

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А. М. Кривцов
«___» _____ 2024 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

ПОСТРОЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

по направлению подготовки

01.04.03 Механика и математическое моделирование

Направленность (профиль)

01.04.03_01 Механика деформируемого твердого тела

Выполнил
студент гр. 5040103/20101

И. Е. Груздев

Руководитель
директор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН

А. М. Кривцов

Консультант
по нормоконтролю

Е. А. Хайбулова

Санкт-Петербург – 2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Груздеву Игорю Евгеньевичу, гр. 5040103/20101

1. Тема работы: Построение механических аналогий с использованием методов энергетической динамики
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 30.05.2024
3. Исходные данные по работе: актуальные научные публикации по теме работы, основные уравнения динамики упругой волновой среды, балансовые уравнения в гидродинамике, уравнения лазерных пучков
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): сравнение дифференциальных форм уравнений движения гидродинамики идеальной жидкости с энергетическими величинами для упругой волновой среды; построение параксиальное приближения волнового уравнения и его решение в виде пучка Гаусса для многомерной среды
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено
6. Консультанты по работе: отсутствуют
7. Дата выдачи задания 26.02.2024

Руководитель ВКР _____ А. М. Кривцов, директор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н., доцент,
чл.-корр. РАН

Задание принял к исполнению 26.02.2024

Студент _____ И. Е. Груздев

РЕФЕРАТ

На 46с., 7 рисунков

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ, ПАРАКСИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ,
ПУЧОК ГАУССА, ПУЧОК ЭЙРИ

Данная работа посвящена исследованию движения стационарных и нестационарных пучков. Рассмотрено многомерное волновое уравнение и для него выводится многомерный пучок Гаусса и уравнение Софи Жермен, где выводится параболический пучок.

В результате выведен многомерный пучок Гаусса как обобщение уже известных решений, рассмотрены его основные свойства, а также выведены параболический пучок и пучок Эйри для уравнения Софи Жермен и уравнения балки Бернулли–Эйлера соответственно. Для них исследованы основные свойства, в частности их движение по баллистической траектории.

ABSTRACT

46 pages, 7 figures

EQUATIONS OF MOTION, PARAXIAL APPROXIMATION, GAUSSIAN
BEAM, AIRY BEAM

This work is devoted to the study of motion of stationary and non-stationary beams. A multidimensional wave equation is considered, and a multidimensional Gaussian beam is derived for it and the Sophie Germain equation where a parabolic beam is derived.

As a result, the multidimensional Gaussian bundle is derived as a generalization of already known solutions, its basic properties are examined, and the parabolic bundle and the Airy bundle are derived for the Sophie Germain equation and the Bernoulli-Euler beam equation, respectively. For them the basic properties, particularly their motion along the ballistic trajectory, are investigated.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ПАРАКСИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ	11
1.1. Уравнения движения	11
1.2. Построение параксиального приближения	12
1.3. Волновой пакет и начальная задача	13
1.4. Переход к многомерному уравнению Шредингера	14
1.5. Гауссов пучок как решение уравнения Шредингера	19
1.6. Гауссов пучок как решение координатного параболического уравнения	22
1.7. Сравнение с известными решениями.....	23
1.8. Решение волнового уравнения для координатного параболического уравнения	27
1.9. Решение волнового уравнения для уравнения Шредингера	28
1.10. Заключение к главе 1	29
ГЛАВА 2. ПАРАКСИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СОФИ ЖЕРМЕН	31
2.1. Уравнения движения	31
2.2. Дисперсионное соотношение	32
2.3. Параксиальное приближение.....	33
2.4. Переход к уравнениям Шредингера и начальные условия	35
2.5. Решение уравнения Шредингера.....	36
2.6. Анализ полученного решения. Параболические пучки	38
2.7. Стационарные пучки Эйри	39
2.8. Заключение к главе 2	42
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	46

ВВЕДЕНИЕ

«Математика – это искусство называть
разные вещи одним и тем же именем.»

© Жюль Анри Пуанкаре.

Французский математик и механик Жюль Анри Пуанкаре, живший во второй половине 19 века, обратил внимание, что с помощью математики можно описывать различные вещи одними уравнениями.

Между классической механикой и оптикой существуют огромные различия и, говоря строго, нельзя сопоставлять эти две науки друг другу. Но с другой стороны, в природе многие процессы описываются схожими законами, например давно известно подобие задач фильтрации и теплопроводности [15]. Другим примером служит механико-электрическая аналогия: можно построить описание электромагнитных явлений с позиций рациональной механики [6]. В то же время волновое уравнение [7, 8, 12] описывает различные процессы: малые поперечные колебания струны или мембраны, линейные колебательные процессы в акустике [11], например, распространение звука в среде, а также магнитная и электрическая компоненты электромагнитной волны [2] в том числе и света.

Большой интерес представляет применение методов, используемых в оптике и электромагнетизме, к задачам механики сплошных сред. Как известно, одним из самых эффективных и наиболее простых методов исследования электромагнитных явлений является рассмотрение плоских волн. Зачастую, такой же метод применяется и в механике сплошных сред.

Кроме указанного подхода, в оптике применяется парааксиальное приближение [4, 13, 16]. Этот метод впервые был использован в [16]. В настоящее время применение парааксиального приближения активно используется, например, в теории лазерных пучков [5] и в оптических

резонаторах [9]. Развитие данный метод получил, например, в работах [1, 18], где данный метод применяется в анизотропных средах.

Зачастую, ограничиваются рассмотрением лишь гауссовых пучков [4], поскольку такое решение является простейшим решением уравнения, полученного в параксиальном приближении. Амплитуда такого луча максимальна в его центре и экспоненциально убывают при удалении от оптической оси, вдоль которой и двигается данный пучок.

Стоит отметить, что гауссов пучок описывается экспонентой с отрицательным показателем степени. Не только в математике, но и в механике и физике описывается подобными функциями. Уже упоминавшийся ранее Пуанкаре как-то заметил с сарказмом, что все верят в универсальность нормального распределения: физики верят, потому что думают, что математики доказали его логическую необходимость, а математики верят, так как считают, что физики проверили это лабораторными экспериментами [10]. Действительно, в рассматриваемом случае гауссов пучок – действительно существующий вид пучков, в отличии, например, от пучков Бесселя [19], который тоже описывается параболическим уравнением и который невозможно в точности создать в реальном мире так как для его создание потребовало бы бесконечное количество энергии, но он достаточно хорошо аппроксимирует существующие лучи, и такое представление удобно и важно в различных оптических приложениях.

Немаловажно помнить, что ранее говорилось о том, гауссов пучок – одно из простейших решений для параксиального приближение волнового уравнения. Но такому уравнению будут удовлетворять и более общее решения, называемые пучками Гаусса высших порядков. У них более сложный вид амплитуды, который определяется полиномами Гаусса-Эрмита. Кроме этого, стоит упомянуть другие виды пучков, например, рассматриваемых в [4]: эллиптические и вращающиеся.

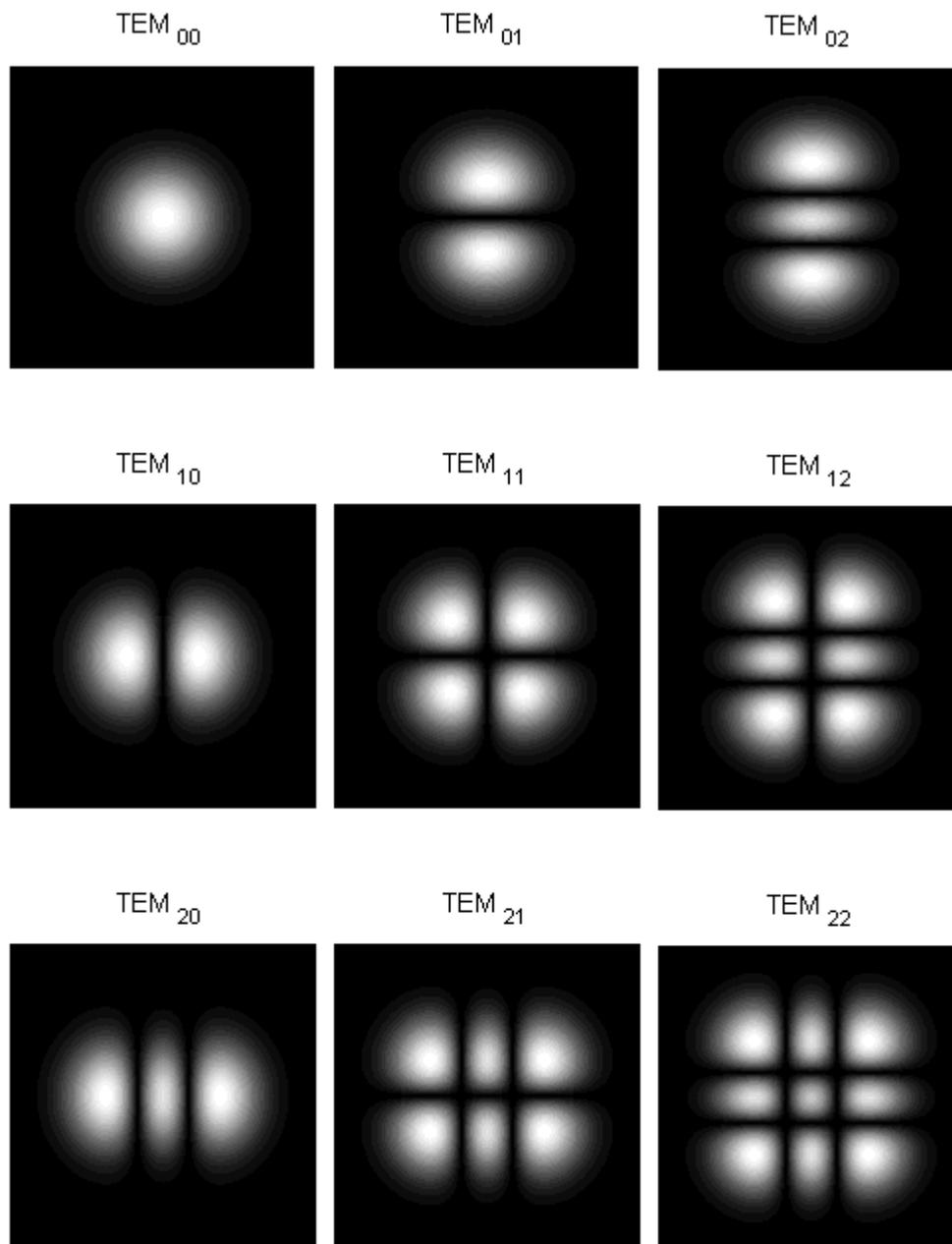


Рисунок В.1 – Первые девять эрмитово-гауссовых мод гауссова пучка.

