\alpha).$$

Для понимания поведения полученной асимптотики (3.8), определим, какие значения принимают множитель $A(p_1^*(\alpha),\alpha)$ (рис.3.7) и показатель экспоненты $S(p_1^*(\alpha),\alpha)$ (рис.3.8).

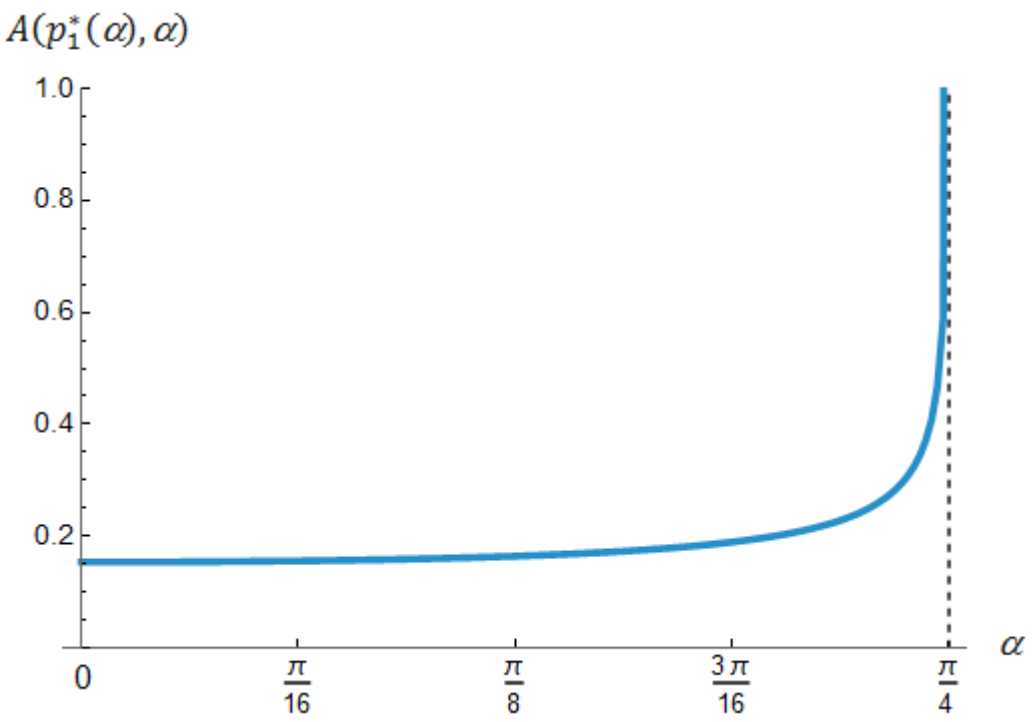


Рис.3.7. Поведение функции $A(p_1^*(\alpha),\alpha)$. Точка $\alpha = {}^{\pi}/_{4}$ является сингулярной.

