

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Физико-механический институт  
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите  
Директор ВШТМиМФ,  
д.ф.-м.н., член-корр. РАН

\_\_\_\_\_ А.М.Кривцов  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

## ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

**СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ БЕЗ СИММЕТРИИ ОТРАЖЕНИЯ**

по направлению подготовки

01.03.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.03.03\_01 Механика и математическое моделирование сред с  
микроструктурой

Выполнил

студент гр.5030103/00101

\_\_\_\_\_

А.Д. Работинский

Руководитель

доцент ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

Е.Ф. Грекова

Санкт-Петербург

2024

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**  
**Физико-механический институт**  
**Высшая школа теоретической механики и математической физики**

УТВЕРЖДАЮ  
Директор ВШТМиМФ  
А.М. Кривцов  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 г.

**ЗАДАНИЕ**

**на выполнение выпускной квалификационной работы**  
студенту Работинскому Артёму Дмитриевичу, гр. 5030103/00101

1. Тема работы: Свободные волны в средах без симметрии отражения
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 10.06.2024
3. Исходные данные по работе: существует множество работ по микроструктурным моделям акустических метаматериалов. Также предложены континуальные модели общего вида (модели упругих редуцированных сред), проявляющие свойства метаматериалов (Грекова, 2015—2023). Наиболее интересными волновыми свойствами обладают поперечные волны в гиротропной редуцированной среде (Грекова, 2023), однако не предложено её конкретной реализации. Мало работ по хиральным (без симметрии отражения) акустическим метаматериалам (Tong, Li, Wang, 2023). Возникает задача: предложить простейшие микроструктурные модели акустических гиротропных метаматериалов и исследовать влияние параметров модели на волновые свойства среды.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): исследование дисперсионных соотношений в редуцированных средах общего вида, не имеющих симметрии отражения; построение одномерной модели среды без симметрии отражения, исследование влияния параметров этой модели на вид дисперсионных соотношений смешанных волн, частотные диапазоны зон существенного поглощения и аномального преломления; построение модели гиротропной среды, анализ дисперсионных соотношений поперечной волны в ней и влияния параметров на их вид.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): графики различных дисперсионных соотношений сред без симметрии отражения.
6. Консультанты по работе: отсутствует
7. Дата выдачи задания: 28.02.2024

Руководитель ВКР \_\_\_\_\_ Е.Ф. Грекова, доцент ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению 28.02.2024

Студент \_\_\_\_\_ А.Д. Работинский

## РЕФЕРАТ

На 70 с., 19 рисунков, 1 таблица.

### РЕДУЦИРОВАННЫЕ СРЕДЫ, ХИРАЛЬНЫЕ СРЕДЫ, ГИРОТРОПНЫЕ СРЕДЫ, АКУСТИЧЕСКИЙ МЕТАМАТЕРИАЛ, АНОМАЛЬНОЕ ПРЕЛОМЛЕНИЕ, ВОЛНЫ В СРЕДАХ КОССЕРА

Данная работа посвящена исследованию волновых свойств особого класса акустических метаматериалов — редуцированных сложных сред без симметрии отражения. Особое внимание уделяется редуцированной гиротропной среде, являющейся дважды отрицательным акустическим метаматериалом. Предложена микроструктурная модель одномерной редуцированной гиротропной среды, совершающей трехмерные движения. Найдены параметры, качественно влияющие на прохождение поперечных волн в редуцированных гиротропных средах, в частности, на частотные диапазоны зон существенного поглощения и аномального преломления. Проведено как численное, так и аналитическое исследование влияния этих параметров на вид дисперсионных кривых. Результаты были верифицированы при помощи сравнения численных и аналитических результатов и анализа предельного случая, в котором гиротропная среда становится близка к изотропной, чьи дисперсионные соотношения были найдены и исследованы в других работах.

В работе также представлены две модели одномерных сред без симметрии отражения, являющиеся лишь единожды отрицательными акустическими метаматериалами. Найдены параметры, качественно влияющие на ширину зон существенного поглощения в данных средах. Рассмотрены все возможные варианты распространения смешанных волн в данных средах и предложены условия реализации для каждого случая.

## ABSTRACT

70 pages, 19 pictures, 1 table.

REDUCED MEDIA, CHIRAL MEDIA, GYROTROPIC MEDIA, ACOUSTIC METAMATERIAL, ANOMALOUS REFLECTION, WAVES IN COSSERAT MEDIA

This work is devoted to the study of the wave properties of a special class of acoustic metamaterials — reduced complex chiral media. Special attention is paid to the reduced gyrotropic medium, which demonstrates properties of a double negative acoustic metamaterial. We propose a microstructural model of a 1D reduced gyrotropic medium, which performs 3D motion. We find parameters that qualitatively affect the propagation of transverse waves in reduced gyrotropic media, in particular, influence on the frequency domains of significant absorption and anomalous refraction. Both numerical and analytical studies of the influence of these parameters on the type of dispersion curves have been carried out. The results were verified by means of comparison of the numerical and analytical results and analysis of the limiting case when the gyrotropic medium becomes similar to an isotropic one, whose dispersion relations were found and investigated in other studies.

The study also presents two models of 1D chiral media, demonstrating properties of single negative acoustic metamaterials. We find the parameters that affect the width of the bands of significant absorption in these media. We consider all possible variants of mixed wave propagation in these media and propose the conditions of their existence for each case.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	<b>5</b>
<b>ГЛАВА 1 Смешанные волны в одномерной анизотропной среде без симметрии отражения. Модели 1,2</b>	<b>10</b>
1.1 Смешанная волна в линейном одномерном анизотропном континууме, не имеющем симметрии отражения . . . . .	11
1.2 Дисперсионные соотношения одномерных линейных континуумов предложенного вида . . . . .	12
1.2.1 Смешанная волна в одномерном континууме 1 . . . . .	12
1.2.2 Смешанная волна в одномерном континууме 2 . . . . .	30
<b>ГЛАВА 2 Одномерная модель гиротропной линейной упругой редуцированной среды с двумерными поперечными смещениями</b>	<b>32</b>
2.1 Поперечная волна в гиротропной линейной упругой редуцированной среде . . . . .	33
2.1.1 Поиск результирующей силы . . . . .	33
2.1.2 Поиск моментной реакции на перемещения. Уравнения Лагранжа. Результирующий момент. . . . .	34
2.1.3 Анализ дисперсионных соотношений. . . . .	42
2.1.4 Случаи, подозрительные на смену зон нормального и аномального преломления . . . . .	62
2.1.5 Частотные диапазоны зон аномального преломления	65
<b>Заключение</b>	<b>66</b>
<b>Список использованных источников</b>	<b>68</b>

## Введение

На данный момент механика является всесторонне и глубоко развитой и проработанной дисциплиной, которая помогает решить большинство задач, возникающих перед учеными и инженерами, однако в различных разделах механики до сих пор остаются не изученными до конца некоторые проблемы, одной из которых является распространение волн в средах сложного внутреннего строения.

Данная проблема давно решена для классической среды, которая используется повсеместно, как модель различных материалов. Однако классическая теория применима только при некоторых допущениях, самым важным из которых является то, что рассматриваемый континуум представляется как совокупность материальных точек. Это обстоятельство ведет к тому, что некоторые среды не могут быть описаны с помощью классической теории. В качестве примера можно привести сыпучие или гранулированные материалы, композиты с контрастными включениями, где необходимо учитывать поворотные степени свободы. Такие среды должны рассматриваться, как набор тел-точек, представляющих собой бесконечно малые твердые тела. Положение тела-точки в отличие от материальной точки задается не только радиус-вектором  $\underline{\mathbf{R}}(t)$ , но и тензором поворота  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}(t)$ , помимо этого тела-точки обладают не только массой, но и тензором инерции  $\underline{\underline{\boldsymbol{\theta}}}(t)$ .

Очевидно, что такие отличия между предложенными выше моделями частиц потребовали существенных изменений теории. Пионерская работа по теории трехмерных моментных сред (континуумов с поворотными степенями свободы) принадлежит Эжену и Франсуа Коссера [2].

Существенный толчок к развитию теории сред Коссера получила в тот момент, когда наука встала перед вопросом описания поведения более сложных материалов, таких как жидкие кристаллы, ферромагнетики и другие электромагнитные среды, композиты с включениями, позднее — акустические метаматериалы. Кафадар и Эринген [27] построили теорию полной среды Коссера. Большой вклад в изучение различных вариантов сред Коссера, в том числе со стесненным вращением, внесли Аэро [6], Грин, Нахди [16], Новацкий [11], Пальмов [12], Можен [5], Еремеев, Альтенбах [3], Ерофеев [14], Зубов [10]. Жилин, Гаврилов и Грекова предложили модель

среды Кельвина — среды Коссера с большим динамическим спином, которая оказалась применима для описания непроводящих ферромагнетиков в приближении квазимагнитостатики в состоянии, близком к магнитному насыщению [8, 17]. Иванова, Вильчевская и Мюллер разработали пространственный подход к описанию сред Коссера [25, 29]. Иванова предложила различные варианты сред Коссера, в том числе гироконтинуумов, для описания электромагнитных и термических явлений [26].

Шварц, Джонсон и Фенг [30] предложили для описания консолидированных сыпучих сред особый тип моментной среды — редуцированную изотропную линейную упругую среду Коссера. Такая среда сопротивляется повороту тела-точки относительно окрестности, однако не реагирует на взаимный поворот тел-точек. Позднее понятие редуцированной среды Коссера было обобщено на более сложные случаи и исследовано распространение волн в них ([13, 18, 19, 28] и др.) Данная среда имеет запрещенную зону для волн сдвига-вращения, то есть проявляет свойства единожды отрицательного акустического метаматериала [18].

Грековой было введено [9] понятие сложной упругой редуцированной среды общего вида — среды, условно представимой в виде двух взаимосвязанных субконтинуумов: несущего континуума и распределенного динамического гасителя. Упругая энергия среды может зависеть от деформации несущего континуума и обобщенных смещений обоих субконтинуумов, однако не зависит от деформации динамического гасителя. В вышеупомянутой и других работах [20, 22] показано, что редуцированные сложные среды могут служить моделями акустических метаматериалов, то есть обладать запрещенными зонами (в случае единожды отрицательного акустического метаматериала) или участками дисперсионных кривых, где групповая скорость направлена противоположно фазовой, то есть зонами аномального преломления (в случае дважды отрицательного акустического метаматериала). В последних фаза и энергия распространяются в различных направлениях. Редуцированная упругая среда Коссера является частным случаем редуцированной среды сложной структуры. В ней роль несущего континуума выполняют трансляционные степени свободы, а роль распределенного динамического гасителя — поворотные. Зависимость энергии от трансляционного смещения отсутствует, имеется взаимосвязь “трансляци-

онная деформация – поворотное смещение”, возникающая из-за реакции среды на поворот тела-точки относительно окрестности. Как следствие, в различных упругих редуцированных средах Коссера возникают запрещенные зоны для определенных типов волн [18, 21].

По акустическим метаматериалам имеется обширная литература, ограничимся ссылками на обзоры [7, 15, 24]. Поскольку микроструктурные степени свободы изменяют распространение волн, данные материалы в определенных диапазонах частот обладают отрицательными эффективными упругими или инерционными характеристиками, что приводит к существованию запрещенных зон или зон аномального преломления. Такие области частот называются рабочими зонами метаматериала. Эти необычные волновые свойства позволяют широко использовать акустические метаматериалы для подавления шума и вибраций, фокусировки звуковых лучей, управления фронтами волн. Изучение распространения волн в таких средах позволит создавать материалы с заданными наперед свойствами.

Отметим, что в данной работе рассматриваются лишь линейные среды и волны в них.

Заметим, что классическая упругая среда недисперсивна. В изотропной среде существует два решения для свободных гармонических волн — продольная волна и поперечная волна (последнее решение кратное). Анизотропия изменяет распространение волн, однако в классической среде они остаются недисперсивными, хотя становятся смешанными — в перемещении присутствует и продольная, и поперечная компонента. Для каждой частоты существует три решения, скорость соответствующих волн и соотношение продольной и поперечной компонент перемещения зависят от тензора упругости и от направления распространения волны [1]. Таким образом, классическая среда не может являться моделью для какого-либо акустического метаматериала.

При добавлении поворотных степеней свободы характер распространения волн существенным образом изменяется. Однако в изотропной полной среде Коссера на всех частотах распространяются как продольные, так и поперечные волны. Поворотная продольная волна имеет частоту отсечки, ниже ее существует лишь трансляционная продольная волна. Поперечные волны имеют две ветви, одна из которых (акустическая) начинается в нуле,

как и поперечная волна в классической среде, и существует на всех частотах, а другая (оптическая) имеет ту же частоту отсечки, что и продольная волна. Скорости всех волн на больших частотах приближаются к определенным ненулевым предельным значениям. Дисперсионные соотношения для полной изотропной упругой линейной среды Коссера и их вывод можно найти в [4]. По-видимому, можно считать, что полная линейная упругая среда Коссера является единожды отрицательным акустическим метаматериалом по отношению к продольной поворотной волне в области до частоты отсечки. Однако продольная трансляционная волна в этой области распространяется.

Редуцированная изотропная линейная среда Коссера обладает запрещенной зоной для поперечной волны, а продольная поворотная волна в ней вырождается в колебания на частоте отсечки с различными длинами волн [18]. Поперечные волны в различных редуцированных упругих средах Коссера также, вообще говоря, обладают запрещенными зонами. Однако для этих сред не существует зон аномального преломления, где фазовая скорость направлена противоположно групповой, которые представляют большой интерес.

В работе [22] предложена модель гиротропного (обладающего симметрией по отношению ко всем поворотам, но не к отражениям) континуума с комбинированной взаимосвязью субконтинуумов: одновременно присутствует взаимосвязь между их обобщенными смещениями и между деформацией несущего континуума и смещением распределенного динамического гасителя. Изотропия не позволяет ввести такую комбинированную взаимосвязь, но исключение отражений из группы симметрии для тензоров упругости, отвечающих за взаимосвязь континуумов, дает такую возможность. Показано, что в такой среде поперечные волны имеют богатые волновые свойства. Они обладают круговой поляризацией. Различным образом поляризованные волны могут обладать разными зонами аномального преломления, чувствительными к параметрам системы. Существуют также две зоны существенного поглощения, где обе бегущие волны затухают. Однако данная модель гиротропного континуума построена из общих соображений, без указания возможной природы субконтинуумов, и анализ дисперсионных соотношений лишь начат. Представляется актуальным построить

конкретную микроструктурную модель такой среды и провести подробный анализ дисперсионных соотношений для поперечных волн, особенно в областях без поглощения (последние изучены в [22]).

Поэтому в данной работе будут рассмотрены микроструктурные модели хиральных (не обладающих симметрией по отношению к отражениям) редуцированных сред Коссера на жестком основании, которые имеют оба типа перевязочных членов в энергии: **«смещение несущего континуума – смещение распределенного динамического гасителя»**, **«деформация несущего континуума – смещение распределенного динамического гасителя»** одновременно.

В данной работе будут, кроме упомянутой выше гиротропной среды, также предложены две модели редуцированных сред без симметрии отражения, в общем случае не являющимися дважды отрицательными акустическими метаматериалами, изучены их параметры и их влияние на ширину запрещенных зон. В целях максимального упрощения задачи будем рассматривать одномерные модели (цепочки), движение тел-точек может происходить в различных направлениях.

Таким образом, основной целью данной работы является изучение прохождения свободных волн в средах без симметрии отражения, получение примера модели механического гиротропного континуума, анализ его дисперсионных соотношений, получение закономерностей поведения рабочих зон при изменении параметров предложенной модели.

# ГЛАВА 1. Смешанные волны в одномерной анизотропной среде без симметрии отражения. Модели 1,2

В данной работе будут предложены различные модели хиральных сред. Часть из них не будет обладать свойствами гиротропной среды, рассмотренной в [22], именно они будут рассматриваться в данной главе. Тем не менее, как мы увидим, эти модели также будут описывать некоторые акустические метаматериалы. Поскольку общий вид трехмерного линейного редуцированного континуума с различными типами перевязок в энергии был рассмотрен в работах [22], [9], при получении значимых в контексте нашей работы соотношений, будем проводить их сравнение с [22], [9].

