

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
«__» _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

ПОИСК ЭМПИРИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

по направлению подготовки (специальности)

01.04.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль)

01.04.03_02 Механика и математическое моделирование (международная
образовательная программа)

Выполнил

студент гр. 5040103/10201

С. С. Шибает

Руководитель

Профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Е. А. Иванова

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Шибяеву Степану Сергеевичу, группа 5040103/10201

1. Тема работы: Поиск эмпирического выражения для определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня на основе численных экспериментов
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 26.05.2023
3. Исходные данные по работе: постановка задачи для определения дополнительного модуля упругости, методы определения искомого модуля упругости, основные уравнения статики стержней, уравнения теории упругости
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
теоретическая постановка задачи, подготовка расчетной модели и проведение численного эксперимента в ANSYS, обработка результатов эксперимента и вычисление искомого модуля упругости, исследование зависимости модуля от параметров сечения стержня, обобщающий вывод
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): схематические изображения, поясняющие конфигурацию исследуемого стержня и постановку задачи; изображения моделей для численных экспериментов, включая граничные условия; изображения и графики обработанных результатов численных экспериментов, в первую очередь перемещений в определенных сечениях
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР _____ Е. А. Иванова, профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.
(подпись)

Задание принял к исполнению _____ 27.02.2023
(дата)

Студент _____ С. С. Шибяев
(подпись)

РЕФЕРАТ

На 43 с., 19 рисунков, 8 таблиц, 2 приложения

ТЕОРИЯ СТЕРЖНЕЙ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ СТЕРЖНИ, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МОДУЛЬ УПРУГОСТИ B_{32} , ANSYS, SCILAB.

Тема выпускной квалификационной работы: «Поиск эмпирического выражения для определения дополнительного модуля упругости криволинейного стержня на основе численных экспериментов»

В работе представлены результаты вычисления модуля B_{32} предложенным ранее методом, анализ получаемых значений, а именно их зависимость от других параметров и возможность формулировки выражения для определения B_{32} . Задачи, которые решались в ходе исследования:

1. Теоретический анализ предложенной ранее методики определения модуля B_{32} на основе сопоставления трехмерной и одномерной теорий.
2. Подготовка и проведение соответствующих численных экспериментов в качестве решения трехмерной задачи.
3. Вычисление искомого модуля на основе данных численных экспериментов.
4. Анализ получаемых значений и поиск зависимостей (выражения).

Была проведена серия численных экспериментов с криволинейными стержнями различных прямоугольных сечений, испробованы две методики интегрирования при обработке результатов конечно-элементного расчета.

В результате проведенного исследования были вычислены модули B_{32} для стержней различного сечения, проведено сравнение с модулем жесткости на изгиб C_2 . Было отмечено высокое влияние численной погрешности, и сделано заключение о том, что сложно с достаточной степенью достоверности сделать обобщающее заключение о конкретном коэффициенте пропорциональности. В данной работе коэффициент получился равен 0,7.

ABSTRACT

43 pages, 19 figures, 13 tables, 2 appendices

THEORY OF RODS, CURVILINEAR RODS, ADDITIONAL ELASTIC MODULUS B_{32} , ANSYS, SCILAB.

The topic of the final qualification work is as follows: "Search for an empirical expression to determine the additional modulus of elasticity of a curvilinear rod based on numerical experiments".

The paper presents the results of the calculation of the modulus B_{32} by the previously proposed method, the analysis of the values obtained, namely their dependence on other parameters and the possibility of formulating an expression for determining B_{32} . Tasks that were solved in the course of the study:

1. Theoretical analysis of the previously proposed method for determining the B_{32} module based on a comparison of three-dimensional and one-dimensional theories.
2. Preparation and conduct of appropriate numerical experiments as a solution to the three-dimensional problem.
3. Calculation of the modulus based on data from numerical experiments.
4. Analysis of the obtained values and search for dependencies (expressions).

A series of numerical experiments with curvilinear rods of various rectangular cross-sections was carried out, two integration methods were tried when processing the results of finite element calculation.

As a result of the study, the B_{32} moduli for rods of various cross-sections were calculated, and a comparison was made with the C_2 bending stiffness modulus. The high influence of numerical error was noted, and it was concluded that it was difficult to make an overall conclusion about a specific proportionality coefficient with a sufficient degree of reliability. In this work, the coefficient turned out to be equal to 0.7.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	6
ГЛАВА 2. НАХОЖДЕНИЕ УПРУГОГО МОДУЛЯ B_{32} ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ.....	8
2.1. Постановка задачи.....	8
2.2. Численный эксперимент в ANSYS.....	11
2.3. Обработка результатов эксперимента в Scilab.....	14
2.4. Вычисление коэффициентов для выражения искомого B_{32}	19
2.5. Вычисление модуля B_{32}	21
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	30
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	32
ПРИЛОЖЕНИЕ А	34
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	38

ВВЕДЕНИЕ

Цель данной работы – поиск выражения или зависимости для более быстрого вычисления дополнительного модуля упругости B_{32} в рамках теории стержней. Данный модуль упругости является компонентой тензора B , описывающего взаимное влияние деформаций растяжения-сдвига и изгиба-кручения. Задачи работы включают изучение теоретических предпосылок и предыдущих исследований в этой области, вычисление искомого модуля упругости для стержней различных сечений, обработку и анализ результатов для выявления наличия или отсутствия зависимости и возможности сформулировать выражение. Для вычисления данного модуля ранее был предложен метод, основывающийся на проведении численного эксперимента над стержнем и сопоставлении трехмерной и одномерной теории. Выбрав стержень нужных параметров, возможно выразить неизвестный модуль через уже известные характеристики.

Тема работы и выбор исследуемого объекта обусловлены долгой историей теории стержней как раздела механики вкупе с неизменной актуальностью применения этой теории в инженерной и научной областях. Многие методы механики сплошных сред испытываются именно в рамках теории стержней. Также, например, линейная теория прямолинейных стержней является основой курса сопротивления материалов. Дополнительным фактором служит недостаток научных работ в некоторых менее исследованных областях теории стержней, таких как определение дополнительных модулей упругости.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Как уже было сказано, модель стержня давно и успешно применяется в различных инженерных задачах. Несмотря на это, до сих пор остаются не исследованными некоторые вопросы. Существуют отдельные работы, посвященные актуальной проблематике теории стержней [12].

Одним из неисследованных вопросов является определение дополнительных модулей упругости. Дело в том, что существуют два основных подхода к описанию стержней: асимптотический и прямой. При асимптотическом подходе выражения для модулей упругости получаются при формулировке основных уравнений. Однако, при таком подходе форма и структура стержней влияют на формулировку уравнений, что создает препятствия для анализа стержней сложной конфигурации или со сложной внутренней структурой. При прямом же подходе этого не происходит, но в случае криволинейных, не тонких стержней требуется отдельное определение дополнительных модулей упругости [4,5]. Решению этой задачи уже посвящено несколько работ [10,11], где был найден метод, дающий наименьшую погрешность и сделаны предположения о связи с модулем жесткости C_2 .

В одной из работ [11], по поиску метода для определения модуля B_{32} , было определено, что наилучшие результаты с погрешностью около 1% дает выражение B_{32} через модули A_3 и C_2 , и компоненту вектора вращения, направленную вдоль бинормали.

Опираясь на результаты вышеуказанной работы и используя предложенный метод, в работе Сударя А. Ю. [10] была проведена серия экспериментов и исследованы зависимости модуля от параметров сечения. Таким образом, оказалось, что модуль упругости B_{32} не зависит от радиуса кривизны стержня и в случае прямоугольного сечения пропорционален модулю C_2 . Так же было определено, что модуль B_{32} не зависит от коэффициента Пуассона.

В продолжение предыдущих работ текущими целями являются проверка и дальнейшее уточнение зависимостей модуля упругости в случае различных сечений, что в итоге может привести к формулировке выражения для модуля B_{32} или уточнению зависимости (предполагаемого коэффициента пропорциональности) от C_2 .

ГЛАВА 2. НАХОЖДЕНИЕ УПРУГОГО МОДУЛЯ B_{32} ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

2.1. Постановка задачи

Не будем напоминать фундамент теории стержней и задание оснащенной кривой, по этим темам достаточно учебной и научной литературы [6]. Обратимся к постановке задачи. Изначально постановка задачи, с помощью которой возможно найти дополнительные модули упругости, упоминается у П. А. Жилина, а наиболее подробно, включая выбор оптимального метода, приведена в работе В. А. Тимошенко [11]. Повторим основные специфические тезисы и теоретические соображения относящиеся к пониманию задачи. Рассмотрим лежащий в плоскости стержень без естественной крутки и запишем выражение для потенциальной упругой энергии (в рамках линейной задачи):

$$\rho_0 U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Phi} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad (2.1.1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор линейной деформации; $\boldsymbol{\Phi}$ – вектор сдвиговой деформации; \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} – тензоры жесткости.

Рассмотрим структуру тензоров [1,5] жесткости для такого стержня. Тогда, для тензора \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3, \quad (2.1.2)$$

где A_1 и A_2 – модули жесткости, характеризующие деформацию поперечного сдвига; A_3 – модуль жесткости, характеризующий деформацию растяжения-сжатия. При этом под $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ имеется в виду дополнительный ортонормированный трехгранник [6].

Структура тензора \mathbf{B} сильно упрощается и приобретает следующий вид:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{R_c} (B_{23} \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_3 + B_{32} \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_2), \quad (2.1.3)$$

где модули жесткости B_{23} и B_{32} связаны как с угловыми, так и с линейными деформациями; R_c – радиус кривизны.

Структура тензора \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = C_1 d_1 d_1 + C_2 d_2 d_2 + C_3 d_3 d_3, \quad (2.1.4)$$

где C_1 и C_2 – модули жесткости, характеризующие изгиб; C_3 – модуль жесткости, характеризующий деформацию кручения.

Далее рассмотрим задачу, в которой используются только модули A_3 , C_2 и неизвестный B_{32} . Для этого пусть рассматриваемый стержень представляет из себя три четверти окружности, один его конец жестко заделан, а ко второму приложен момент, как изображено на рисунке 2.1.1. Допустим, что сечение стержня прямоугольное.

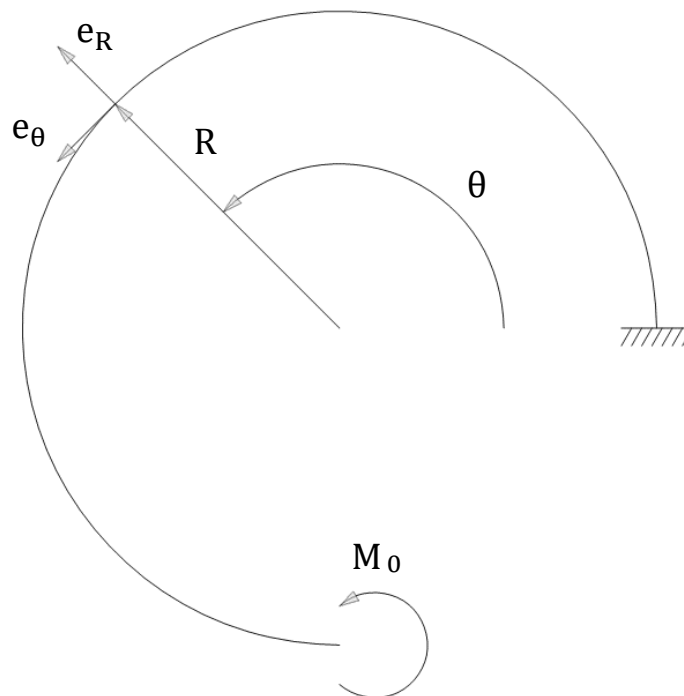


Рис. 2.1.1 – Граничные условия

Так как стержень лежит в плоскости и имеет постоянный радиус, удобно ввести цилиндрическую систему координат. При этом единичные вектора, образующие базис, связаны с векторами естественного трехгранника $\{n = -e_r, t = e_\theta, b = k\}$.