Примеры эрмитово-гауссовых мод можно видеть на рисунке В.1, взятом в [25]. Подписи вверху показывают степень полинома Эрмита, описывающего амплитуду, по двум перпендикулярным направлениям. Отметим, что полученные моды являются симметричными относительно замены координат с точностью до поворота.

Отметим, что основное применение теория пучков Гаусса нашла в различных приложениях лазерной оптики – в частности, в описании принципов работы лазеров и в оптических манипуляциях с микрообъектами.

В ряде задач рассматривается не только волновое уравнение, но и уравнение Софи Жермен, используемое для описания тонких пластин и уравнение динамики балки Бернулли–Эйлера. В таких средах пучки ведут себя иначе.

В таких средах одно из решений – параболические пучки. Они имеют такое название, поскольку двигаются не прямолинейно, а по баллистической траектории – то есть параболе – даже в изотропном пространстве. Параболические пучки приобрели популярность в последнее время, потому что в конце XX – начале XXI века был ряд работ, где подробно исследовались свойства и особенности пучков Эйри [20, 23] – частного случая параболических пучков. Отличительная особенность лучей Эйри в том, что они не расплываются, двигаясь в пространстве.

Основная проблема синтеза и наблюдения таких пучков заключается в том, что данный луч, не будучи модулированным, имеет бесконечную энергию и, следовательно, не может быть получен экспериментально. Но в 2007 году ученым из Университета Центральной Флориды удалось экспериментально наблюдать модулированный пучок Эйри. С другой стороны, пучки Эйри имеют свои преимущества. Главное из них – относительная простота теоретических выкладок.

Пучки Эйри имеют и практическое приложение. В первую очередь, как и пучки Гаусса, они могут быть использованы для создания оптических манипуляторов. К другому перспективному применению таких пучков относят биомедицину и использование их в оптической томографии и микроскопии.

С другой стороны, можно рассмотреть аналогию движения возмущения в среде, описываемой уравнением Софи Жермен, и распространением параболического пучка.

Отчасти, это возможно в силу того, что уравнение движения тонкой пластины и даже уравнение движения балки Бернулли–Эйлера в некотором смысле аналогичны уравнению Шредингера. Стоит отметить, что данные уравнение описывают разные физические процессы и их нельзя так однозначно называть эквивалентными. Со стороны энергетической динамики зачастую используется рассмотрение движения центра возмущения с помощью первого момента энергии и потока энергии и расплывание волнового пакета с помощью второго момента энергии и суперпотока энергии. Со стороны пучков часто пренебрегают рассмотрением движения центра возмущения и рассматривают только расплывание такие лучей.

Объектом исследования данной выпускной квалификационной работы являются различные упругие среды: изотропные волновод тонкая упругая пластина и балка Бернулли–Эйлера. Предметом исследования является пучки Гаусса в параксиальном приближении волнового уравнения и параболические пучки, в частности пучки Эйри.

Цель выпускной квалификационной работы состоит в исследовании распространения волн в указанных средах и распространения различных оптических лучей.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Вывести уравнения движения для каждой среды и дисперсионные соотношения и проанализировать полученные результаты;
2. Для волнового уравнения рассмотреть параксиальное приближение в стационарном и нестационарном случае, для них вывести решение в виде пучка Гаусса, описать его основные характеристики и особенности;
3. Вывести решение для волнового уравнения с учетом пучка Гаусса;

4. Рассмотреть параболический пучок как решение уравнения Шредингера и уравнения Софи Жермен;
5. Исследовать пучок Эйри как решение одномерного уравнения Шредингера и схожего по типу уравнения движения балки Бернулли–Эйлера.

Сформулированные цель и задачи сформировали структуру и содержание данной выпускной квалификационной работы. Она состоит из введения, двух глав и заключения. В первой главе рассматривается волновое уравнение, его параксиальное приближение и пучок Гаусса. Во второй главе рассматривается уравнение Софи Жермен и параболические пучки.

ГЛАВА 1. ПАРАКСИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

В первой главе рассматривается параксиальное приближение волнового уравнения для изотропной однородной среды, а также подробно рассматривается одно из решений – пучок Гаусса.

1.1. Уравнения движения

Рассмотрим классическое многомерное волновое уравнение для изотропной однородной среды:

$$\rho \ddot{u} = C \nabla^2 u, \quad (1.1)$$

где ρ – плотность, C – жесткость, ∇ – набла-оператор, u – перемещение. Точкой обозначена производная по времени.

Вычислим дисперсионное соотношение для уравнения (1.1) с помощью подстановки

$$u = A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (1.2)$$

где A – амплитуда, i – мнимая единица, \mathbf{k} – волновой вектор, \mathbf{r} – радиус-вектор, ω – частота, t – время. Отметим, что здесь и далее жирным начертанием отмечаются векторные и тензорные величины, за исключение набла-оператора. Заметим, что перемещения должны быть вещественными, а правая часть формулы (1.2) является комплексным числом. Поэтому в действительность поле перемещений описывается вещественной частью (1.2), а само представление в такой форме удобно для построения выкладок и взятия производной. Тогда, подставляя (1.2) в (1.1), получим дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = c^2 \mathbf{k}^2, \quad (1.3)$$

где c – скорость звука в среде, которая определяется формулой:

$$c = \sqrt{\frac{C}{\rho}}. \quad (1.4)$$

Таким образом, уравнение (1.1) характеризует среду без дисперсии, а формула (1.3) показывает связь частоты и волнового числа в такой среде. Отметим, что у такой среды отсутствует частота отсечки, а значит в ней могут распространяться волны любых частот.

1.2. Построение параксиального приближения

Параксиальным приближением в области геометрической оптики принято называть рассмотрение лучей, которые идут под малым углом к главной оптической оси. В таком случае в волновой среде будем называть параксиальным приближение такое, где возмущение слабо расплывается при движении вдоль направления волнового вектора.

Для получения параксиального приближения будем рассматривать многомерную волновую упругую среду, рассмотренную ранее в параграфе 1.1. Уравнения динамики такой среды имеют вид (1.1). Рассмотрим подстановку в виде:

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \alpha)), \quad (1.5)$$

где α – фазовый сдвиг. В отличие от подстановки (1.2) здесь A – комплексная функция, которая слабо меняется с ростом x – координаты вдоль волнового вектора. Выполним подстановку (1.5) в уравнение (1.1), тогда оно примет вид

$$-A\omega^2 = c^2(\nabla^2 A + 2i\nabla A \cdot \mathbf{k} - A\mathbf{k}^2), \quad (1.6)$$

где слагаемое слева и последнее слагаемое справа взаимно уничтожаются в силу дисперсионного соотношения (1.3). Тогда уравнение принимает вид:

$$\nabla^2 A + 2i\nabla A \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (1.7)$$

Представим радиус-вектор в виде суммы двух компонент:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_k + \mathbf{r}_\perp. \quad (1.8)$$

Соответственно, для набла-оператора можно ввести следующие соотношения:

$$\nabla = \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_{\perp} = \nabla_{\parallel} + \nabla_{\perp}. \quad (1.9)$$

И для его квадрата – лапласиана – верно следующее

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nabla_{\perp}^2 = \nabla_{\parallel}^2 + \nabla_{\perp}^2. \quad (1.10)$$

В силу того, что A – слабо меняется вдоль x , то справедливо соотношение

$$|\nabla_{\parallel}^2 A| \ll |\nabla A \cdot \mathbf{k}|, \quad (1.11)$$

где вертикальными скобками обозначен модуль вектора.

Тогда уравнение (1.7) принимает вид:

$$\nabla_{\perp}^2 A + 2i \nabla A \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (1.12)$$

Заметим, что полученное уравнение является параболическим, а исходное уравнение (1.1) – гиперболическое. Таким образом, с помощью приведенных выкладок можно построить переход от одного вида уравнения к другому.

Введем дополнительные обозначения для бегущей переменной ξ :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \omega t \mathbf{e}_k) = \mathbf{k} \cdot \xi, \quad (1.13)$$

где

$$\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (1.14)$$

– направление волнового вектора.

1.3. Волновой пакет и начальная задача

Рассмотрим волновой пакет в следующем виде:

$$U(t, x, \mathbf{r}_{\perp}) = A \exp\left(-\frac{\xi^2 + \mathbf{r}_{\perp}^2}{\sigma^2}\right) \cos(\mathbf{k} \cdot \xi + \alpha), \quad (1.15)$$

где A – масштаб функции, то есть максимальная амплитуда, σ – масштаб аргумента, ξ – бегущая переменная вдоль x .

Рассмотрим начальные условия для уравнения (1.1) в следующем виде:

$$u|_{t=0} = U(0, x, \mathbf{r}_\perp), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial U(t, x, \mathbf{r}_\perp)}{\partial t} \right|_{t=0}. \quad (1.16)$$

Тогда подстановка выражения волнового пакета в выражения для начальных условий дает

$$u|_{t=0} = A \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{\sigma^2}\right) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha), \quad (1.17)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = A c k \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{\sigma^2}\right) \left(\frac{2x}{k\sigma^2} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) + \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha) \right).$$

1.4. Переход к многомерному уравнению Шредингера

Представим выражение для волнового пакета в следующем виде:

$$U(t, \xi, \mathbf{r}_\perp) = \Re \left(A \exp \left(-\frac{\xi^2 + \mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2} + i(\mathbf{k} \cdot \xi + \alpha) \right) \right), \quad (1.18)$$

где символом \Re обозначено взятие действительной части выражения, стоящего в скобках.