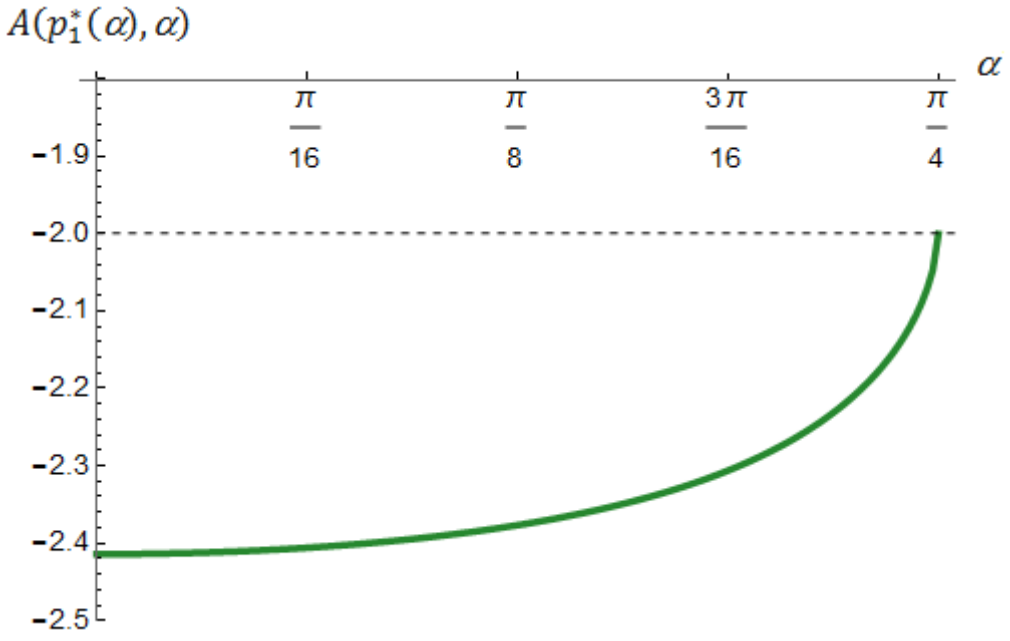


Рис.3.8. Поведение функции $S(p_1^*(\alpha),\alpha)$. В точке $\alpha = {}^{\pi}/_{4}$: $S(p_1^*(\alpha),\alpha) = -2$.

При $\alpha \in [0; {}^{\pi}/_{4})$ множители в (3.8) принимают значения в диапазоне:

$$A(p_1^*(\alpha),\alpha) \in [0.15; +\infty),$$

$$S(p_1^*(\alpha),\alpha) \in \left[-\left(1+\sqrt{2}\right); -2\right).$$

Отметим, что значение нижней границы интервала $A(p_1^*(\alpha), \alpha)$ указано приблизительно, так как вычисляется численно. Граничные значения на концах интервала функции $S(p_1^*(\alpha), \alpha)$ удалось выразить аналитически:

$$S(p_1^*(0), 0) = S\left(\operatorname{arcctg}\left(\sqrt[4]{2}\right), 0\right) = -\left(1 + \sqrt{2}\right),$$

$$S\left(p_1^*\left(\frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = -2.$$

Построим функцию $K_2 = \frac{\hat{T}_2(x_1,\alpha)}{T_2(x_1,\alpha)}$ (рис.3.9).