Далее записываются уравнения равновесия, соотношения упругости, ставятся граничные условия для данной задачи. После решения уравнений и

с учетом структуры тензоров жесткости получаются выражения для компонент векторов перемещений и поворота [10].

$$u_n = M_0 R^2 \left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3} \right)^{-1} \left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3} \right) \left(1 - \cos \frac{s}{R} \right), \quad (2.1.5)$$

$$u_t = M_0 R^2 \left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3} \right)^{-1} \left(\frac{s}{R} - \left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3} \right) \sin \frac{s}{R} \right), \quad (2.1.6)$$

$$\psi_b = M_0 s \left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3} \right)^{-1}, \quad (2.1.7)$$

где M_0 – внешний момент, s – координата вдоль длины стержня (дуги кривой). Индексы компонент соответствуют векторам естественного трехгранника $\{n, t, b = t \times n\}$, где n – вектор главной нормали, t – вектор касательной, b – вектор бинормали.

Затем осуществляется связь с трехмерной теорией [9] через геометрические выражения для трехмерной задачи и равенство количества движения и кинетического момента. Таким образом получается возможно найти компоненты векторов перемещений и поворотов из решения пространственной задачи теории упругости. Выражения для искомых компонент с учетом уравнений (2.1.5)-(2.1.7):

$$u_n = -\frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_r^{(3)} \left(1 - \frac{x}{R} \right) dx dy, \quad (2.1.8)$$

$$u_t = \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{a^2}{12R^2} \right)^{-1} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_\theta^{(3)} \left(1 - \frac{x^2}{R^2} \right) dx dy, \quad (2.1.9)$$

$$\psi_b = -\frac{1}{abR} \left(1 - \frac{a^2}{12R^2} \right)^{-1} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_\theta^{(3)} \left(1 + \frac{12Rx}{a^2} \right) \left(1 - \frac{x}{R} \right) dx dy, \quad (2.1.10)$$

где a и b – ширина и длина прямоугольного сечения, а x и y – соответствующие координаты с началом в центре сечения; $u_\theta^{(3)}$, $u_r^{(3)}$ – компоненты вектора перемещений для задачи теории упругости в тангенциальном и радиальном направлениях.

2.2. Численный эксперимент в ANSYS

Чтобы получить перемещения для пространственной задачи теории упругости, проведем численный эксперимент, применив конечно-элементный анализ. Расчеты будут проводиться в программном пакете ANSYS 2021R1. Для первого расчета возьмем стержень радиусом $R = 50$ мм, квадратного сечения со стороной 20 мм. В стержне сделаны три сечения, в цилиндрической системе координат соответствующие углам $\theta = 3/4\pi$, $\theta = 4/4\pi$, $\theta = 5/4\pi$. В этих сечениях будут найдены перемещения. Материал стержня – сталь с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. К концу стержня приложен момент $M_0 = 100$ Н·м.

На этом этапе работы размер конечного элемента выбран 1 мм аналогично одной из предыдущих работ [10] (рис. 2.2.1).

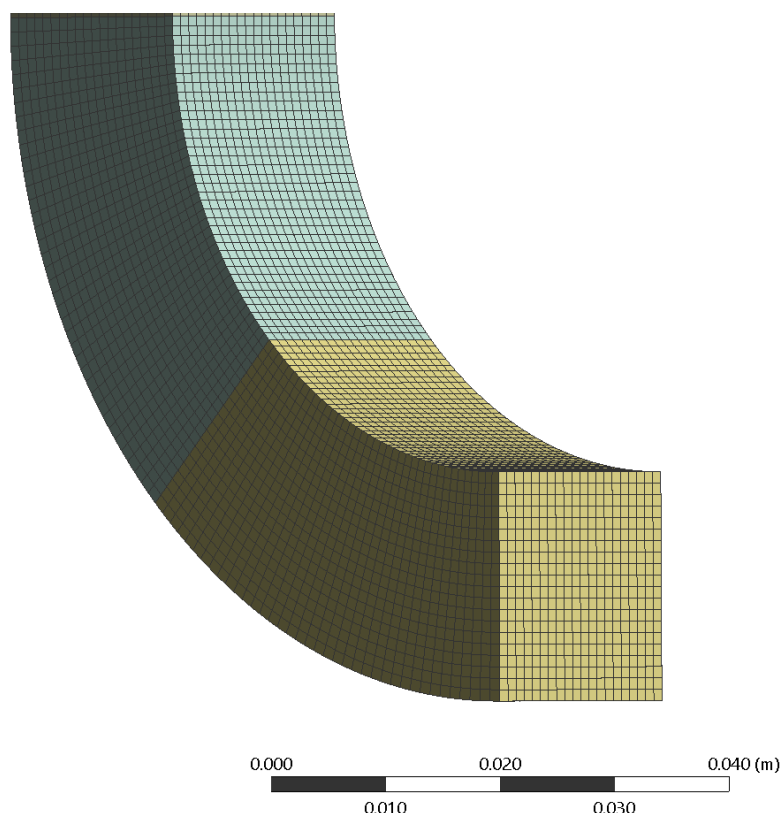


Рис. 2.2.1 – Конечно-элементная сетка

Нагрузка приложена при помощи момента к площадке на конце стержня. Граничные условия в ANSYS показаны на рисунке 2.2.2.

C: Static Structural
Fixed Support
Time: 1. s
05/06/2023 09:50

A Fixed Support
B Moment: 100. N·m

Ansys

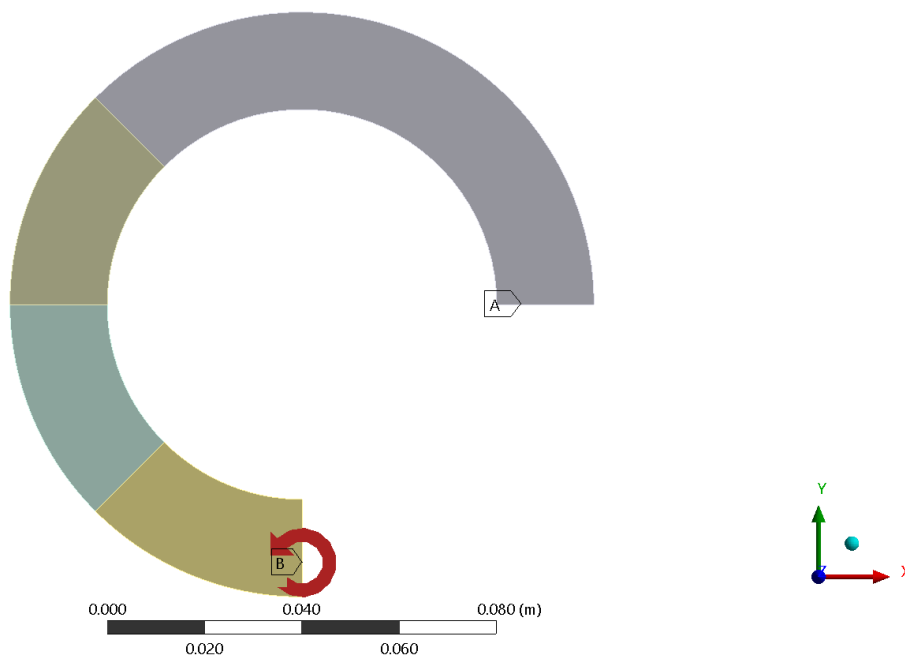


Рис. 2.2.2 – Граничные условия в Ansys (жесткая заделка, момент)

Дополнительно были рассмотрены вариант нагружения линейно меняющимся давлением, а также вариант с жесткой площадкой на конце стержня. Они не показали значимой разницы, поэтому используем наиболее очевидную постановку. Конечно-элементная сетка сделана квадратичными элементами [13]. На рисунках 2.2.3 и 2.2.4 приведены результаты расчета в Ansys – общая деформация и эквивалентные напряжения.

C: Static Structural
Equivalent Stress
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: Pa
Time: 1 s
07/06/2023 16:08

Ansys

1.3721e8 Max
1.2222e8
1.0723e8
9.2247e7
7.726e7
6.2272e7
4.7285e7
3.2297e7
1.731e7
2.3223e6 Min

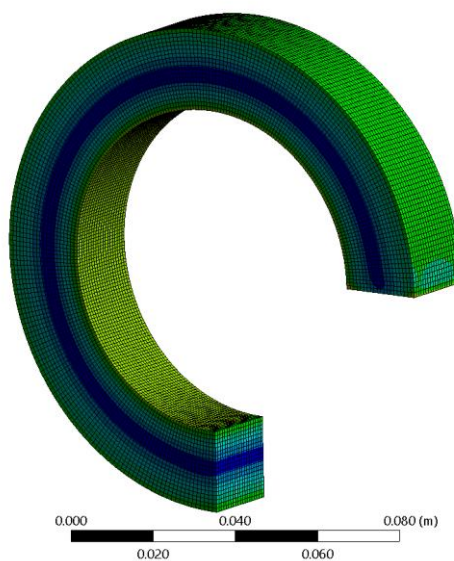


Рис. 2.2.3 – Напряженно-деформированное состояние (эквивалентные напряжения)

C: Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: m
Time: 1 s
05/06/2023 13:54

Ansys

0.00063171 Max
0.00056152
0.00049133
0.00042114
0.00035095
0.00028076
0.00021057
0.00014038
7.019e-5
0 Min

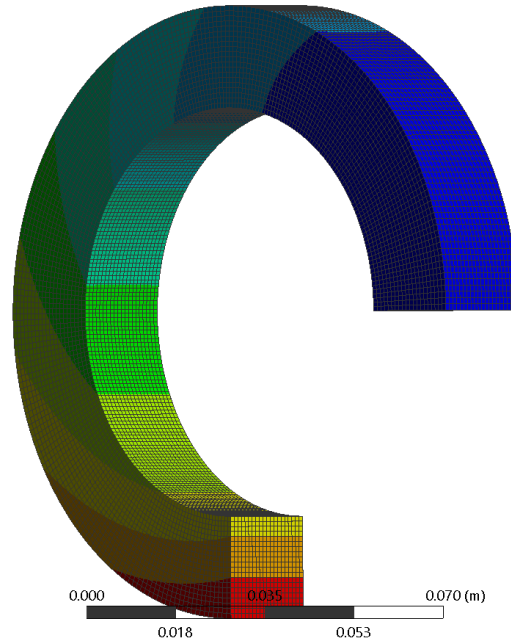


Рис. 2.2.4 – Напряженно-деформированное состояние (общая деформация)

На рисунках 2.2.5 и 2.2.6 приведены распределения деформаций в сечении $\theta = 3/4\pi$ по направлениям цилиндрических координат.