Рассмотрим волновое уравнение в комплексной форме:

$$\ddot{w} = c^2 \nabla^2 w, \quad (1.19)$$

где выполним подстановку

$$w = \psi \exp(i\mathbf{k} \cdot \xi) : u = \Re(w). \quad (1.20)$$

где ψ – комплексная амплитуда.

Выведем все необходимые производные. Отметим, что представим отдельно производные вдоль x и вдоль \mathbf{r}_\perp

$$\begin{aligned}
\dot{w} &= (\dot{\psi} - ick\psi) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}), \\
\ddot{w} &= (\ddot{\psi} - 2ick\dot{\psi} - c^2k^2\psi) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}), \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + ik\psi \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}), \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 2ik\psi - k^2\psi \right) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}), \\
\nabla_{\perp} w &= (\nabla_{\perp} \psi) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}), \\
\nabla_{\perp}^2 w &= (\nabla_{\perp}^2 \psi) \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}).
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Тогда (1.19) с учетом выведенных производных и введенного обозначения лапласиана (1.10) имеет вид, а также подстановки (1.20):

$$\ddot{\psi} - 2ick\dot{\psi} = c^2(\nabla^2\psi + 2i\mathbf{k} \cdot \nabla_{\parallel}\psi). \tag{1.22}$$

Выполним замену переменных:

$$t = \tau, \quad x = ct + \xi \leftrightarrow \tau = t, \quad \xi = x - ct. \tag{1.23}$$

где ξ – длина вектора $\boldsymbol{\xi}$.

Общий вид преобразования производных:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Подставляя представления (1.23) получим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} - c \frac{\partial}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Тогда верно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \tag{1.26}$$

Вычислим вторую производную по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - c \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2c \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \xi} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}. \quad (1.27)$$

Вычислим производные в (1.22) для перехода в новые координаты по времени:

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - 2c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} + c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}, \\ -2ick\dot{\psi} &= -2ick \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} - c \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (1.28)$$

и по пространству

$$\begin{aligned} c^2 \nabla_{\parallel}^2 \psi &= c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}, \\ 2ick^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 2ick^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Таким образом, с учетом всех преобразований и приведения подобных слагаемых уравнение (1.22) в новых координатах имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} - 2c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} - 2ick \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = c^2 \nabla_{\perp}^2 \psi. \quad (1.30)$$

Выполним оценку слагаемых в последнем уравнении. Рассмотрим решение вида:

$$\Psi = A \exp \left(-\frac{\xi^2 + y^2}{\sigma^2} + i\alpha \right). \quad (1.31)$$

Вычислим производные по координатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} &= -\frac{2\xi}{\sigma^2} \Psi, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= -\frac{2y}{\sigma^2} \Psi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Положим следующие порядки координат:

$$\xi \cong y \cong \sigma, \quad (1.33)$$

где символ \cong означает, что величины слева и справа от него одного порядка.

Тогда:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \cong \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cong \frac{\Psi}{\sigma}. \quad (1.34)$$

Будем считать, что данные оценки будут справедливы и для ψ . Заметим, что рассматриваемая функция Ψ не зависит от времени, тогда будем считать, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \cong ck\psi\tilde{\varepsilon}, \quad (1.35)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ – некоторый безразмерный малый параметр $\tilde{\varepsilon} \ll 1$.

Рассмотрим уравнение (1.30). Для него будут справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &\cong (ck)^2 \psi \tilde{\varepsilon}^2, \\ 2c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} &\cong \frac{c^2 k}{\sigma} \psi \tilde{\varepsilon}, \\ 2ick \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &\cong (ck)^2 \psi \tilde{\varepsilon}, \\ c^2 \nabla_{\perp}^2 \psi &\cong \frac{c^2}{\sigma^2} \psi. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Введем малый параметр ε как

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \ll 1, \quad (1.37)$$

где N – число длин волн, укладываемых в диаметр 2σ

$$N = \frac{2\sigma}{\lambda}, \quad (1.38)$$

где λ – длина волны. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$k\sigma = \frac{\pi}{\varepsilon} \gg 1. \quad (1.39)$$

Рассмотрим коэффициенты в оценках (1.36)

$$\begin{aligned}
& (ck)^2, \\
\frac{c^2 k}{\sigma} &= \frac{(ck)^2}{k\sigma} = \frac{1}{\pi} (ck)^2 \varepsilon, \\
\frac{c^2}{\sigma^2} &= \frac{(ck)^2}{(k\sigma)^2} = \frac{1}{\pi^2} (ck)^2 \varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Тогда оценки (1.36) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &\cong (ck)^2 \tilde{\varepsilon}^2 \psi, \\
2c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} &\cong \frac{1}{\pi} (ck)^2 \varepsilon \tilde{\varepsilon} \psi, \\
2ick \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &\cong (ck)^2 \tilde{\varepsilon} \psi, \\
c^2 \nabla_{\perp}^2 \psi &\cong \frac{1}{\pi^2} (ck)^2 \varepsilon^2 \psi.
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Следовательно, первые два слагаемых малы по сравнению с третьим, с другой стороны, тогда третье слагаемое должно иметь тот же порядок, что и четвертое, следовательно получаем зависимость двух малых параметров друг от друга:

$$\varepsilon^2 \cong \tilde{\varepsilon}, \tag{1.42}$$

а значит окончательно оценки (1.41) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &\cong (ck)^2 \psi \varepsilon^4, \\
2c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau \partial \xi} &\cong \frac{1}{\pi} (ck)^2 \psi \varepsilon^3, \\
2ick \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &\cong (ck)^2 \psi \varepsilon^2, \\
c^2 \nabla_{\perp}^2 \psi &\cong \frac{1}{\pi^2} (ck)^2 \varepsilon^2 \psi.
\end{aligned} \tag{1.43}$$

Вспоминая высказывание Леонарда Эйлера «тем, кто спрашивает, что такое бесконечно малая величина в математике, мы отвечаем, что на самом деле

она равна нулю» [14], отбросим слагаемые более высоких порядков малости, и таким образом, получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{ic}{2k} \nabla_{\perp}^2 \psi \quad (1.44)$$

– уравнение Шредингера. Заметим, что это уравнение аналогично (1.12) с точностью до замены размерной координаты на время. Кроме этого, полученное уравнение описывает движение ψ во всех направлениях, кроме того, что оно направлено с волновым вектором и не характеризует зависимость от ξ – координаты вдоль волнового вектора.

1.5. Гауссов пучок как решение уравнения Шредингера

Теперь, когда поставлены 2 задачи для параболических уравнений: (1.12) только в координатном виде и (1.44) в координатно-временном виде, займемся их решением. Рассмотрим решение уравнения (1.44) с начальным условием:

$$\psi|_{\tau=0} = A \exp\left(\frac{\xi^2 + \mathbf{r}_{\perp}^2}{\sigma^2} + i\alpha\right) \quad (1.45)$$

Решение будем искать в виде:

$$\psi = \exp(a(\tau)\mathbf{r}_{\perp}^2 + b(\tau)) \quad (1.46)$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \left(\frac{da(\tau)}{d\tau} \mathbf{r}_{\perp}^2 + \frac{db(\tau)}{d\tau}\right) \psi, \quad (1.47)$$

и по пространству:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \psi &= 2a\mathbf{r}_{\perp} \psi, \\ \nabla_{\perp}^2 \psi &= (2a(n-1) + 4a^2\mathbf{r}_{\perp}^2) \psi, \end{aligned} \quad (1.48)$$

где n – оригинальная размерность пространства, в которой определено уравнение (1.1). Тогда $(n-1)$ – размерность пространства, где определен наблюдаемый оператор ∇_{\perp} .

Подставим (1.47) и (1.48) в исходное уравнение (1.44):

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} r_{\perp}^2 + \frac{db(\tau)}{d\tau} = \frac{ica}{k} (2a^2 r_{\perp}^2 + (n-1)). \quad (1.49)$$

Приравнивая одинаковые коэффициенты при одинаковых степенях r_{\perp}^2 получаем систему дифференциальных уравнений относительно искомых функций:

$$\begin{aligned} \frac{da(\tau)}{d\tau} &= \frac{2ica^2}{k}, \\ \frac{db(\tau)}{d\tau} &= \frac{ica}{k} (n-1). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Преобразуем начальное условие (1.45) к виду для функций a и b .

$$\begin{aligned} \left. \frac{da(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= -\frac{1}{\sigma^2}, \\ \left. \frac{db(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= -\frac{\xi^2}{\sigma^2} + \ln A + i\alpha. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Уравнение (1.50.1) является уравнением с разделяющимися переменными, тогда его можно привести к виду

$$\frac{da}{a^2} = \frac{2ic}{k} d\tau, \quad (1.52)$$

и один раз проинтегрировать

$$-\frac{1}{a} = \frac{2ic}{k} \tau + C, \quad (1.53)$$

где C – константа интегрирования. Найдем ее из (1.51.1):

$$C = \sigma^2, \quad (1.54)$$

тогда решение принимает вид:

$$-\frac{1}{a} = \frac{2ic}{k} \tau + \sigma^2 \quad (1.55)$$

или

$$a = -\left(\frac{2ic}{k} \tau + \sigma^2\right)^{-1} = -\frac{1}{\sigma^2(1 + i\nu\tau)} \quad (1.56)$$

где введено обозначение ν – некоторая величина, имеющая размерность частоты, определяемая формулой

$$\nu = \frac{2c}{k\sigma^2}. \quad (1.57)$$

Теперь рассмотрим уравнение (1.50.2). Решение для a известно, следовательно, с учетом (1.57):

$$db = -\frac{n-1}{2} \frac{iv}{1+iv\tau} d\tau. \quad (1.58)$$

Один раз интегрируя полученное соотношение получаем:

$$b = -\frac{n-1}{2} \ln \frac{iv}{1+iv\tau} + D, \quad (1.59)$$

где D – константа интегрирования. Найдем ее из (1.51.2):

$$D = -\frac{\xi^2}{\sigma^2} + \ln A + i\alpha. \quad (1.60)$$

Таким образом:

$$\psi = \frac{A}{(1+iv\tau)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{r_{\perp}^2}{\sigma^2(1+iv\tau)} - \frac{\xi^2}{\sigma^2} + i\alpha\right). \quad (1.61)$$

Упрости данное представление, избавившись от мнимости знаменателя с помощью полярного представления комплексного числа:

$$1+iv\tau = \sqrt{1+\nu^2\tau^2} \exp(i\arctg(\nu\tau)) \quad (1.62)$$

тогда

$$\psi = \frac{A}{(1+\nu^2\tau^2)^{\frac{n-1}{4}}} \exp\left(-\frac{1-iv\tau}{1+\nu^2\tau^2} \frac{r_{\perp}^2}{\sigma^2} - \frac{\xi^2}{\sigma^2} - i\frac{n-1}{2} \arctg(\nu\tau) + i\alpha\right). \quad (1.63)$$

Таким образом, получено решение в виде пучка Гаусса для уравнения (1.44) с начальным условием (1.45).