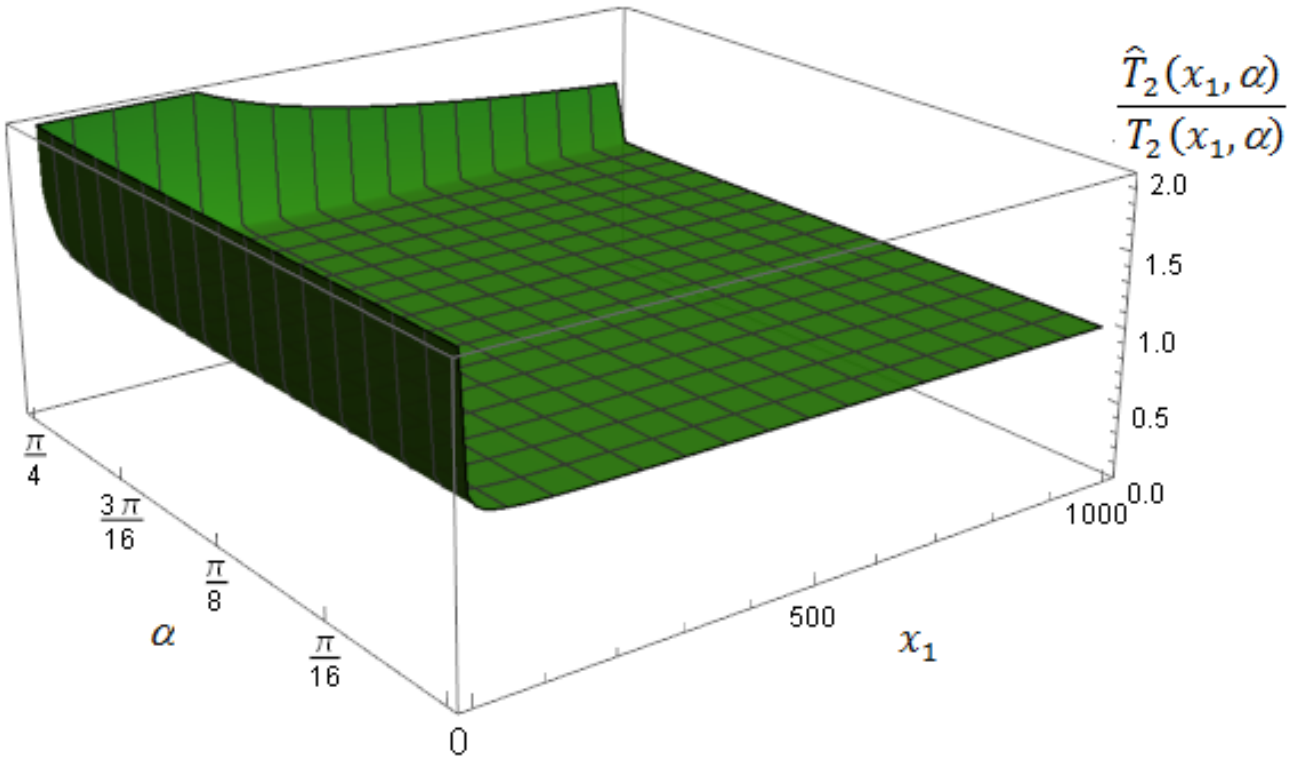


Рис.3.9. Поверхность, образованная функцией K_2.

Функция $K_2 = \frac{\hat{T}_2(x_1,\alpha)}{T_2(x_1,\alpha)}$ при удалении от источника нагрева стремится к единице (рис. 3.9), за исключением окрестности $\alpha = \frac{\pi}{4}$, где сама функция распределения температуры в интегральном представлении (1.13) сингулярная. Сходимость функции K_2 к единице показывает применимость полученной асимптотики (3.8) для приближения дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры.

3.3 Вклад слагаемых T_1 и T_2 в температурное поле при α∈[0; π/4)

Для понимания вклада каждого из слагаемых T_1 и T_2 в температурное поле, необходимо сравнить показатели экспонент в полученных асимптотиках

$$\hat{T}_1(x_1,\alpha) \sim C_1 \frac{1}{|x_1|^2} \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c} S_1(\alpha)\right),$$

$$\hat{T}_2(x_1,\alpha) \sim C_2 \frac{1}{|x_1|^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c} S_2(\alpha)\right).$$

На рис.3.10 функции $S_1(\alpha)$ и $S_2(\alpha)$ построены численно.