C: Static Structural
34pi_ur
Type: Directional Deformation(X Axis)
Unit: m
Coordinate System
Time: 1 s
05/06/2023 13:58

-0.0001567 Max
-0.00015686
-0.00015702
-0.00015718
-0.00015734
-0.0001575
-0.00015766
-0.00015782
-0.00015798
-0.00015814 Min

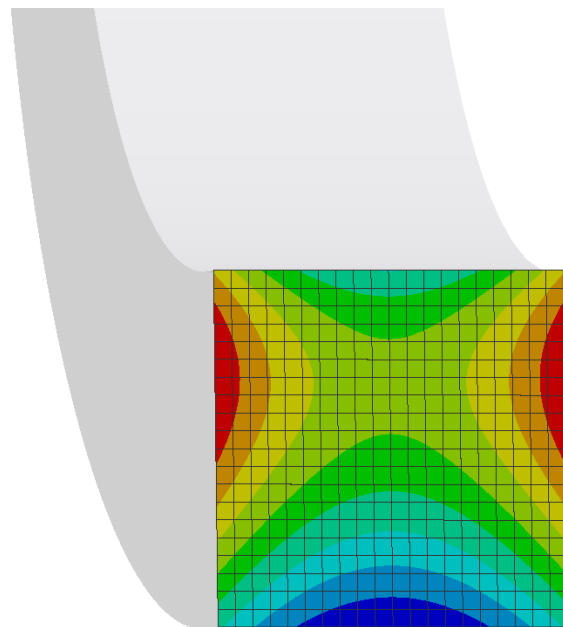


Рис. 2.2.5 – Перемещения u_R в сечении $\theta = 3/4\pi$

Для вычисления интегралов на следующем этапе будут использоваться именно перемещения вдоль координаты Oy (тангенциальная координата в цилиндрической системе). Перемещения вдоль этой координаты приведены на рисунке 2.2.6. Эти же перемещения будут пересчитаны в компоненту вектора поворота ψ_b .

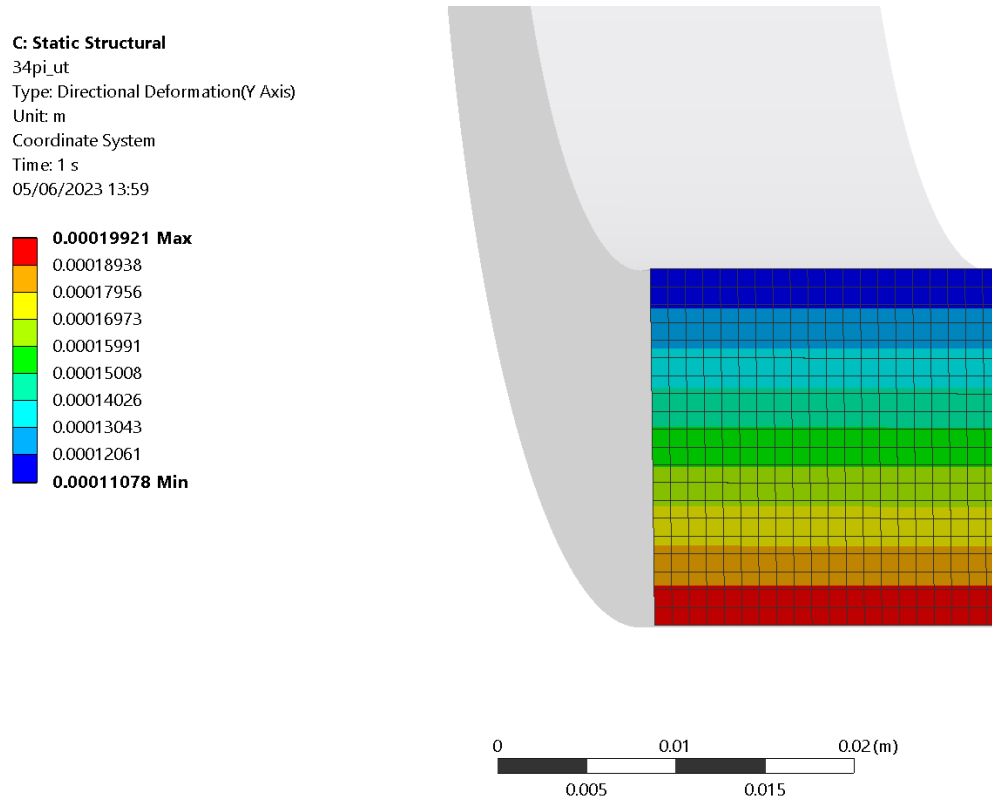


Рис. 2.2.6 – Перемещения u_t в сечении $\theta = 3/4 \pi$

2.3. Обработка результатов эксперимента в Scilab

Следующим этапом является обработка результатов расчета в Scilab и вычисление интегралов (2.1.8)-(2.1.10). Полученные в каждом сечении узловые перемещения экспортируются в Scilab, при этом необходимо перевести координаты узлов из декартовой системы координат в цилиндрическую. На рисунках 2.3.1 и 2.3.2 представлены графики перемещений $u_R = -u_n$ и $u_\theta = u_t$ в сечении $\theta = 3/4 \pi$.

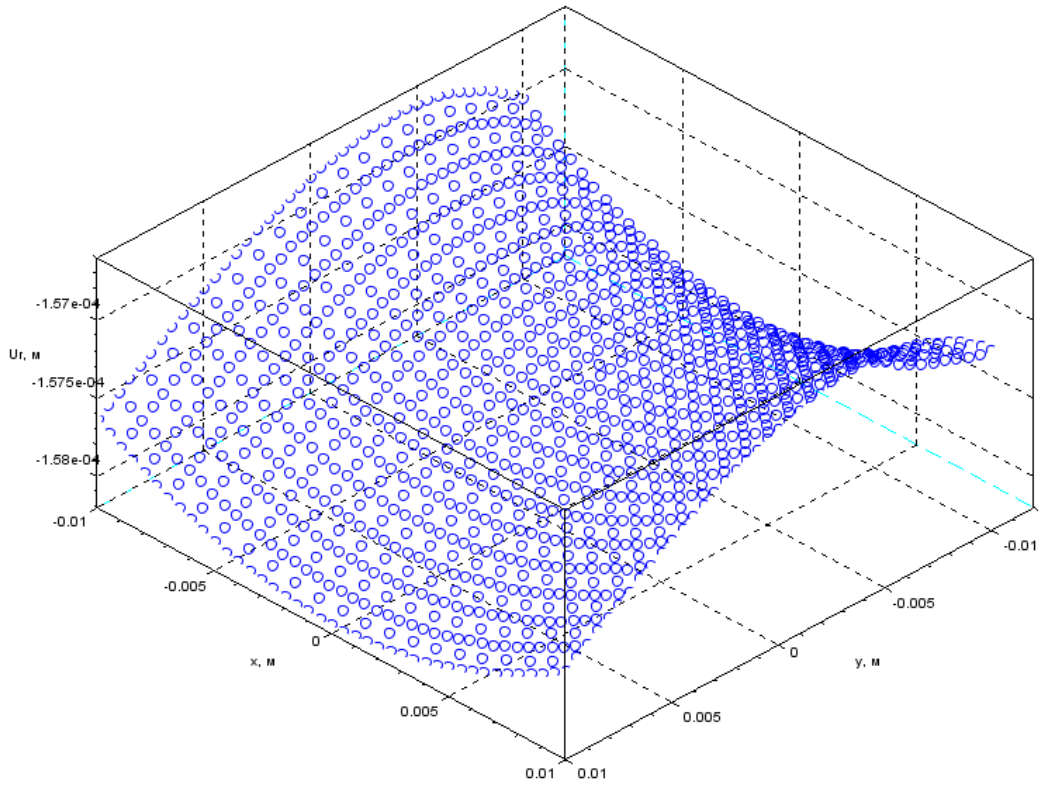


Рис. 2.3.1 – Перемещения u_R в сечении $\theta = 3/4\pi$

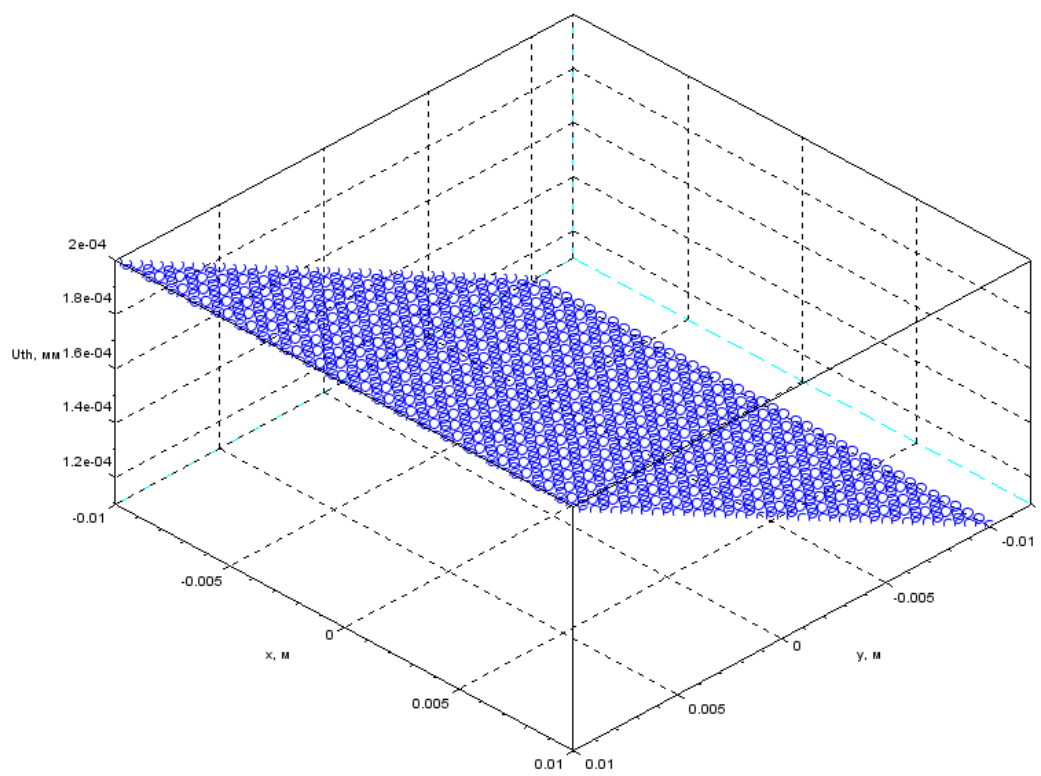


Рис. 2.3.2 – Перемещения u_θ в сечении $\theta = 3/4\pi$

Далее сделаем интерполяцию импортированных из ANSYS перемещений. Это нужно не только для повышения точности и экономии вычислительного ресурса на этапе КЭ анализа, но и для того, чтобы создать средствами Scilab регулярную сетку, для которой использовать встроенную функцию вычисления интеграла методом трапеций. Используется кубическая интерполяция методом Шепарда [14] плотностью 200 узлов на сторону, интерполированная поверхность для сечения $\theta = 3/4\pi$ показана на рисунках 2.3.3-2.3.4.