1.6. Гауссов пучок как решение координатного параболического уравнения

В данном параграфе рассмотрим решение уравнения (1.12). Для него сформулируем условие в следующем виде:

$$A|_{x=0} = A_0 \exp\left(\frac{r_{\perp}^2}{\sigma^2} + i\alpha\right), \quad (1.64)$$

где A_0 – начальное значение амплитуды.

Аналогичным образом, будем искать решение в виде:

$$A = \exp(a(\xi)r_{\perp}^2 + b(\xi)). \quad (1.65)$$

Тогда решение задачи (1.12) при условии (1.64) сводится к решению системы

$$\begin{aligned} \frac{da(\xi)}{d\xi} &= \frac{2ia^2}{k}, \\ \frac{db(\xi)}{d\xi} &= \frac{ia}{k}(n-1). \end{aligned} \quad (1.66)$$

При следующих условиях

$$\begin{aligned} \left. \frac{da(\tau)}{d\tau} \right|_{\xi=0} &= -\frac{1}{\sigma^2}, \\ \left. \frac{db(\tau)}{d\tau} \right|_{\xi=0} &= \ln A_0 + i\alpha. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Метод решения аналогичной задачи (1.50)—(1.51) приведен в предыдущем параграфе, поэтому перейдем сразу к решению:

$$\begin{aligned} a(\xi) &= -\frac{1}{\sigma^2(1 + ik\xi)}, \\ b(\xi) &= -\frac{n-1}{2} \ln(1 + ik\xi) + \ln A_0 + i\alpha. \end{aligned} \quad (1.68)$$

где введено обозначение для пространственной частоты

$$\kappa = \frac{2c}{k\sigma^2}. \quad (1.69)$$

Таким образом решение (1.65) принимает вид:

$$A = \frac{A_0}{(1 + ik\xi)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{r_{\perp}^2}{\sigma^2(1 + ik\xi)} + i\alpha\right), \quad (1.70)$$

или в более простом виде

$$A = \frac{A_0}{(1 + \kappa^2 \xi^2)^{\frac{n-1}{4}}} \exp\left(-\frac{1 - ik\xi}{1 + \kappa^2 \xi^2} \frac{r_{\perp}^2}{\sigma^2} - i \frac{n-1}{2} \arctg(\kappa\xi) + i\alpha\right). \quad (1.71)$$

1.7. Сравнение с известными решениями

Проверим полученное решение (1.71) для многомерной среды с уже известными ранее решениями. В частности, известны решения для двумерной и трехмерной среды.

В работе [18] рассматривается двумерная постановка задачи и предложено решение в виде

$$A = \sqrt{\frac{w_0}{w(x)}} \exp\left(-\frac{y^2}{w^2(x)} - \frac{iky^2}{2R(x)} + \frac{i}{2} \arctg\left(\frac{x}{x_R}\right)\right), \quad (1.72)$$

где

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{x_R}\right)^2}, \quad (1.73)$$

$$R(x) = \frac{x^2 + x_R^2}{x}, \quad (1.74)$$

$$x_R = \frac{kw_0^2}{2}. \quad (1.75)$$

И введены обозначения x – осевое расстояние от фокуса луча, y – расстояние от центральной оси пучка, $w(x)$ – ширина пучка, w_0 – ширина пучка при $x = 0$ или перетяжка, $R(x)$ – радиус кривизны.

Для сравнения положим в формуле (1.71) $n = 2$, а также положим следующее соотношение:

$$w_0 = \sigma \Rightarrow x_R = \frac{k\sigma^2}{2} = \frac{1}{\kappa}. \quad (1.76)$$

Тогда соотношения (1.73)—(1.74) будут иметь вид:

$$w(x) = \sigma\sqrt{1 + \kappa^2 x^2}, \quad (1.77)$$

$$R(x) = \frac{1 + \kappa^2 x^2}{\kappa^2 x}, \quad (1.78)$$

Учтем тождество

$$\frac{k\kappa^2}{2} = \frac{2}{\sigma^2 \kappa} \frac{\kappa^2}{2} = \frac{\kappa}{\sigma^2}, \quad (1.79)$$

и подставим полученные выражения в (1.72)

$$A = \frac{1}{(1 + \kappa^2 x^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2(1 + \kappa^2 x^2)} - \frac{ikxy^2}{\sigma^2(1 + \kappa^2 x^2)} + \frac{i}{2} \operatorname{arctg}(\kappa x)\right). \quad (1.80)$$

А в формуле (1.71) положим

$$A_0 = 1, \quad \alpha = 0, \quad n = 2, \quad r_1^2 = y^2, \quad (1.81)$$

а также выполним замену переменной

$$\xi = -x, \quad (1.82)$$

получим выражение

Сравнивая выражения (1.80) и (1.83), приходим к выводу, что представление, выведенное для пучка Гаусса в предыдущем параграфе, согласуется с представлением для двумерного пучка.

Теперь сравним полученную формулу с трехмерным пучком. Для него предлагается следующая форма решения:

$$A = \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} - \frac{ik}{2R(z)}(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_R}\right)\right), \quad (1.84)$$

где

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \quad (1.85)$$

$$R(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z}, \quad (1.86)$$

$$z_R = \frac{kw_0^2}{2}. \quad (1.87)$$

И введены обозначения z – осевое расстояние от фокуса луча, $x^2 + y^2$ – квадрат расстояния от центральной оси пучка, $w(z)$ – радиус светового пятна, w_0 – радиус светового пятна при $z = 0$, $R(z)$ – радиус кривизны.

Вид такого пучка представлен на рисунке 1.1, взятого в работе [26].

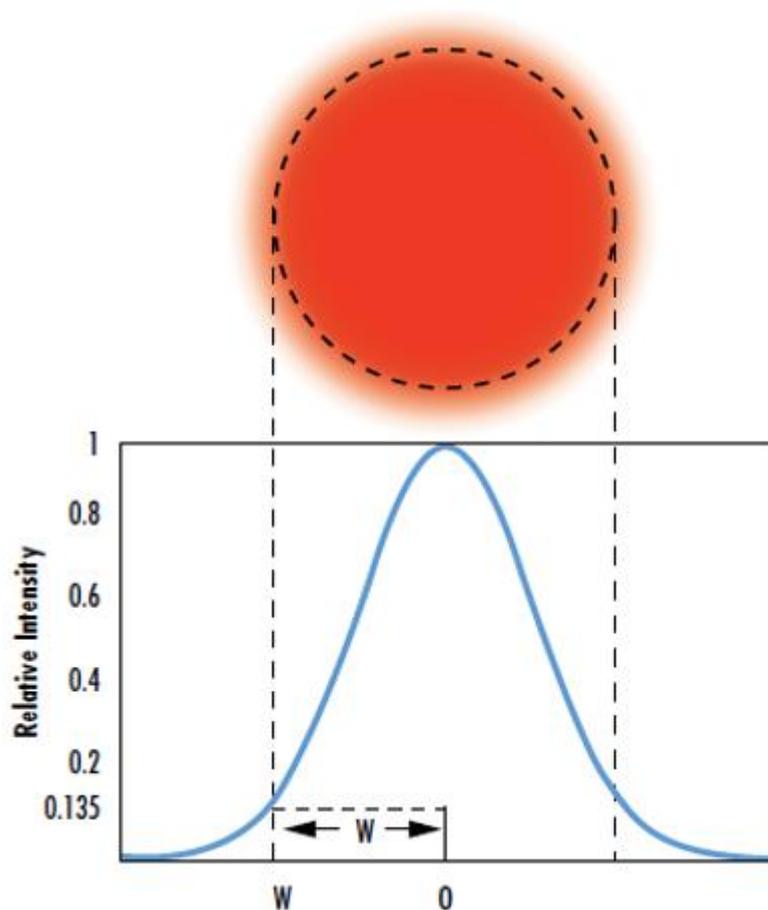


Рисунок 1.1 – Пучок Гаусса

Поговорим о расходимости пучка. При достаточном большом $z \gg z_R$, можно считать, что «край» пучка имеет вид конуса, а параметр $w(z)$

увеличивается линейно в силу того, что общий вид $w(z)$ – гипербола. Тогда угол между таким конусом и осью пучка определяет расходимость

$$\theta = \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{w(z)}{z} \right) \approx \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad (1.88)$$

а общий угловой разброс вычисляется как

$$\Theta = 2\theta. \quad (1.89)$$

Параметры, введенные для такого пучка описаны на рисунке 1.2, взятого по ссылке [25].

