**Пример решения индивидуальных заданий И1 - И5**

Выполнение комплексного задания по исследованию динамики материальной системы, состоящей из тела и материальной точки, движущейся по телу, позволяет сопоставить решения, полученные разными методами, и сравнить эффективность методов решения.

В приведенной ниже таблице указаны исходные данные заданий, что и как в них требуется найти, сравнение каких результатов позволяет убедиться в правильности решения.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Задача** | **Дано** | **Задание** | **Пункт №** | **Найти** | **Применив** | **Сравнить с пунктом №** |
| **А** | = Const, , | И1 | 1 | Дифференциальное уравнение относительного движения точки | Уравнение динамики относительного движения и покоя | 6 |
| 2 | Положение  относительного равновесия |  |
| 3 | Закон и скорость относительного движения точки |  |
| 4 | Реакцию тела на точку | 7,9 |
| 5 | Скорость точки на вылете | Теорема об изменении кинетической энергии |  |
| 6 | Реакцию шарнира на тело | Теорема о движении центра масс |  |
| И3 | 6 | Дифференциальное уравнение относительного движения точки | Уравнение Лагранжа | 1 |
| 7 | Реакцию тела на точку | Теорема об изменении кинетической энергии | 4,9 |
| **Б** |  | И2 | 8 | Функцию угловой скорости | Теорема об изменении кинетического момента | 12 |
| 9 | Реакцию тела на точку | Дифференциальное уравнение вращения тела | 4,7 |
| 10 | Силу F, обеспечивающую движение точки по заданному закону | Дифференциальное уравнение относительного движения |  |
| **А** |  | 11 | Момент **,** обеспечивающий равномерное вращение тела | Теорема об изменении кинетического момента |  |
| **Б** |  | И4 | 12 | Закон угловой скорости тела | Уравнения Лагранжа | 8 |
| **В** |  | И5 | 13 | Дифференциальные уравнения движения системы |  |
| **А** |  | 14 | Дифференциальное уравнение относительного движения точки | 1, 6 |
| Б |  | 15 | Закон угловой скорости тела | 8, 12 |
| А |  | 16 | Общую зависимость реакции тела на точку | Теорема об изменении кинетической энергии точки в переносном движении | 4, 7, 9 |

**Требования к оформлению решения.**

1. Приветствуется электронная форма оформления решения на основе данного примера. Группы А.Костарева посылают решение на [hofa@hofa.ru](mailto:hofa@hofa.ru). Ответ Вы получите в течение 48 часов. Остальные группы - по договоренности с преподавателем.
2. Решения и исправления всех заданий в письменной форме выполняйте в одной ученической тетради. Ответ Вы получите на следующем занятии.
3. Рисунки выполняйте крупно и строго по заданным размерам. В электронное решение можете вставлять фото рисунков.
4. При несовместимости данных обращайтесь к лектору: email: [hofa@hofa.ru](mailto:hofa@hofa.ru), mob 8-911-942-0791: Алексей Владимирович).
5. Каждый пункт обязательно снабдите поясняющим текстом, как в примере. Сравнения результатов обязательны.
6. Преобразования формул должны быть последовательными и понятными для стороннего читателя, как в пример.
7. При оформлении в тетради страницы желательно нумеровать справа налево для лучшей читаемости соседних страниц текста

|  |  |
| --- | --- |
| 2 | 1 |

Невыполнение требований 2 – 6 влечет возврат задания без проверки.

Правильно выполненное в течение первых двух недель задание оценивается на 5.

Затем, каждые 2 недели оценка понижается на балл, до тройки. Оценку можно исправить защитой задания.

**Объект задания**

Тело из двух стержней (у Вас это может быть пластина) погонной плотности , сваренных под углом , вращается вокруг неподвижной вертикальной оси. Материальная точка массы m скользит без трения вдоль оси (Рис.1).

**Данные для задач А, Б и В**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| m (к*г*) | a(м) | 𝛼 (град) | 𝛾 (к*г*/м) | (c-1) | *x*0 (м) | (м/с) | (нм) | (м/с) |
| 1 | 2 | 60 | 1 | -1 | 1,5 | 1 | -t3 |  |

**Задача А**

*x*

О

φ

m

α

a

2a

Рис.1

Тело вращается с постоянной угловой скоростью .

Найти

1. Дифференциальное уравнение относительного движения точки.
2. Положение относительного равновесия, если оно

существует.

1. Закон относительного движения и скорости точки.
2. Скорость точки в момент, когда точка покидает тело
3. Закон изменения реакции тела на точку и ее значение в момент, когда точка покидает тело.
4. Выражения для составляющих главного вектора реакций шарниров тела.

**Задание И1. Основное уравнения динамики относительного движения точки. Теорема о движении центра масс системы.**

1. Составляем уравнение динамики относительного движения точки

P

Рис.2

**ω**

𝛽𝛽

y

*x*

О

ω

m

α

a

*Фе*

*Фс*

*h*

***Ne***

(1.1)

Вращательная переносная сила инерции отсутствует, поскольку тело вращается равномерно. Центробежная сила инерции всегда направлена от оси вращения тела. Ее модуль равен

Сила Кориолиса в проекциях на оси координат:

Отличны от нуля только проекции

Поэтому имеет проекцию только на ось у

Проекция положительна, поскольку (точка вылетает), а . направлена вдоль оси у.