Прежде, чем предложить континуум некоторого строения, необходимо сказать следующее:

1. Ось абсцисс направлена слева направо.
2. За положительное направление вращения примем поворот по часовой стрелке.
3. В качестве  $\mathbf{e}_i$  обозначим правый ортонормальный базис, пользуясь правилом Эйнштейна в записях, где присутствует повторяющийся индекс, опускаем знак суммирования.
4. Поскольку мы предлагаем линейную модель, в разложениях в ряд Тейлора интересующих нас функций в окрестности отсчетной конфигурации учитываем только члены первого порядка малости. Повороты и перемещения считаются малыми.
5. В работе будем обозначать трансляционное малое перемещение частиц как  $\mathbf{u}$ , а поворотное — как  $\boldsymbol{\theta}$ . Перемещения вычисляются в инерциальной системе отсчета, неподвижной относительно жесткого основания. В этой же системе отсчета записываются уравнения динамики.

## 1.1. Смешанная волна в линейном одномерном анизотропном континууме, не имеющем симметрии отражения

Предложим к рассмотрению следующую микроструктурную модель:

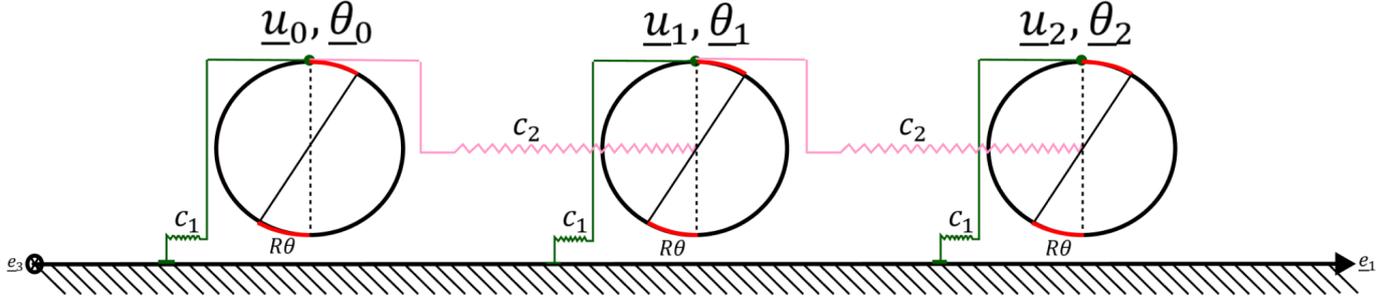


Рис. 1.1: Модель 1 одномерной анизотропной среды без симметрии отражения

Также рассмотрим вторую модель, отразив пружины  $c_1$  относительно горизонтальной и вертикальной осей, проходящих через центр масс каждого тела:

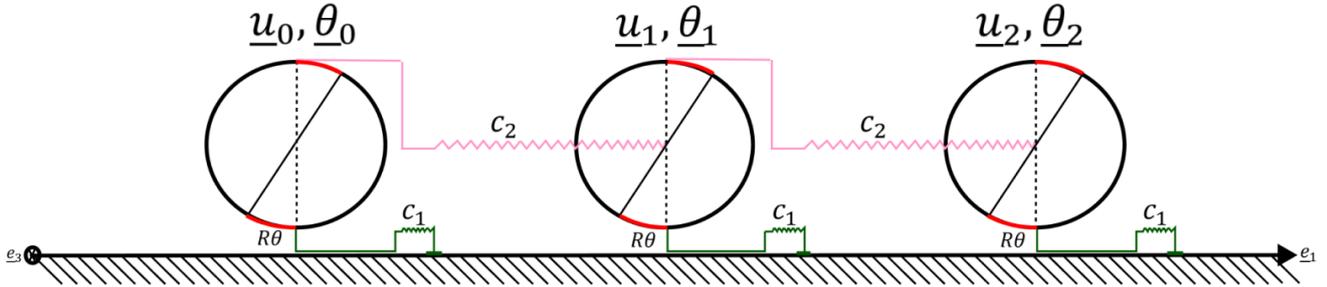


Рис. 1.2: Модель 2 одномерной анизотропной среды без симметрии отражения

Рассмотрим обе модели и найдем для них уравнения Кристоффеля (уравнения свободных гармонических колебаний в терминах частот и волновых чисел), дисперсионные соотношения, сравним их с результатами работ [22], [9], по результатам сравнения определим, нуждается ли в дальнейшем усложнении континуума.

Однако даже на данном этапе можно предположить, что нам придется рассмотреть более сложный континуум, поскольку в предложенных выше средах поперечная волна, представляющая для нас основной интерес, не существует: она будет продольной по перемещениям и поперечной по

поворотам, для исправления такого недостатка нам придется рассмотреть как минимум плоскую задачу (глава 2). Для сокращения обозначений в дальнейшем будем называть континуум на рисунке 1.1 одномерным континуумом 1, на рисунке 1.2 одномерным континуумом 2.

Заметим, что рассматриваемые среды имеют достаточно простой вид, поэтому при выводе уравнений движения не будем прибегать к уравнениям Лагранжа второго рода, также нам не придется прибегать к использованию векторов, поскольку сразу можно сказать, что  $\underline{\mathbf{u}} = u\mathbf{e}_1$ ;  $\underline{\boldsymbol{\theta}} = \theta\mathbf{e}_3$ , поэтому сразу будем писать уравнения движения в проекциях на оси, сонаправленные с  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_3$ .

## 1.2. Дисперсионные соотношения одномерных линейных континуумов предложенного вида

Получим уравнения Кристоффеля и дисперсионные кривые для предложенных моделей.

### 1.2.1. Смешанная волна в одномерном континууме 1

В силу малости поворотов можем утверждать, что для сил  $F_{c_1}, F_{c_2}$ , действующих на тело-точку со стороны пружин с жесткостями  $c_1$  и  $c_2$ , соответственно, выполняется:

$$\begin{aligned} F_{c_1} &= -c_1 R\theta_1 - c_1 u_1 = -c_1(R\theta_1 + u_1) \rightarrow \text{вклад } c_1 \\ F_{c_2} &= c_2 R\theta_0 + c_2(u_2 - u_1) - c_2(u_1 - u_0) - c_2 R\theta_1 \rightarrow \text{вклад } c_2 \\ F &= F_{c_1} + F_{c_2} = -c_1(R\theta_1 + u_1) + c_2 R\theta_0 + c_2(u_2 - u_1) - c_2(u_1 - u_0) - c_2 R\theta_1 = \\ &= c_2(u_2 - 2u_1 + u_0) - c_2 R(\theta_1 - \theta_0) - c_1(R\theta_1 + u_1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Общая сила, действующая на тело-точку с трансляционным и поворотным смещениями  $u_1, \theta_1$ , соответственно, равна  $F$ , однако полученное нами выражение дискретно, проведем континуализацию. Для этого рассмотрим разложения в ряд Тейлора перемещений в окрестности отсчетной конфигурации, где мы принимаем перемещения равными нулю, примем расстояние между телами в отсчетной конфигурации равным  $h = o(1)$ , разложение

проведем до малых 2-го порядка:

$$\begin{cases} u(x+h) = u(x) + \frac{du}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + o^2(1) \\ u(x-h) = u(x) - \frac{du}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2}h^2 + o^2(1) \end{cases} \quad (1.2)$$

Сложим первое уравнения системы (1.2) со вторым и получим:

$$\begin{aligned} u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) &= \frac{d^2u}{dx^2}h^2 + o^2(1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} &\approx \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Разложим следующее в ряд Тейлора и получим аппроксимацию производной первого порядка:

$$\begin{cases} u(x+h) - u(x) = \frac{du}{dx}h + o(1) \Rightarrow \frac{du}{dx} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ u(x-h) - u(x) = -\frac{du}{dx}h + o(1) \Rightarrow \frac{du}{dx} \approx \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \end{cases} \quad (1.4)$$

Таким образом, если в качестве  $x$  взять положение тела-точки с координатами  $u_1, \theta_1$ , то при  $x = x_1$ , переобозначив  $u = u_1, \theta = \theta_1, f' = \frac{df}{dx}$ , воспользуемся (1.3), (1.4) получим:

$$F = c_2h^2u'' - c_2Rh\theta' - c_1(R\theta + u) = c_2(h^2u'' - Rh\theta') - c_1(R\theta + u) \quad (1.5)$$

Момент вычисляем относительно центра масс тела-точки. Проведем аналогичные действия с моментами  $M_{c_1}, M_{c_2}$  сил со стороны пружины с жесткостью  $c_1$  и правой пружины с жесткостью  $c_2$ , соответственно:

$$\begin{aligned} M_{c_1} &= RF_1 \rightarrow \text{вклад } c_1 \\ M_{c_2} &= c_2R(u_2 - u_1) - c_2R^2\theta_1 \rightarrow \text{вклад } c_2 \\ M &= M_{c_1} + M_{c_2} = c_2R(u_2 - u_1) - c_2R^2\theta_1 - c_1R(R\theta_1 + u_1) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Левая пружина с жесткостью  $c_2$  не создает момента относительно центра масс, к которому прикреплена шарнирно. Здесь  $M$  — суммарный момент, действующий на тело-точку, вычисленный относительно ее центра

масс в отсчетной конфигурации. После континуализации и аналогичных переобозначений, которые делались при поиске результирующей силы, получим:

$$M = c_2 R(hu' - R^2\theta) - c_1 R(R\theta + u) \quad (1.7)$$

Таким образом, зная момент сил (1.7) и результирующую сил (1.5), действующих на любое тело-точку, запишем уравнения движения для одномерного континуума 1:

$$\begin{cases} m\ddot{u} = c_2(h^2u'' - Rh\theta') - c_1(R\theta + u) \\ I\ddot{\theta} = c_2R(hu' - R\theta) - c_1R(R\theta + u) \end{cases} \quad (1.8)$$

Получив уравнения движения, мы можем приступить к выводу дисперсионных соотношений. Поскольку мы рассматриваем гармоническую волну, распространяющуюся вдоль оси абсцисс, то решение системы будем искать в виде:  $u = A_1 e^{i(\omega t + kx)}$ ;  $\theta = A_0 e^{i(\omega t + kx)}$ . Данные уравнения допускают частные решения  $u = A_1 e^{i\omega_1 t}$ ,  $\theta = A_0 e^{i\omega_0 t}$ . Частоты  $\omega_{0,1}$  называются парциальными для соответствующих степеней свободы. Из закона баланса моментов выразим  $A_0$  через  $A_1$  и подставим в закон баланса сил, в результате получим уравнение Кристоффеля для трансляционных перемещений.

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 = -c_2(k^2 h^2 A_1 + ikRhA_0) - c_1(RA_0 + A_1) \\ -I\omega^2 A_0 = c_2R(ikhA_1 - RA_0) - c_1R(RA_0 + A_1) \end{cases} \quad (1.9)$$

Из второго уравнения получаем:

$$A_0 = \frac{(c_1 R - ikh c_2 R)}{I(\omega^2 - \underbrace{\frac{(c_2 + c_1)R^2}{I}}_{\omega_0^2})} A_1 = \frac{(c_1 R - ikc_2 Rh)}{I(\omega^2 - \omega_0^2)} A_1 \quad (1.10)$$

Подставим (1.10) в первое уравнение системы (1.9), получим дисперсионное соотношение:

$$m \left( \omega^2 - \frac{\overbrace{\omega_1^2}^{\omega_1^2}}{m} - \frac{c_1^2 R^2}{I} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \right) - c_2 h^2 k^2 - \frac{c_2^2 R^2 h^2}{I(\omega^2 - \omega_0^2)} k^2 = 0 \quad (1.11)$$

Введем новые обозначения:

$$A_{11} = m; \quad A_{00} = I; \quad C_{10} = c_1 R; \quad N = c_2 R h; \quad \gamma = c_2 h^2 \quad (1.12)$$

Итого получаем:

$$\left( A_{11}(\omega^2 - \omega_1^2) - \frac{C_{10}^2}{A_{00}} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \right) - \left( \gamma + \frac{N^2}{A_{00}(\omega^2 - \omega_0^2)} \right) k^2 = 0 \quad (1.13)$$

При сравнении с результатами работ [9], [22] несложно увидеть, что (1.13) имеет некоторые совпадения с ними, однако не имеет наиболее интересного для нас чисто мнимого члена, содержащего произведения перевязок обоих типов, поэтому любое решение полученного нами уравнения — это плоская волна с линейной поляризацией. Волновое число будет либо вещественным, либо чисто мнимым.

Преобразуем и проанализируем данные дисперсионные соотношения:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{A_{11}(\omega^2 - \omega_1^2) - \frac{C_{10}^2}{A_{00}} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)}}{\gamma + \frac{N^2}{A_{00}(\omega^2 - \omega_0^2)}} = \frac{A_{11}A_{00} \left( (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{C_{10}^2}{A_{00}A_{11}} \right)}{A_{00}\gamma \left( (\omega^2 - \omega_0^2) + \frac{N^2}{A_{00}\gamma} \right)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\gamma}{A_{11}} k^2 &= \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \frac{C_{10}^2}{A_{00}A_{11}}}{\omega^2 - \left( \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma} \right)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Воспользуемся теорией размерности для правильного введения новых обозначений:

1.  $\left[ \frac{C_{10}^2}{A_{00}A_{11}} \right] = \left[ \frac{c_1^2 R^2}{A_{00}A_{11}} \right] = \frac{\text{Н}^2}{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг}^2 \cdot \frac{\text{м}^2}{\text{с}^4}}{\text{кг}^2 \cdot \text{м}^2} = \frac{1}{\text{с}^4} \Rightarrow$  Пусть  $\hat{\omega}^4 = \frac{C_{10}^2}{A_{00}A_{11}}$
2.  $\left[ \frac{N^2}{A_{00}\gamma} \right] = \left[ \frac{c_2^2 R^2 h^2}{A_{00}c_2 h^2} \right] = \frac{\text{Н}^2 \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Н}}{\text{кг} \cdot \text{м}} = \frac{1}{\text{с}^2} \Rightarrow$  Пусть  $\omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma}$
3.  $\left[ \frac{\gamma}{A_{11}} \right] = \left[ \frac{c_2 h^2}{A_{11}} \right] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} = \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^2 \Rightarrow$  имеет размерность скорости. Это квадрат скорости продольной трансляционной волны при  $\theta \equiv 0$ ,  $c_1 = 0$ . Пусть  $c_\gamma^2 = \frac{\gamma}{A_{11}}$ .
4. Проверим размерность (1.14):  $\frac{1}{\text{с}^2} = \frac{\frac{1}{\text{с}^4}}{\frac{1}{\text{с}^2}} = \frac{1}{\text{с}^2} \Rightarrow$  размерности совпадают.