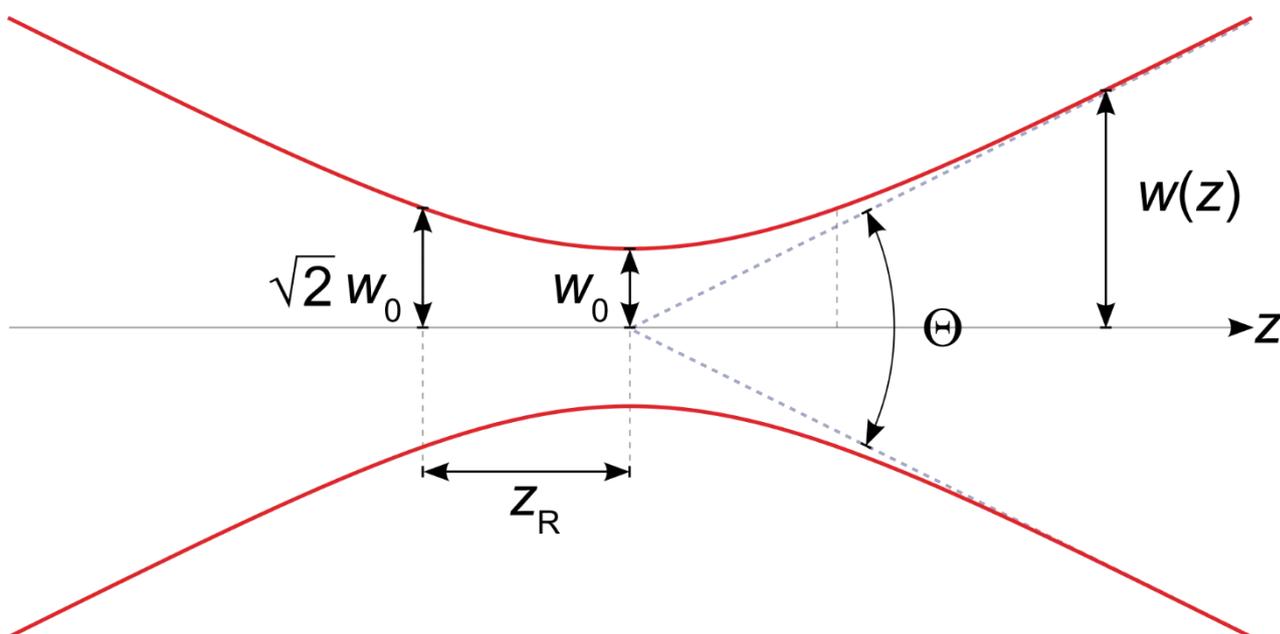


Рисунок 1.2 – Параметры гауссова пучка

Для сравнения положим в формуле (1.71) $n = 3$, а также положим следующее соотношение:

$$w_0 = \sigma \Rightarrow z_R = \frac{k\sigma^2}{2} = \frac{1}{\kappa}. \quad (1.90)$$

Тогда соотношения (1.85)—(1.86) будут иметь вид, аналогичный соотношениям (1.77)—(1.78). Следовательно, выражение (1.84) принимает следующий вид:

$$A = \frac{1}{(1 + \kappa^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2(1 + \kappa^2 z^2)} - \frac{i\kappa z(x^2 + y^2)}{\sigma^2(1 + \kappa^2 z^2)} + i \arctg(\kappa z)\right) \quad (1.91)$$

В формуле (1.71) положим

$$A_0 = 1, \quad \alpha = 0, \quad n = 3, \quad \mathbf{r}_\perp^2 = x^2 + y^2, \quad (1.92)$$

а также выполним замену переменной

$$\xi = z, \quad (1.93)$$

Получим выражение

$$A = \frac{1}{(1 + \kappa^2 z^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1 + i\kappa z}{1 + \kappa^2 z^2} \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} + i \arctg(\kappa z)\right). \quad (1.94)$$

Сравнивая выражения (1.91) и (1.94), приходим к выводу, что представление, выведенное для пучка Гаусса в предыдущем параграфе, согласуется с представлением для трехмерного пучка.

Таким образом, можно сказать, что полученная формула (1.71) обобщает решения (1.72) и (1.84) на многомерный случай.

1.8. Решение волнового уравнения для координатного параболического уравнения

В параграфе 1.6 было получено решение координатного параболического уравнения в виде гауссова пучка (1.71), а в параграфе 1.7 показано, что это решение является обобщением уже известных результатов.

Тогда обратим к решению волнового уравнения, поставленного в параграфах 1.2 и 1.3. Видно, что амплитуда, полученная в формуле (1.71), является функцией от бегущей переменной ξ и поперечного радиус-вектора \mathbf{r}_\perp . Тогда решение волнового уравнения (1.1) в виде

$$u = \Re(A(\xi, \mathbf{r}_\perp) \exp(-i\omega t)). \quad (1.95)$$

Следовательно, из этого представления и (1.71) получаем решение для волнового уравнения:

$$u = \frac{A_0}{(1 + \kappa^2 \xi^2)^{\frac{n-1}{4}}} \exp\left(-\frac{1}{1 + \kappa^2 \xi^2} \frac{r_{\perp}^2}{\sigma^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\kappa \xi}{1 + \kappa^2 \xi^2} \frac{r_{\perp}^2}{\sigma^2} - \omega t - \frac{n-1}{2} \arctg(\kappa \xi) + \alpha\right). \quad (1.96)$$

Заметим, что в полученном представлении мы отдельно выделили экспоненту с вещественным и мнимым показателями, преобразовав последнюю в косинус по формуле Эйлера:

$$\exp z = \cos z + i \sin z, \quad (1.97)$$

а после взяв вещественную часть в силу (1.95).

Таким образом, построено решение уравнения (1.1) с изменением амплитуды как пучка Гаусса.

1.9. Решение волнового уравнения для уравнения Шредингера

В параграфе 1.5 получено решение в виде пучка Гаусса (1.63) для уравнения Шредингера. Заменой переменных в параграфе 1.6 $x = ct$, можно получить одинаковые уравнения с задачей в 1.5. Таким образом, результаты в параграфе 1.7 можно обобщить и на уравнение Шредингера.

Такую замену можно рассматривать как движение в системе отсчета, связанной с пучком, движущейся со скоростью c в направлении x . Сечение пучка в координатном уравнении, перпендикулярное распространению волны, будет изменяться также, как изменяется возмущение в уравнении Шредингера, как изменяется аналогичное сечение возмущения,двигающегося в том же направлении.

Тогда решение волнового уравнения, с параксиальным приближением в виде уравнения Шредингера будет иметь вид с учетом выделения вещественной и мнимой части экспоненты:

$$u = \frac{A_0}{(1 + v^2 t^2)^{\frac{n-1}{4}}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\sigma^2} - \frac{1}{1 + v^2 t^2} \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2}\right) \cdot \cos\left(k\xi + \frac{vt}{1 + v^2 t^2} \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{\sigma^2} - \frac{n-1}{2} \arctg(vt) + \alpha\right). \quad (1.98)$$

1.10. Заключение к главе 1

В данной главе рассматривается классическое волновое уравнение для упругой многомерной изотропной среды. Для такого уравнения выведено параксиальное приближение в двух видах.

В обоих случаях строится в простейшем случае – в виде пучка Гаусса, свойства которого были описаны в данной главе. Также рассмотрены некоторые его характеристики, например радиус кривизны огибающей, общий угловой разброс и радиус светового пятна.

В первом случае рассматривается координатное или стационарное приближение, где отсутствует зависимость от времени. В данном случае было получено общее решение для n -мерного уравнения, а также проверена правильность решения в сравнении с двумерным и трехмерным случаем. После чего выведено решение оригинального волнового уравнения.

Во втором случае рассматривается нестационарное уравнение, которое имеет вид уравнения Шредингера. В данном случае также выводится результат для многомерного уравнения, и показывается замена переменной перехода от стационарного к нестационарному случаю.

Стоит отметить, что в отличие от волнового уравнения, которое является гиперболическим, оба полученных приближения являются параболическими дифференциальными уравнениями.

ГЛАВА 2. ПАРАКСИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СОФИ ЖЕРМЕН

Во второй главе рассматривается уравнение Софи Жермен, которое описывает малый прогиб тонкой изотропной упругой пластины. Для него выводится параксиальное приближение и строятся решения полученного уравнения в виде параболического пучка. Кроме этого, рассматривается более простой случай – уравнение балки Бернулли–Эйлера, где рассматривается решение в виде пучка Эйри.

2.1. Уравнения движения

Рассмотрим уравнение движения для тонкой изотропной упругой пластины в отсутствии внешних нагрузок:

$$D\Delta\Delta u + \rho\ddot{u} = 0, \quad (2.1)$$

где ρ – плотность, D – жесткость при изгибе, u – прогиб, точкой обозначена производная по времени, а символом Δ – лапласиан. В отсутствии зависимости от времени данное уравнение также известно как бигармоническое уравнение.

Данное уравнение носит имя Софи Жермен. В 1811 году она принимала участие в конкурсе, который был объявлен Парижской Академией наук на тему происхождения фигур Хладни, которая является частью теории упругих колебаний. Стоит отметить, что в жюри этого конкурса были такие великие ученые как Адриен Мари Лежандр, Пьер-Симон Лаплас и Симеон Дени Пуассон. В том же году Софи Жермен оказалась единственным участником конкурса, но она не смогла его выиграть, поскольку не сумела вывести свою гипотезу из физических принципов.

Но ее доклад не прошел зря и Лагранж, основываясь на ее трудах, исправил ошибки Жермен и вывел уравнение (2.1), которое могло описывать фигуры Хладни. В действительности это доказала Жермен, продемонстрировав, что уравнение (2.1) описывает фигуры Хладни в некоторых простых случаях. Но она

не смогла вывести уравнение движение из законов механики, поэтому вместо победы в конкурсе она удостоилась похвальной грамоты ученых первого класса. Поскольку участников больше не было, то приз было решено не присуждать никому.

Стоит отметить, что изначально данное уравнение рассматривалось в декартовых координатах для прямоугольных пластин. Поэтому далее тоже будет рассматриваться декартова система координат, а произведение лапласианов раскрываться как

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (2.2)$$

2.2. Дисперсионное соотношение

Для дальнейшего исследования выведем дисперсионное соотношение для уравнения (2.1) с учетом (2.2). Решение такого уравнения представимо в виде плоской волны:

$$u = A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)), \quad (2.3)$$

где A – амплитуда волны, \mathbf{k} – волновой вектор, \mathbf{r} – радиус-вектор, ω – частота колебаний. Стоит отметить, как уже говорилось в первой главе, перемещения должны быть вещественными, а в уравнении (2.3) правая часть – комплексная функция, поэтому необходимо будет взять вещественную часть.

