

# Свободные волны в средах без симметрии отражения

Руководитель: Е.Ф.Грекова, Выполнил: А.Д.Работинский

Высшая школа теоретической механики и математической физики  
01.03.03 Механика и математическое моделирование, гр. 5030103/00101



- 1 Цель и актуальность работы
- 2 Плоское движение в одномерной гиротропной среде.
- 3 Одномерные модели сред без симметрии отражения. Смешанная волна.

# Цель и актуальность работы

Акустические метаматериалы — среды сложной структуры с отрицательными эффективными упругими/инерционными параметрами в некоторых диапазонах частот (рабочих зонах).

Рабочие зоны акустического метаматериала делятся на

- 1 Зоны существенного поглощения — происходит сильное (экспоненциальное) затухание волны по пространству (могут быть запрещенными для бегущих волн или нет)
- 2 Зоны аномального преломления — фазовая и групповая скорости разного знака (фаза и энергия распространяются в противоположные стороны)

Широко применяются для звукоизоляции, управления лучами волн, виброзащиты и др.

Сложные волновые свойства у некоторых **хиральных** материалов (Tong, Li, Wang, 2023).

Теоретическое предсказание (Грекова, 2023): богатыми свойствами должны обладать поперечные волны в **гиротропных** континуумах (повороты входят в группу симметрии, отражения — нет).

Свойства мало изучены. Не указана природа континуума.

Цели работы:

- Предложить простейшие модели сред без симметрии отражения — акустических метаматериалов
- Предложить простейшую модель гиротропной среды — акустического метаматериала
- Провести их дисперсионный анализ, исследовать влияние параметров сред на рабочие зоны

# Линейная редуцированная среда Коссера

Сложные **редуцированные среды** проявляют свойства метаматериалов (Грекова, 2015–2023).

Упругая редуцированная среда: несущий континуум + распределенный динамический гаситель.

Упругая энергия не зависит от деформации динамического гасителя.

Взаимосвязь субконтинуумов: “деформация несущего континуума – смещение динамического гасителя” или “смещение – смещение”

---

(Изотропная редуцированная среда Коссера — модель для зернистых сред, Schwartz, Johnson, Feng, 1984)

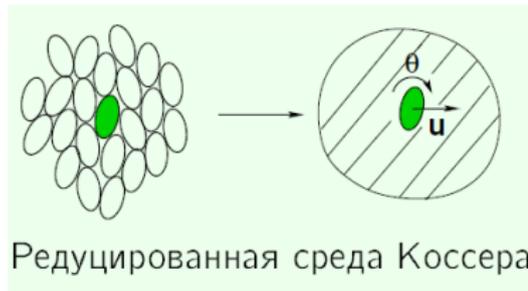
Трансляции  $\underline{u}$  — несущий континуум

Повороты  $\underline{\theta}$  — “динамический гаситель”

Упругая энергия не зависит от  $\nabla \underline{\theta}$

(нет сопротивления взаимному повороту)

Взаимосвязь  $\nabla \underline{u}$  и  $\underline{\theta}$



---

Рассмотрим редуцированные среды Коссера без симметрии отражения: оба типа взаимосвязи  $\implies$  богатые волновые свойства.

Для получения модели гиротропной среды необходимо ввести объект, не имеющий симметрии по отражению - пружину с винтом (при отражении направление резьбы меняется  $\Rightarrow$  изменяются уравнения динамики).

Будем рассматривать тела-точки с шаровым тензором инерции  $\underline{\underline{I}} = I \underline{\underline{E}}$ .