Итого имеем:

$$c_\gamma^2 k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \hat{\omega}^4}{\omega^2 - \omega_*^2} \quad (1.15)$$

Заметим, что очень похожее соотношение было получено в работе [22] для продольной волны в изотропной линейной упругой среде общего вида с точностью до вида знаменателя. Рассмотрим числитель (1.15):

$$\omega^4 - (\omega_0^2 + \omega_1^2)\omega^2 + (\omega_0^2\omega_1^2 - \hat{\omega}^4) = 0 \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^2 &= \frac{(\omega_0^2 + \omega_1^2) \pm \sqrt{(\omega_0^2 + \omega_1^2)^2 - 4\omega_0^2\omega_1^2 + 4\hat{\omega}^4}}{2} = \\ &= \frac{(\omega_0^2 + \omega_1^2) \pm \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\hat{\omega}^4}}{2} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Итого имеем:

$$\begin{aligned} c_{\gamma}^2 k^2 &= \frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2 - \omega_*^2}, \text{ где} \\ \omega_{\pm}^2 &= \frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right)^2 + \hat{\omega}^4} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Более подробно оценим  $\omega_{\pm}$ . Очевидно, что  $\omega_+^2 > \omega_-^2$ , осталось понять, может ли  $\omega_-^2$  быть меньше нуля. Ясно, что подкоренное выражение всегда будет иметь неотрицательное значение. Запишем энергию деформации:

$$U = \frac{c_1}{2}(R\theta + u)^2 + \frac{c_2}{2}(hu' - R\theta)^2 \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}R^2(c_1 + c_2)\theta^2 + \frac{c_1 u^2}{2} + \frac{c_2 h^2 (u')^2}{2} + c_1 R\theta u + -c_2 Rhu'\theta = \\ &= \frac{C_{00}\theta^2}{2} + \frac{C_{11}u^2}{2} + \frac{\gamma(u')^2}{2} + C_{10}\theta u - Nu'\theta \end{aligned} \quad (1.20)$$

После введения обозначений перепишем энергию следующим образом:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{c_1}{2}(R\theta + u)^2 + \frac{\gamma}{2}((u')^2 - 2\frac{N}{\gamma}u'\theta + \left(\frac{N}{\gamma}\right)^2\theta^2 - \left(\frac{N}{\gamma}\right)^2\theta^2) + \frac{1}{2}c_2R^2\theta^2 = \\
&= \frac{c_1}{2}(R^2\theta^2 + 2R\theta u + u^2) + \frac{\gamma}{2}(u' - \frac{N}{\gamma}\theta)^2 - \frac{N^2}{2\gamma}\theta^2 + \frac{1}{2}c_2R^2\theta^2 = \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{R^2(c_1 + c_2)}_{C_{00}}\theta^2 + \frac{\gamma}{2}(u' - \frac{N}{\gamma}\theta)^2 - \frac{N^2}{2\gamma}\theta^2 + \frac{c_1}{2}(u + R\theta)^2 - \frac{1}{2}\underbrace{c_1R^2}_{\frac{c_{10}^2}{c_{11}}}\theta^2 = \\
&= \frac{\gamma}{2}(u' - \frac{N}{\gamma}\theta)^2 + \frac{C_{11}}{2}(u + R\theta)^2 + \frac{1}{2}(C_{00} - (\frac{N^2}{\gamma} + \frac{C_{10}^2}{C_{11}}))\theta^2
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Таким образом, после сравнения с (1.20) и некоторого анализа, получим, что для неотрицательной определенности энергии деформации необходимо и достаточно:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = c_1 > 0 \\ \gamma = c_2 h^2 > 0 \Rightarrow c_2 > 0 \\ C_{00} = \underbrace{\frac{N^2}{\gamma}}_{>0} + \underbrace{\frac{C_{10}^2}{C_{11}}}_{>0} > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{00} > \frac{C_{10}^2}{C_{11}} \\ C_{00} > \frac{N^2}{\gamma} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{10}^2 < \overbrace{C_{00}C_{11}}^{>0} \\ C_{00} > \frac{N^2}{\gamma} \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{1.22}$$

Рассмотрим  $\omega_-$ :

$$\begin{aligned}
\omega_-^2 &= \frac{\frac{C_{00}}{A_{00}} + \frac{C_{11}}{A_{11}}}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{C_{00}^2}{A_{00}^2} + \frac{C_{11}^2}{A_{11}^2}\right) + \frac{1}{2A_{00}A_{11}} \underbrace{(2C_{10}^2 - C_{00}C_{11})}_{<2C_{00}C_{11} - C_{00}C_{11} = C_{00}C_{11} > 0}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \omega_-^2 > \frac{\frac{C_{00}}{A_{00}} + \frac{C_{11}}{A_{11}}}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{C_{00}}{A_{00}} + \frac{C_{11}}{A_{11}}\right)^2} = 0 \Rightarrow \omega_-^2 > 0 \Rightarrow \\
\omega_- &= \sqrt{\frac{\frac{C_{00}}{A_{00}} + \frac{C_{11}}{A_{11}}}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{C_{00}^2}{A_{00}^2} + \frac{C_{11}^2}{A_{11}^2}\right) + \frac{1}{2A_{00}A_{11}} \underbrace{(2C_{10}^2 - C_{00}C_{11})}_{<2C_{00}C_{11} - C_{00}C_{11} = C_{00}C_{11} > 0}}} > 0
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Итого, имеем:

1.  $\omega_+^2 > \omega_-^2 > 0 \Rightarrow \omega_+ > \omega_-$
2.  $\omega_*^2 = \omega_0^2 - \underbrace{\frac{N^2}{A_{00}\gamma}}_{>0} \Rightarrow \omega_0 > \omega_*$
3.  $\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right)^2 + \hat{\omega}^4}$  сравним с  $\omega_0^2$

$$\omega_+^2 - \omega_0^2 = \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right)^2 + \hat{\omega}^4}}_{> \left|\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right|} - \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2} > 0 \Rightarrow \omega_+ > \omega_0 \quad (1.24)$$

$$\omega_-^2 - \omega_0^2 = -\underbrace{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right)^2 + \hat{\omega}^4}}_{> \left|\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right|} - \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2} < 0 \Rightarrow \omega_- < \omega_0$$

Тогда:  $\omega_+ > \omega_0 > \omega_- > 0$

4. Действуя по аналогии с  $\omega_1$ , получим:  $\omega_+ > \omega_1 > \omega_-$

Заметим, что при  $\omega \rightarrow \omega_* \Rightarrow k \rightarrow \infty$ , при  $\omega \rightarrow \omega_{\pm} \Rightarrow k \rightarrow 0$ .

Рассмотрим пределы:

- 1)  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\omega c_{\gamma}} \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2 - \omega_*^2}} \right) = \frac{1}{c_{\gamma}}$
- 2)  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{c_{\gamma}} \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)}{\omega^2 - \omega_*^2}} - \frac{\omega}{c_{\gamma}} \right) = 0$

(1.25)

Из (1.25) нашли горизонтальную асимптоту:  $k \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{c_{\gamma}}$ . Рассмотрим 4 случая:

- 1)  $\omega_1 > \omega_0 \Rightarrow \omega_1 > \omega_*$
- 2)  $\omega_1 < \omega_0; \quad \omega_1 > \omega_*$
- 3)  $\omega_1 < \omega_0; \quad \omega_1 < \omega_*$
- 4)  $\omega_1 < \omega_0; \quad \omega_1 = \omega_*$

(1.26)

I) Объединим первые два случая в один:  $\omega_1 > \omega_*$  и  $\omega_1 \leq \omega_0$

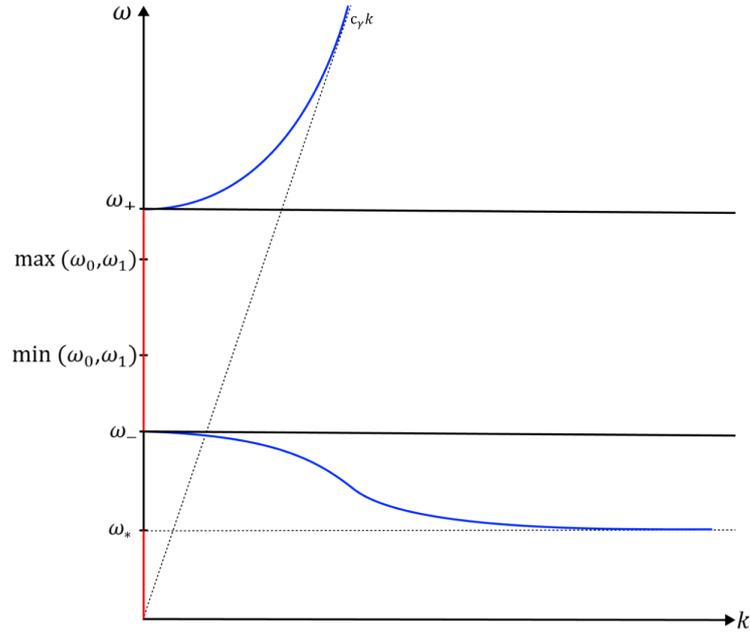


Рис. 1.3: Дисперсионные кривые для одномерной среды, случаи 1,2

Из дисперсионной кривой видим, что в диапазоне частот  $\omega_- \leq \omega \leq \omega_+$  и  $\omega < \omega_*$  находятся запрещенные зоны, где волновое число является чисто мнимым, бегущая часть волны отсутствует, ее амплитуда экспоненциально убывает по координате. По-видимому, в реальных задачах это будет означать, что смешанная волна будет локализована вблизи источника с частотой из запрещенной зоны. Также в диапазоне  $\omega_* < \omega < \omega_-$  находится падающий участок дисперсионной кривой, то есть при обозначенных выше условиях предложенная среда является дважды отрицательным акустическим метаматериалом. Оба случая, соответствующие рисунку 1.3, объединяет условие  $\omega_1 > \omega_*$ , то есть  $\omega_1^2 > \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma}$ . Не будем рассматривать случай  $\omega_* > \omega_-$ , поскольку тогда рассматриваемая среда не будет являться дважды отрицательным акустическим метматериалом, в отличие от случая  $\omega_* < \omega_-$ .

1.  $\omega_1 > \omega_0$

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 > - \underbrace{\frac{N^2}{A_{00}\gamma}}_{>0} \Rightarrow \text{выполняется всегда, когда } \omega_1 > \omega_0 \Rightarrow \frac{C_{11}}{A_{11}} > \frac{C_{00}}{A_{00}}$$

$$\frac{c_1}{m} > \frac{R^2(c_1 + c_2)}{I} \Rightarrow \frac{I}{mR^2} > 1 + \frac{c_2}{c_1} - \text{условия реализации данного случая.}$$

2.  $\omega_1 < \omega_0$

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 > - \underbrace{\frac{N^2}{A_{00}\gamma}}_{>0} \Rightarrow \omega_0^2 - \omega_1^2 < \frac{N^2}{A_{00}\gamma} \Rightarrow N^2 > \gamma(C_{00} - \frac{A_{00}}{A_{11}}C_{11})$$

$$c_1(1 - \frac{I}{mR^2}) < 0 \text{ с учетом неотрицательной определенности энергии } (c_1 > 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{I}{mR^2} > 1 - \text{условия реализации данного случая.}$$

(1.27)

II)  $\omega_1 < \omega_0$ ;  $\omega_1 < \omega_*$

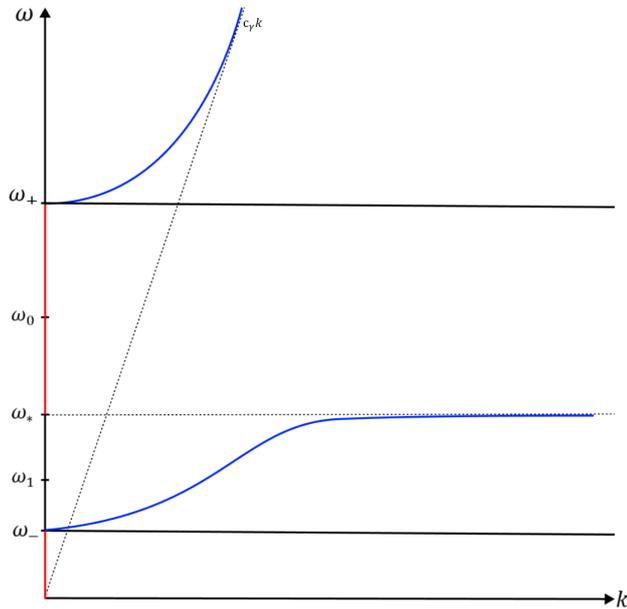


Рис. 1.4: Дисперсионные кривые для одномерной среды, случай 3

Из рисунка 1.4 видно, что в диапазонах  $0 \leq \omega \leq \omega_-$  и  $\omega_* < \omega \leq \omega_+$  находятся запрещенные зоны. При таких условиях предложенная нами среда

будет являться единожды отрицательным акустическим метаматериалом.

$$\omega_1^2 < \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma} \Rightarrow \underbrace{\omega_1^2 - \omega_0^2}_{<0} < -\frac{N^2}{A_{00}\gamma} \Rightarrow \omega_0^2 - \omega_1^2 > \frac{N^2}{A_{00}\gamma} \Rightarrow$$

$$N^2 < \gamma(C_{00} - \frac{A_{00}}{A_{11}}C_{11}) \Rightarrow \frac{I}{mR^2} < 1 \text{ — условия реализации данного случая} \quad (1.28)$$

III)  $\omega_1 < \omega_0$ ;  $\omega_1 = \omega_*$

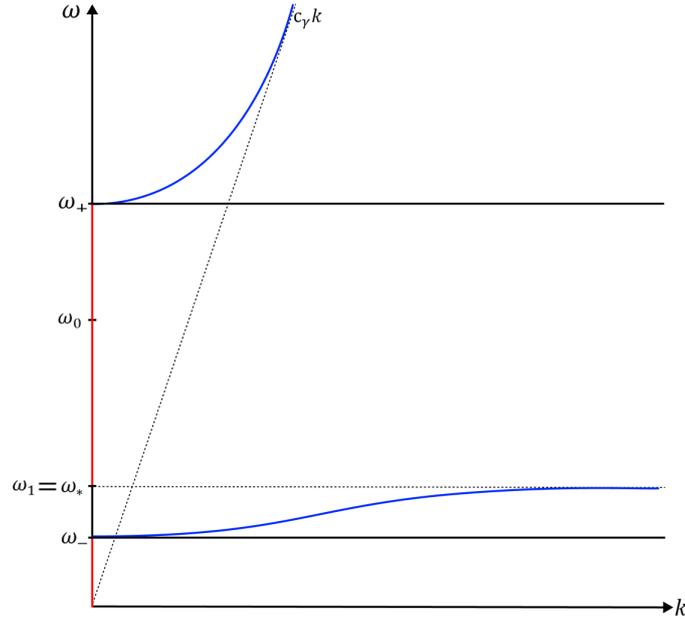


Рис. 1.5: Дисперсионные кривые для одномерной среды, случай 4

Из рисунка 1.5 видно, что в таком случае запрещенные зоны находятся в диапазоне  $0 \leq \omega \leq \omega_-$ ;  $\omega_1 = \omega_* < \omega \leq \omega_+$ . Заметим, что случай 3 очень похож на 4 за исключением  $\omega_1 = \omega_*$ . В таком случае среда также является единожды отрицательным акустическим метаматериалом.

$$\omega_1^2 = \omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma} \Rightarrow \frac{N^2}{A_{00}\gamma} = \omega_0^2 - \omega_1^2 \Rightarrow \frac{N^2}{A_{00}\gamma} = \frac{C_{00}}{A_{00}} - \frac{C_{11}}{A_{11}} \quad (1.29)$$

$$\frac{c_2^2 R^2 h^2}{c_2 h^2 I} = \frac{c_2 R^2}{I} = \frac{R^2(c_1 + c_2)}{I} - \frac{c_1}{m} \Rightarrow \frac{I}{mR^2} = 1$$

Таким образом, были получены условия на параметры среды, при которых предложенная нами модель будет являться единожды или дважды отрицательным акустическим метаматериалом. Управлять шириной запрещенных зон позволяют параметры:  $N, \gamma, C_{00}, C_{11}, A_{00}, A_{11}$ , рассмотрим каждый из представленных выше случаев отдельно:

## 1. Случаи 1,2: $\omega_1 > \omega_*$ и $\omega_1 \leq \omega_0$

Данный случай, хоть и дает очень интересный результат - среда является дважды отрицательным акустическим метаматериалом, недостижим в рамках предложенной нами модели, т.к. исходя из полученных нами условий:  $\frac{I}{mR^2} > 1$  или  $\frac{I}{mR^2} > 1 + \frac{c_2}{c_1}$ , а максимальное возможное значение момента инерции  $I = mR^2$  — сферы с массой сосредоточенной у поверхности. Однако, если рассмотреть модель, где тела представляют собой безынерционные сферы, с массой, прикрепленной к ним снаружи, то условия данного случая будут выполнены и мы сможем утверждать, что предложенная нами среда будет являться дважды отрицательным акустическим метаматериалом.

## 2. Случай 3: $\omega_1 < \omega_0$ ; $\omega_1 < \omega_*$

В данном случае мы имеем две запрещенные зоны:

$$\omega_* < \omega \leq \omega_+; \quad 0 \leq \omega \leq \omega_-$$

### 2.1) $\omega_* < \omega \leq \omega_+$

Рассмотрим разность, которая равна ширине запрещенной зоны:

$$\omega_+ - \omega_* = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right)^2 + \hat{\omega}^4}} - \sqrt{\omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma}}, \quad (1.30)$$

$$\text{где } \omega_0^2 = \frac{R^2(c_1+c_2)}{I}; \quad \omega_1^2 = \frac{c_1}{m}; \quad \hat{\omega}^4 = \frac{c_1^2 R^2}{mI}; \quad \frac{N^2}{A_{00}\gamma} = \frac{c_2 R^2}{I}.$$

Воспользуемся выражением параметров через микроструктуру и получим следующее:

$$\omega_+ - \omega_* = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \frac{c_1}{m} \frac{mR^2}{I} \left(1 + \frac{I}{mR^2} + \frac{c_2}{c_1}\right) +}{+ \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{c_1}{m} \frac{mR^2}{I} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} - \frac{I}{mR^2}\right)\right)^2 + \frac{mR^2}{I} \frac{c_1}{m}}} - \sqrt{\frac{c_1}{m} \cdot \frac{mR^2}{I}} \quad (1.31)$$

Таким образом, нами были получены 3 параметра, влияющих на ширину запрещенной зоны:

$$p_0 = \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}; \quad p_1 = \frac{mR^2}{I}; \quad p_2 = \frac{c_2}{c_1}$$

$$\omega_+ - \omega_* = p_0 \left[ \sqrt{\frac{1}{2}(p_1(1+p_2)+1) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(p_1(1+p_2)-1)\right)^2 + p_1}} - \sqrt{p_1} \right] \quad (1.32)$$

Полученные нами параметры независимы, изменение какого-либо параметра не приводит к изменению других.