Проектируя уравнение (1.1) на ось *х*, получаем дифференциальное уравнение относительного движения точки

1. Положение относительного равновесия находится в точке, где ускорение равно нулю. Это точка Р с координатой

Очевидно, что при и точка будет удаляться от начала О координаты . При и точка будет приближаться к началу О координаты х. При заданных начальных условиях точка движется в направлении оси х.

1. Найдем закон относительного движения и скорости точки. Это обратная задача динамики. Решение неоднородного уравнения (1.2) ищем в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения уравнения (1.2)

Общее решение однородного уравнения

ищем в виде

Подставляя это решение в однородное уравнение, приходим к характеристическому уравнению с вещественными корнями

Решение принимает вид

Частное решение ищем в виде правой части, т.е. постоянной . Подставив в уравнение (1.2), получим

Полное решение уравнения (1.2)

(1.3)

Постоянные в (1.3) находим из начальных условий

(1.4)

Подставив (1.4) в (1.3), получим:

Иначе

Решение приобретает вид

С учетом начальных условий (1.4)

(1.5)

1. Найдем скорость точки в момент, когда она покидает тело. Можно было бы и закона движения определить соответствующий момент времени и подставить его в закон изменения скорости. Но лучше найти зависимость скорости точки от ее перемещения с помощью замены переменных

которая фактически приводит к теореме об изменении кинетической энергии точки.

Получаем

Интегрируя, находим зависимость относительной скорости точки от ее перемещения

(1.6)

Из начальных условий (1.4) находим

Находим скорость при

1. Найдем закон изменения реакции тела на точку. Это прямая задача динамики. Проекция уравнения (1.1) на ось z:

дает проекцию реакции стержня на ось z

Проектируя уравнение (1.1) на ось у, находим:

Теперь проекция нормальной реакции стержня на ось у равна

зависит от найденной относительной скорости точки (1.5).

В момент, когда точка покидает тело

(1.9)

1. Составляющие реакции шарнира **R** найдем по известным ускорениям тела и точки из теоремы о движении центра масс

Это прямая задача динамики.

Рис.3

**ω**

О

α

a

*h*

a

a

где составляющие от ускорений центров тяжести стержней, а от ускорения точки. Последнее состоит из относительного, переносного и Кориолисова ускорений:

Направления составляющих изобразим на рисунке и вычислим их величину

;

**Задание И3. Уравнения Лагранжа. Теорема об изменении кинетической энергии.**

1. Методом Лагранжа получить дифференциальное уравнение относительного движения точки, найденное в И1.
2. С помощью теоремы об изменении кинетической энергии найти реакцию тела на точку, и сравнить ее с результатом в И1.

**Решение**

1. Найдем дифференциальное уравнение относительного движения точки из уравнения Лагранжа

Абсолютная скорость V точки складывается из переносной и относительной скоростей (Рис.2)

Таким образом, кинетическая энергия приобретает выражение

Находим производные:

Обобщенная сила поскольку сила тяжести перпендикулярна скорости точки и не имеет мощности.

Подставив производные в уравнение Лагранжа приходим к ***дифференциальному уравнению (1.2), найденному в И1***

(3.4)

1. Реакцию тела на точку найдем из теоремы об изменении кинетической энергии точки.

где N- мощность физических сил, приложенных к точке, в переносном и в относительном движениях точки.

Физических сил, имеющих проекцию на ось нет, поэтому

Во вращательном переносном движении точки мощность реакции вычисляем через момент

В соответствии с Рис.2

Из дифференциального уравнения (3.4)

Таким образом, после сокращения на находим ***тот же результат, что и в И1***

(3.5)

**Ответ задачи А**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|  |  |  |  |  |

**Задача Б**

Тело вращается из состояния покоя под действием момента . Самодвижущийся экипаж М, принимаемый за точку массы m, движется без сопротивления по закону за счет силы сцепления с телом.

*x*

О

φ

М

α

a

2a

В

А

Рис.3

Найти

1. Закон угловой скорости тела и ее значение в момент, когда точка

покидает тело.

1. Закон силы сцепления точки с телом, обеспечивающей

заданное движение точки

1. Закон нормальной реакции тела на точку.
2. В задаче А найти закон вращательного момента ,

обеспечивающий равномерное вращение тела

**Задание И2. Теорема об изменении кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращения тела. Условие равномерного вращения.**

1. Найдем закон изменения угловой скорости тела из теоремы об изменении кинетического момента относительно оси вращения тела.

Кинетический момент системы складывается из кинетического момента стержней АОВ с зафиксированной на них в текущий момент точкой М и кинетического момента точки М в относительном движении (плечо .

Последнее слагаемое отрицательно, поскольку при момент относительной скорости направлен против стрелки

Моменты инерции двух стержней складываются, при этом вычисляется по формуле Штейнера

C- центр стержня ОВ.