## Требования к пружине с винтом

- Резьба винтов и отверстий для них правая и метрическая
- Резьба идеально гладкая: не создается трения при движении винта по резьбе.
- Момент, возникающий в пружине с винтом:  $c_3 \frac{b}{2\pi}$ , где  $b$  - шаг резьбы

# Плоское движение в одномерной гиротропной среде.

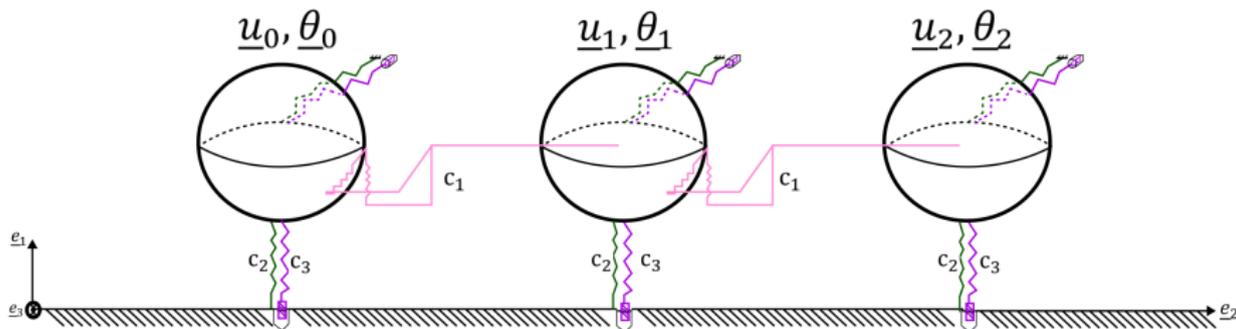


Рис. 1: Модель редуцированной гиротропной среды

## Уравнения движения гиротропной среды

$$\begin{cases} A_{11}\ddot{\underline{u}} + C_{11}\underline{u} - C_{10}\underline{\theta} - N\nabla \times \underline{\theta} + \gamma\nabla \times (\nabla \times \underline{u}) = 0 \\ A_{00}\ddot{\underline{\theta}} + C_{00}\underline{\theta} - C_{10}\underline{u} - N\nabla \times \underline{u} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где  $A_{11} = m$  - масса,  $A_{00} = I$  - момент инерции,  $C_{10} = c_3 \frac{b}{2\pi}$ ,  $\gamma = c_1 h^2$ ,  
 $C_{11} = c_2 + c_3$ ,  $N = c_1 Rh$ ,  $C_{00} = c_3 \frac{b^2}{4\pi^2} + c_1 R^2$

# Уравнение Кристоффеля гиротропной редуцированной среды

## Уравнение Кристоффеля для рассматриваемой среды

$$\left[ A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2) + \frac{C_{10}^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] \hat{\mathbf{U}} - \left[ \gamma + \frac{N^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{U}}) + 2i \frac{NC_{10}}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{U}} = 0 \quad (2)$$

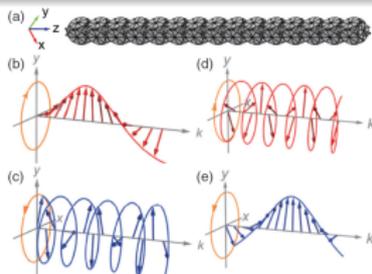


Рис. 2: Tong, Li, Wang, 2023

# Гиروتропная среда. Важные параметры.

В работе получены безразмерные независимые параметры  $p_c, p_n, p_{\omega_1}$ , определяющие расположение зон существенного поглощения и аномального преломления.

$$p_c = \frac{C_{10}}{\sqrt{A_{11}A_{00}\omega_*^2}} = \frac{2\pi}{b} \sqrt{\frac{l}{m}} \quad (\text{связь "смещение - смещение"})$$

$$p_n = \frac{N}{\sqrt{\gamma A_{00}\omega_*}} = \frac{2\pi R}{b} \sqrt{\frac{c_1}{c_3}} \quad (\text{связь "деформация несущего континуума - смещение динамического гасителя"})$$

$$p_{\omega_1} = \frac{\omega_1}{\omega_*} = \sqrt{\frac{C_{11}}{A_{11}}} \frac{1}{\omega_*} = \frac{2\pi}{b} \sqrt{\frac{l}{m}} \sqrt{1 + \frac{c_2}{c_3}} \quad (3)$$

$$\text{где } \omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma} = \frac{1}{A_{00}} (C_{00} - \frac{N^2}{\gamma}) = \frac{c_3 \frac{b^2}{4\pi^2}}{l}, \quad \omega_1^2 = \frac{C_{11}}{A_{11}} = \frac{c_2 + c_3}{m}$$