Влияние параметра  $p_0$  очевидно, ширина запрещенной зоны ему прямо пропорциональна. Поэтому, узнав, как влияет на ширину зоны выражение в квадратных скобках, мы определим, как изменяется ее ширина. Проведем численный анализ данного соотношения при всех возможных значениях параметра  $p_1 = \frac{mR^2}{I} > 1 \Rightarrow p_1 > 1$ . Заметим следующее: если увеличивать  $p_2$  при фиксированном  $p_1$ , то  $\omega_+ - \omega_*$  возрастает, иначе — убывает. В случае увеличения параметра  $p_1$  при фиксированном значении  $p_2$  поведение ширины запрещенной зоны более сложно, требуется проводить дополнительный анализ:

$$\frac{\partial \omega_+ - \omega_*}{\partial p_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial s}{\partial p_1} - \frac{1}{\sqrt{p_1}} \right), \quad (1.33)$$

где

$$s = \frac{1}{2}(p_1(1+p_2)+1) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(p_1(1+p_2)-1)\right)^2 + p_1} \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial s}{\partial p_1} = \frac{1}{2}(1+p_2) + \frac{\frac{1}{2}(p_1+p_1p_2-1)(1+p_2)+1}{\sqrt{(p_1+p_1p_2-1)^2+4p_1}} \quad (1.35)$$

Очевидно, что в случае  $\frac{\partial \omega_+ - \omega_*}{\partial p_1} > 0$  ширина запрещенной зоны увеличивается, а иначе уменьшается. Знак этой производной совпадает со знаком функции

$$f(p_1, p_2) = \frac{\partial s}{\partial p_1} \sqrt{p_1} - \sqrt{s} \quad (1.36)$$

Ширина зоны увеличивается с ростом  $p_1$  для  $p_1 \gg p_2$ :

$$\frac{\partial s}{\partial p_1} \xrightarrow{p_1 \gg p_2} (1+p_2) \Rightarrow \underbrace{\sqrt{p_1}(1+p_2)}_{p_2 > 0 \Rightarrow > 1} - \sqrt{p_1} > 0 \quad (1.37)$$

Рассматривались следующие диапазоны параметров:  $1 < p_1 < 1000$ ;  $0 < p_2 < 1000$ , нижние границы обусловлены рассматриваемым нами случаем и неотрицательной определенностью энергии. Численно показано (рис. 1.6), что для достаточно больших значений параметров  $p_1, p_2$  ширина запрещенной зоны растет с ростом  $p_1$ . В то же время существует область параметров  $\varepsilon_1 = p_1 - 1, \varepsilon_2 = p_2$  (один из них должен быть невелик), где рост параметра  $p_1$  вызывает уменьшение запрещенной зоны (рис. 1.7).

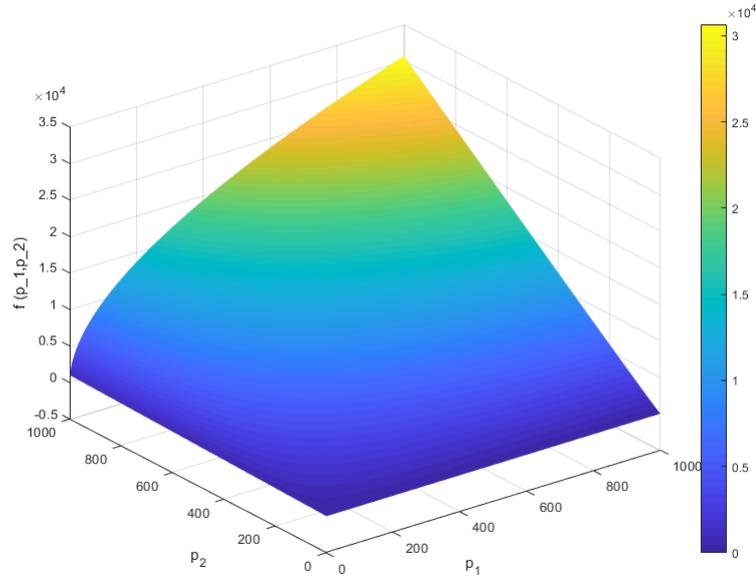


Рис. 1.6: Поверхность  $f(p_1, p_2) = \frac{\partial s}{\partial p_1} \sqrt{p_1} - \sqrt{s}$ , определяющая знак  $\frac{\partial \omega_+ - \omega_*}{\partial p_1}$ . Большие значения  $p_1, p_2$

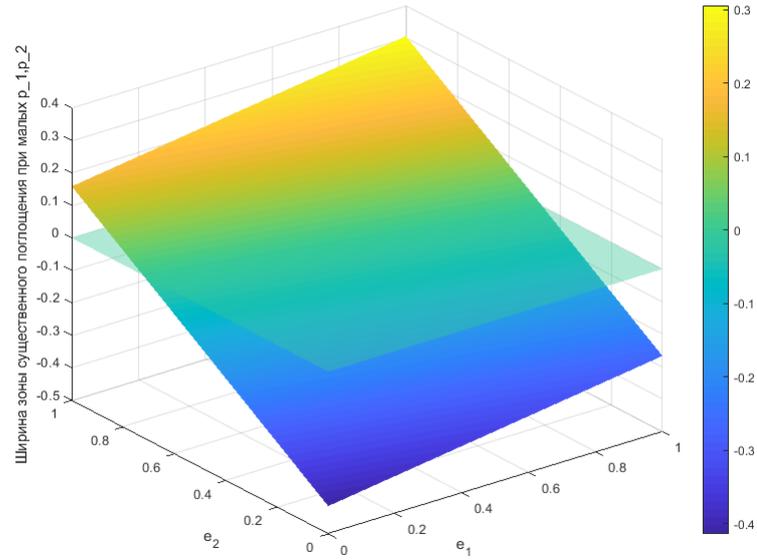
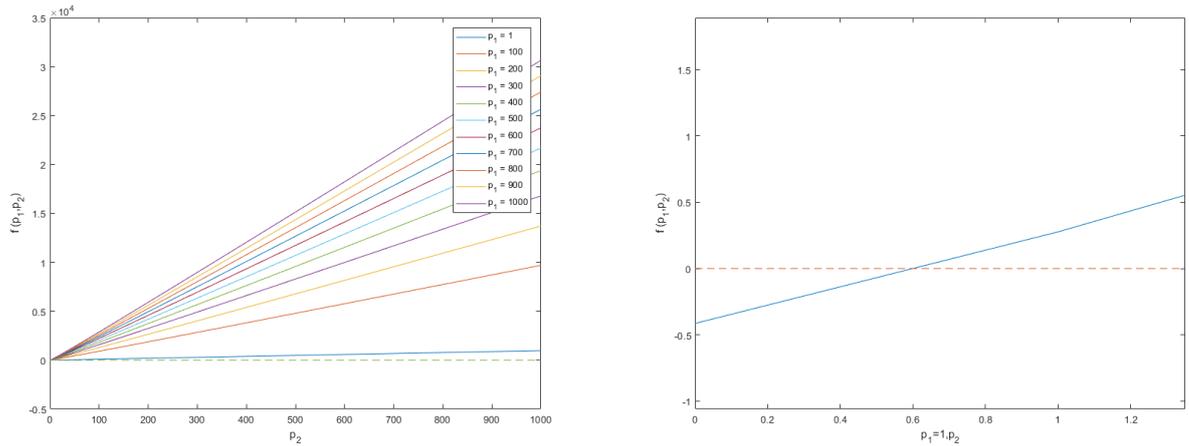


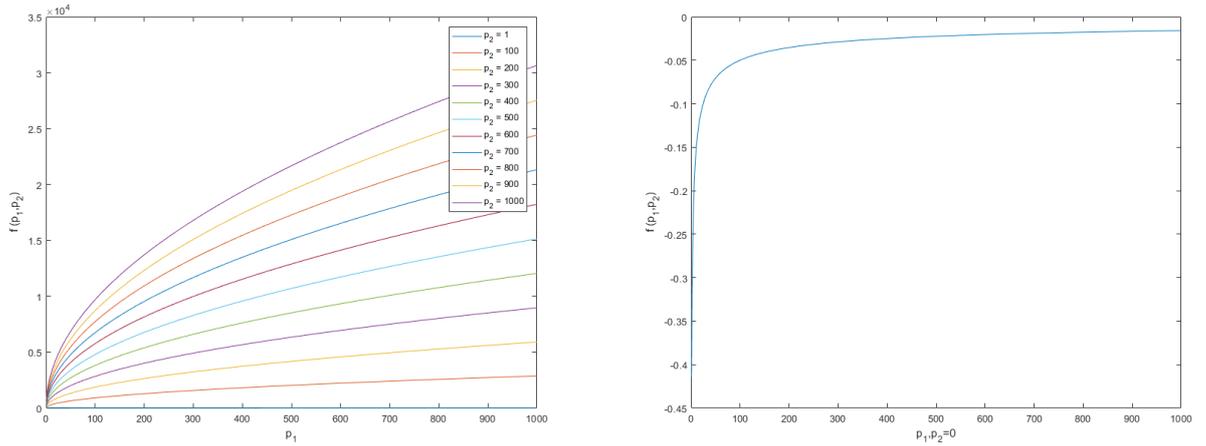
Рис. 1.7: Поверхность  $f(\epsilon_1 = p_1 - 1, \epsilon_2 = p_2) = \frac{\partial s}{\partial p_1} \sqrt{p_1} - \sqrt{s}$ , определяющая знак  $\frac{\partial \omega_+ - \omega_*}{\partial p_1}$ . Небольшие значения  $p_1 - 1, p_2$ . При переходе через черную плоскость ширина запрещенной зоны меняет характер монотонности по  $p_1$

Напомним, что  $p_1 - 1$  показывает, насколько тело-точка отличается от массивной оболочки, а  $p_2$  — это соотношение жесткостей пружины, соединяющей тела-точки, и пружины, присоединенной к жесткому основанию.

Для большей наглядности приведем и профили  $f(p_1, p_2)$ :



(а) Профили  $f(p_1, p_2)$  при  $p_1 = const$

(b) Профили  $f(p_1, p_2)$  при  $p_2 = const$ Рис. 1.8: Профили  $f(p_1, p_2)$ 

Таким образом, нами было показано, что ширина запрещенной зоны — возрастающая функция при фиксированных  $p_0, p_1$ , то есть при увеличении  $p_2$  при  $p_0, p_1 = const$  ширина запрещенной зоны увеличивается, иначе — уменьшается; то же имеет место при фиксированных  $p_1, p_2$  и изменении  $p_0$ . Для постоянных  $p_0, p_2$  ширина запрещенной зоны растет с ростом  $p_1$  при  $p_1 \gg p_2$  и при конечных достаточно больших  $p_1 - 1, p_2$ . Если хотя бы одна из последних величин достаточно мала, то ширина запрещенной зоны убывает с ростом  $p_1$ .

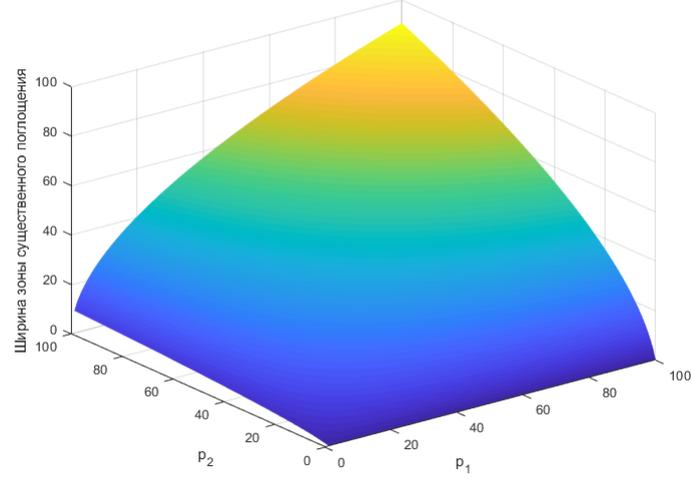
$$z(p_1, p_2) = \sqrt{\frac{1}{2}(p_1(1 + p_2) + 1) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(p_1(1 + p_2) - 1)\right)^2 + p_1}} - \sqrt{p_1} \quad (1.38)$$

Минимум ширины запрещенной зоны по  $p_2$  достигается при  $p_2 = 0$ :

$$\min(\omega_+ - \omega_*) = p_0(\sqrt{p_1 + 1} - \sqrt{p_1}). \quad (1.39)$$

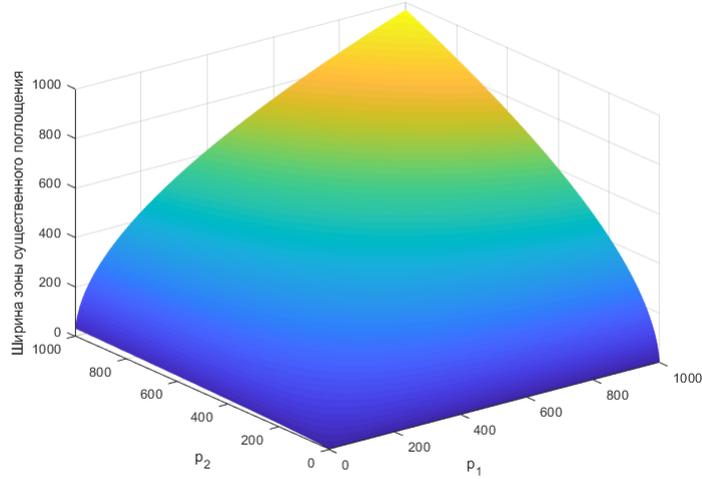
Нельзя утверждать с уверенностью, что максимум достигается при  $p_1 \rightarrow \infty$ ,  $p_2 \rightarrow \infty$ , это сложная аналитическая задача. Однако мы видим это на численных примерах (рис. 1.10). Будем увеличивать максимумы  $p_1, p_2$  и наблюдать за шириной зоны при максимальных значениях  $p_1, p_2$ . Влияние  $p_0$  очевидно, поэтому примем его равным единице:

Ширина зоны существенного поглощения:  $\omega_+ - \omega_-$  при  $\max(p_1) = 100, \max(p_2) = 100, p_0 = 1$



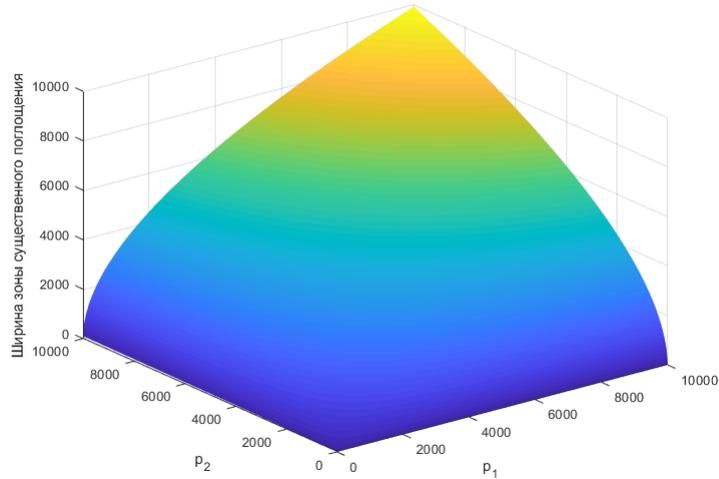
(a) Ширина запрещенной зоны при  $\max(p_1), \max(p_2) = 100$

Ширина зоны существенного поглощения:  $\omega_+ - \omega_-$  при  $\max(p_1) = 1000, \max(p_2) = 1000, p_0 = 1$



(b) Ширина запрещенной зоны при  $\max(p_1), \max(p_2) = 1000$

Ширина зоны существенного поглощения:  $\omega_+ - \omega_-$  при  $\max(p_1) = 10000, \max(p_2) = 10000, p_0 = 1$



(c) Ширина запрещенной зоны при  $\max(p_1), \max(p_2) = 10000$

Рис. 1.10: Ширина запрещенной зоны

Видим, что чем больше максимальные значения  $p_1, p_2$ , тем больше ширина запрещенной зоны, поэтому можно сказать:

$$\max(z) \xrightarrow{p_1 \rightarrow \infty, p_2 \rightarrow \infty} \infty \quad (1.40)$$

То есть для ширины запрещенной зоны существует нижняя граница, она будет существовать при любых  $p_0, p_1, p_2$ , граница сверху отсутствует.

