*А.В. Костарев, Т.А.Костарева*

**ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛИМЫХ СВЯЗЕЙ**

 Предлагаются критерии построения связей с определимыми реакциями для плоской и пространственной системы тел. Показано, что все задачи сводимы к системе двух тел

1. **Введение**

Обращаясь к сборникам задач по теоретической механике [1,2], студент может прийти к ложному выводу, что все задачи имеют решение. Это относится и к задачам статики твердого тела. Понятно, что в задачниках предлагаются именно такие задачи. Полезно показать студентам, что существуют задачи статики, не имеющие решения в классической постановке. И указать методы создания таких задач.

**Плоская система сил.**

1. **Одно тело**

В проекциях на оси x, y два векторных условия равновесия

$$V^{R}=-V^{a}; M\_{o}^{R}=-M\_{o}^{a} (1)$$

где индексом R обозначены реакции связей, а индексом а – нагрузка,

дают три алгебраических уравнений для реакций связей, которые можно представить в матричном виде

# $Ax=y$ (2)

Здесь А - матрица системы, зависящая только от устройства связей, х- столбец искомых реакций связей, у – столбец заданной нагрузки.

Как известно, алгебраическая система имеет единственное решение если матрица А - квадратная (3 х 3), т.е. уравнения имеют три неизвестных и определитель матрицы отличен от нуля.

$|A| \ne 0$ (3)

Связи с такой матрицей А назовем статически определимыми (или коротко определимыми) потому, что реакции только таких связей могут быть определены из уравнений статики (2).

Условие (3) обеспечивает тривиальность решения однородной системы

# $Ax=0$ (4)

при отсутствии нагрузки. Это значит, что реакции определимых связей исчезают при снятии нагрузки. Иначе говоря, если

#### $V^{R}=0$ $M\_{o}^{R}=0$ (5)

то все реакции определимых связей равны нулю.

 Таким образом, анализ связей на определимость сводится к требованию (3)

Условие (3) означает, что в матрице А не должно быть линейно зависимых и нулевых строк или столбцов. Строки независимы по ортогональности осей координат и независимости проекций на оси и моментов относительно осей. Наличие нулевой строки в матрице А означает, что связи «не держат» в данном направлении, т.е. не являются «достаточными». Договоримся рассматривать только достаточные связи, которые обеспечивают покой тела при любой нагрузке.

Нулевые столбцы невозможны, поскольку не существует сил и моментов, которые не имели бы проекций. Зависимые столбцы могут появиться только в случае, если две силы реакции окажутся на одной прямой или существует два момента связей.

Отсюда правило построения определимых связей:

***Ставя новую связь, нужно позаботиться о том, чтобы число неизвестных не превысило трех, число моментов не превысило одного, а новая реакция связи не смогла оказаться на одной прямой с реакциями ранее поставленных связей.***

При невыполнении условия (3), связи будут избыточными в каком-то направлении. Важно отметить, что при правильном числе неизвестных, равном числу уравнений, избыточность связей в одном направлении всегда сопровождается их недостаточностью в другом направлении.



Так для стержня на двух опорах с «правильным» числом неизвестных, равным трем, при α = 0 реакции в опорах могут оказаться на одной прямой АВ, связи становятся избыточными вдоль АВ и недостаточными в отношении поворота вокруг опоры А.

Рис.1

Таким образом силовой и кинематический анализ связей взаимно дополняют друг друга при построении определимых связей.

Важным вопросом является оптимизация связей по величине реакций. Приближение конфигурации к неопределимой всегда устремляет некоторую реакцию к бесконечности. Максимальное удаление от неопределимой конфигурации оптимизирует конфигурацию, минимизируя модуль той же реакции. Оптимальную конфигурацию схемы Рис.1 получим при $α=π/2$.

1. **Приведение реакций к одной силе**

Для упрощения анализа полезно привести реакции связей к одно силе.

**Связи с одной неизвестной** (опора, каток, нить и стержень на шарнирах) создаю силу перпендикулярную поверхности опоры (опора, каток) или вдоль связи (нить, стержень) и приложенную в точке связи.

**Глухая заделка** создает произвольную силу в плоскости (две неизвестных).

**Скользящая заделка** создает силу, перпендикулярную оси заделки (две неизвестных).

**Цилиндрический шарнир** создает в шарнире произвольную силу (две неизвестных).

1. **Система тел**

Под системой тел понимаем цепь тел, связанных между собой и с основанием на концах цепи любым способом, кроме глухой заделки. Покажем, что такая система тел сводится к двум телам.

Действительно, пусть в систему входит n тел. У такой системы всего n+1 связей: из них n-1 внутренних связей и 2 внешние связи. Связи не могут быть заделками, иначе число тел системы уменьшится. Значит во всех n+1 связях от одной до двух неизвестных. Полная система уравнений состоит из 3n уравнений, которые должны иметь 3n неизвестных реакций связей. Поскольку при максимальным числе неизвестных 2 в каждой связи уравнение

$$2\left(n+1\right)=3n$$

имеет единственное решение $n=2$, то любая плоская система тел сводится к двум телам с шестью неизвестными реакциями связей.

 Единственным возможным вариантом остаются три связи с двумя неизвестными в каждой. К таким связям относятся цилиндрический шарнир и скользящая заделка. Комбинаций таких связей всего шесть.

 Чтобы вывести правила построения определимых связей изобразим все шесть неопределимых комбинаций связей для двух стержней.