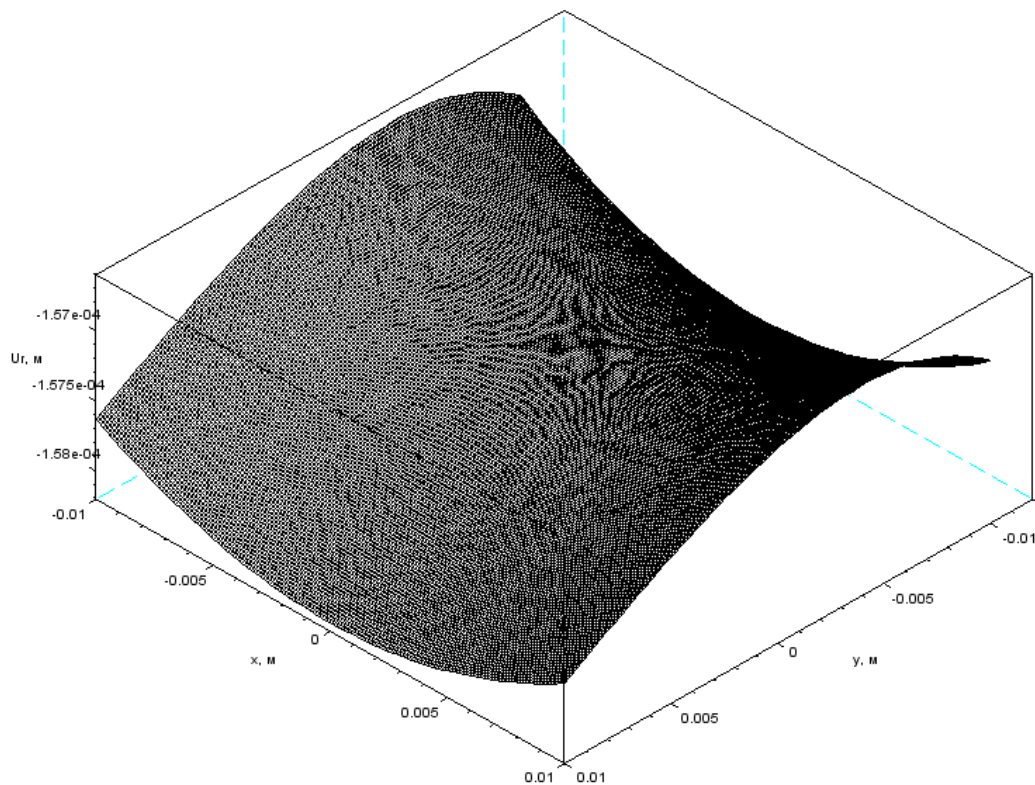


Рис. 2.3.3 – График перемещений u_R после интерполяции в сечении $\theta = 3/4\pi$

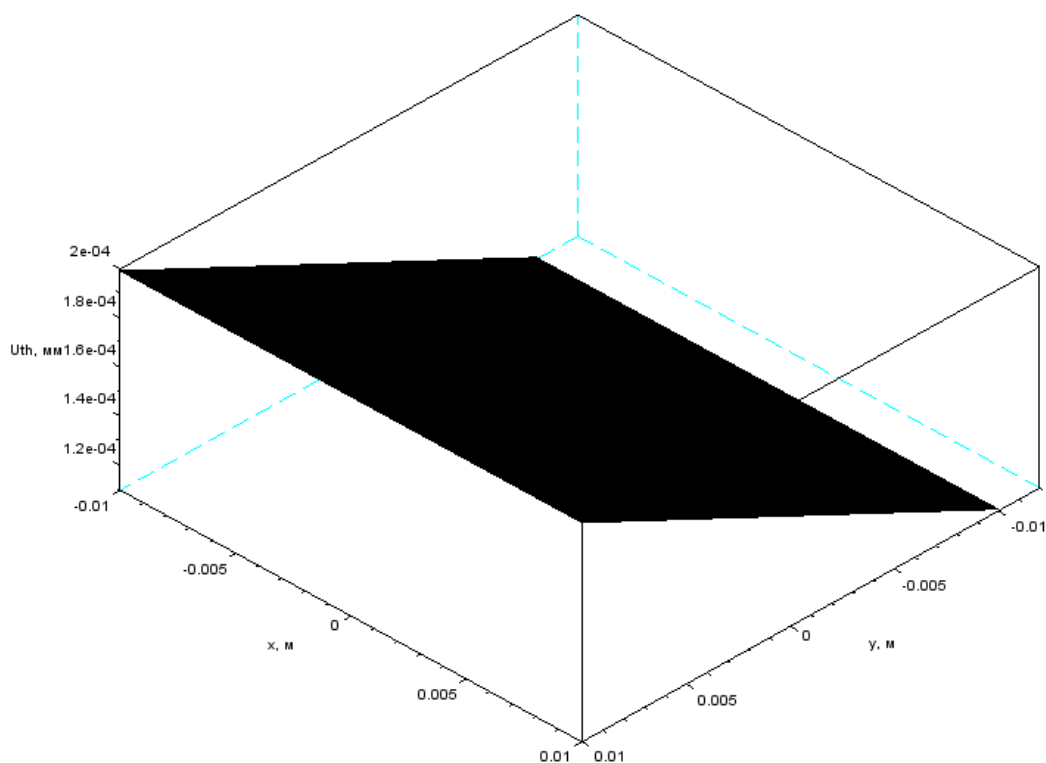


Рис. 2.3.4 – График перемещений u_θ после интерполяции в сечении $\theta = 3/4\pi$

Однако, необходимость каждый раз осуществлять интерполяцию и использовать регулярную сетку для вычисления интегралов сильно ограничивает возможности исследования стержней не прямоугольного сечения. В связи с этим кроме вычисления интеграла методом трапеций вдоль каждой координаты поочередно, была написана простейшая функция, вычисляющая объемы виртуальных скошенных призм с основанием в нуле. Для того чтобы применить её к данным, получаемым из ANSYS, была использована библиотека CGLAB и входящая в неё функция для триангуляции Делоне [15]. То, как триангулируется «поверхность», заданная узловыми перемещениями ANSYS, приведено на рисунках 2.3.5-2.3.6.

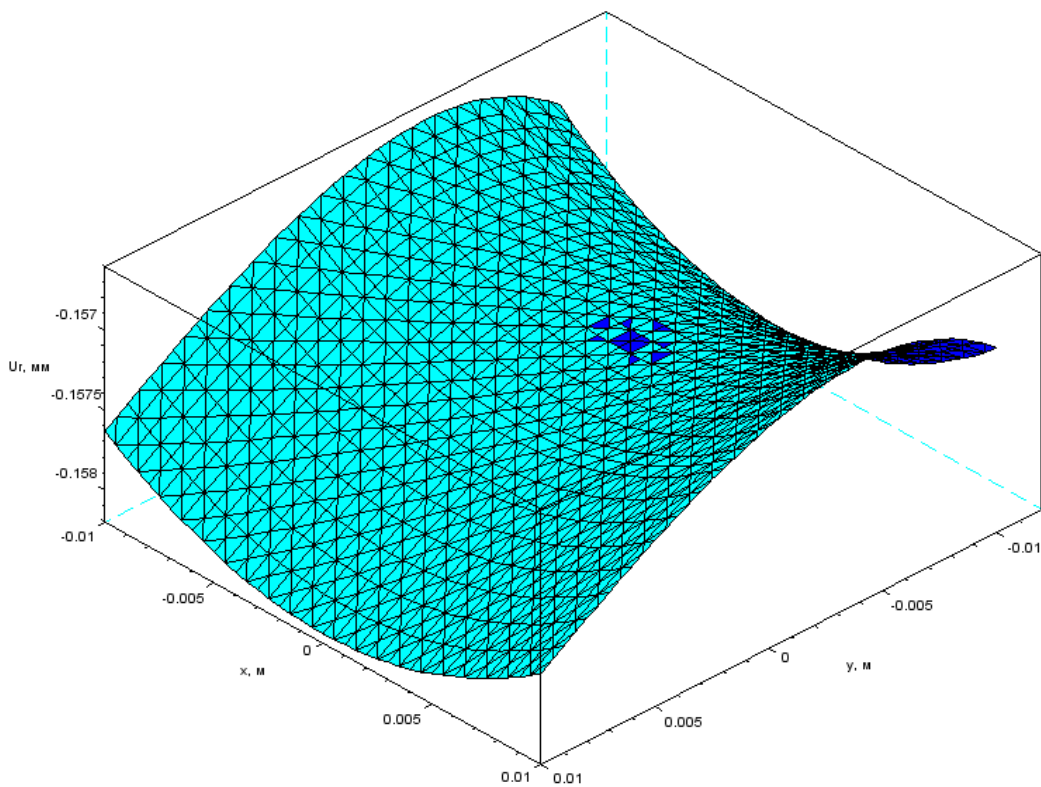


Рис. 2.3.5 – Триангуляция Делоне для интегрирования перемещений в сечении $\theta = 3/4 \pi$.

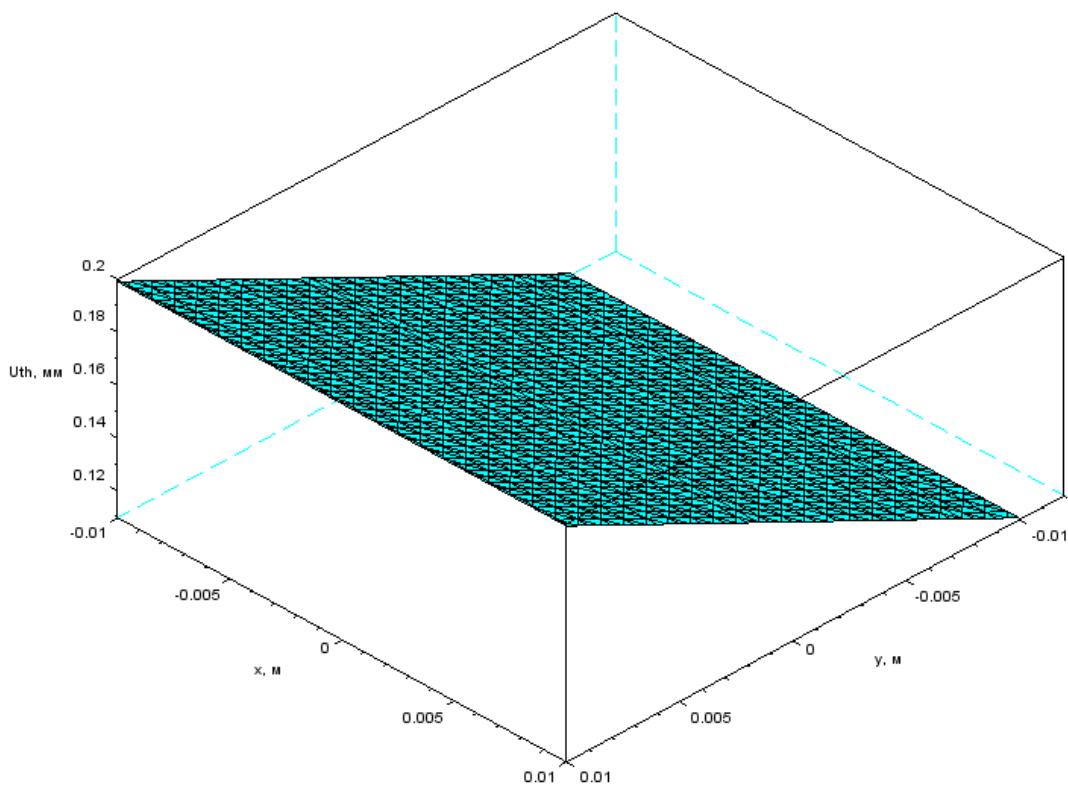


Рис. 2.3.6 – Триангуляция Делоне для интегрирования перемещений в сечении $\theta = 3/4 \pi$.

Имея достаточную густоту сетки, можем приступить к вычислению интегралов (2.1.8)-(2.1.10) и нахождению компонент. В качестве ориентира получаемые значения сравнивались со среднеарифметическим перемещений, полученных в ANSYS. Результаты для трёх сечений и трёх компонент вектора поворота и перемещений приведены в таблицах 2.3.1 и 2.3.2.