## 2.2) $0 \leq \omega \leq \omega_-$

Ширина данной запрещенной зоны зависит от значения  $\omega_-$ :

$$\omega_- = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{2}\right)^2 + \hat{\omega}^4}}, \quad (1.41)$$

где  $\hat{\omega}^4 = \frac{c_1^2 R^2}{mI}$  - имеет размерность частоты в четвертой степени.

Представим (1.41) в виде:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{c_1}{2m} \frac{mR^2}{I} \left(1 + \frac{I}{mR^2} + \frac{c_2}{c_1}\right) - \sqrt{\left(\frac{c_1}{2m} \frac{mR^2}{I} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} - \frac{I}{mR^2}\right)\right)^2 + \frac{c_1^2}{m^2} \frac{mR^2}{I}}} \quad (1.42)$$

Вновь получили параметры, влияющие на ширину данной запрещенной зоны:  $p_0 = \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}$ ,  $p_1 = \frac{mR^2}{I}$ ,  $p_2 = \frac{c_2}{c_1}$ , они совпадают с параметрами, влияющими и на другую запрещенную зону.

$$\omega_- = p_0 \sqrt{\frac{1}{2}(p_1(1 + p_2) + 1) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}(p_1(1 + p_2) - 1)\right)^2 + p_1}} \quad (1.43)$$

Влияние параметра  $p_0$  аналогично тому, как это было описано в прошлом пункте, он качественно меняет максимальную и минимальную ширину запрещенной зоны. Поскольку корень — монотонно возрастающая функция, достаточно показать, что подкоренное выражение возрастает при росте параметров  $p_1$  или  $p_2$  при фиксированных остальных, чтобы сделать вывод о том, что  $\omega_-$  возрастает. Имеем те же ограничения на параметры

$p_1 > 1, p_2 > 0$ :

$$\frac{\partial s}{\partial p_1} = \frac{1}{2}(1 + p_2) - \frac{\frac{1}{2}(p_1(1 + p_2) - 1)(1 + p_2) + 1}{\sqrt{(p_1(1 + p_2) - 1)^2 + 4p_1}} \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial s}{\partial p_2} = \frac{1}{2}p_1 \left( 1 - \frac{(p_1(1 + p_2) - 1)}{\sqrt{(p_1(1 + p_2) - 1)^2 + 4p_1}} \right) \quad (1.45)$$

Рассмотрим (1.44):

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial p_1} &= \frac{1}{2}(1 + p_2) - \frac{\frac{1}{2}(p_1(1 + p_2) - 1)(1 + p_2) + 1}{\sqrt{(p_1(1 + p_2) - 1)^2 + 4p_1}} > \frac{1}{2}(1 + p_2) - \\ &- \frac{\frac{1}{2}(p_1(1 + p_2) - 1)(1 + p_2) + 1}{(p_1(1 + p_2) - 1)} = \frac{1}{\underbrace{p_1(1 + p_2) - 1}_{>1}} > 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Рассмотрим (1.45):

$$\frac{\partial s}{\partial p_2} = \frac{1}{2}p_1 \left( 1 - \frac{\overbrace{\frac{(p_1(1 + p_2) - 1)}{\sqrt{(p_1(1 + p_2) - 1)^2 + 4p_1}}}_{>1}}{\overbrace{p_1(1 + p_2) - 1}_{>0}} \right) > 0 \quad (1.47)$$

Таким образом нами было аналитически показано, что (1.43) — возрастающая функция, то есть при увеличении  $p_1$  или  $p_2$  при фиксированных остальных параметрах ширина запрещенной зоны увеличивается, иначе — уменьшается. По аналогии найдем максимальное и минимальное значения ширины данной запрещенной зоны. Стоит отметить, что максимальный порог для нее равен  $\omega_1$  в силу условий данного случая  $\omega_1 < \omega_0$ ,  $\omega_- < \omega_1 < \omega_+$ . Таким образом, данная зона имеет верхнюю границу  $\omega_1 = p_0$ . Найдем минимальное значение ширины данной запрещенной зоны. Поскольку мы показали, что  $\omega_-$  возрастает с ростом параметров  $p_1, p_2$ , а их минимальные и недостижимые значения  $p_1 = 1, p_2 = 0$ , тогда  $\min(\omega_-) \xrightarrow{p_1 \rightarrow 1, p_2 \rightarrow 0} 0$ , что согласуется с (1.24).

### 3. Случай 4: $\omega_1 < \omega_0$ ; $\omega_1 = \omega_*$

Данный случай отличается от предыдущего тем, что  $p_1 = 1$ , в остальном поведение ширины зон существенного поглощения совпадает с тем, что было описано в пункте 2.

#### 1.2.2. Смешанная волна в одномерном континууме 2

Поскольку все действия в данном параграфе будут аналогичны тем, что мы проводили ранее, не будем настолько подробно комментировать вычисления, записывая основные уравнения.

Найдем результирующую силу:

$$\begin{aligned}
 F_{c_1} &= c_1 R \theta_1 - c_1 u_1 = c_1 (R \theta_1 - u_1) \rightarrow \text{вклад } c_1 \\
 F_{c_2} &= c_2 R \theta_0 + c_2 (u_2 - u_1) - c_2 (u_1 - u_0) - c_2 R \theta_1 \rightarrow \text{вклад } c_2 \\
 F &= F_{c_1} + F_{c_2} = c_1 (R \theta_1 - u_1) + c_2 R \theta_0 + c_2 (u_2 - u_1) - c_2 (u_1 - u_0) - c_2 R \theta_1 = \\
 &= c_2 (u_2 - 2u_1 + u_0) - c_2 R (\theta_1 - \theta_0) + c_1 (R \theta_1 - u_1)
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

После континуализации с помощью (1.3), (1.4) получим результирующую силу:

$$F = c_2 h^2 u'' - c_2 R h \theta' + c_1 (R \theta - u) = c_2 (h^2 u'' - R h \theta') + c_1 (R \theta - u) \tag{1.49}$$

Проведем аналогичные действия с моментом сил:

$$\begin{aligned}
 M_{c_1} &= (R \underline{\mathbf{j}} \times [c_1 (R \theta_1 - u_1)] \underline{\mathbf{i}}) \cdot \underline{\mathbf{k}} = -c_1 R (R \theta_1 - u_1) \rightarrow \text{вклад } c_1 \\
 M_{c_2} &= (-R \underline{\mathbf{j}} \times [c_2 (u_2 - u_1) - c_2 R \theta_1] \underline{\mathbf{i}}) \cdot \underline{\mathbf{k}} = c_2 R (u_2 - u_1) - c_2 R \theta_1^2 \rightarrow \text{вклад } c_2 \\
 M &= M_{c_1} + M_{c_2} = -c_2 R^2 \theta_1 + c_2 R (u_2 - u_1) - c_1 R (R \theta_1 - u_1)
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Континуализируем и получаем:

$$M = c_2 R (h u' - R \theta) - c_1 R (R \theta - u) \tag{1.51}$$

По аналогии, зная момент сил (1.51) и результирующую сил (1.49), действующих на любое тело-точку, получим уравнения движения для од-

номерного континуума второго порядка:

$$\begin{cases} m\ddot{u} = c_2(h^2u'' - Rh\theta') + c_1(R\theta - u) \\ I\ddot{\theta} = c_2R(hu' - R\theta) - c_1R(R\theta - u) \end{cases} \quad (1.52)$$

Вновь ищем решение в виде:  $u = A_1e^{i(\omega t + kx)}$ ;  $\theta = A_0e^{i(\omega t + kx)}$ ; пусть  $\omega_{0,1}$  — парциальные частоты поворотных и трансляционных колебаний, соответственно. После подстановки получаем:

$$\begin{cases} -m\omega^2 A_1 = c_2(-k^2h^2A_1 - ikRhA_0) + c_1(RA_0 - A_1) \\ -I\omega^2 A_0 = c_2R(ikhA_1 - RA_0) - c_1R(RA_0 - A_1) \end{cases} \quad (1.53)$$

Из второго уравнения получаем выражение  $A_0$  через  $A_1$ :

$$A_0 = -\frac{c_1R + ic_2kRh}{I(\omega^2 - \underbrace{\frac{(c_2 + c_1)R^2}{I}}_{\omega_0^2})} A_1 = -\frac{c_1R + ic_2kRh}{I(\omega^2 - \omega_0^2)} A_1 \quad (1.54)$$

Подстановка в первое уравнение системы (1.52):

$$\left( m(\omega^2 - \underbrace{\frac{c_1}{m}}_{\omega_1^2}) + \frac{c_1^2R^2}{I} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)} \right) - (c_2h^2 + \frac{c_2^2R^2h^2}{I(\omega^2 - \omega_0^2)})k^2 = 0 \quad (1.55)$$

Получили такое же дисперсионное соотношение, как и в случае одномерного континуума 1 (см. (1.13)), поэтому дальнейшее исследование (1.13) не требуется. Однако связь между амплитудами трансляций и поворотов и уравнения движения в данных средах различны.

## ГЛАВА 2. Одномерная модель гиротропной линейной упругой редуцированной среды с двумерными поперечными смещениями

В предыдущей главе при рассмотрении одномерных сред без симметрии отражения нами были получены дисперсионные соотношения, проведено исследование влияния параметров на них. Однако изначально мы задавались целью построить континуум, который был бы дважды отрицательным акустическим метаматериалом со свойствами, весьма чувствительными к параметрам системы. Для того, чтобы рассмотреть простейшую конкретную модель, обладающую свойствами редуцированной среды с комбинированной взаимосвязью субконтинуумов, рассмотренного в [22], в работе предложена одномерная гиротропная модель среды с двумерными поперечными смещениями.

Гиротропная среда — это среда, свойства которой не меняются при поворотах, но меняются при зеркальных отражениях. В такой среде в разных направлениях волны могут проходить по-разному. Построение даже простейшей модели такой среды требует ввести новый объект: пружину с винтом, и, соответственно, оговорить, к каким предположениям мы будем прибегать при работе с ней. К рассмотрению предлагается следующая модель гиротропной среды:

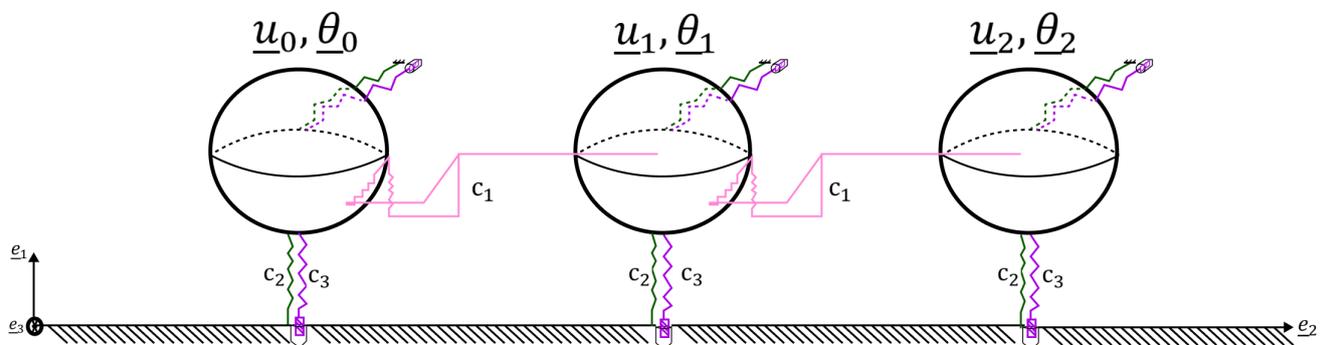


Рис. 2.1: Модель гиротропной одномерной среды

В дальнейшем будем предполагать, что резьба винта на пружине и отверстий правая, метрическая, винт идеален (скользит без трения по резьбе

отверстия), за положительное направление поворота вокруг оси  $\underline{\mathbf{e}}_1$  примем поворот против часовой стрелки, за положительный поворот вокруг оси  $\underline{\mathbf{e}}_3$  — поворот по часовой стрелке. Также полагаем, что тензор инерции шаровой:  $\underline{\mathbf{I}} = I\underline{\mathbf{E}}$ . Нас будут интересовать поперечные волны, поскольку именно они имеют круговую поляризацию и зоны аномального преломления [22].

## 2.1. Поперечная волна в гиротропной линейной упругой редуцированной среде

Для поиска дисперсионных соотношений нужно получить уравнения движения в данной среде, однако в случае двумерных смещений будет целесообразнее попытаться перейти от проекций векторов перемещений и поворотов к самим векторам  $\underline{\mathbf{u}} = u_x\underline{\mathbf{e}}_1 + u_z\underline{\mathbf{e}}_3$ ,  $\underline{\boldsymbol{\theta}} = \theta_x\underline{\mathbf{e}}_1 + \theta_z\underline{\mathbf{e}}_3$ . Обозначим за  $b$  шаг резьбы, тогда перемещение, соответствующее повороту винта на пружине, таково:  $u = \frac{b}{2\pi}\theta$ .

### 2.1.1. Поиск результирующей силы

Найдем результирующую силу с учетом малости поворотов и перемещений:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}} = & -c_2u_x^1\underline{\mathbf{e}}_1 - c_3u_x^1\underline{\mathbf{e}}_1 - -c_2u_z^1\underline{\mathbf{e}}_3 - c_3u_z^1\underline{\mathbf{e}}_3 + c_1R\theta_z^1\underline{\mathbf{e}}_1 - c_1R\theta_x^1\underline{\mathbf{e}}_3 + c_1R\theta_x^0\underline{\mathbf{e}}_3 - \\ & - c_1R\theta_z^0\underline{\mathbf{e}}_1 + c_1(u_z^0 - u_z^1)\underline{\mathbf{e}}_3 + c_1(u_z^2 - u_z^1)\underline{\mathbf{e}}_3 + c_1(u_x^0 - u_x^1)\underline{\mathbf{e}}_1 + c_1(u_x^2 - u_x^1)\underline{\mathbf{e}}_1 + \\ & + c_3\frac{b}{2\pi}\theta_x^1\underline{\mathbf{e}}_1 + c_3\frac{b}{2\pi}\theta_z^1\underline{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Упростим данное выражение, перейдя к векторам перемещений и поворотов:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}} = & -c_2\underline{\mathbf{u}} - c_3\left(\underline{\mathbf{u}} - \frac{b}{2\pi}\underline{\boldsymbol{\theta}}\right) + c_1R\left((\theta_z^1 - \theta_z^0)\underline{\mathbf{e}}_1 - (\theta_x^1 - \theta_x^0)\underline{\mathbf{e}}_3\right) + \\ & + c_1(u_z^0 - 2u_z^1 + u_z^2)\underline{\mathbf{e}}_3 + c_1(u_x^0 - 2u_x^1 + u_x^2)\underline{\mathbf{e}}_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поскольку мы рассматриваем линейную среду, мы можем, как и ранее, разложить  $\theta_{x,z}$ ,  $u_{x,z}$  в ряд Тейлора в окрестности отсчетной конфигурации,

тогда получим:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}} = & -(c_2 + c_3)\underline{\mathbf{u}} + c_3\frac{b}{2\pi}\underline{\boldsymbol{\theta}} + c_1Rh \left( \frac{\partial\theta_z}{\partial y}\underline{\mathbf{e}}_1 - \frac{\partial\theta_x}{\partial y}\underline{\mathbf{e}}_3 \right) + \\ & + c_1h^2 \left( \frac{\partial^2u_z}{\partial y^2}\underline{\mathbf{e}}_3 + \frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}\underline{\mathbf{e}}_1 \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Чтобы привести выражение для результирующей силы к итоговому виду в терминах  $\underline{\mathbf{u}}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ , приведем предварительные соображения:

$$1) \text{ Переобозначим } C_{10} = c_3\frac{b}{2\pi}, N = c_1Rh, \gamma = c_1h^2, C_{11} = c_2 + c_3 \quad (2.4)$$

$$2) \text{ Пусть } \underline{\mathbf{A}} = A_x\underline{\mathbf{i}} + A_y\underline{\mathbf{j}} + A_z\underline{\mathbf{k}}$$

$$\text{Тогда } \nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} \underline{\mathbf{i}} & \underline{\mathbf{j}} & \underline{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \underline{\mathbf{i}} - \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \underline{\mathbf{j}} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \underline{\mathbf{k}}$$

Однако в нашем случае параметры среды изменяются только вдоль оси  $\underline{\mathbf{j}}$  и  $A_y = 0$ , поэтому перепишем:  $\nabla \times \underline{\mathbf{A}} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \underline{\mathbf{i}} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \underline{\mathbf{k}} \Rightarrow \frac{\partial\theta_z}{\partial y} \underline{\mathbf{i}} - \frac{\partial\theta_x}{\partial y} \underline{\mathbf{k}} = \nabla \times \underline{\boldsymbol{\theta}}$

$$(2.5)$$

$$3) \text{ Используя вывод выше, рассмотрим } \nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{A}})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{A}}) = -\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} \underline{\mathbf{i}} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \underline{\mathbf{k}} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \underline{\mathbf{k}} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \underline{\mathbf{i}} = -\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{u}})$$

$$(2.6)$$

Итого получим:

$$\underline{\mathbf{F}} = -C_{11}\underline{\mathbf{u}} + C_{10}\underline{\boldsymbol{\theta}} + N\nabla \times \underline{\boldsymbol{\theta}} - \gamma\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{u}}) \quad (2.7)$$

### 2.1.2. Поиск моментной реакции на перемещения. Уравнения Лагранжа. Результирующий момент.

Для поиска момента нужно понять, какую моментную реакцию на перемещения должна создавать пружина с винтом  $c_3$ . Силовая реакция получалась из логических соображений и предположения о том, что резьба винта метрическая, однако момент оказывается получить не так просто. Воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода следующим образом. Представим

энергию как сумму вклада в энергию от пружины  $c_3$  и прочих пружин ( $\hat{U}(c_1, c_2)$ ):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}c_3(\underline{\mathbf{u}} - \underline{\boldsymbol{\theta}})^2 + \hat{U}(c_1, c_2) \\ K &= \frac{m\underline{\dot{\mathbf{u}}}^2}{2} + \frac{I\dot{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^2}{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода для обобщенной векторной координаты  $\underline{\mathbf{q}}_i$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{\mathbf{q}}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \underline{\mathbf{q}}_i} + \nabla \cdot \frac{\partial L}{\partial \nabla \underline{\mathbf{q}}_i} = 0, \quad (2.9)$$

где  $L = K - U$  — лагранжиан.