Рис.3

Рис.4

Рис.2

Рис.6

Рис.5

Рис.7

 Становится очевидным, что на всех схемах, кроме Рис.5 три реакции могут оказаться на одной прямой. На схеме Рис.5 параллельны три момента. Видно, что во всех схемах избыточность связей в одном направлении сопровождается их недостаточностью в другом направлении, система становится механизмом.

Таким образом при построении определимых связей для плоской системы двух тел нельзя допускать трех сил на одной прямой и трех моментов.

**Пространственная система сил**

1. **Приведение реакций к одной силе**

**Глухая заделка** создает произвольную пространственную силу (6 неизвестных).

**Скользящая заделка стержня прямоугольного сечения** создает перпендикулярную оси силу (5 неизвестных).

**Скользящая заделка стержня круглого сечения** создает силу, перпендикулярно пересекающую ось (4 неизвестных).

**Сферический шарнир или три некомпланарных стержня в одной точке** создают в шарнире произвольную силу (3 неизвестных).

**Цилиндрический шарнир или два стержня в одной точке** создают в шарнире силу, перпендикулярную оси шарнира (2 неизвестных).

**Связи с одной неизвестной** (опора, каток, нить и стержень на шарнирах) создаю силу перпендикулярную поверхности опоры (опора, каток) или вдоль связи (нить, стержень) и приложенную в точке связи.

1. **Одно тело**

Требование неравенства определителя матрицы А (2) приводит к следующим правилам:

***Ставя новую связь, нужно позаботиться о том, чтобы число неизвестных не превысило шести, число параллельных моментов не превысило одного, а новая реакция связи не смогла оказаться на одной прямой с реакциями ранее поставленных связей.***

Заметим, что три силы на плоскости эквивалентны двум силам на одной прямой. Поэтому такое сочетание тоже невозможно.

1. **Пример построения определимых связей 3+2+1**

https://www.youtube.com/watch?v=1VJK3xldwdA

Поставим в произвольной точка А тела сферический шарнир. Неизвестных становится 3.

В точке В поставить второй сферический шарнир нельзя, поскольку две реакции могут оказаться на одной прямой АВ. Поставим в точке В цилиндрический шарнир. Его ось не может быть перпендикулярна линии АВ, иначе опять возникнет избыточность связей по АВ, и реакции в шарнирах будут стремиться к бесконечности. Чтобы реакции были минимальными при данной нагрузке ось шарнира В нужно направить вдоль АВ. Неизвестных стало 5.

A

B

Рис.8

В точке С можно поставить связь с одной неизвестной, иначе число неизвестных станет больше шести. Поставим стержень на двух шарнирах.

A

B

Рис.8

С

Стержень нельзя расположить в плоскости АВС, иначе три силы окажутся в одной плоскости, и реакция в стержне будет стремиться к бесконечности.

 Чтобы реакция была минимальна при данной нагрузке стержень нужно направить перпендикулярно плоскости АВС

1. **Система тел**

Покажем, что любая пространственная система тел сводится к двум телам. Действительно, пусть в систему входит n тел. У такой системы n+1 связей: n-1 внутренних связей и 2 внешние связи. Они не могут быть заделками, иначе число тел системы уменьшится. Значит во всех n+1 связях от одной до пяти неизвестных.

Полная система уравнений состоит из 6n уравнений, которые должны иметь 6n неизвестных реакций связей. Уравнение

$$k\left(n+1\right)=6n$$

где k – среднее число неизвестных в $n+1 $связях, имеет решение $n\geq 2$ только при $k=4 \left(n=2\right) и k=5 (n=5)$. Но последний случай не реализуем, поскольку $k=5 $ у скользящей заделки стержня прямоугольного сечения, создающей пространственную силу, перпендикулярную заделке. А $n+1=6$ таких направлений в пространстве не создать, не нарушив определимости связей.

 Остается вариант $k=4 \left(n=2\right)$, соответствующий двум телам с 12 неизвестных.

Связи могут иметь 2 неизвестных (цилиндрический шарнир), 3 неизвестных (сферический шарнир), 4 неизвестных (скользящая заделка стержня круглого сечения), 5 неизвестных (скользящая заделка стержня прямоугольного сечения).

Наиболее интересны случаи 3+4+5=12 и 4+4+4=12

Правило: Три реакции не должны оказаться на одной прямой. Три момента не могут быть параллельны.

1. **Построение связей 3+4+5**

Рассмотрим систему двух стержней: АВС и СDE (Рис.9). В общей точке С стоит скользящая заделка со поршнем прямоугольного сечения (5 неизвестных). В точке А стоит сферический шарнир (3 неизвестных).

**R**a и **R**c могут оказаться на произвольной линии, проходящей через А перпендикулярно поршню заделки С.

В точке Е поставим скользящую заделку с поршнем круглого сечения и недостающими четырьмя неизвестными. Она создаст силу, пересекающую ось заделки.

С

В

А

D

E

Рис.9

 Чтобы эта сила не смогла пересечь шарнир А, ось заделки не должна быть параллельной оси заделки С.

Вывод: оси скользящих заделок не должны быть параллельны.

**Литература**

1. *Мещерский И.В.* Задачи по теоретической механике: учебное пособие. 45-е изд., стер./ Под ред. В.А.Пальмова, Д.Р.Меркина.- СПб.: Издательство «Лань», 2006. – 448с.
2. *Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С* Теоретическая механика в примерах и задачах, т.1–Статика и кинематика / Москва: Издательство «Наука», 1967. – 512с.