Таблица 2.3.1 – Компоненты векторов перемещений и поворота для стержня квадратного сечения 20x20 мм (интерполяция)

Сечение	$\theta = 3/4\pi$	$\theta = 4/4\pi$	$\theta = 5/4\pi$
u_n (интерполяция), мм	0.000157335	0.00015499	0.004419231
u_t (интерполяция), мм	0.000185091	0.000294141	0.005901444
ψ_b (интерполяция), рад	0.000158658	0.000433829	0.007375522

Таблица 2.3.2 – Компоненты векторов перемещений и поворота для стержня квадратного сечения 20x20 мм (триангуляция)

Сечение	$\theta = 3/4\pi$	$\theta = 4/4\pi$	$\theta = 5/4\pi$
u_n (триангуляция), мм	0.000157335	0.000154985	0.00442210
u_t (триангуляция), мм	0.000185090	0.000294135	0.00590132
ψ_b (триангуляция), рад	0.000158658	0.000433815	0.00737207

Как видно, результаты, полученные двумя способами близки между собой на первый взгляд, но сильнее различаются ближе к концу стержня. Далее же увидим, что вроде бы небольшое различие оказывает сильный эффект на конечный результат.

2.4. Вычисление коэффициентов для выражения искомого B_{32}

В прошлых работах всегда рассматривалось три коэффициента, с помощью которых мог быть выражен искомый модуль B_{32} . В этой работе будем сразу использовать именно тот, при выражении через который получались вещественные корни, однако для наглядности приведем все три.

Условно нумеруемый первый коэффициент:

$$\left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3} \right)^{-1} \left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3} \right)$$

Его сможем определить, используя либо значения u_n , либо значения u_t и ψ_b . В первом случае выражение выглядит следующим образом:

$$\left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3}\right)^{-1} \left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3}\right) = \frac{u_n}{M_0 R^2 \left(1 - \cos \frac{S}{R}\right)}$$

Во втором случае получится выражение:

$$\left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3}\right)^{-1} \left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3}\right) = \frac{-u_t + R\psi_b}{M_0 R^2 \sin \frac{S}{R}}$$

Второй коэффициент, который как раз показывал наиболее приемлемый результаты:

$$\left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3}\right)^{-1}$$

Для него так же имеем два способа, возможно выразить через u_t или ψ_b . Согласно прошлым работам при использовании ψ_b погрешности получались значительно меньше:

$$\left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3}\right)^{-1} = \frac{u_t}{M_0 R^2 \pi}$$

$$\left(C_2 - \frac{B_{32}^2}{R^2 A_3}\right)^{-1} = \frac{\psi_b}{M_0 S}$$

Также приведем и третий коэффициент:

$$\left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3}\right)$$

В этом случае необходимо использовать соотношения u_n/u_t , u_n/ψ_b и u_t/ψ_b :

$$\left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3}\right) = \frac{u_n S}{R(u_t \left(1 - \cos \frac{S}{R}\right) + u_n \sin \frac{S}{R})}$$

$$\left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3}\right) = \frac{u_n S}{\psi_b R^2 \left(1 - \cos \frac{S}{R}\right)}$$

$$\left(1 - \frac{B_{32}}{R^2 A_3}\right) = \frac{\psi_b R s - u_t s}{\psi_b R^2 \sin \frac{s}{R}}$$

2.5. Вычисление модуля B_{32}

Как уже было упомянуто, наилучший способ определения модуля B_{32} – через второй коэффициент и ψ_b [10,11]. При этом модули жесткости C_2 и A_3 вычисляются следующим образом:

$$A_3 = EF = E \int_F dF$$

$$C_2 = EI = E \int_F x^2 dF$$

где E – модуль упругости материала стержня, F – площадь поперечного сечения стержня, I – момент инерции сечения.

Для прямоугольного сечения со сторонами a и b , F и I принимают следующий вид:

$$F = ab$$

$$I = \frac{a^3 b}{12}$$

В отличие от прошлых работ, для конкретного сечения все значения получились вещественными [10,11]:

Таблица 2.5.1 – Значения B_{32} при аналитическом значении C_2

Сечение	$\theta = 3/4 \pi$	$\theta = 4/4 \pi$	$\theta = 5/4 \pi$	Среднее
B_{32} (триа.)	714.922902	989.518727	805.198545	836.546724
B_{32} (четыр.)	406.020580	995.118286	947.456257	782.865041

Однако, погрешность достигает 46%, что абсолютно неприемлемо.

Попробуем определить C_2 экспериментально, используя аналогичный метод. Для этого решим задачу с нагружением прямого стержня той же длины и сечения изгибающим моментом (рис. 2.5.1).

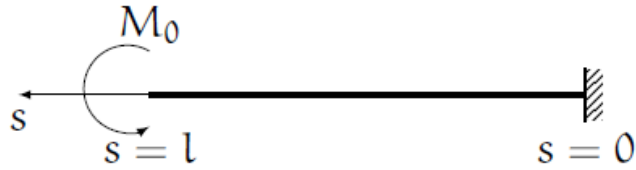


Рис. 2.5.1 – Нагружение «распрявленного» стержня

При этом выражения для определения перемещений значительно упрощаются:

$$u_n = \frac{M_0 s^2}{2C_2}$$

$$\psi_b = \frac{M_0 s}{C_2}$$

Для нахождения C_2 сперва поступим аналогично, как и в случае с B_{32} – получим перемещения из трехмерной задачи теории упругости:

$$u_n = -\frac{1}{ab} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_x^{(3)} dx dy$$

$$\psi_b = -\frac{12}{a^3 b} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_y^{(3)} dx dy$$

Постановка численного эксперимента в ANSYS показана на рисунке 2.5.2. Результаты (напряженно-деформированное состояние) показаны на рисунках 2.5.3 и 2.5.4.

X: Copy of Static Structural
Fixed Support
Time: 1 s
05/06/2023 14:14

Ansys

A Fixed Support
B Moment: 100. N·m

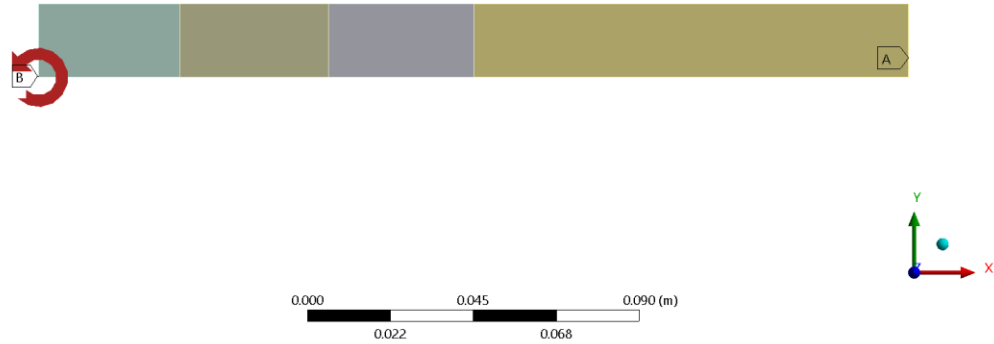


Рис. 2.5.2 – Нагружение «распрявленного» стержня в ANSYS

X: Copy of Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: m
Time: 1 s
07/06/2023 16:25

Ansys

0.0010413 Max
0.00092558
0.00080988
0.00069418
0.00057849
0.00046279
0.00034709
0.00023139
0.0001157
0 Min

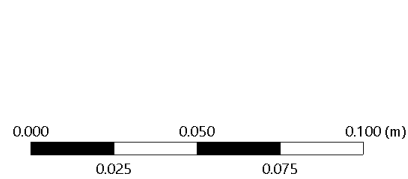
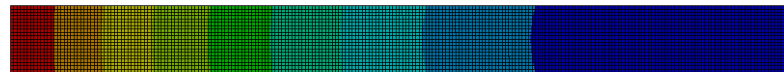


Рис. 2.5.3 – Напряженно-деформированное состояние (общая деформация)

X: Copy of Static Structural
Equivalent Stress
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: Pa
Time: 1 s
07/06/2023 16:26

Ansys

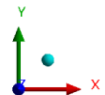
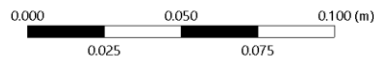
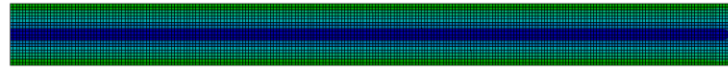
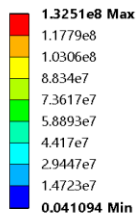


Рис. 2.5.4 – Напряженно-деформированное состояние (эквивалентные напряжения)

Также аналогично криволинейному стержню приведем распределения деформаций в сечении (рисунок 2.5.5). Для вычисления C_2 можем использовать перемещения вдоль любой из двух осей, будем использовать перемещения нормальные к несущей линии.

X: Copy of Static Structural
34pi_ur
Type: Directional Deformation(X Axis)
Unit: m
Global Coordinate System
Time: 1 s
07/06/2023 16:37

Ansys

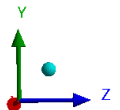
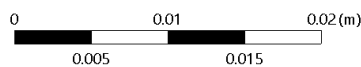
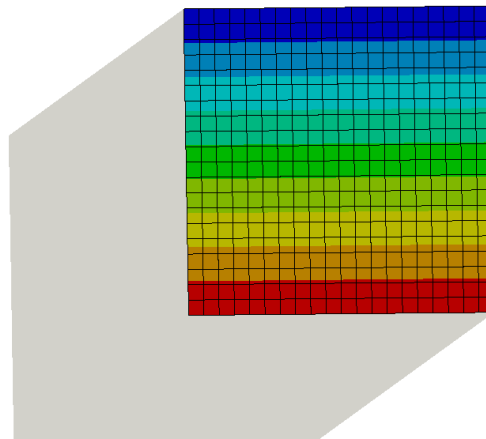
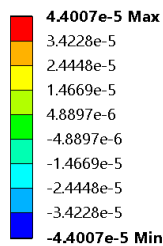


Рис. 2.5.5 – Перемещения u_R в сечении $\theta = 3/4 \pi$

Перемещения, полученные в Ansys, обрабатываются в Scilab аналогично, как и для криволинейного стержня. Используется интерполяция плотностью 300 узлов на одну сторону, а интегралы вычисляются при помощи метода трапеций. Получив компоненты векторов перемещений/поворота, легко можно выразить модуль C_2 . После обработки результатов в Scilab аналогично криволинейному стержню видим, что значения модуля жесткости C_2 , определенные экспериментально, близки к значению, полученному с помощью интеграла, но не совпадают с ним. Данные приведены в таблице 2.5.2.

Таблица 2.5.2 – Значения модуля C_2 , определенные экспериментально и аналитически

Сечение	$s = \frac{3\pi}{4} \cdot R$	$s = \pi \cdot R$	$s = \frac{5\pi}{4} \cdot R$	Аналитически
C_2	2.6865e9	2.6817e9	2.6787e9	2.6667e9

Теперь вновь попробуем определить искомый модуль B_{32} на основе экспериментально определенных C_2 . Видим, что погрешность значительно снизилась, все корни вещественные.