Тогда, применяя (2.9) для вектора малого поворота, получаем:

$$I\ddot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + c_3 \frac{b}{2\pi} (\underline{\mathbf{u}} - \frac{b}{2\pi} \underline{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{\partial \hat{U}(c_1, c_2)}{\partial \underline{\boldsymbol{\theta}}} + \nabla \cdot \frac{\partial \hat{U}(c_1, c_2)}{\partial \nabla \underline{\boldsymbol{\theta}}} = 0 \quad (2.10)$$

Таким образом, найдена моментная реакция пружины с винтом на перемещение. Она равна  $c_3 \frac{b}{2\pi} \underline{\mathbf{u}}$ . Проверим ее размерность:

$$\left[ c_3 \frac{b}{2\pi} \underline{\mathbf{u}} \right] = \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} - \text{имеет размерность момента}$$

Приступим к поиску результирующего момента с учетом (2.10):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{M}} &= -c_1 R^2 \theta_x^1 \mathbf{e}_1 - c_1 R^2 \theta_z^1 \mathbf{e}_3 + c_1 R (u_z^2 - u_z^1) \mathbf{e}_1 + c_1 R (u_x^1 - u_x^2) \mathbf{e}_3 + \\ &+ c_3 \frac{b}{2\pi} (\underline{\mathbf{u}}^1 - \frac{b}{2\pi} \underline{\boldsymbol{\theta}}^1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

После континуализации, получим:

$$\underline{\mathbf{M}} = -c_1 R^2 \underline{\boldsymbol{\theta}} + c_1 R h \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial u_x}{\partial y} \mathbf{e}_3 \right) + c_3 \frac{b}{2\pi} (\underline{\mathbf{u}} - \frac{b}{2\pi} \underline{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.12)$$

Воспользуемся (2.4), (2.6), положим:

$$1) \text{ Переобозначим } C_{00} = c_3 \frac{b^2}{4\pi^2} + c_1 R^2 \quad (2.13)$$

$$2) \text{ Переобозначим } A_{00} = I, A_{11} = m \quad (2.14)$$

Тогда получим итоговый результирующий момент:

$$\underline{\mathbf{M}} = -C_{00}\underline{\boldsymbol{\theta}} + N\nabla \times \underline{\mathbf{u}} + C_{10}\underline{\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

Итого, получаем уравнения динамики для рассматриваемой среды:

$$\begin{cases} A_{00}\ddot{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + C_{00}\underline{\boldsymbol{\theta}} - C_{10}\underline{\mathbf{u}} - N\nabla \times \underline{\mathbf{u}} = 0 \\ A_{11}\ddot{\underline{\mathbf{u}}} + C_{11}\underline{\mathbf{u}} - C_{10}\underline{\boldsymbol{\theta}} - N\nabla \times \underline{\boldsymbol{\theta}} + \gamma\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{u}}) = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Стоит отметить, что (2.16) совпадают с уравнениями движения, полученными в работе [23] с точностью до знака  $C_{10}$  в обоих уравнениях, однако знак  $C_{10}$  зависит от направления резьбы (правая или левая), то есть полученные нами уравнения действительно описывают гиротропную среду. Мы ищем дисперсионные соотношения, поэтому решение системы (2.16) ищем в виде свободной гармонической поперечной волны:  $\underline{\mathbf{k}} = |k|\underline{\mathbf{e}}_2$ ;  $\underline{\mathbf{u}}(y, t) = \hat{\underline{\mathbf{U}}}e^{i(\omega t + ky)}$ ;  $\underline{\boldsymbol{\theta}}(y, t) = \hat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}e^{i(\omega t + ky)}$ . Поступим как и ранее: подставим решение в данном виде в первое уравнение системы (2.16) и выразим  $\hat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}$  через  $\hat{\underline{\mathbf{U}}}$ :

$$-A_{00}\omega^2\hat{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + C_{00}\hat{\underline{\boldsymbol{\theta}}} - C_{10}\hat{\underline{\mathbf{U}}} - iN\underline{\mathbf{k}} \times \hat{\underline{\mathbf{U}}} = 0 \Rightarrow \hat{\underline{\boldsymbol{\theta}}} = -\frac{C_{10}\hat{\underline{\mathbf{U}}} + iN\underline{\mathbf{k}} \times \hat{\underline{\mathbf{U}}}}{A_{00}(\omega^2 - \underbrace{\frac{C_{00}}{A_{00}}}_{\omega_0^2})} \quad (2.17)$$

Заметим, что (2.17) также совпадает с [23] с точностью до знака  $C_{10}$ . После подстановки (2.17) в первое уравнение системы (2.16), получаем уравнение Кристоффеля для рассматриваемой среды:

$$\begin{aligned} & -A_{11}(\omega^2 + \underbrace{\frac{C_{11}}{A_{11}}}_{\omega_1^2})\hat{\underline{\mathbf{U}}} + C_{10} \cdot \frac{C_{10}\hat{\underline{\mathbf{U}}} + iN\underline{\mathbf{k}} \times \hat{\underline{\mathbf{U}}}}{A_{00}(\omega^2 - \omega_0^2)} + iN\underline{\mathbf{k}} \times \frac{C_{10}\hat{\underline{\mathbf{U}}} + iN\underline{\mathbf{k}} \times \hat{\underline{\mathbf{U}}}}{A_{00}(\omega^2 - \omega_0^2)} \\ & - \gamma\underline{\mathbf{k}} \times (\underline{\mathbf{k}} \times \hat{\underline{\mathbf{U}}}) = 0 \Rightarrow \\ & \left[ A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2) + \frac{C_{10}^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] \hat{\underline{\mathbf{U}}} - \left[ \gamma + \frac{N^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] \underline{\mathbf{k}} \times (\underline{\mathbf{k}} \times \hat{\underline{\mathbf{U}}}) + \\ & + 2i \frac{NC_{10}}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \underline{\mathbf{k}} \times \hat{\underline{\mathbf{U}}} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Данное уравнение совпадает с уравнением для особой гиротропной среды, рассмотренной в [22]. Итак, одна из задач работы выполнена — предложена конкретная микроструктурная модель для данной среды.

Будем анализировать поперечную волну, поскольку продольная волна проявляет не такие интересные свойства. Дисперсионный анализ начат в [22], однако не проведен полностью. Повторим некоторые рассуждения вышеупомянутой работы. Обратимся к последнему слагаемому (2.18). Из (2.4) следует, что  $C_{10}, N \neq 0$  в отличие от изотропной среды. Это возможно, поскольку мы рассматриваем гиротропную среду, в которой нет симметрии по отношению к отражениям, так что данное слагаемое отлично от нуля. Его существование приводит к тому, что рассматриваемая поперечная волна имеет круговую поляризацию, что наблюдается на практике для хиральных метаматериалов [31]. Поэтому будем рассматривать волну с амплитудой  $\hat{\mathbf{U}} = C(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_3)$ , подставим это в (2.18) и получим:

$$\begin{aligned} & \left( \left[ A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2) + \frac{C_{10}^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] + \left[ \gamma + \frac{N^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] k^2 - 2 \frac{NC_{10}}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} k \right) \mathbf{e}_1 \\ & + \left( \left[ A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2) + \frac{C_{10}^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] + \left[ \gamma + \frac{N^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] k^2 - 2 \frac{NC_{10}}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} k \right) i\mathbf{e}_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из ТФКП известно, что комплексное число или комплексная функция равна нулю тогда, когда вещественная и мнимая части равны нулю, итого получаем окончательный вид дисперсионного соотношения:

$$\left[ A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2) + \frac{C_{10}^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] + \left[ \gamma + \frac{N^2}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right] k^2 - 2 \frac{NC_{10}}{A_{00}} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} k = 0 \quad (2.20)$$

Заметим, что (2.20) совпадает с [22]. Там было показано, что существует два решения, противоположно поляризованных, и данные ветви имеют одинаковые зоны существенного поглощения, где существуют бегущие волны, убывающие по амплитуде. При этом вещественная часть волнового числа в данных зонах совпадает для обоих решений, а мнимая отличается знаком.

В случае  $\omega \neq \omega_0$ :

$$\gamma(\omega^2 - \omega_*^2)k^2 - 2\tilde{C}\tilde{N}k + \left( A_{11}(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2) + \tilde{C}^2 \right) = 0, \quad (2.21)$$

$$\text{где } \tilde{N} = \frac{N}{\sqrt{A_{00}}}, \quad \tilde{C} = \frac{C_{10}}{\sqrt{A_{00}}}, \quad \omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{\tilde{N}^2}{\gamma} \quad (2.22)$$

Это квадратное уравнение, найдя его решения, получим дисперсионные соотношения для поперечной волны в данной среде:

$$k_{1,2} = \frac{\tilde{C}\tilde{N} \pm \sqrt{\tilde{C}^2\tilde{N}^2 + \left[ A_{11}(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \tilde{C}^2 \right] \gamma(\omega^2 - \omega_*^2)}}{\gamma(\omega^2 - \omega_*^2)} \quad (2.23)$$

Если рассмотреть подкоренное выражение, с помощью метода неопределенных коэффициентов в виде полинома 6 степени получим:

$$\sqrt{\frac{\gamma}{A_{11}}} k_{1,2} = \frac{\tilde{C}\tilde{N}}{\sqrt{\gamma A_{11}}} \pm \frac{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - \omega_-^2)(\omega^2 - \omega_+^2)}}{\omega^2 - \omega_*^2}, \quad (2.24)$$

$$\text{где } \omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_*^2}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\omega_1^2 - \omega_*^2}{2} \right)^2 + \frac{\tilde{C}^2}{A_{11}}}$$

Различные знаки перед корнем в (2.24) соответствуют различной поляризации волны.

Теперь приступим к той части дисперсионного анализа, которая не проведена в [22]. Она касается прежде всего области без поглощения.

Отдельно рассмотрим случай  $\omega = \omega_0$ , тогда из (2.17), с учетом ( $C_{10}N \neq 0$ ) мы получим

$$\det(C_{10}\underline{\underline{\mathbf{E}}} + iN\underline{\underline{\mathbf{k}}} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = C_{10}^3 + iNC_{10}\underline{\underline{\mathbf{k}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot iN\underline{\underline{\mathbf{k}}} = C_{10}(C_{10}^2 - N^2k^2)$$

$$\text{При } k \neq \pm \frac{C_{10}}{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{(C_{10}\underline{\underline{\mathbf{E}}} + iN\underline{\underline{\mathbf{k}}} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}) \cdot \hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}} = 0}_{\det \neq \underline{\underline{\mathbf{0}}}} \Rightarrow \hat{\underline{\underline{\mathbf{U}}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underbrace{(C_{10}\underline{\underline{\mathbf{E}}} + iN\underline{\underline{\mathbf{k}}} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}) \cdot \hat{\underline{\underline{\mathbf{H}}}} = 0}_{\det \neq \underline{\underline{\mathbf{0}}}} \Rightarrow \hat{\underline{\underline{\mathbf{H}}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Поперечная волна при  $\omega = \omega_0$  существует при  $k = \pm \frac{C_{10}}{N}$ . Найдем условия на частоты  $\omega_{0,1}, \omega_*, \omega_{\pm}$  из условия неотрицательной определенности

энергии, рассмотрим ее через проекции векторов  $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\theta}}$ :

$$\begin{aligned}
U = & \frac{C_{11}}{2}u_x^2 - C_{10}\theta_x u_x + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 - N\frac{\partial u_x}{\partial y}\theta_z + \frac{C_{00}}{2}\theta_x^2 + \\
& + \frac{C_{11}}{2}u_z^2 - C_{10}\theta_z u_z + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2 - N\frac{\partial u_z}{\partial y}\theta_x + \frac{C_{00}}{2}\theta_z^2
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Заметим, что в (2.26) заключена квадратичная форма, поэтому представим (2.26) в виде:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_x \\ \theta_x \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ u_z \\ \theta_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C_{11} & -C_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{10} & C_{00} & 0 & 0 & 0 & -N \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} & -C_{10} & 0 \\ 0 & 0 & -N & -C_{10} & C_{00} & 0 \\ 0 & -N & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ \theta_x \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ u_z \\ \theta_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

В соответствии с критерием Шварценеггера для неотрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой квадратичной формы были неотрицательны:

$$\Delta_1 = C_{11} \geq 0 \Rightarrow c_2 + c_3 \geq 0 \quad (2.28)$$

$$\Delta_2 = C_{11}C_{00} - C_{10}^2 > 0 \Rightarrow C_{11}C_{00} \geq C_{10}^2 > 0 \Rightarrow C_{00} \geq 0 \Rightarrow c_3 \geq 0 \quad (2.29)$$

$$\Delta_3 = C_{11}C_{00}\gamma - C_{10}^2\gamma > 0 \Rightarrow \underbrace{(C_{11}C_{00} - C_{10}^2)}_{>0} \gamma > 0 \Rightarrow \gamma > 0 \quad (2.30)$$

$$\Delta_4 = C_{11}^2C_{00}\gamma - C_{11}C_{10}^2\gamma \Rightarrow C_{11}C_{00} - C_{10}^2 \geq 0 \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_5 &= C_{11}^2C_{00}^2\gamma - 2C_{11}C_{10}^2C_{00}\gamma - N^2C_{11}^2C_{00} + C_{10}^4\gamma + N^2C_{11}C_{10}^2 = \\
&= C_{11}^2C_{00}\gamma\left(C_{00} - \frac{N^2}{\gamma}\right) + C_{10}^2\gamma(C_{10}^2 - C_{11}C_{00}) + C_{11}C_{10}^2\gamma\left(\frac{N^2}{\gamma} - C_{00}\right) \geq 0 = \\
&= \underbrace{(C_{11}C_{00} - C_{10}^2)}_{>0} \gamma \left[ C_{11}\left(C_{00} - \frac{N^2}{\gamma}\right) - C_{10}^2 \right] \geq 0 \\
&\Rightarrow C_{00} \geq \frac{N^2}{\gamma} + \frac{C_{10}^2}{C_{11}} \Rightarrow c_2 \geq 0
\end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_6 &= C_{11}(-1)^{1+1}M_{11} - C_{10}(-1)^{1+2}M_{12} = C_{11}M_{11} - C_{10}M_{12} \\
&= C_{11}^2\gamma^2\left(C_{00} - \frac{N^2}{\gamma}\right)^2 - C_{11}C_{10}^2\gamma^2\left(C_{00} - \frac{N^2}{\gamma}\right) + C_{11}C_{10}^2\gamma^2\left(C_{00} - \frac{N^2}{\gamma}\right) - C_{10}^4\gamma^2 \\
&\Rightarrow C_{11}^2\left(C_{00} - \frac{N^2}{\gamma}\right)^2 - C_{10}^4 \geq 0 \Rightarrow C_{00} \geq \frac{N^2}{\gamma} + \frac{C_{10}^2}{C_{11}}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Итак, получены следующие условия на константы, очень похожие на условия для констант для модели 1 (1.24):