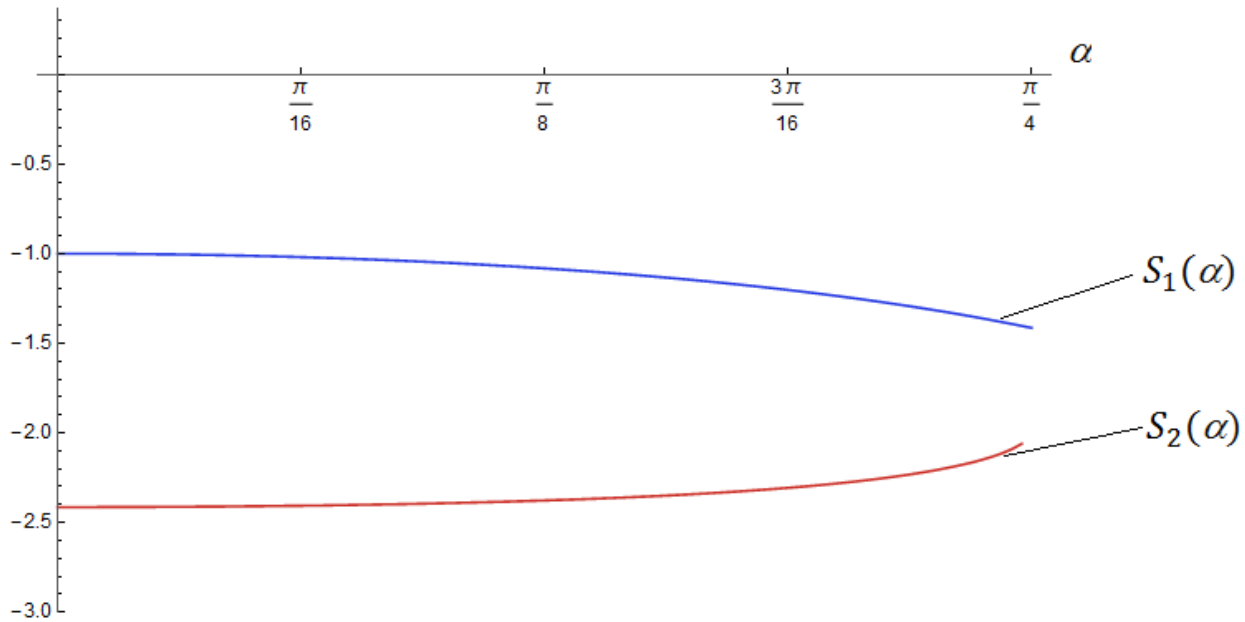


Рис.3.10. На графике $S_1(\alpha)$ – показатель экспоненты в $\hat{T}_1(x_1,\alpha)$, а $S_2(\alpha)$ – показатель экспоненты в $\hat{T}_2(x_1,\alpha)$

Показатели экспонент являются монотонными функциями. В ходе работы удалось получить их граничные значения:

$$S_1(\alpha) \in \left[-\sqrt{2}; -1\right),$$

$$S_2(\alpha) \in \left[-\left(1+\sqrt{2}\right); -2\right).$$

Показатель экспоненты в $\hat{T}_2(x_1,\alpha)$ по модулю всегда больше, чем показатель экспоненты в $\hat{T}_1(x_1,\alpha)$, как минимум, на величину $2-\sqrt{2}$, при любых $\alpha\in[0;\ \pi/4)$. Скорость убывания асимптотики $\hat{T}_2(x_1,\alpha)$ по сравнению с $\hat{T}_1(x_1,\alpha)$ можно оценить, выразив отношение функций:

$$\frac{\hat{T}_2}{\hat{T}_1} \sim const\,\frac{|x_1|^2\exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}S_2(\alpha)\right)}{|x_1|^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}S_1(\alpha)\right)},$$

$$\frac{\hat{T}_2}{\hat{T}_1} \sim const\,|x_1|^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\left(S_2(\alpha)-S_1(\alpha)\right)\right),$$

$$\frac{\hat{T}_2}{\hat{T}_1} = const\,|x_1|^{\frac{1}{2}}\ O\left(\exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\right),$$

$$\frac{\hat{T}_2}{\hat{T}_1} = O\left(|x_1|^{\frac{2}{3}}\exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\right).$$

Обозначим $O\left(|x_1|^{\frac{2}{3}}\exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\right)=h^*$ и построим график $h^*(x_1,\alpha)$ (рис.3.11).