**Условие на параметры:**

$$|p_c| \leq |p_{\omega_1}|$$

# Гиротропная среда. Обезразмеренное дисперсионное соотношение в терминах главных параметров.

$K = \frac{k}{\omega_*} \sqrt{\frac{\gamma}{A_{11}}}$  — безразмерное волновое число,

$\Omega = \frac{\omega}{\omega_*}$  — безразмерная частота,

$$\left\{ \begin{array}{l} K = \frac{p_c p_n \pm \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)}}{\Omega^2 - 1}, \quad \Omega^2 \neq 1 \\ K = \frac{p_n^2(1 - p_{\omega_1}^2) + p_c^2}{2p_c p_n}, \quad \Omega^2 = 1 \\ \Omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_*^2} = 1 + p_n^2 \\ \Omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_{\pm}^2}{\omega_*^2} = \frac{1}{2} \left( p_{\omega_1}^2 + 1 \pm \sqrt{(p_{\omega_1}^2 - 1)^2 + 4p_c^2} \right) \end{array} \right. \quad (4)$$

## Волны с различной круговой поляризацией

Зоны существенного поглощения исследованы (Грекова, 2023).

Рассмотрим зоны аномального преломления

# Анализ дисперсионных соотношений в разных частотных диапазонах. Влияние $\xi = \rho_c \rho_n$

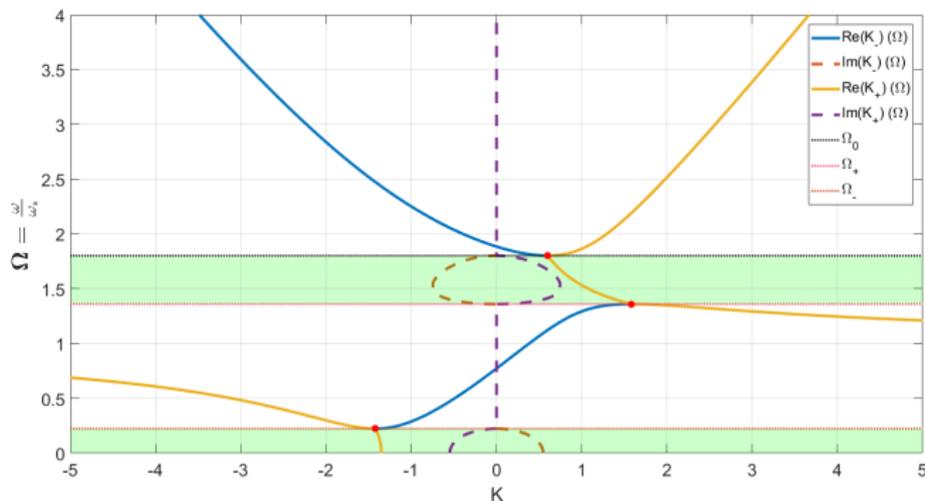


Рис. 3: ( $\rho_c = 0.9$ ;  $\rho_n = 1.5$ ;  $\rho_{\omega_1} = 0.95$ );  $\xi = 1.35$ ;  $\Omega_- \approx 0.2233$ ;  $\Omega_+ \approx 1.3611$ ;  $\Omega_0 = 1.8027$