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} \geq 0 \Rightarrow c_2 + c_3 \geq 0 \\ C_{00} \geq 0 \Rightarrow c_3 \geq 0 \\ \gamma \geq 0 \Rightarrow c_1 \geq 0 \\ C_{11}C_{00} \geq C_{10}^2 \\ C_{00} \geq \frac{N^2}{\gamma} + \frac{C_{10}^2}{C_{11}} \geq 0 \Rightarrow c_2 \geq 0 \Rightarrow c_3 \geq 0 \end{array} \right. \tag{2.34}$$

Из (2.34) видно, что  $\omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma} = \frac{1}{A_{00}}\left(C_{00} - \frac{N^2}{\gamma}\right) \geq 0$ , также сразу можем сказать, что  $\omega_0 \geq 0, \omega_1 \geq 0$ . Вернемся к (2.24). Заметим, что данное выражение совпадает с (1.18) с точностью до замены  $\omega_0$  на  $\omega_*$ , поэтому, проведя аналогичные вычисления, получим:

$$\begin{aligned}
1. \quad &\omega_+^2 > \omega_-^2 > 0 \\
2. \quad &\omega_+ > \omega_* > \omega_- > 0 \\
3. \quad &\omega_+ > \omega_1 > \omega_- > 0 \\
4. \quad &\omega_0 \geq \omega_* > \omega_- > 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Немного видоизменим (2.24):

$$K = \frac{\xi \pm \sqrt{(X - X_0)(X - X_+)(X - X_-)}}{X - 1}, \tag{2.36}$$

где

$$X = \Omega^2, X_{0,\pm} = \Omega_{0,1,\pm}^2, \Omega = \frac{\omega}{\omega_*}, \Omega_{0,\pm} = \frac{\omega_{0,\pm}}{\omega_*}, K = \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{A_{11}}}}{\omega_*}k, \xi = \frac{C_{10}N}{\sqrt{\gamma A_{11} A_{00}}\omega_*^3}$$

Прежде чем переходить к анализу (2.36), заметим, что параметры  $\xi, \Omega_{0,\pm}$

невозможно задавать независимо. Это видно из выражения для  $\omega_{\pm}$  в (2.24), которое, так же как и  $\xi$ , содержит  $\frac{\tilde{C}}{\sqrt{A_{11}\omega_*^2}}$ . Это не было учтено в работе [22], поэтому приведенные там численные примеры дисперсионных соотношений невозможно получить в рамках данной модели. Перепишем параметры из (2.36) следующим образом:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\omega_0^2}{\omega_*^2} = 1 + \left( \frac{N}{\sqrt{\gamma A_{00}\omega_*}} \right)^2 \\ X_{\pm} &= \frac{\omega_{\pm}^2}{\omega_*^2} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\omega_1}{\omega_*} \right)^2 + 1 \pm \sqrt{\left( \left( \frac{\omega_1}{\omega_*} \right)^2 - 1 \right)^2 + 4 \left( \frac{C_{10}}{\sqrt{A_{00}A_{11}\omega_*^2}} \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Итого, мы имеем 3 независимых безразмерных параметра:

$$\begin{aligned} p_c &= \frac{C_{10}}{\sqrt{A_{11}A_{00}\omega_*^2}} \\ p_n &= \frac{N}{\sqrt{\gamma A_{00}\omega_*}} \\ p_{\omega_1} &= \frac{\omega_1}{\omega_*} = \sqrt{\frac{C_{11}}{A_{11}}} \frac{1}{\omega_*} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Также заметим, что в  $X = 1 \Leftrightarrow \Omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \omega_*$  (2.36) не имеет разрывов, это легко увидеть, обратившись к (2.23) с учетом  $\omega = \omega_*$  и приведя это выражение к виду, аналогичному (2.36), тогда получим итоговое дисперсионное выражение в терминах безразмерных независимых переменных, дополненное до непрерывного в  $X = 1$ :

$$\begin{cases} K = \frac{p_c p_n \pm \sqrt{(X - X_0)(X - X_+)(X - X_-)}}{X - 1}, & X \neq 1 \\ K = \frac{p_n^2(1 - p_{\omega_1}^2) + p_c^2}{2p_c p_n}, & X = 1 \\ X_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega_*^2} = 1 + p_n^2 \\ X_{\pm} = \frac{\omega_{\pm}^2}{\omega_*^2} = \frac{1}{2} \left( p_{\omega_1}^2 + 1 \pm \sqrt{(p_{\omega_1}^2 - 1)^2 + 4p_c^2} \right) \end{cases} \quad (2.39)$$

Также получим условия на параметры (2.38) из условий неотрицатель-

ности энергии деформации:

$$1. \quad \mathbf{C}_{11}\mathbf{C}_{00} \geq \mathbf{C}_{10}^2$$

$$\frac{C_{11}C_{00}}{A_{00}A_{11}\omega_*^4} \geq \frac{C_{10}^2}{A_{11}A_{00}\omega_*^4} \Leftrightarrow p_{\omega_1}^2 \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega_*^2} \geq p_c^2 \Leftrightarrow p_{\omega_1}^2(1 + p_n^2) \geq p_c^2 \quad (2.40)$$

$$2. \quad \mathbf{C}_{00} \geq \frac{\mathbf{N}^2}{\gamma} + \frac{\mathbf{C}_{10}^2}{\mathbf{C}_{11}}$$

$$\frac{C_{00}}{A_{11}A_{00}\omega_*^4} \geq \frac{N^2}{\gamma A_{11}A_{00}\omega_*^4} + \frac{C_{10}^2}{A_{11}A_{00}\omega_*^4} \cdot \frac{1}{C_{11}}$$

$$\frac{\frac{\omega_0^2}{\omega_*^2}}{A_{11}\omega_*^2} \geq \frac{\frac{N^2}{\gamma A_{00}\omega_*^2}}{A_{11}\omega_*^2} + p_c^2 \cdot \frac{1}{C_{11}}$$

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_*^2} \geq p_n^2 + p_c^2 \frac{\omega_*^2}{\omega_1^2} \Leftrightarrow 1 + p_n^2 \geq p_n^2 + \frac{p_c^2}{p_{\omega_1}^2} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{p_c^2}{p_{\omega_1}^2} \quad (2.41)$$

Таким образом, энергия неотрицательно определена тогда и только тогда, когда:

$$|p_c| \leq |p_{\omega_1}| \quad (2.42)$$

### 2.1.3. Анализ дисперсионных соотношений.

Будем проводить анализ влияния параметров на зоны существенного поглощения, а также на зоны аномального преломления.

В [22] было показано, что зоны существенного поглощения располагаются в следующих частотных диапазонах:

$$1. \quad \Omega < \Omega_-$$

$$2. \quad \min(\Omega_0, \Omega_+) < \Omega < \max(\Omega_0, \Omega_+) \quad (2.43)$$

Заметим, что из (2.39) видно, что нижняя зона существенного поглощения содержится внутри диапазона  $[0, 1]$ . В зонах аномального преломления знаки групповой и фазовой скорости не совпадают. Заметим, что в отличие от предыдущих случаев, график дисперсионного соотношения не является симметричным относительно оси  $k = 0$ , поэтому необходимо рассматривать волновые числа различных знаков. Зоны аномального преломления будут соответствовать падающим участкам кривой при  $k > 0$  и возрастающим —

при  $k < 0$ .

$$v_{phase} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \text{sign}(v_{phase}) = \text{sign}\left(\frac{\Omega}{K}\right) \quad (2.44)$$

Групповая скорость в зонах, где поглощение отсутствует, соответствует скорости переноса энергии. На больших временах для наблюдателя, движущегося со скоростью  $v_{group}$ , главный вклад дает волна с частотой, для которой выполняется соотношение

$$v_{group} = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.45)$$

Однако внутри зон существенного поглощения, где  $k = \text{Re } k + i\text{Im } k$ ,  $\frac{d\omega}{d(\text{Re } k)}$  может не являться групповой скоростью широкополосного сигнала. Вопрос о том, имеет ли смысл вводить понятие групповой скорости внутри зон существенного поглощения, и чему она равна, выходит за рамки данной работы. Рассмотрим следующее:

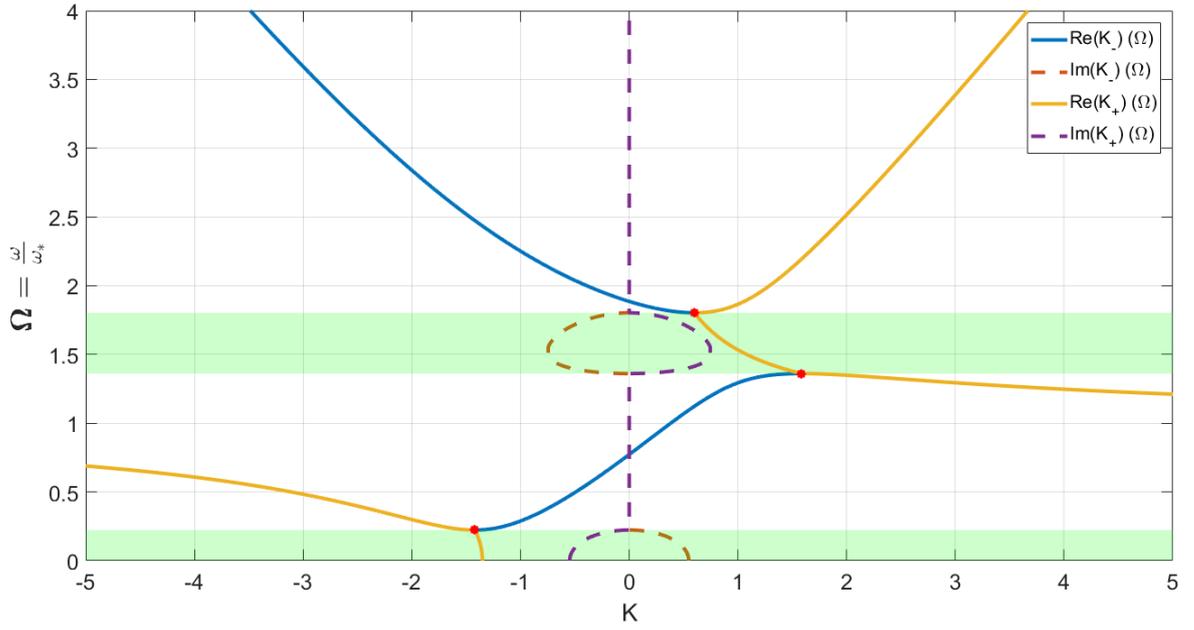
$$\frac{dK}{d\Omega} = \frac{dK}{dX} \cdot \frac{dX}{d\Omega} = \underbrace{2\Omega}_{>0} \frac{dK}{dX} \quad (2.46)$$

$$\frac{dK}{d\Omega} = \frac{\sqrt{\frac{\gamma}{A_{11}}} dk}{\frac{d\omega}{\omega_*}} = \underbrace{\omega_* \sqrt{\frac{\gamma}{A_{11}}}}_{>0} \frac{dk}{d\omega} \Rightarrow \text{sign}\left(\frac{dK}{d\Omega}\right) = \text{sign}\left(\frac{dK}{dX}\right) = \text{sign}(v_{group}) \quad (2.47)$$

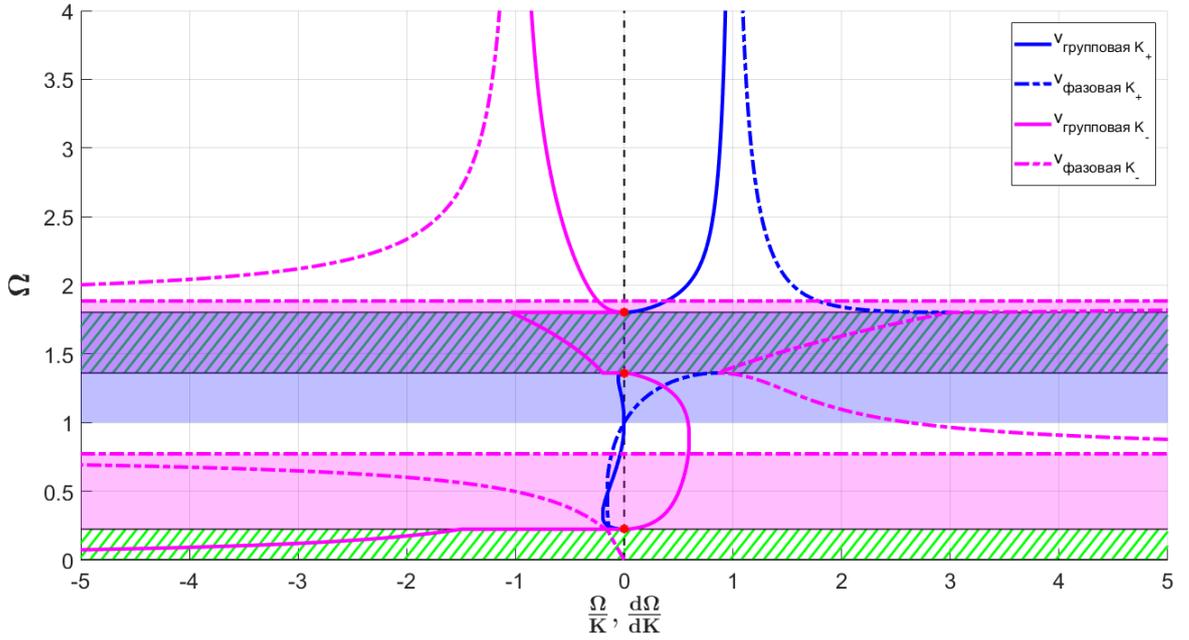
Запишем выражение для групповой скорости при  $\Omega \neq 1$  вне зон существенного поглощения:

$$\frac{d\Omega}{dK} = \pm \frac{1}{\Omega} \frac{(\Omega^2 - 1) \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)}}{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2) + (\Omega^2 - \Omega_-^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2) + (\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2) - 2K \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)}} \quad (2.48)$$

## Влияние параметра $\xi$



(a) Дисперсионные кривые ( $p_c = 0.9; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 0.95$ )



(b) Фазовая и групповая скорости ( $p_c = 0.9; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 0.95$ )

Рис. 2.2: Дисперсионные кривые гиротропной среды  $\xi = 1.35; \Omega_- \approx 0.2233; \Omega_+ \approx 1.3611; \Omega_0 = 1.8027$