Подставляя решение (2.3) в уравнение (2.1) с учетом (2.2), получается переход от дифференциального уравнения в частных производных к алгебраическому, что дает дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 = b^2 \mathbf{k}^4, \quad (2.4)$$

где введено обозначение

$$b^2 = \frac{D}{\rho}, \quad (2.5)$$

Дисперсионное соотношение характеризует связь между частотой колебания и волновым вектором, определяя характеристики волн, которые распространяются в такой среде.

Дисперсионное соотношение (2.4) изображено на рисунке 2.1 для $b = 1$ и для $k \in [0; 10]$.

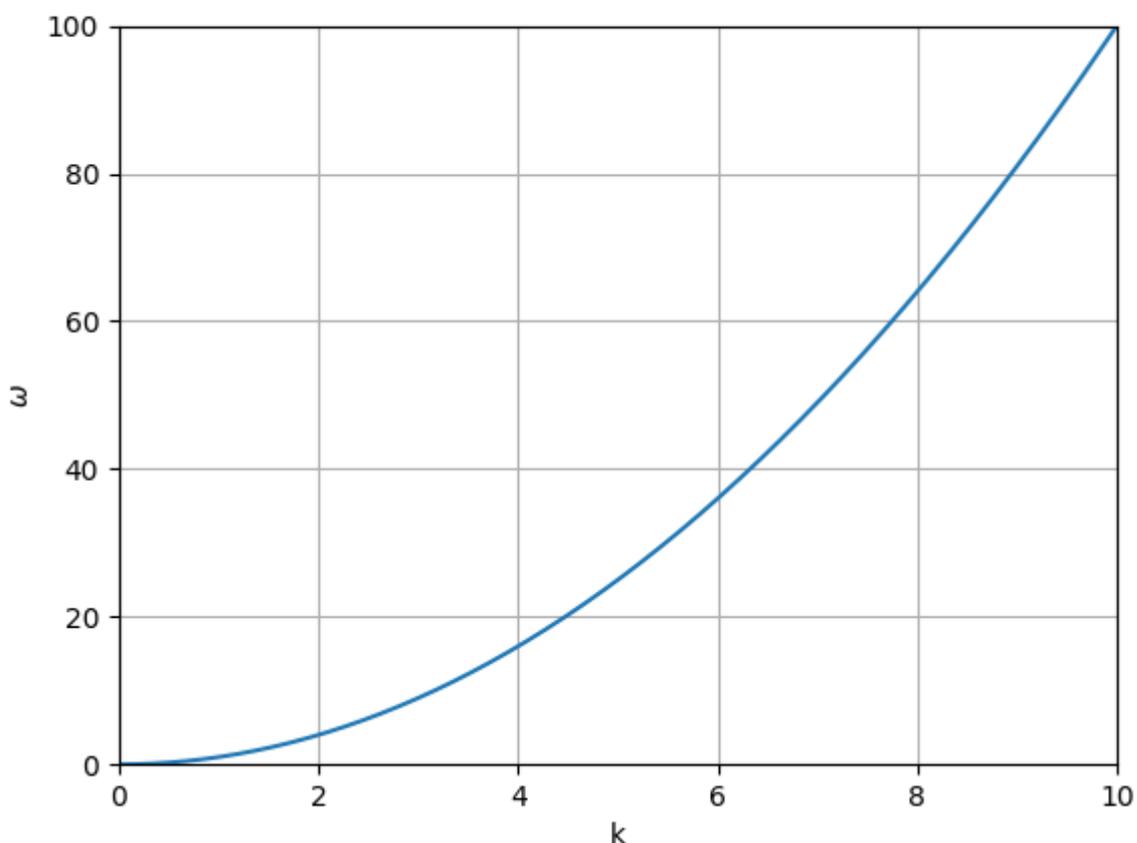


Рисунок 2.1 – Дисперсионное соотношение для уравнения Софи Жермен

2.3. Параксиальное приближение

О том, что такое параксиальное приближение уже рассказывалось во втором параграфе первой главы. Для построения параксиального приближения рассмотрим подстановку в виде:

$$u = \varphi(x, y) \exp(ikx) \exp(-i\omega t), \quad (2.6)$$

где φ – некоторая амплитуда, которая зависит от координат.

Вычислим производные, необходимые для подстановки в (2.1) с помощью формулы Лейбница

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad (2.7)$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.8)$$

– биномиальные коэффициенты.

Тогда производные имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 \varphi(x, y) \exp(ikx) \exp(-i\omega t), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + ik \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k^2 \varphi \right) \exp(ikx) \exp(-i\omega t), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + ik \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - k^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \exp(ikx) \exp(-i\omega t), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + ik \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} - k^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - ik^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^4 \varphi \right) \exp(ikx) \exp(-i\omega t), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \exp(ikx) \exp(-i\omega t). \quad (2.13)$$

Поскольку в такой нотации формулы становятся очень громоздкими, введем следующую короткую запись:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = f_\eta, \quad (2.14)$$

где f – некоторая функция многих переменных, а η – одна из переменных. Таким образом в правой части (2.14) стоит не индекс, а сокращенная запись производной.

Параксиальное приближение по [3] можно задать соотношением:

$$\varphi_{xx} \ll k\varphi_x, \quad (2.15)$$

но в тождествах (2.9)—(2.13) встречаются и другие производные, поэтому обобщим данное приближение с помощью дифференцирования:

$$\begin{aligned}\varphi_{xxx} &\ll k\varphi_{xx}, \\ \varphi_{xxy} &\ll k\varphi_{xy}, \\ \varphi_{xxyy} &\ll k\varphi_{xyy}, \\ \varphi_{xxxx} &\ll k\varphi_{xxx}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Подставляя тождества (2.9)—(2.13) с учетом (2.15)—(2.16) и учетом (2.4) в (2.1), получим:

$$\varphi_{yyyy} + 4ik\varphi_{xyy} - 2k^2\varphi_{yy} - 4ik^3\varphi_x = 0,\tag{2.17}$$

что и будет являться парааксиальным приближением (2.1). Стоит отметить, что данное уравнение не было до конца исследовано, поскольку были получены только тривиальные решения. Уравнение (2.17) и его решение будут исследованы и развиты в следующих работах.

2.4. Переход к уравнениям Шредингера и начальные условия

Рассмотрим уравнение Софи Жермен (2.1) и выполним в нем разделение дифференциальных операторов как разность квадратов:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - ib\Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + ib\Delta\right)u = 0,\tag{2.18}$$

и обозначим

$$\psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + ib\Delta\right)u.\tag{2.19}$$

Тогда уравнение (2.1) можно представить в виде системы параболических дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial t} - ib\Delta\psi = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + ib\Delta u = \psi. \end{cases}\tag{2.20}$$

Уравнение (2.20.1) является однородным уравнением Шредингера, а уравнение (2.20.2) – неоднородным. Поэтому если мы решим (2.20.1) его, то автоматически удовлетворится исходное уравнение Софи Жермен.

Для решения (2.20.1) поставим начальные условия в виде:

$$\psi|_{t=0} = A_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right) \exp(ikx + i\varphi), \quad (2.21)$$

где φ – фаза. Таким образом нужно решить уравнение (2.20.1) при условии (2.21).

Отметим, что в отличие от уравнения Шредингера, рассмотренного в предыдущей главе, здесь в начальных условиях участвует $\exp(ikx)$, что отразится на решении поставленной задачи.

2.5. Решение уравнения Шредингера

Для решения поставленной задачи рассмотрим подстановку в виде

$$\psi = \exp(\alpha(t)(\xi^2 + y^2) + \beta(t)\xi + \gamma(t)). \quad (2.22)$$

Выпишем производные (2.22) по координатам и по времени:

$$\begin{aligned} \psi_t &= (\dot{\alpha}(x^2 + y^2) + \dot{\beta}x + \dot{\gamma}), \\ \psi_x &= (2\alpha\xi + \beta)\psi, \\ \psi_{xx} &= (2\alpha + 4\alpha^2\xi^2 + 4\alpha\beta\xi + \beta^2)\psi, \\ \psi_{yy} &= 2\alpha(1 + 2\alpha y^2)\psi. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тогда, подставляя (2.23) в уравнение Шредингера получаем, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 4ib\alpha^2, \\ \dot{\beta} = 4ib\alpha\beta + 2ac, \\ \dot{\gamma} = ib(4\alpha + \beta^2) + c\beta. \end{cases} \quad (2.24)$$

Преобразуем начальное условие (2.21) согласно (2.22), чтобы получить начальные условия для системы уравнений (2.24).

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= -\frac{1}{\sigma^2}, \\ \beta(0) &= ik, \\ \gamma(0) &= i\varphi + \ln A_0.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Решим полученную систему при данных начальных условиях. Относительно α система аналогична той, что решалась в предыдущей главе. Поэтому воспользуемся уже полученными ранее результатами

$$\alpha = -\frac{1}{\sigma^2(1 - 4ivt)},\tag{2.26}$$

где введено обозначение:

$$v = \frac{b}{\sigma^2},\tag{2.27}$$

что является некоторой величиной, которая имеет размерность частоты.

Для решения (2.24.2) воспользуемся полученной формулой (2.26). После подстановки и нескольких математических преобразований получается дифференциальное уравнение в виде

$$\dot{\beta} = -\frac{2c}{\sigma^2(1 - 4ivt)} \left(1 + \frac{2iv\sigma^2}{c} \beta \right),\tag{2.28}$$

которое решается с помощью разделения переменных и интегрирования. С учетом начального условия (2.25.2) искомая функция будет иметь вид

$$\beta = -\frac{ct}{2\sigma^2} + ik.\tag{2.29}$$

Чтобы решить уравнение (2.24.3) при условии (2.25.3) необходимо подставить (2.26) и (2.29). После подстановки и приведения подобных слагаемых получается следующее дифференциальное уравнение

$$\dot{\gamma} = -\frac{4iv}{1 - 4ivt} + i\frac{c^2v}{2\sigma^2}t^2 - \left(\frac{bck}{\sigma^2} + \frac{c^2}{2\sigma^2} \right) t + ik(bk + c),\tag{2.30}$$

которое интегрируется один раз и с учетом

$$c = bk, \quad (2.31)$$

и начального условия (2.25.3) дает решение для последней неизвестной функции в виде

$$\gamma = \ln(1 - 4ivt) + i \frac{c^2 v}{6\sigma^2} t^3 - \frac{3c^2}{4\sigma^2} t^2 + 2ikct + i\varphi + \ln A_0. \quad (2.32)$$

Таким образом, подстановка найденных функций (2.26), (2.29) и (2.32) в формулу (2.22) дает решение для уравнения Шредингера с начальным условием в виде (2.21).