# Анализ дисперсионных соотношений в разных частотных диапазонах. Влияние $\xi = \rho_c \rho_n$

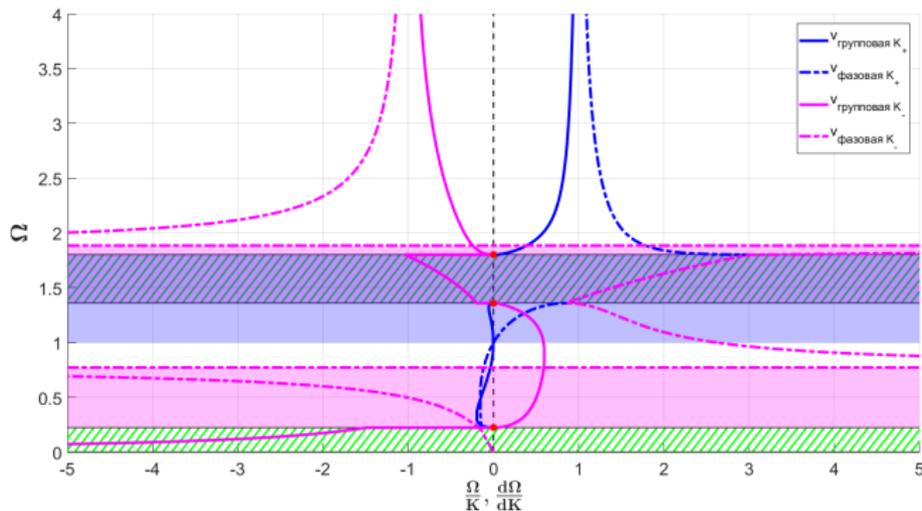


Рис. 4: ( $\rho_c = 0.9$ ;  $\rho_n = 1.5$ ;  $\rho_{\omega_1} = 0.95$ );  $\xi = 1.35$ ;  $\Omega_- \approx 0.2233$ ;  $\Omega_+ \approx 1.3611$ ;  $\Omega_0 = 1.8027$

# Зоны аномального преломления

$\xi > 0$		
Ветвь	ЗАН №1	ЗАН №2
$K_+$	$[1, \min(\Omega_0, \Omega_+)]$	Не имеет
$K_-$	$[\Omega_-, \Omega_{K=0}]$	$[\max(\Omega_0, \Omega_+), \hat{\Omega}]$
$\xi < 0$		
Ветвь	ЗАН №1	ЗАН №2
$K_+$	$[\Omega_-, \Omega_{K=0}]$	$[\max(\Omega_0, \Omega_+), \hat{\Omega}]$
$K_-$	$[1, \min(\Omega_0, \Omega_+)]$	Не имеет

Таблица 1: Границы зон аномального преломления (ЗАН)

# Гиротропная среда. Верификация с помощью изотропной среды.

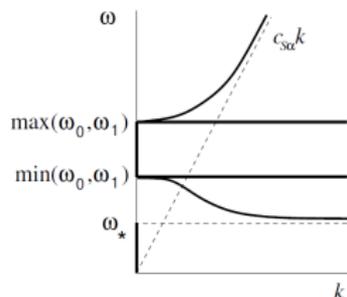
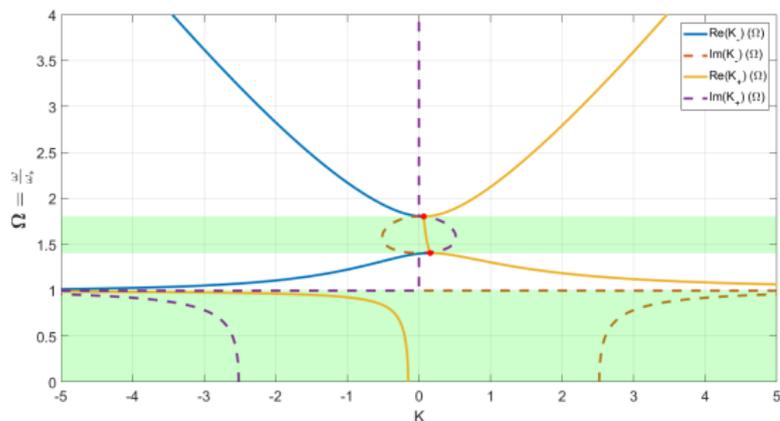


Рис. 5:  $\xi = 0.15$   $\rho_\omega = 1.5$  - слева, дисперсионное соотношение изотропной среды при  $C_{10} = 0$  - справа

# Одномерные модели сред без симметрии отражения. Смешанная волна.

В работе предложены следующие модели:

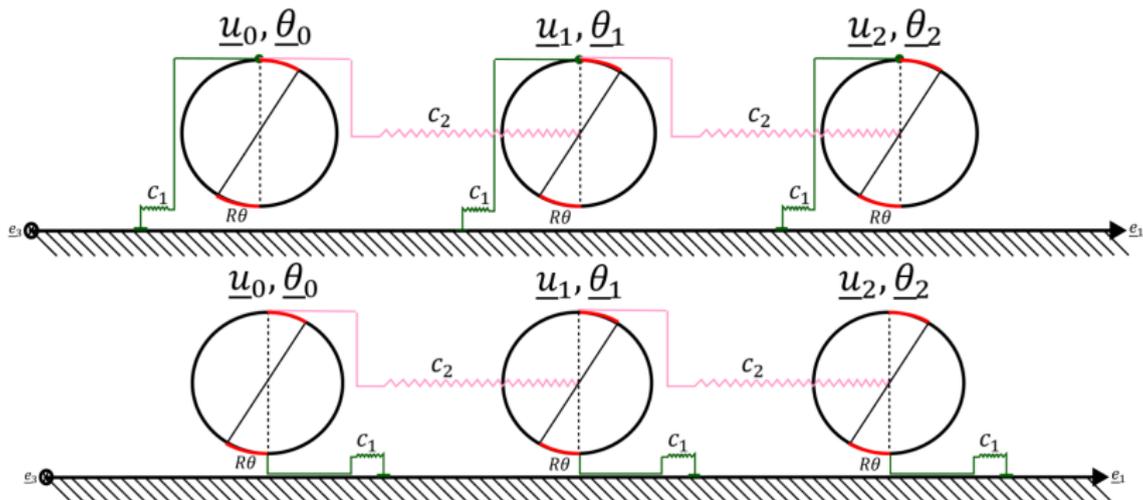


Рис. 6: Модели одномерных сред без симметрии отражения

# Одномерные модели сред без симметрии отражения. Уравнения динамики.

$$\begin{cases} m\ddot{u} = c_2(h^2 u'' - Rh\theta') \mp c_1(R\theta \pm u) \\ I\ddot{\theta} = c_2R(hu' - R\theta) - c_1R(R\theta \pm u) \end{cases} \quad (5)$$

Решение будем искать в виде гармонической волны:  $u = A_1 e^{i(\omega t + kx)}$ ;  $\theta = A_0 e^{i(\omega t + kx)}$ , выразим  $A_0$  через  $A_1$  и подставим в первое уравнение (5).

Перемещение — продольное, поворот — поперечный. Волны с линейной поляризацией.

## Дисперсионное соотношение

$$\left( A_{11}(\omega^2 - \omega_1^2) - \frac{C_{10}^2}{A_{00}} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \right) - \left( \gamma + \frac{N^2}{A_{00}(\omega^2 - \omega_0^2)} \right) k^2 = 0 \quad (6)$$

# Одномерные модели сред без симметрии отражения. Смешанная волна.

## Дисперсионное соотношение

$$c_\gamma k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2 - \omega_*^2}, \text{ где}$$

$$\omega_\pm^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right)^2 + \hat{\omega}^4}, \quad (7)$$

$$\hat{\omega}^4 = \frac{C_{10}^2}{A_{11}A_{00}}, \quad c_\gamma^2 = \frac{\gamma}{A_{11}}, \quad \omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma}$$

где  $A_{11} = m$ ;  $A_{00} = I$ ;  $C_{10} = c_1 R$ ;  $N = c_2 R h$ ;  $\gamma = c_2 h^2$

## Условия на частоты

- $\omega_+ > \omega_0 > \omega_* > \omega_- > 0$
- $\omega_+ > \omega_1 > \omega_- > 0$