Таблица 2.5.3 – Значения модуля B_{32} на основе экспериментального C_2

Сечение	$\theta = \frac{3}{4}\pi$	$\theta = \frac{4}{4}\pi$	$\theta = \frac{5}{4}\pi$	Среднее
B_{32} (триа. эксп.)	20519263.53	20016275.99	18107717.71	19547752.41
B_{32} (четыре. эксп.)	20369187.03	20040280.97	18223494.62	19544320.87

Видим, что теперь значения гораздо ближе между собой и погрешность не превышает 7,4%. Проведем аналогичные вычисления для ещё нескольких сечений и посмотрим на результаты. Стоит оговорить, что для стержня большего сечения (200x200 мм) момент был равен 150 кНм для более удобного сопоставления с прошлыми работами и во избежание слишком малых деформаций. Ниже на рисунке 2.5.6 изображены сечения, которые будут рассмотрены.

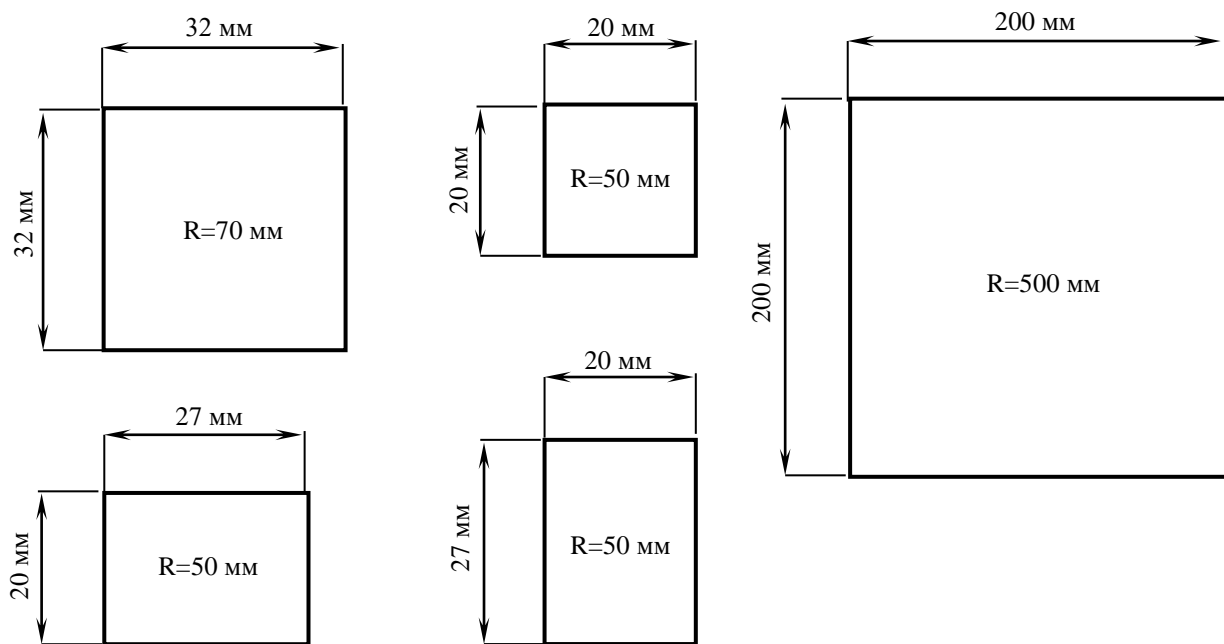


Рис. 2.5.6 – Сечения исследуемых стержней

Ниже представлена таблица 2.5.4 со всеми рассчитанными характеристиками для стержня радиусом 50 мм и сечением 20x20 мм. Видим, что результаты значительно различаются в зависимости от использования экспериментально определенного или теоретического значения C_2 . В первом случае соотношение V_{32}/C_2 составляет в среднем примерно 0,3, в то время как для экспериментально определенных значение, соотношение имеет гораздо меньшую погрешность и составляет в среднем 0,73. Также можно отметить, что при использовании теоретического значения C_2 использование триангуляции показывает лучшую погрешность, чем метод трапеций. Для экспериментальных же значений C_2 использование метода трапеций наоборот дает несколько меньшую погрешность относительно среднеарифметического.

Можно отдельно отметить, что для теоретического значения C_2 упомянутый выше коэффициент пропорциональности возрастает ближе к концу стержня, в то время как для экспериментально определенных C_2 ситуация обратная. Также по сравнению с другими работами для рассмотренных сечений комплексные значения V_{32} получились только в одном случае: при использовании теоретического значения C_2 для стержня с высокой жесткостью

в направлении изгиба моментом (стержень $R = 50$ мм, $b = 27$ мм, $a = 20$ мм, $M_0 = 100$ Нм).

Полные таблицы с результатами для других сечений приведены в приложении Б.

Таблица 2.5.4 – Расчетные величины для стержня сечением 20x20 мм

R = 50 мм, b = 20 мм, a = 20 мм, M₀ = 100 Нм						
Модули упругости						
Сечение	C ₂	C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$3/4\pi$	2666.666667	2686.755503	714.922902	406.0205796	2128.117003	2045.145455
$4/4\pi$	2666.666667	2681.838518	989.518727	995.1182859	2003.376559	2006.148232
$5/4\pi$	2666.666667	2678.811015	805.198545	947.4562568	1754.19904	1823.881283
Среднее	2666.666667	2682.468345	836.546724	782.8650408	1961.897534	1958.391657
Погрешность относительно среднеарифметического						
		C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$3/4\pi$		0.16%	14.54%	48.14%	8.47%	4.43%
$4/4\pi$		0.02%	18.29%	27.11%	2.11%	2.44%
$5/4\pi$		0.14%	3.75%	21.02%	10.59%	6.87%
Соотношение V₃₂ к C₂						
			V ₃₂ (три.)/ C ₂	V ₃₂ (четыр.)/ C ₂	V ₃₂ (три. эксп.)/ C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)/ C ₂ (эксп.)
$3/4\pi$			0.18	0.16	0.76	0.76
$4/4\pi$			0.38	0.38	0.75	0.75
$5/4\pi$			0.35	0.36	0.68	0.68
Среднее			0.30	0.30	0.73	0.73
Значения компонент векторов перемещений/поворота						
	u _n (три.), мм	u _t (три.), мм	ψ _b (три.), рад.	u _n (четыр.), мм	u _t (четыр.), мм	ψ _b (четыр.), рад.
$3/4\pi$	0.000157335	0.000154985	0.0044221	0.000157335	0.00015499	0.004419231
$4/4\pi$	0.000185090	0.000294135	0.00590132	0.000185091	0.000294141	0.005901444
$5/4\pi$	0.000158658	0.000433815	0.00737207	0.000158658	0.000433829	0.007375522

Особое внимание стоит обратить на соотношение полученных значений V_{32} и C_2 и для других сечений, так как зависимость ожидается именно между этими двумя величинами. В таблице 2.5.5 сделано такое сравнение для всех сечений.

Таблица 2.5.5 – Соотношения усредненных V_{32} / C_2

Характеристики стержня	V_{32} (три.)/ C_2	V_{32} (четыр.)/ C_2	V_{32} (три. эксп.)/ C_2 (эксп.)	V_{32} (четыр. эксп.)/ C_2 (эксп.)
R=50 мм, b=20 мм, a=20 мм	0.30	0.30	0.73	0.73
R=50 мм, b=27 мм, a=20 мм	0.18	0.18	0.74	0.74
R=50 мм, b=20 мм, a=27 мм	0.47	0.47	0.69	0.69
R=70 мм, b=32 мм, a=32 мм	0.40	0.39	0.73	0.73
R=500 мм, b=200 мм, a=200 мм	0.30	0.30	0.73	0.73

Важно отметить, что для стержня с сечением $b=27$ мм, $a=20$ мм некоторые значения V_{32} , полученные на основе аналитического C_2 оказались комплексными. Комплексные корни получались и в прошлых работах [11], и это одна из весомых мотиваций использовать именно экспериментально определенные C_2 . В целом, видно, что при использовании экспериментального C_2 соотношение получается близким к 0,7, но выборка сечений невелика и включает только прямоугольные сечения, поэтому обобщающий вывод необходимо делать достаточно осторожно. В предыдущих работах на основе серии аналогичных экспериментов было высказано предположение о соотношении 0,6, и в этом смысле результат кажется близким. Основное беспокойство вызывает общая нестабильность результатов и достаточно ощутимые погрешности, которые даже для экспериментально определенных C_2 в некоторых случаях превышают 7%.

В пособии П. А. Жилина по теории стержней предлагается находить модуль V_{32} аналитически. Для этого решается задача Ламе с полым цилиндром малой высоты, нагруженного внутренним давлением [9]. В результате делается заключение о соотношении $V_{32} = C_2$. Можно осторожно задуматься, не эту ли зависимость мы и видим, просто с достаточно большим численным

отклонением. В любом случае, на основе полученных результатов возможно сделать осторожное предположение о коэффициенте пропорциональности 0,7 между V_{32} и C_2 . Это в целом согласуется с результатами прошлых работ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был определен модуль упругости B_{32} для стержней различного прямоугольного сечения и различного радиуса с использованием методики сопоставления трехмерной теории и теории стержней. Для этого был проведен численный эксперимент в ANSYS с криволинейным стержнем без естественной крутки, позволяющий найти перемещения в трех выбранных сечениях. Полученные узловые перемещения были импортированы в Scilab и затем через них вычислены значения искомого модуля и сопутствующих характеристик, таких, как модуль жесткости на изгиб C_2 . При этом было применено два метода интегрирования поверхности, заданной набором точек: методом трапеций поочередно в каждом направлении и с помощью подсчета суммы «объемов призм» после триангуляции. Несмотря на потенциально большую гибкость метода, использующего триангуляцию, в рамках этой работы более надежные результаты показывает метод, использующий интерполяцию и интегрирование трапециями. Всё-таки пользовательская функция, рассчитывающая интеграл по «объемам призм», слишком примитивна. Однако, в будущем кажется перспективным переходить к интегрированию триангулированной поверхности, что позволит избавиться от необходимости использования регулярной сетки.

Принимая во внимание большую погрешность получаемых значений, а также комплексные значения модуля B_{32} для как минимум одного из рассматриваемых сечений, были проведены дополнительные численные эксперименты с прямолинейными стержнями, в которых были аналогичным методом определены значения C_2 для каждого сечения. Несмотря на близость значений C_2 к теоретическому, экспериментально определенные модули позволили получать вещественные значения B_{32} с умеренной погрешностью. Анализируя же получаемые значения B_{32} , видим, что для всех рассмотренных сечений соотношение B_{32}/C_2 близко к 0,7. Это несколько отличается от ре-

зультатов предыдущих работ, в которых применялся аналогичный метод – в одной из них значения различались почти на один порядок, в то время как в другой было сделано предположение о коэффициенте 0,6 [10,11]. На первый взгляд, такой коэффициент близок к полученным в последней из упомянутых работе результатам, тем более что набор сечений в упомянутой работе был гораздо шире [10]. Однако, учитывая общую нестабильность результатов и большие погрешности, кажется недостаточно надежным делать обобщающие выводы по усредненным значениям. П. А. Жилин в учебном пособии пишет о соотношении $V_{32} = C_2$ [6]. Получаемые результаты действительно показывают стабильную зависимость от C_2 , но сделать вывод о конкретном коэффициенте сложно. В результате этой работы такой коэффициент получился равен 0,7. В дальнейшем, для того, чтобы проверить совокупную степень влияния всех численных эффектов, необходимо провести аналогичные изыскания, верифицируя корректность вычислений на каждом этапе не только с теоретической точки зрения, но и с технической (сугубо численной), но это уже выходит за рамки данной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вильчевская Е. Н. Тензорная алгебра и тезорный анализ: учеб. пособие / Е.Н. Вильчевская. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 46 с.
2. Елисеев В. В. Механика деформируемого твёрдого тела, 2006 г., 231 с.
3. Елисеев В. В., Зиновьева Т. В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней: Учеб. пособие. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 95 с.
4. Елисеев В. В. Механика упругих тел. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. 341 с.
5. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. С.-Петербург: изд-во СПбГТУ, 1992. 86с.
6. Жилин П. А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: Учеб. пособие. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2007. – 101 с.
7. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.1. М.: Наука, 1982. 352с.
8. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики, т.2. М.: Наука, 1983. 540с.
9. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
10. Сударь А. Ю. Определение зависимости дополнительного модуля упругости криволинейного стержня от параметров сечения: выпускная квалификационная работа магистра [Электронный ресурс] // Electronic Library of St. Petersburg Polytechnic University. URL: <https://elib.spbstu.ru/dl/3/2020/vr/vr20-2852.pdf/en/info> (дата обращения 26.05.2023).
11. Ivanova E. A., Timoshenko V. A.. Development of a Method for Determining One of the Additional Elastic Moduli of Curvilinear Rods [Электронный ресурс] // Springer International Publishing. Analysis of Shells, Plates, and Beams. June 2020, pp. 171-184. URL:

https://www.researchgate.net/publication/341890250_Development_of_a_Method_for_Determining_One_of_the_Additional_Elastic_Moduli_of_Curvilinear_Rods
(дата обращения 26.05.2023).