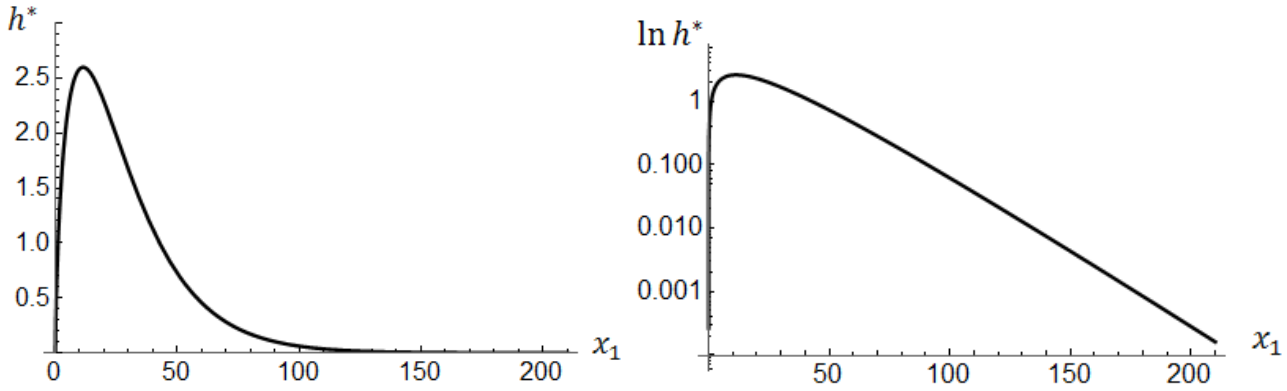


Рис.3.11. Слева на рисунке график функции $h^*=\frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2}$. Справа – график $\ln h^*=\ln\frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2}$.

При удалении от источника нагрева, вклад $\hat{T}_2(x_1,\alpha)$ в температурное поле будет экспоненциально убывать, по сравнению с $\hat{T}_1(x_1,\alpha)$. Именно слагаемое

$T_1(x_1, \alpha)$ будет иметь решающий вклад в дальнее поле $T(x_1, \alpha)$. Таким образом, можно обобщить полученный в главе 2 результат (2.5) на случай произвольного направления прямой, включающей точечный источник тепла:

$$T(x_1, \alpha) = \hat{T}_1(x_1, \alpha)\big(1 + o(1)\big) \tag{3.9}$$

При описании дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры в двумерном диссипативном гармоническом кристалле при действии точечного источника тепла можно ограничиться только главным членом асимптотического разложения слагаемого $T_1(x_1, \alpha)$.

Посмотрим, как зависит слагаемое $o(1)\hat{T}_1(x_1, \alpha)$ в формуле (3.9) от α. Построим график плотности функции вклада h слагаемых $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$ и $\hat{T}_2(x_1, \alpha)$ в температурное поле $T(x_1, \alpha)$, представленной как $h = \frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2}$ (рис.3.12). Также построим график плотности натурального логарифма от функции вклада $\sigma = \ln\frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2}$ (рис.3.13), так как скорость убывания экспонент удобно исследовать с помощью логарифмических графиков.