# Дисперсионные соотношения

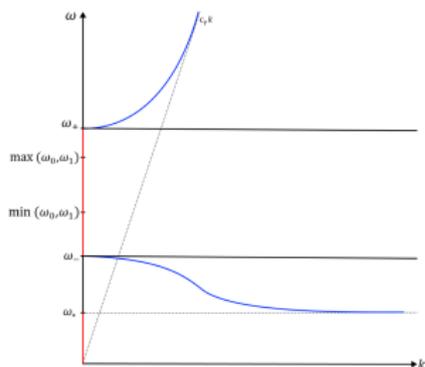


Рис. 7:  $\omega_1 > \omega_*$

**Условие  
реализации:**

$$\frac{l}{mR^2} > 1$$

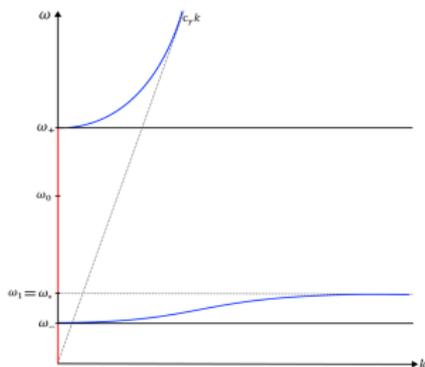


Рис. 8:  $\omega_* = \omega_1$

**Условие  
реализации:**

$$\frac{l}{mR^2} = 1$$

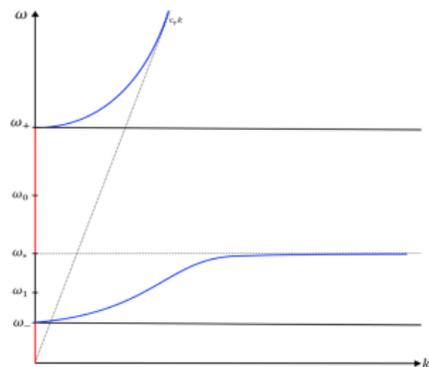


Рис. 9:  $\omega_* > \omega_1$

**Условие  
реализации:**

$$\frac{l}{mR^2} < 1$$

# Ширина запрещенных зон

## Ширина запрещенных зон в зависимости от параметров среды

$$\bullet \omega_+ - \omega_* =$$

$$p_0 \left[ \sqrt{\underbrace{\frac{1}{2}(p_1(1+p_2)+1) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(p_1(1+p_2)-1)\right)^2 + p_1}}_s} - \sqrt{p_1} \right]$$

$$\bullet \omega_- = p_0 \sqrt{\frac{1}{2}(p_1(1+p_2)+1) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}(p_1(1+p_2)-1)\right)^2 + p_1}}$$

где  $p_0 = \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}$ ,  $p_1 = \frac{mR^2}{I}$ ,  $p_2 = \frac{c_2}{c_1}$

## Случай 2. Запрещенные зоны

### Зона $\omega \in [\omega_*; \omega_+]$

- расширяется при увеличении любого из параметров  $p_{0,1,2}$ , в случае, если  $p_1 - 1, p_2$  - не малы, иначе сужается, получено численно.
- Всегда будет существовать  $\min(\omega_+ - \omega_*)$ , например, при одновременно малых значениях  $p_1 - 1, p_2$ :  $\min(\omega_+ - \omega_*) = \sqrt{2} - 1$

### Запрещенная зона $\omega \in [0; \omega_-]$

- расширяется при увеличении любого из параметров  $p_i$ , получено аналитически
- будет исчезать при приближении параметров  $p_{1,2}$  к их минимальным значениям  $\min(\omega_-) \xrightarrow{p_1 \rightarrow 1, p_2 \rightarrow 0} 0$

- Предложена простейшая модель гиротропной среды, являющаяся и единожды, и дважды отрицательным акустическим метаматериалом.
- Поперечные волны в ней обладают круговой поляризацией, дисперсионное соотношение несимметрично относительно  $k = 0$ .
- Найдены параметры  $\rho_c, \rho_n, \rho_{\omega_1}$ , качественно влияющие на распространение волн в гиротропной среде.
- На частоте  $\omega = \omega_*$  одна из ветвей имеет горизонтальную асимптоту на малых длинах волн.
- В  $K = 0$  существуют две частоты, которые являются границами зон аномального преломления, доказано аналитически.
- Каждая характеристическая частота  $\Omega_{0,\pm}$  является или нижней, или верхней границей зон аномального преломления и зон существенного поглощения для одной из волн, показано аналитически.

- Одна из волн всегда будет иметь две зоны аномального преломления, другая - одну, они могут перекрываться, показано численно.
- Предложены одномерные модели сред без симметрии отражения, рассмотрены все возможные сценарии распространения смешанных волн в них, условия их реализации, было изучено влияние параметров этих сред на ширину зон существенного поглощения.

Спасибо за внимание!