Момент инерции точки в текущем положении

Итак

Кинетический момент системы равен:

Интегрируем теорему об изменении кинетического момента

Получаем

Иначе

Отсюда находим закон угловой скорости тела

В момент, когда точка покидает тело.

1. Найдем закон изменения движущей силы сцепления , которая создается мотором экипажа и обеспечивает заданное движение точки по телу. С учетом силы и вращательной переносной силы инерции (уравнение динамики относительного движения точки примет вид

P

Рис.3

**ω**

𝛽𝛽

y

*x*

О

ω

m

α

a

*Фс*

*h*

***Ne***

Проекция центробежной силы инерции на ось у была найдена раньше

направляем в сторону стрелки Ее проекция на ось х равына

Дифференциальное уравнение относительного движения точки (1.2)

потому, что положительно направленная сила создает момент против

Отсюда находим закон изменения силы

Все функции времени в правой части определяются из данных задачи и дифференцированием (2.6)

1. Реакция точки на тело Реакцию найдем из дифференциального уравнения вращения тела.

Здесь под понимается сила (2.9) со знаком минус (3й закон Ньютона)

Отсюда

Здесь сила определена выражением (2.9)

1. **В задаче А** точка движется по телу свободно (, оказывая на тело нормальную реакцию (1.8) с обратным знаком (3й закон Ньютона):

(2.12)

Найдем момент , который вынуждает тело вращаться равномерно (

Сумма моментов всех сил, действующих на тело, равна нулю. Кроме момент создает сила давления (2.12),

Приравнивая сумму моментов нулю, либо подставив условия движения в (2.11), получим:

Отсюда находим закон изменения вращательного момента, поддерживающего постоянную угловую скорость тела

где , а закон и скорость являются известными функциями времени (1.5). Такой же результат получим и из (2.11).

**Задание И4. Уравнения Лагранжа.**

1. Найдем закон изменения угловой скорости из уравнения Лагранжа

Обобщенная

Кинетическая энергия системы складывается из энергии тела и точки

то

Подставив данные задачи, находим

***Приходим к тому же результату, что и в И2:***

Видим, что в данном примере кинетический момент системы связан с кинетической энергией формулой

**Ответ задачи Б**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1** | 2 | **3** | **4** |
|  |  |  |  |

**Задача В**

Тело и точка движутся свободно из начального состояния. Система имеет 2 степени свободы. Координаты и являются неизвестными функциями времени.

Найти:

1. Методом Лагранжа дифференциальные уравнения движения системы и циклические интегралы, если они существуют
2. Дифференциальное уравнение относительного движения точки в задаче А
3. Закон изменения угловой скорости тела в задаче Б
4. Общую зависимость реакции тела на точку. Ее выражение для задачи А.

**Задание И5. Уравнений Лагранжа. Теорема об изменении кинетической энергии в переносном движении**

1. Дифференциальные уравнения движения системы найдем из уравнений Лагранжа. За обобщенные координаты выберем x и φ.

Запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

Выражение кинетической энергии системы (4.2) позаимствуем из задания И4

Производные по :

Обобщенная сила

равна нулю, поскольку нет сил, имеющих составляющие вдоль

Подставив (5.3) и (5.4) в (5.1) получаем дифференциальное уравнение по :

Поскольку.

то является циклической координатой, и ей соответствует циклический интеграл дифференциального уравнения по

Покажем, что циклический интеграл выражает факт сохранение кинетического момента системы относительно оси z. Согласно формуле (2.1) задания И2

Подстановка данных задачи дает

что в точности совпадает с выражением (5.7).

Значит (5.7) действительно выражает факт сохранение кинетического момента системы относительно оси z. Ввиду начального покоя системы

Производная от (5.7) приводит к дифференциальному уравнению по

1. Проверим уравнение относительного движения точки (1.2) в условиях задачи А.

При подстановке условий задачи А: в (5.5) ***получаем точно такое же уравнение, как в задаче А***

1. Проверим закон угловой скорости тела, найденный в условиях задачи Б

При подстановке условий задачи Б при отсутствии момента : в (5.7) получаем тот же закон угловой скорости

что и в задании И2 при отсутствии момента.

1. Общее выражение зависимости реакции тела на точку найдем из теоремы об изменении кинетической энергии точки в переносном движении

Здесь использовано разложение выражения кинетической энергии точки Т на слагаемые по степеням относительной скорости. Справа стоит мощность внешних сил (они здесь состоят из одной реакции на переносном движении точки.

Кинетическая энергия Т не содержит времени t, поэтому

Энергия , содержащая в первой степени и ее производная

Энергия содержащая в нулевой степени и ее производная

Мощность реакции в переносном движении точки

После подстановки в теорему (5.13) получаем

Проверим выражение (для реакциив условиях задачи А, где**:**

Подставив эти условия в (5.19), получаем

В силу дифференциального уравнения движения точки

получаем то же выражение (1.8)

что и в задании И1.

**Ответ задачи В**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1** | 2 | **3** | **4** |
|  |  |  |  |

моменты инерции 2.tif

3

𝜑

d𝜑

𝜌

d𝜌

y

C