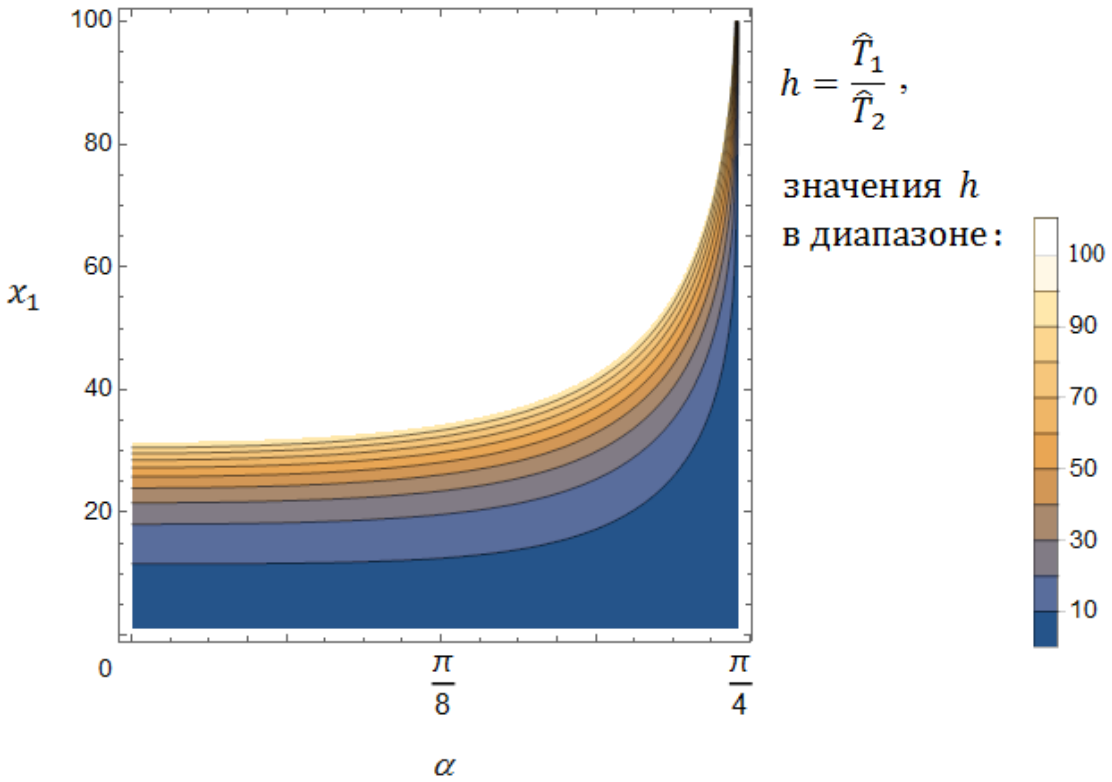


Рис.3.12. График плотности функции $h = \frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2}$. Чем светлее область на графике, тем меньше влияние слагаемого $\hat{T}_2(x_1, \alpha)$, по сравнению с $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$. Белая область на графике соответствует $h > 100$.

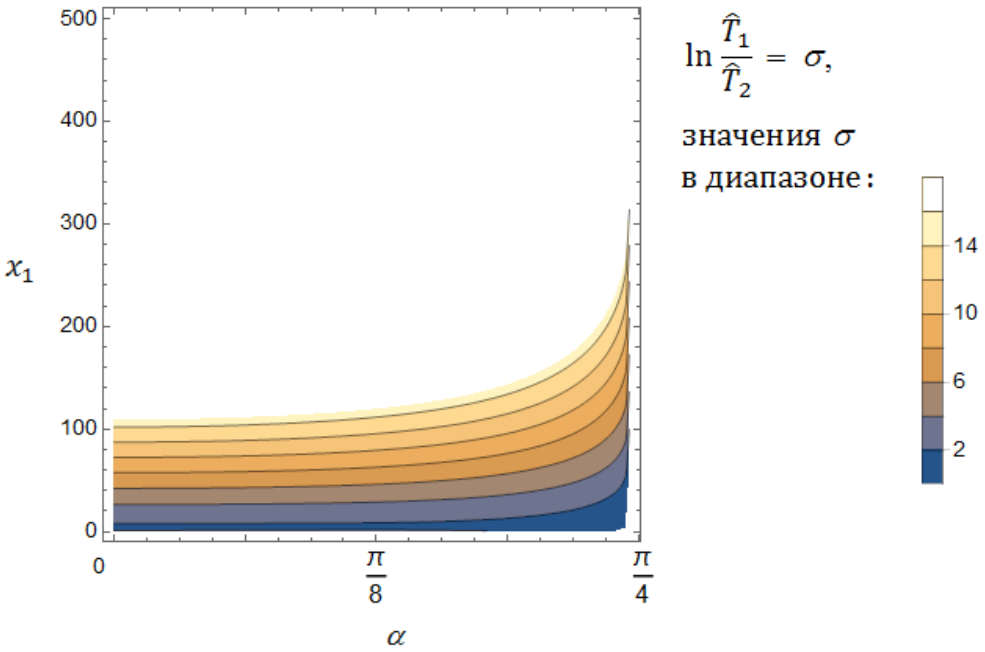


Рис.3.13. График плотности функции $\sigma = \ln\frac{\hat{T}_1}{\hat{T}_2}$. Чем светлее область на графике, тем меньше влияние слагаемого $\hat{T}_2(x_1, \alpha)$, по сравнению с $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$. Белая область на графике соответствует $\sigma > 15$, что соответствует $h > 10^6$.