2.6. Анализ полученного решения. Параболические пучки

Полученное решение интересно в первую очередь тем, что оно будет содержать множитель вида

$$\exp\left(-\frac{3c^2}{4\sigma^2} t^2\right). \quad (2.33)$$

Пучки, которые содержат квадратичную зависимость от переменной, производная по которой в (2.20.1) первого порядка, то есть в данном случае времени, называются параболическими. Они сейчас приобрели большую популярность в силу того, что недавно смогли экспериментально синтезировать лучи Эйри, которые являются частным случаем параболического луча [24].

Полученное решение, тоже является частным случаем параболического пучка, что подтверждается в [24], где говорится о том, что в трехмерных параксиальных уравнениях возможны решения в таком виде. В нашем случае, также было построено решение как нулевая мода. Примеры нулевой моды и высших приведены на рисунке 2.2, который был взят в работе [21].

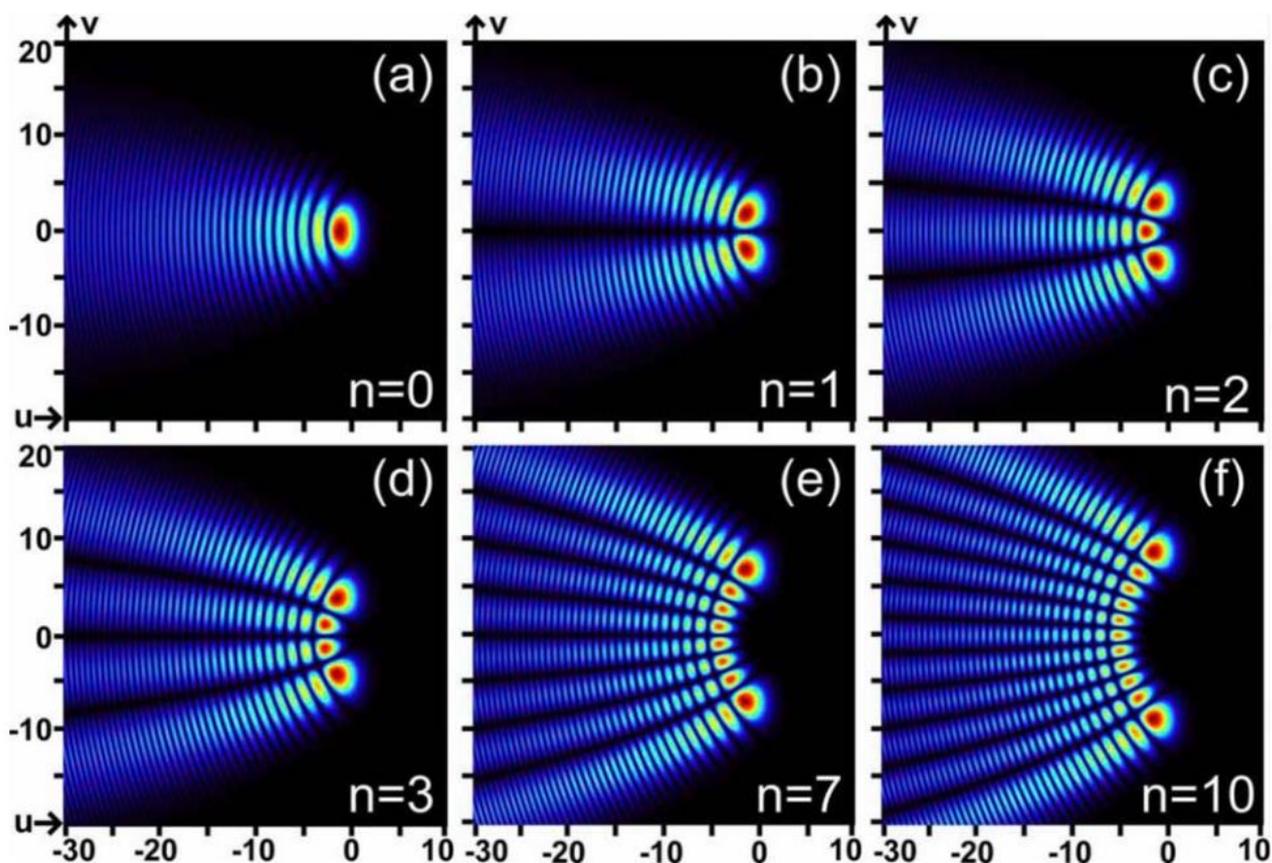


Рисунок 2.2 – Параболические пучки n -ой моды

Кроме того, основополагающей работой, которая дала развитие исследованию параболических пучков в последние годы, стала статья [17]. В ней подробно исследуется такой вид лучей, кроме этого, в данной работе показывается, что они будут ускоряющимися.

2.7. Стационарные пучки Эйри

Для более подробного изучения параболических пучков, рассмотрим одномерные, то есть двумерные в параксиальном смысле, пучки Эйри. Они являются решением уравнения

$$i\psi_{\xi} + \frac{1}{2}\psi_{ss} = 0, \quad (2.34)$$

которое можно получить из (2.20.2) полагая весь лапласиан равным производной по одной координате, например z , и заменой переменных:

$$\xi = \frac{t}{t_0}, \quad s = \frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{bt_0}}, \quad (2.35)$$

где t_0 – некоторое характерное время, например время фокусировки возмущения.

Сами же переменные в уравнении (2.34) имеют следующий вид

$$\xi = \frac{x}{x_0}, \quad s = \frac{x}{kx_0^2}, \quad (2.36)$$

где s представляет поперечную безразмерную координату, x_0 – масштабный параметр, ξ – нормализованный размер светового пятна. Для задачи (2.34) поставим начальное условие в виде

$$\psi|_{\xi=0} = \text{Ai}(s), \quad (2.37)$$

где $\text{Ai}(s)$ – функция Эйри первого рода, которая является частным решением дифференциального уравнения Эйри. Она имеет вид, представленный на рисунке 2.3.

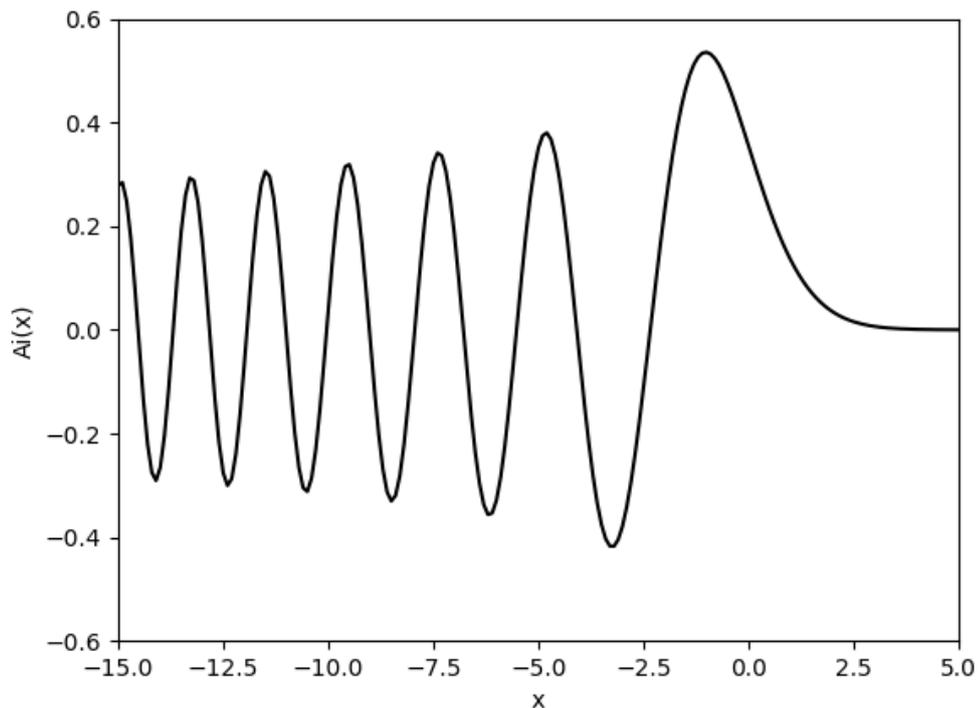


Рисунок 2.3 – Функция Эйри первого рода

Тогда решение поставленной задачи будет иметь вид (взято из работы [23]).

$$\psi = \text{Ai}\left(s - \left(\frac{\xi}{2}\right)^2\right) \exp\left(i\frac{s\xi}{2} - i\frac{\xi^3}{12}\right). \quad (2.38)$$

Данное уравнение показывает, что профиль возмущения остается неизменным во время распространения, пока данный пучок испытывает постоянное ускорение. Слагаемое вида $\left(\frac{\xi}{2}\right)^2$ показывает, что возмущение будет двигаться по параболической траектории.

Основной повод исследования пучка Эйри как опорной модели и простого примера является то, что его смогли синтезировать и экспериментально наблюдать в 2007 году, который был модулирован гауссовским распределением. Подробнее см [23].