12. Zhilin P. A. Nonlinear theory of thin rods. In: Indeitsev D. A., Ivanova E. A., Krivtsov A. M. (eds) // Advanced Problems in Mechanics, Instit. Problems Mech. Eng. R.A.S. Publ, St. Petersburg, vol 2, 2007: pp. 227-249

13. Ansys Learning Forum [Электронный ресурс]. URL: <https://forum.ansys.com/> (дата обращения 26.05.2023)

14. Scilab Online Help [Электронный ресурс]. URL: https://help.scilab.org/docs/6.1.0/en_US/index.html (дата обращения 26.05.2023)

15. The Computational Geometry Algorithms Library [Электронный ресурс]. URL: <https://www.cgal.org/> (дата обращения 26.05.2023)

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы Scilab, с помощью которой проводилась обработка результатов. На ввод требуются экспортированные из ANSYS Workbench файлы результатов со значениями перемещений в узлах. Не приведены некоторые временные фрагменты для построения графиков.

```
//x,y - coordinates column vectors, f - corresponding 2D integrand matrix
```

```
function I=inttrap2d(x, y, f)
    ll = zeros(size(f,1));
    for i = 1:size(f,1)
        ll(i) = inttrap(x',f(i,:));
    end
    I = inttrap(y,ll);
endfunction
```

```
//x,y - coordinates column vectors, f - corresponding 2D integrand matrix
```

```
function I=intsplin2d(x, y, f)
    ll = zeros(size(f,1));
    for i = 1:size(f,1)
        ll(i) = intsplin(x',f(i,:));
    end
    I = intsplin(y,ll);
endfunction
```

```
//calculating sum of prism volumes as a 2D integral
```

```
function I=intria(index, x, y, f)
    I = 0;
    for i = 1:size(index,"r")
        a = [x(index(i,3))-x(index(i,1)) y(index(i,3))-y(index(i,1)) 0];
        b = [x(index(i,3))-x(index(i,2)) y(index(i,3))-y(index(i,2)) 0];
        A = 0.5*norm(cross(a,b));
        V = A*(f(index(i,1))+f(index(i,2))+f(index(i,3)))/3;
        I = I + V;
    end
endfunction
```

```
function C2=C2_experimental(a, b, M0)
```

```
    interp_n = 300;
    C2 = zeros(3);
    s = zeros(3);

    cd "<User folder for Ansys results>";
    experiment_dir = "./"+string(R*1e3)+"_"+string(b*1e3)+"_"+string(a*1e3)+"_straight";

    ur_ansys = []; sec_x = []; sec_y = [];

    sec_x_interp = zeros(interp_n,3);
    sec_y_interp = zeros(interp_n,3);
    // mean_un_quad = zeros(3);

    for i=1:3
        ur_path = fullfile(experiment_dir,string(24+10*i)+"pi_ut.txt");

        ur_ansys = cat(2,ur_ansys, csvRead(ur_path, " ", ".", "double", [], [], 1));
    end
endfunction
```

```

s(i) = ur_ansys(1,(i-1)*5+2);
//stacked vectors of section coordinates sec_x,y: [3/4pi 4/4pi 5/4pi]
sec_x = cat(2,sec_x,ur_ansys(:,3+5*(i-1)));
sec_y = cat(2,sec_y,ur_ansys(:,4+5*(i-1)));

sec_x_interp(:,i) = linspace(min(sec_x(:,i)),max(sec_x(:,i)),interp_n);
sec_y_interp(:,i) = linspace(min(sec_y(:,i)),max(sec_y(:,i)),interp_n);

//indexing over sections via 3rd dimension
[xq(:, :, i), yq(:, :, i)] = ndgrid(sec_x_interp(:,i), sec_y_interp(:,i));

//interpolate
tl_coef_ur = cshep2d([sec_x(:,i) sec_y(:,i) ur_ansys(:,i*5)]);
vq_ur(:, :, i) = eval_cshep2d(xq(:, :, i), yq(:, :, i), tl_coef_ur);

III_un_quad(:, :, i) = vq_ur(:, :, i);

I_un_quad(i) = intrap2d(sec_x_interp(:,i), sec_y_interp(:,i), III_un_quad(:, :, i));
un_quad(i) = -I_un_quad(i)/(a*b);
C2(i) = M0*s(i)^2/2/un_quad(i);
end
experiment_dir = "";
endfunction

clf();

//rod dimensions, [m]
//loading by moment, [N*m]
a = 0.032;
b = 0.032;
R = 0.07;
M0 = 100;

F = a*b;
I = a^3*b/12;
E = 2e11; %%N/m^2

A3 = E*F;
C2 = E*I;
C2_exp = C2_experimental(a,b,M0);

interp_n = 200;

//csv from Ansys format: [nodenum x y z def]
cd "<User folder for Ansys results>";
format("v",10);
experiment_dir = "./"+string(R*1e3)+"_"+string(b*1e3)+"_"+string(a*1e3)+"_quadratic"; //+"_quadratic"

ur_ansys = []; uth_ansys=[]; sec_x = []; sec_y = []; /*sec_x_y_ur = []; sec_x_y_ut = []*/

sec_x_interp = zeros(interp_n,3);
sec_y_interp = zeros(interp_n,3);

xq = zeros(interp_n,interp_n,3);
yq = zeros(interp_n,interp_n,3);
vq_ur = zeros(interp_n,interp_n,3);
vq_uth = zeros(interp_n,interp_n,3);

III_un_quad = zeros(interp_n,interp_n,3); II_un_quad = zeros(interp_n,3); I_un_quad = zeros(3);
III_ut_quad = zeros(interp_n,interp_n,3); II_ut_quad = zeros(interp_n,3); I_ut_quad = zeros(3);
III_psyb_quad = zeros(interp_n,interp_n,3); II_psyb_quad = zeros(interp_n,3); I_psyb_quad = zeros(3);

```

```

III_un_quad = []; III_ut_quad = []; III_psyb_quad = [];
III_un_tria = []; III_ut_tria = []; III_psyb_tria = [];

un = zeros(3); ut = zeros(3); psyb = zeros(3);
mean_ur = zeros(3); mean_uth = zeros(3);

s = zeros(3);
COEFF2 = zeros(3);
B32 = zeros(3);

for i=1:3
    ur_path = fullfile(experiment_dir,string(24+10*i)+"pi_ur.txt");
    uth_path = fullfile(experiment_dir,string(24+10*i)+"pi_ut.txt");

    ur_ansys = cat(2,ur_ansys, csvRead(ur_path, " ", ".", "double", [], [], 1));
    uth_ansys = cat(2,uth_ansys, csvRead(uth_path, " ", ".", "double", [], [], 1));

    //stacked vectors of section coordinates sec_x,y: [3/4pi 4/4pi 5/4pi]
    sec_x = cat(2,sec_x, sqrt(uth_ansys(:,2+5*(i-1)).^2 + uth_ansys(:,3+5*(i-1)).^2)-R);
    sec_y = cat(2,sec_y,uth_ansys(:,4+5*(i-1)));

    sec_x_interp(:,i) = linspace(min(sec_x(:,i)),max(sec_x(:,i)),interp_n);
    sec_y_interp(:,i) = linspace(min(sec_y(:,i)),max(sec_y(:,i)),interp_n);

    //indexing over sections via 3rd dimension
    [xq(:,i),yq(:,i)] = ndgrid(sec_x_interp(:,i),sec_y_interp(:,i));

    //interpolate
    tl_coef_ur = cshep2d([sec_x(:,i) sec_y(:,i) ur_ansys(:,i*5)]);
    tl_coef_uth = cshep2d([sec_x(:,i) sec_y(:,i) uth_ansys(:,i*5)]);

    vq_ur(:,i) = eval_cshep2d(xq(:,i),yq(:,i),tl_coef_ur);
    vq_uth(:,i) = eval_cshep2d(xq(:,i),yq(:,i),tl_coef_uth);

    III_un_quad(:,i) = vq_ur(:,i) - vq_ur(:,i).*xq(:,i)/R;
    III_ut_quad(:,i) = vq_uth(:,i) - vq_uth(:,i).*(xq(:,i).^2/R^2);
    III_psyb_quad(:,i) = vq_uth(:,i) + (12*R/a^2)*vq_uth(:,i).*xq(:,i) - ...
        (vq_uth(:,i).*xq(:,i))/R - (12/a^2)*vq_uth(:,i).*(xq(:,i).^2);

    //integrate over interpolated sections

    I_un_quad(i) = intrap2d(sec_x_interp(:,i),sec_y_interp(:,i),III_un_quad(:,i));
    I_ut_quad(i) = intrap2d(sec_x_interp(:,i),sec_y_interp(:,i),III_ut_quad(:,i));
    I_psyb_quad(i) = intrap2d(sec_x_interp(:,i),sec_y_interp(:,i),III_psyb_quad(:,i));

    un_quad(i) = -I_un_quad(i)/(a*b);
    ut_quad(i) = I_ut_quad(i)/(a*b)/(1-a^2/12/R^2);
    psyb_quad(i) = I_psyb_quad(i)/(R*a*b)/(1-a^2/12/R^2);

    index_tria = delaunay_2(sec_x(:,i)',sec_y(:,i)');

    //custom integration int_tria() of triangulated area by calculating prism volumes
    III_un_tria = cat(2,III_un_tria,ur_ansys(:,i*5) - ur_ansys(:,i*5).*sec_x(:,i)/R);
    III_ut_tria = cat(2,III_ut_tria,uth_ansys(:,i*5) - uth_ansys(:,i*5).*(sec_x(:,i).^2/R^2));
    III_psyb_tria = cat(2,III_psyb_tria,uth_ansys(:,i*5) + (12*R/a^2)*uth_ansys(:,i*5).*sec_x(:,i) - ...
        (uth_ansys(:,i*5).*sec_x(:,i))/R - (12/a^2)*uth_ansys(:,i*5).*(sec_x(:,i).^2));

    I_un_tria(i) = inttria(index_tria,sec_x(:,i),sec_y(:,i),III_un_tria(:,i));
    I_ut_tria(i) = inttria(index_tria,sec_x(:,i),sec_y(:,i),III_ut_tria(:,i));
    I_psyb_tria(i) = inttria(index_tria,sec_x(:,i),sec_y(:,i),III_psyb_tria(:,i));

    un_tria(i) = -I_un_tria(i)/(a*b);