При росте угла α, увеличивается область, определяемая расстоянием от источника нагрева, в которой слагаемое $\hat{T}_2(x_1, \alpha)$ имеет влияние и не может быть асимптотически отброшено. Однако на больших расстояниях эта область сосредотачивается с окрестности $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon; \frac{\pi}{4}\right)$, где ε – малая величина. Так как точка $\alpha = \frac{\pi}{4}$ исключена из области определения функции $T(x_1, \alpha)$, то уравнение (3.9) выполняется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы была получена асимптотика дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры вдоль горизонтального ряда (угол $\alpha = 0$), содержащего источник тепла в аналитическом виде:

$$T(x_1, 0) = \hat{T}_1(x_1, 0) + \hat{T}_2(x_1, 0),$$

$$\hat{T}_1(x_1, 0) = \exp\left(-\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta\,|x_1|^2} + O(|x_1|^{-3})\right),$$

$$\hat{T}_2(x_1, 0) = \exp\left(-\left(1+\sqrt{2}\right)\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(\bar{\chi}_0\sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\pi^3|x_1|^3\,\eta\,c}} + O\left(|x_1|^{-\frac{5}{2}}\right)\right).$$

Абсолютное значение показателя экспоненты в слагаемом $\hat{T}_2(x_1, 0)$ оказалось больше, чем в слагаемом $\hat{T}_1(x_1, 0)$, а степень амплитудной функции – меньше. При удалении от источника нагрева, вклад в температурное поле слагаемого $\hat{T}_2(x_1, 0)$ стремительно уменьшается.

Показано, что слагаемое $\hat{T}_1(x_1, 0)$ является главным членом асимптотики дальнего поля стационарного распределения кинетической температуры вдоль горизонтального ряда, содержащего источник тепла, и справедливо выражение:

$$T(x_1, 0) = \hat{T}_1(x_1, 0)\big(1 + o(1)\big).$$

В ходе работы для слагаемого T_1 стационарного распределения кинетической температуры вдоль произвольной прямой, включающей источник тепла, получена асимптотика дальнего поля в аналитическом виде:

$$\hat{T}_1(x_1, \alpha) = \exp\left(-\sec(\alpha)\,\frac{\eta\,|x_1|}{c}\right)\left(\frac{\bar{\chi}_0}{\pi^2\eta|x_1|^2}\,\frac{\sec^2\alpha}{1+\tan^4\alpha} + O(|x_1|^{-3})\right).$$

В ходе вычисления асимптотики слагаемого T_1, был произведен предельный переход, что исключило из выражения для $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$ сингулярную точку $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, которая присутствует в выражении для температурного поля в интегральном представлении. Было показано, что полученная асимптотика $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$ хорошо аппроксимирует дальнее поле. На не очень далеких расстояниях от источника нагрева, полученная асимптотика хорошо работает в секторе, определяемом механическими параметрами решетки (вязкость, скорость звука), а так же интенсивностью источника тепла.

Для слагаемого T_2 стационарного распределения кинетической температуры вдоль произвольного ряда, содержащего источник тепла, получена асимптотика дальнего поля в полуаналитическом виде:

$$\hat{T}_2(x_1, \alpha) = \exp\left(S(p_1^*(\alpha), \alpha)\,\frac{\eta|x_1|}{c}\right)\left(A(p_1^*(\alpha), \alpha)\,|x_1|^{-\frac{3}{2}} + O\left(|x_1|^{-\frac{5}{2}}\right)\right),$$

где множители $A(p_1^*(\alpha), \alpha)$ и $S(p_1^*(\alpha), \alpha)$ вычисляются численно (см. стр.48).