Для более подробного рассмотрения таких пучков можно рассмотреть задачу (2.34) с начальным условием

$$\psi|_{\xi=0} = \text{Ai}(s) \exp(as), \quad (2.39)$$

где a – коэффициент затухания. Полагаем, что $a > 0$, чтобы убрать «бесконечный хвост» функции Эйри. Подробное решение данной задачи приведено в [20]. Ограничимся тем, что укажем решение, полученное авторами данной работы

$$\psi = \text{Ai}\left(s - \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + ia\xi\right) \exp\left(as - a\frac{\xi^2}{2} - i\frac{\xi^3}{12} + a^2\frac{\xi}{2} + i\frac{s\xi}{2}\right). \quad (2.40)$$

Полагая $a = 0$ получим результат (2.38). Данное уравнение описывает пучок, который смогли экспериментально наблюдать.

Отметим, что в начальных условиях (2.37) и (2.39), а также в решениях (2.38) и (2.40) можно сделать замену переменных s, ξ на x, t по правилу (2.35), что будет давать решение одномерной задачи (2.20.1) – то есть являться

решением не тонкой пластины, описываемой уравнением Софи Жермен, а одномерной балки, которая описывается уравнением балки Бернулли–Эйлера.

Оба указанные решения для стационарного пучка Эйри, описываемого решениями (2.38) и (2.40) можно видеть на рисунке 2.4, взятого в работе [23].

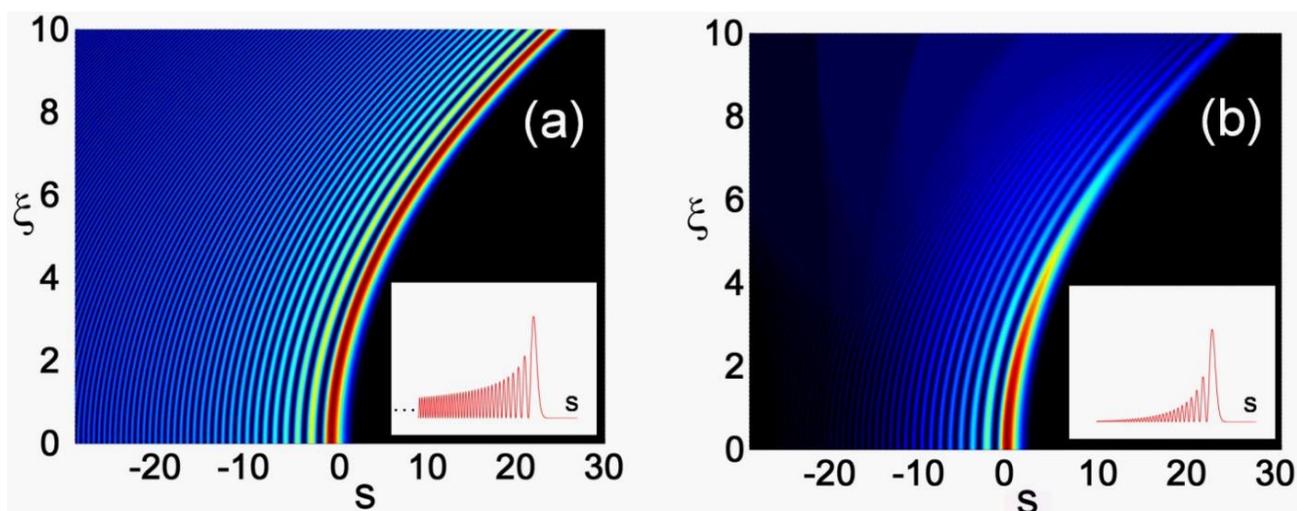


Рисунок 2.4 – Распространение (а) бездифракционного пучка Эйри и (б) пучка Эйри с конечной энергией при $a = 0.05$.

Соответствующие входные интенсивности этих пучков показаны на вставках к рисунку 2.4. Подробнее см. работу [23].

2.8. Заключение к главе 2

В данной главе рассматривается уравнение Софи Жермен для упругой двумерной тонкой изотропной пластины, описываемой в декартовой системе координат. Для такого уравнения выведено параксиальное приближение в стационарном виде.

С другой стороны, рассматривается переход к схожему по типу уравнению Шредингера. Для него получено решение в виде параболического пучка. Подробно рассмотрены некоторые свойства этого пучка, а также указана и проанализирована литература по теме исследования.

Кроме этого, рассмотрен более простой пример – пучок Эйри, который тоже является частным случаем параболического луча. Для этого рассмотрено уравнение балки Бернулли–Эйлера, а от него указан переход к уравнению Шредингера. После выполнения обезразмеривания, задача свелась к уже известной и исследованной в литературе.

Стоит отметить, что в таком случае параболические пучки будут ускоряющимися, а за самим пучком будет идти небольшой след своего поля. Более того, указанные решения – экспериментально наблюдаемые пучки. Кроме этого, отметим, что были экспериментально наблюдались пучки, модулированные гауссианом, чтобы у них была конечная энергия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе исследовалась аналогия движения возмущения в различных средах – волноводе, балке Бернулли–Эйлера, тонкой упругой пластине – и распространению оптических пучков, описываемых параболическим уравнением. Для всех сред выведены уравнения динамики и построены дисперсионные соотношения.

Для волнового уравнения выведено стационарное и нестационарное параксиальное приближения. В обоих случаях гиперболическое волновое уравнение сводится к параболическому дифференциальному уравнению, в некотором виде схожее уравнению Шредингера. Для полученного уравнения выведено решение в виде многомерного пучка Гаусса нулевой моды, которое является обобщением полученных ранее результатов. Подробно обсуждены свойства Гауссовых пучков, в том числе и более высоких мод. По полученному решению было построено решение волнового уравнения. Показано соответствие полученного результата выведенным ранее.

Для уравнения Софи Жермен был выполнен переход к уравнению Шредингера. Для уравнения Шредингера исследовано распространение волны, показано, что полученное решение будет являться параболическим пучком. Также рассмотрено одномерное уравнение Шредингера и для него в безразмерных координатах указано решение в виде пучка Эйри – частный случай параболического пучка. Кроме этого, в данной главе были подробно обсуждены свойства данных пучков.

Таким образом, движение возмущения в среде, а также его расплывание при движении, с позиции энергетической динамики строится исходя из первых двух моментов энергии. Далее выводятся уравнения движения центра возмущения с помощью потока энергии и расплывания вокруг этого центра с помощью суперпотока энергии. Со позиции оптики рассматривается переход к подвижной системе отсчета, а полученные решения в виде пучков описывают расплывание.

Сформулируем тезисы, выносимые на защиту:

1. Получено решение n -мерного волнового уравнения в параксиальном приближении;
2. В параксиальном приближении получено обобщение пучка Гаусса для пространств высоких размерностей;
3. Получено решение в виде параболического пучка для уравнения Шредингера и уравнения Софи Жермен;
4. Рассмотрено решение в виде пучка Эйри для одномерного уравнения Шредингера и показан переход к нестационарному случаю;
5. Показано, что переход к подвижной системе отсчета и рассмотрение расплывания оптического пучка соответствуют рассмотрению первого и второго моментов в энергетической динамике.

Результаты 1—3 составляют научную новизну данной работы.

В качестве дальнейшего развития данного исследования рассматривается изучение пучков Бесселя, как параболических пучков, несохраняющих свою форму. Кроме этого, рассматривается обобщение пучков Эйри на многомерный нестационарный случай.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Нелинейная оптика. М., 1964
2. Баумгарт К. К. Электродинамика – Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона: в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1890—1907;
3. Бегунов Б. Н. Геометрическая оптика, Изд-во МГУ, 1966 – 208с;
4. Гончаренко, А. М. Оптические гауссовы пучки и солитоны – Минск: Беларус. навука, 2011. – 125 с;
5. Губо Г., Шверинг Ф. Зарубежная радиоэлектротехника, 1961. – 199с;
6. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 584 с;
7. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. — М. Наука, 1984. – 208 с;
8. Прохоров Ю. В. Гиперболического типа уравнение – Математический энциклопедический словарь. — М.: «Советская энциклопедия», 1988 – 847 с;
9. Радина Т. В., Станкевич А. Ф. Резонансные и параметрические явления в задачах генерации и распространения лазерного излучения. — Санкт-Петербург: Издательство Санкт-Петербургского Государственного Университета, 2009. — 231 с.;
10. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике — М.: Мир. 1990. – 249с;
11. Стрэтт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука – Пер. с англ. В 2-х томах. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. — Т. 1. — 500 с.; Т. 2. — 476 с.;
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учебное пособие. — 6-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 798 с;
13. Чуриловский В. Н. Теория оптических приборов – Л., «Машиностроение», 1966 – 574с;

14. Baumslag B. Fundamentals of Teaching Mathematics at the University Level – 2000. – 240 p.;
15. Бакиевич Н.И. Связь между решениями уравнения фильтрации жидкости в трещиноватых породах и уравнения теплопроводности, Изв. вузов. Матем., 1980, номер 11, С. 70–72;
16. Леонтович М. А., Фок В. А. – ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 557;
17. Besieris, Shaarawi and Ziolkowski. Nondispersive accelerating wave packets – Am. J. Phys., 1994, Vol 62, No. 6;
18. Bhavalkar D. D. et al. – Br. Journ. Appl. Phys., 1967, Vol. 18, P. 1431;
19. Cox, A.J.; D'Anna, Joseph. Constant-axial-intensity nondiffracting beam. Optics Letters, 1992, 17 (4): P. 232–234;
20. Georgios A. Siviloglou and Demetrios N. Christodoulides. Accelerating finite energy Airy beams – Optics Letters, 2007, Vol. 32, No. 8;
21. Miguel A. Bandres. Accelerating parabolic beams – Optics Letters, 2008, Vol. 33, No. 15;
22. Mizuyama Y. Paraxial approximation for describing a Gaussian beam;
23. Siviloglou, G. A., Broky, J., Dogariu, A., and Christodoulides, D. N. Observation of Accelerating Airy Beams – Physical Review Letters 99, 2007;
24. https://en.wikipedia.org/wiki/Airy_beam, дата обращения: 21.05.2024;
25. https://ru.wikipedia.org/wiki/Гауссов_пучок, дата обращения: 30.04.2024;
26. <https://www.edmundoptics.com/knowledge-center/application-notes/lasers/laser-resonator-modes/>, дата обращения: 25.05.2024.