```

```

ut_tria(i) = l_ut_tria(i)/(a*b)/(1-a^2/12/R^2);
psyb_tria(i) = l_psyb_tria(i)/(R*a*b)/(1-a^2/12/R^2);

mean_ur(i) = mean(ur_ansys(:,i*5));
mean_uth(i) = mean(uth_ansys(:,i*5));

s(i) = (i+2)/4*%pi*R;
COEFF2(i) = psyb_tria(i)/(M0*R*s(i));

B32_tria(i) = sqrt((C2-M0*s(i)/psyb_tria(i))*(R^2)*A3);
B32_tria_exp(i) = sqrt((C2_exp(i)-M0*s(i)/psyb_tria(i))*(R^2)*A3);

B32_quad(i) = sqrt((C2-M0*s(i)/psyb_quad(i))*(R^2)*A3);
B32_quad_exp(i) = sqrt((C2_exp(i)-M0*s(i)/psyb_quad(i))*(R^2)*A3);
end

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Под сокращениями подразумевается: «эксп.» – определенный на основе эксперимента; «три.» – вычисленный на триангулированной в Scilab сетке узлов; «четырь.» – вычисленный на сетке узлов, интерполированной четырехугольными «элементами».

Таблица Б.1 – Расчетные величины для стержня сечением 200x200 мм

R = 500 мм, b = 200 мм, a = 200 мм, M₀ = 150 кНм						
Модули упругости						
Сечение	C ₂	C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четырь.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четырь. эксп.)
$3/4\pi$	26666666.67	26865039.76	4928892.9	4261172.313	20519263.53	20369187.03
$4/4\pi$	26666666.67	26816657.81	10033395.2	10081199.12	20016275.99	20040280.97
$5/4\pi$	26666666.67	26787266.81	9310701.08	9533911.597	18107717.71	18223494.62
Среднее	26666666.67	26822988.13	8090996.39	7958761.009	19547752.41	19544320.87
Погрешность относительно среднеарифметического						
		C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четырь.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четырь. эксп.)
$3/4\pi$		0.16%	39.08%	46.46%	4.97%	4.22%
$4/4\pi$		0.02%	24.01%	26.67%	2.40%	2.54%
$5/4\pi$		0.13%	15.07%	19.79%	7.37%	6.76%
Соотношение V₃₂ к C₂						
			V ₃₂ (три.)/ C ₂	V ₃₂ (четырь.)/ C ₂	V ₃₂ (три. эксп.)/ C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (четырь. эксп.)/ C ₂ (эксп.)
$3/4\pi$			0.18	0.16	0.76	0.76
$4/4\pi$			0.38	0.38	0.75	0.75
$5/4\pi$			0.35	0.36	0.68	0.68
Среднее			0.30	0.30	0.73	0.73
Значения компонент векторов перемещений/поворота						
	u _n (три.), мм	u _t (три.), мм	ψ _b (три.), рад.	u _n (четырь.), мм	u _t (четырь.), мм	ψ _b (четырь.), рад.
$3/4\pi$	0.002360119	0.002325101	0.00662982	0.00236012	0.002325113	0.006629054
$4/4\pi$	0.002776348	0.004412386	0.00885244	0.002776349	0.004412408	0.008852599
$5/4\pi$	0.002379763	0.00650764	0.01106264	0.002379763	0.006507675	0.011063517

Таблица Б.2 – Расчетные величины для стержня сечением 20x20 мм

R = 50 мм, b = 20 мм, a = 20 мм, M₀ = 100 Нм						
Модули упругости						
Сечение	C ₂	C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$3/4\pi$	2666.666667	2686.755503	714.922902	406.0205796	2128.117003	2045.145455
$4/4\pi$	2666.666667	2681.838518	989.518727	995.1182859	2003.376559	2006.148232
$5/4\pi$	2666.666667	2678.811015	805.198545	947.4562568	1754.19904	1823.881283
Среднее	2666.666667	2682.468345	836.546724	782.8650408	1961.897534	1958.391657
Погрешность относительно среднеарифметического						
		C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$3/4\pi$		0.16%	14.54%	48.14%	8.47%	4.43%
$4/4\pi$		0.02%	18.29%	27.11%	2.11%	2.44%
$5/4\pi$		0.14%	3.75%	21.02%	10.59%	6.87%
Соотношение V₃₂ к C₂						
			V ₃₂ (три.)/ C ₂	V ₃₂ (четыр.)/ C ₂	V ₃₂ (три. эксп.)/ C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)/ C ₂ (эксп.)
$3/4\pi$			0.18	0.16	0.76	0.76
$4/4\pi$			0.38	0.38	0.75	0.75
$5/4\pi$			0.35	0.36	0.68	0.68
Среднее			0.30	0.30	0.73	0.73
Значения компонент векторов перемещений/поворота						
	u _n (три.), мм	u _t (три.), мм	ψ _b (три.), рад.	u _n (четыр.), мм	u _t (четыр.), мм	ψ _b (четыр.), рад.
$3/4\pi$	0.000157335	0.000154985	0.0044221	0.000157335	0.00015499	0.004419231
$4/4\pi$	0.000185090	0.000294135	0.00590132	0.000185091	0.000294141	0.005901444
$5/4\pi$	0.000158658	0.000433815	0.00737207	0.000158658	0.000433829	0.007375522

Таблица Б.3 – Расчетные величины для стержня сечением 20x27 мм

R = 50 мм, b = 20 мм, a = 27 мм, M₀ = 100 Нм						
Модули упругости						
Сечение	C ₂	C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$3/4\pi$	6561	6613.65577	2857.356564	2753.290756	4730.913708	4668.797271
$4/4\pi$	6561	6600.93088	3210.625144	3215.100262	4592.325265	4595.455061
$5/4\pi$	6561	6593.152166	3243.197617	3314.437211	4381.713772	4434.701661
Среднее	6561	6602.579605	3103.726442	3094.276076	4568.317581	4566.317998
Погрешность относительно среднеарифметического						
		C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$3/4\pi$		0.17%	7.94%	11.02%	3.56%	2.24%
$4/4\pi$		0.02%	3.44%	3.90%	0.53%	0.64%
$5/4\pi$		0.14%	4.49%	7.12%	4.08%	2.88%
Соотношение V₃₂ к C₂						
			V ₃₂ (три.)/ C ₂	V ₃₂ (четыр.)/ C ₂	V ₃₂ (три. эксп.)/ C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)/ C ₂ (эксп.)
$3/4\pi$			0.44	0.42	0.72	0.71
$4/4\pi$			0.49	0.49	0.70	0.70
$5/4\pi$			0.49	0.51	0.66	0.67
Среднее			0.47	0.47	0.69	0.69
Значения компонент векторов перемещений/поворота						
	u _n (три.), мм	u _t (три.), мм	ψ _b (три.), рад.	u _n (четыр.), мм	u _t (четыр.), мм	ψ _b (четыр.), рад.
$3/4\pi$	6.32328E-05	6.35615E-05	0.00180392	6.32328E-05	6.35635E-05	0.001803323
$4/4\pi$	7.44465E-05	0.000119956	0.00240815	7.44466E-05	0.000119959	0.002408194
$5/4\pi$	6.38716E-05	0.000176612	0.00301055	6.38716E-05	0.000176617	0.003011351

Таблица Б.4 – Расчетные величины для стержня сечением 27x20 мм

R = 50 мм, b = 27 мм, a = 20 мм, M₀ = 100 Нм						
Модули упругости						
Сечение	C ₂	C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$\frac{3}{4}\pi$	3600	3634.883238	875.9694948i	1185.710179i	2941.284011	2830.647551
$\frac{4}{4}\pi$	3600	3626.422511	641.185518	648.1307152	2746.852179	2748.481663
$\frac{5}{4}\pi$	3600	3621.259279	226.6574649i	635.5203341	2385.085285	2478.687459
Среднее	3600	3627.521676	213.728506	427.8836831	2691.073825	2685.938891
Погрешность относительно среднеарифметического						
		C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$\frac{3}{4}\pi$		-	-	-	9.30%	5.39%
$\frac{4}{4}\pi$		-	-	-	2.07%	2.33%
$\frac{5}{4}\pi$		-	-	-	11.37%	7.72%
Соотношение V₃₂ к C₂						
			V ₃₂ (три.)/ C ₂	V ₃₂ (четыр.)/ C ₂	V ₃₂ (три. эксп.)/ C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)/ C ₂ (эксп.)
$\frac{3}{4}\pi$			-	-	0.81	0.78
$\frac{4}{4}\pi$			0.18	0.18	0.76	0.76
$\frac{5}{4}\pi$			-	0.18	0.66	0.68
Среднее			0.18	0.18	0.74	0.74
Значения компонент векторов перемещений/поворота						
	u _n (три.), мм	u _t (три.), мм	ψ _b (три.), рад.	u _n (четыр.), мм	u _t (четыр.), мм	ψ _b (четыр.), рад.
$\frac{3}{4}\pi$	0.000116321	0.000114448	0.00326991	0.000116321	0.000114452	0.003267766
$\frac{4}{4}\pi$	0.000136987	0.000217384	0.00436517	0.000136987	0.000217388	0.00436521
$\frac{5}{4}\pi$	0.000117559	0.000320817	0.00545387	0.000117559	0.000320827	0.005456421

Таблица Б.5 – Расчетные величины для стержня сечением 32x32 мм

R = 70 мм, b = 32 мм, a = 32 мм, M₀ = 100 Нм						
Модули упругости						
Сечение	C ₂	C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$3/4\pi$	17476.26667	17623.72505	5762.89104	5363.22976	13460.62206	13294.42239
$4/4\pi$	17476.26667	17588.22118	7147.02956	7159.846607	12783.92056	12791.09053
$5/4\pi$	17476.26667	17566.59192	7824.20763	8011.490036	12323.20653	12442.95651
Среднее	17476.26667	17592.84605	6911.37608	6844.855468	12855.91638	12842.82314
Погрешность относительно среднеарифметического						
		C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (три.)	V ₃₂ (четыр.)	V ₃₂ (три. эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)
$3/4\pi$		0.18%	16.62%	21.65%	4.70%	3.52%
$4/4\pi$		0.03%	3.41%	4.60%	0.56%	0.40%
$5/4\pi$		0.15%	13.21%	17.04%	4.14%	3.11%
Соотношение V₃₂ к C₂						
			V ₃₂ (три.)/ C ₂	V ₃₂ (четыр.)/ C ₂	V ₃₂ (три. эксп.)/ C ₂ (эксп.)	V ₃₂ (четыр. эксп.)/ C ₂ (эксп.)
$3/4\pi$			0.33	0.31	0.76	0.75
$4/4\pi$			0.41	0.41	0.73	0.73
$5/4\pi$			0.45	0.46	0.70	0.71
Среднее			0.40	0.39	0.73	0.73
Значения компонент векторов перемещений/поворота						
	u _n (три.), мм	u _t (три.), мм	ψ _b (три.), рад.	u _n (четыр.), мм	u _t (четыр.), мм	ψ _b (четыр.), рад.
$3/4\pi$	4.68306E-05	4.64594E-05	0.00094555	4.68306E-05	4.64601E-05	0.000945308
$4/4\pi$	5.51306E-05	8.80152E-05	0.00126202	5.51307E-05	8.8016E-05	0.001262033
$5/4\pi$	4.72911E-05	0.000129757	0.00157844	4.72911E-05	0.000129759	0.001578707