Показано, что слагаемое $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$ является главным членом асимптотики дальнего поля функции $T(x_1, \alpha)$, и слагаемым $\hat{T}_2(x_1, \alpha)$ можно пренебречь, по сравнению со слагаемым $\hat{T}_1(x_1, \alpha)$:

$$T(x_1, \alpha) = \hat{T}_1(x_1, \alpha)\big(1 + o(1)\big).$$

Результаты исследования вносят вклад в понимание о фундаментальном характере слагаемых $T_1(x_1, \alpha)$ и $T_2(x_1, \alpha)$ поля стационарного распределения кинетической температуры. Полученные изыскания могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области теплопроводности гармонических кристаллов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – Наука, 1989.

2. Степанов С. С. Стохастический мир //М.: Изд. Центр «Акционер». – 2009.

3. Федорюк М. В. Метод перевала. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.

4. Babenkov M. B., Krivtsov A. M., Tsvetkov D. V. Energy oscillations in a one-dimensional harmonic crystal on an elastic substrate //Physical Mesomechanics. – 2016. – Т. 19. – №. 3. – С. 282-290.

5. Cahill D. G. et al. Nanoscale thermal transport //Journal of applied physics. – 2003. – Т. 93. – №. 2. – С. 793-818.

6. Chang C. W. et al. Breakdown of Fourier’s law in nanotube thermal conductors //Physical review letters. – 2008. – Т. 101. – №. 7. – С. 075903.

7. Chang C. W. Experimental probing of non-Fourier thermal conductors //Thermal Transport in Low Dimensions. – Springer, Cham, 2016. – С. 305-338.

8. Gavrilov S. N., Krivtsov A. M., Tsvetkov D. V. Heat transfer in a one-dimensional harmonic crystal in a viscous environment subjected to an external heat supply //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Т. 31. – №. 1. – С. 255-272.

9. Gavrilov S. N., Krivtsov A. M. Steady-state kinetic temperature distribution in a two-dimensional square harmonic scalar lattice lying in a viscous environment and subjected to a point heat source //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2020. – Т. 32. – №. 1. – С. 41-61.

10. Howison S. et al. Practical applied mathematics: modelling, analysis, approximation. – Cambridge university press, 2005. – №. 38.

11. Hu Y. et al. Spectral mapping of thermal conductivity through nanoscale ballistic transport //Nature nanotechnology. – 2015. – Т. 10. – №. 8. – С. 701-706.

12. Kevorkian J. K., Cole J. D. Multiple scale and singular perturbation methods. – Springer Science & Business Media, 2012. – Т. 114.

13. Krivtsov A. M. Energy oscillations in a one-dimensional crystal //Doklady Physics. – Pleiades Publishing, 2014. – Т. 59. – №. 9. – С. 427-430.

14. Kuzkin V. A., Krivtsov A. M. Fast and slow thermal processes in harmonic scalar lattices //Journal of Physics: Condensed Matter. – 2017. – Т. 29. – №. 50. – С. 505401.

15. Lepri S. Thermal transport in low dimensions: from statistical physics to nanoscale heat transfer [Book]. - [s.l.] : Springer, 2016. - Vol. 921.

16. Liu S. et al. Anomalous heat conduction and anomalous diffusion in low dimensional nanoscale systems //The European Physical Journal B. – 2012. – Т. 85. – №. 10. – С. 337.

17. Nayfeh A. H. Perturbation methods. – John Wiley & Sons, 2008.

18. Rieder Z., Lebowitz J. L., Lieb E. Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state //Journal of Mathematical Physics. – 1967. – Т. 8. – №. 5. – С. 1073-1078.