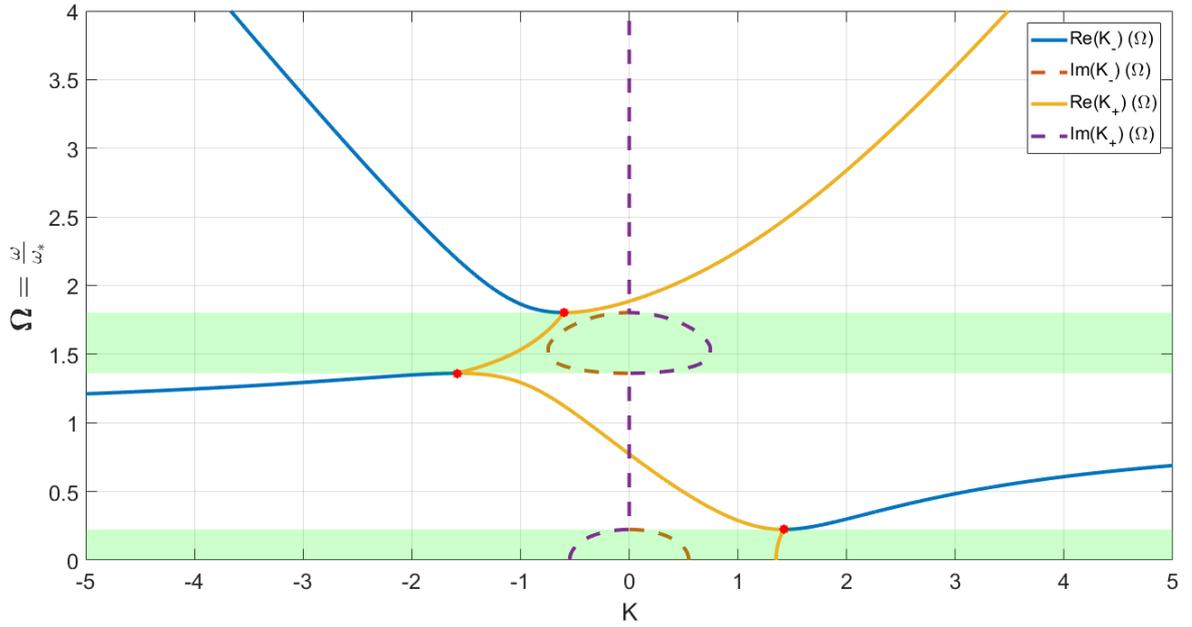
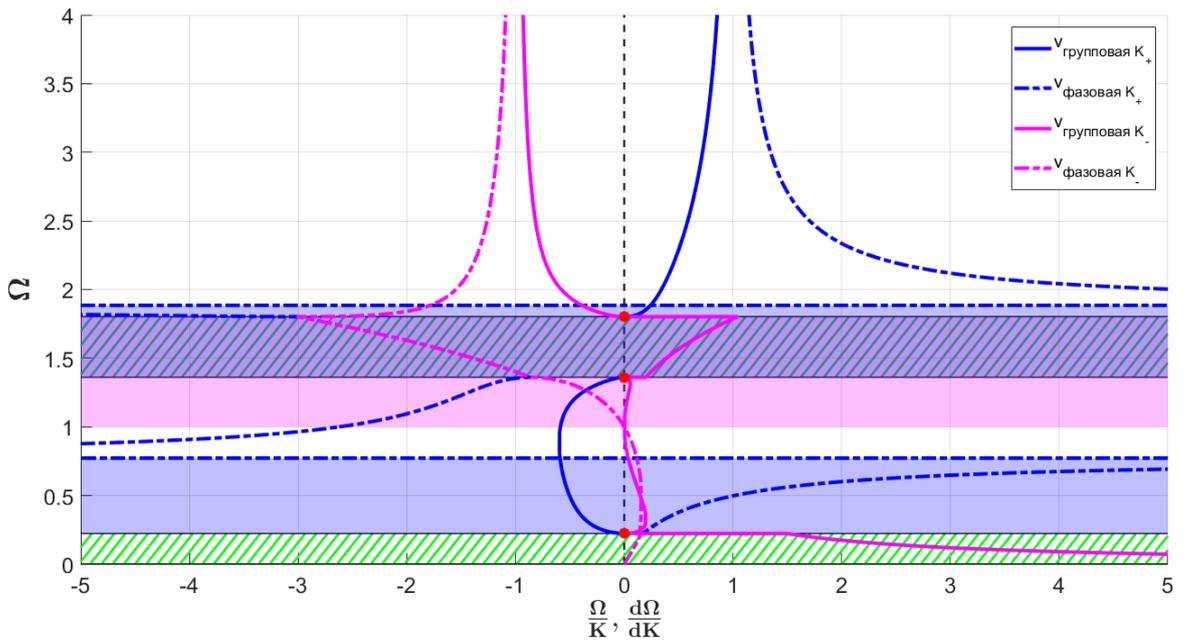
(a) Дисперсионные кривые ( $p_c = -0.9; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 0.95$ )(b) Фазовая и групповая скорости ( $p_c = -0.9; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 0.95$ )

Рис. 2.3: Дисперсионные кривые гиротропной среды  $\xi = -1.35; \Omega_- \approx 0.2233; \Omega_+ \approx 1.3611; \Omega_0 = 1.8027$

Прежде чем приступить к анализу дисперсионных соотношений, зон существенного поглощения и аномального преломления, стоит ввести некоторые обозначения: в дальнейшем, точки, отмеченные красным на рисунках 2.2(a), 2.2(b) будем называть точками ветвления, зоны существенного поглощения будем закрашивать зеленым цветом на графиках дисперсионных

соотношений и заштриховывать зеленым цветом на графиках для скоростей. Розовая заливка обозначает, что в данном частотном диапазоне будет находиться зона аномального преломления для ветки  $K_-$ , светло-голубая — для ветки  $K_+$ , фиолетовая — для обеих веток одновременно.

$$\xi = o(1), \xi = o(\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)})$$

Особое внимание уделим  $\xi = o(1)$ , поскольку второй случай не настолько интересен: обратившись к (2.39) и перейдя к таким значениям  $\Omega$ , что  $\xi \ll \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)}$  получим:

$$K = \frac{\xi \pm \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)}}{\Omega^2 - 1} \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} \pm \Omega, \quad (2.49)$$

Рисунки 2.2(a), 2.2(b) подтверждают этот вывод.

Случай  $\xi = o(1)$  более интересен, поскольку тогда материал будет по своему поведению очень близок к изотропному, где согласно [22]:  $C_{10} = 0$  или  $N = 0$ , однако малость  $\xi = p_c \cdot p_n$  может быть обеспечена за счет  $p_c \rightarrow 0$  и  $p_n = const$ ;  $p_n \rightarrow 0$  и  $p_c = const$  или  $p_c, p_n \rightarrow 0$ . Получим дисперсионное соотношение для такого случая из (2.39):

$$\begin{cases} K = \pm \frac{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)}}{\Omega^2 - 1} + \underbrace{\frac{\xi}{\Omega^2 - 1}}_{\Omega \neq 1 \Rightarrow o(1)}, & \Omega \neq 1 \\ K \xrightarrow{\Omega \rightarrow 1} \text{sign}(\xi)\infty, & \Omega = 1 \end{cases}, \quad (2.50)$$

Тогда выражение для групповой скорости примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{dK} = \pm \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{(\Omega^2 - 1)^2 \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)}}{(\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(2\Omega^2 - \Omega_0^2 - \Omega_-^2) + (\Omega^2 - 1)(\Omega^2 - \Omega_-^2)(\Omega^2 - \Omega_0^2) - 2(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)(\Omega^2 - \Omega_0^2)} + \\ + o(1), & \Omega \neq 1 \\ \frac{d\Omega}{dK} = 0, & \Omega = 1 \end{cases} \quad (2.51)$$

Фазовая скорость:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Omega}{K} = \pm \frac{\sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)}}{\Omega(\Omega^2 - 1)} + \underbrace{\frac{\xi}{\Omega(\Omega^2 - 1)}}_{\Omega \neq 1 \Rightarrow o(1)}, \quad \Omega \neq 1 \\ \frac{\Omega}{K} = 0, \Omega = 1 \end{array} \right. \quad (2.52)$$

Из (2.51), (2.50) видно, что групповая скорость меняет свой знак в точках:

1.  $K \rightarrow \pm\infty; \Omega = 1 \rightarrow$  не гарантировано
  2.  $K = \frac{\xi}{\Omega_{\pm,0}^2 - 1} = \text{sign}\left(\frac{\xi}{\Omega_{\pm,0}^2 - 1}\right)o(1), \Omega = \Omega_{\pm,0} \rightarrow$  гарантировано
- (2.53)

Заметим, что  $K \approx 0, \Omega = \Omega_{\pm,0}$  — это координаты точек ветвления при  $\xi = o(1)$ . Таким образом, зная координаты точек ветвления и рассмотрев все возможные случаи, мы можем понять, в каких частотных диапазонах вне зон существенного поглощения находятся зоны аномального преломления, понять, каким образом параметр  $\xi$  влияет на расположение точек ветвления и на зоны аномального преломления. Проведем анализ (2.50) с учетом всех возможных случаев, описанных выше, проведем сравнение графиков дисперсионных соотношений и групповой и фазовой скорости для малых значений  $\xi$  с рисунками 2.2(a), 2.2(b), где  $\xi$  конечно. Также, чтобы подтвердить правильность проводимых нами рассуждений, проведем сравнение и с дисперсионными соотношениями для изотропной редуцированной среды (где или  $C_{10} = 0$ , или  $N = 0$ ), полученными в [22],[9].

$$\xi \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} 0$$

Ширина зон существенного поглощения зависит от характеристических частот  $\Omega_{0,\pm}$ , это было показано в (2.43). Обратившись к (2.39), заметим, что  $\Omega_{\pm}$  зависят от параметра  $p_c$ , а  $\Omega_0 = \sqrt{1 + p_n^2}$ , то есть не зависит от параметра  $p_c$ . Напишем приближения для характеристических частот при

$p_c \rightarrow 0$ :

$$1. \quad \Omega_- \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} 1 \quad \Omega_+ \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} p_{\omega_1} > \Omega_0, \quad p_{\omega_1} > \sqrt{1 + p_n^2} > 1 \quad (2.54)$$

$$2. \quad \Omega_- \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} 1 \quad \Omega_+ \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} p_{\omega_1} < \Omega_0, \quad 1 < p_{\omega_1} < \sqrt{1 + p_n^2} \quad (2.55)$$

$$3. \quad \Omega_- \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} 1 \quad \Omega_+ \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} p_{\omega_1} = \Omega_0, \quad p_{\omega_1} = \sqrt{1 + p_n^2} \quad (2.56)$$

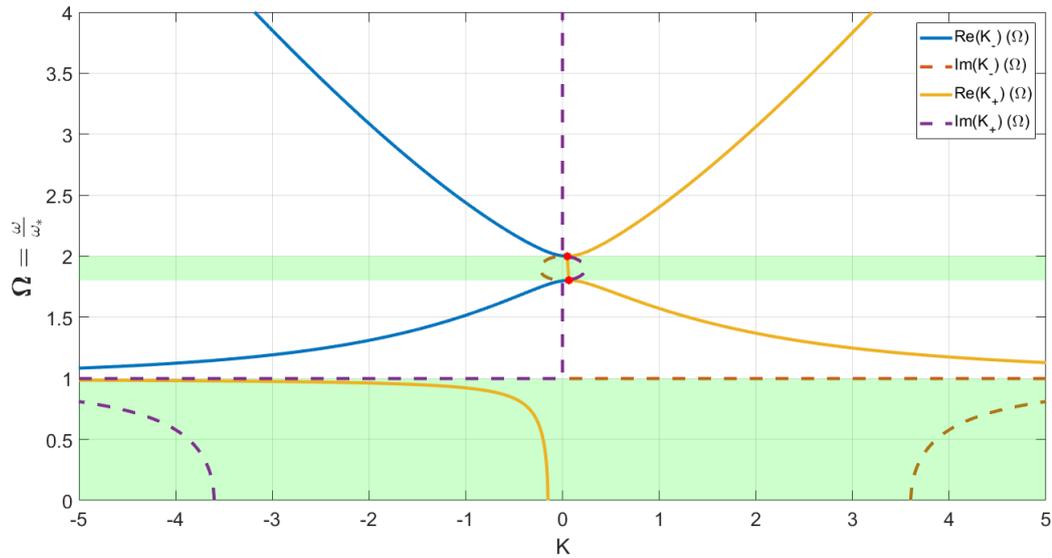
$$4. \quad \Omega_- \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} 1 \quad \Omega_+ \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} 1, \quad p_{\omega_1} = 1 \quad (2.57)$$

$$5. \quad \Omega_- \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} p_{\omega_1} \quad \Omega_+ \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} 1 < \Omega_0, \quad p_{\omega_1} < 1 < \sqrt{1 + p_n^2} \quad (2.58)$$

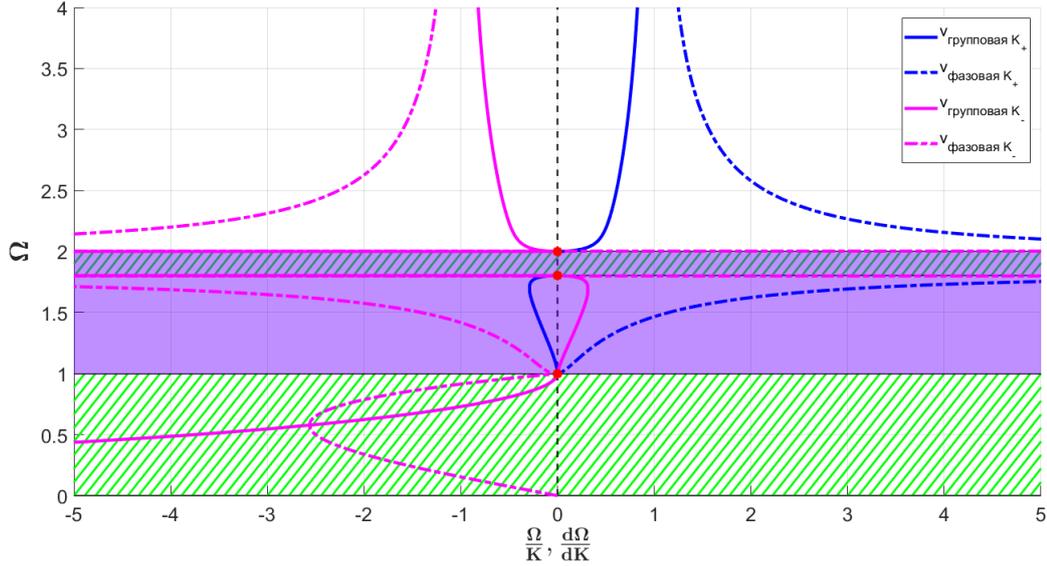
**Случай  $\Omega_- \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} 1 \quad \Omega_+ \xrightarrow[p_c \rightarrow 0]{} p_{\omega_1} > \Omega_0$**

Обратимся к (2.50), (2.51), (2.52), получим, что точки ветвления (в которых групповая скорость равна нулю) должны располагаться следующим образом (рассматривается случай  $\xi > 0$ ):

1.  $K \rightarrow \infty; \Omega = \Omega_- = 1$
2.  $K = \frac{\xi}{\Omega_+^2 - 1} = o(1) > 0, \Omega = \Omega_+ \rightarrow (2.54)$
3.  $K = \frac{\xi}{\Omega_0^2 - 1} = o(1) > 0, \Omega = \Omega_0$



(a) Дисперсионные кривые  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 2$

(b) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 0.1$ ;  $p_n = 1.5$ ;  $p_{\omega_1} = 2$ Рис. 2.4:  $\Omega_- \approx 0.5$ ,  $\Omega_+ \approx 2$ ,  $\Omega_0 \approx 1.8$ ,  $\xi = 0.15$ 

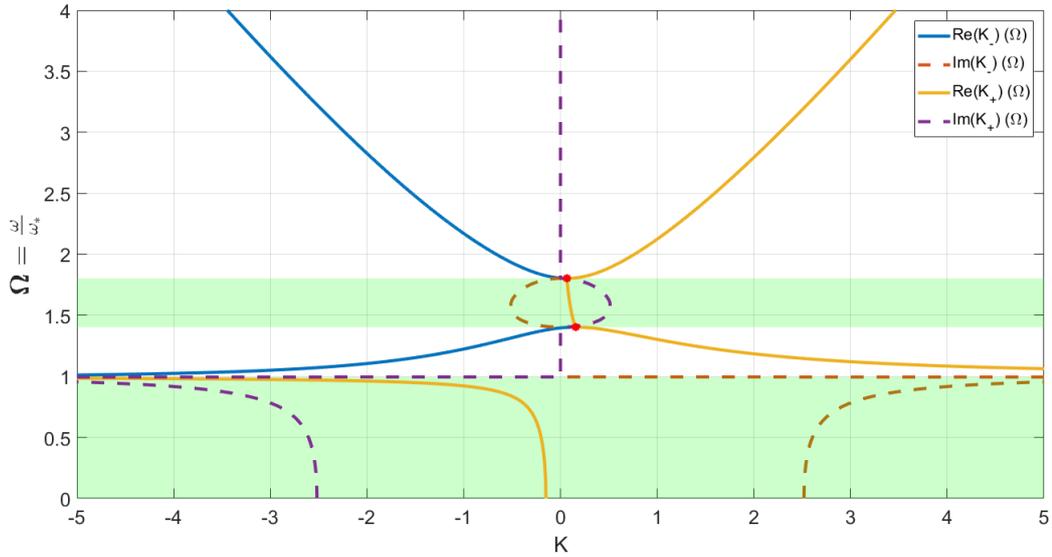
Точки ветвления, расположенные на верхней и нижней границе верхней зоны существенного поглощения смещаются ближе к оси ординат по сравнению с рисунком 2.2(a), точка ветвления на верхней границе нижней зоны существенного поглощения, наоборот, удаляется от вертикальной оси, что совпадает с поведением, описанным в (2.59). Заметим, что зоны существенного поглощения ведут себя в соответствии с предположением в (2.54). Также проводя сравнение графиков фазовой и групповой скоростей 2.2(b), 2.4(b), видим, что в точках ветвления групповая скорость равна нулю, что соответствует (2.51). Также легко заметить, что при  $\xi \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} 0$  зоны аномального преломления, не являющиеся общими для обеих ветвей, почти исчезают, однако между зонами существенного поглощения находится зона аномального преломления для двух веток дисперсионной кривой одновременно. Отметим, что дисперсионные кривые на рисунке  $C_{10} = 0$  совпадают с одним из случаев для дисперсионных кривых изотропной среде при  $C_{10} = 0$ , полученных в [20],[22],[9].

**Случай**  $\Omega_- \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} 1$   $\Omega_+ \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} p_{\omega_1} < \Omega_0$

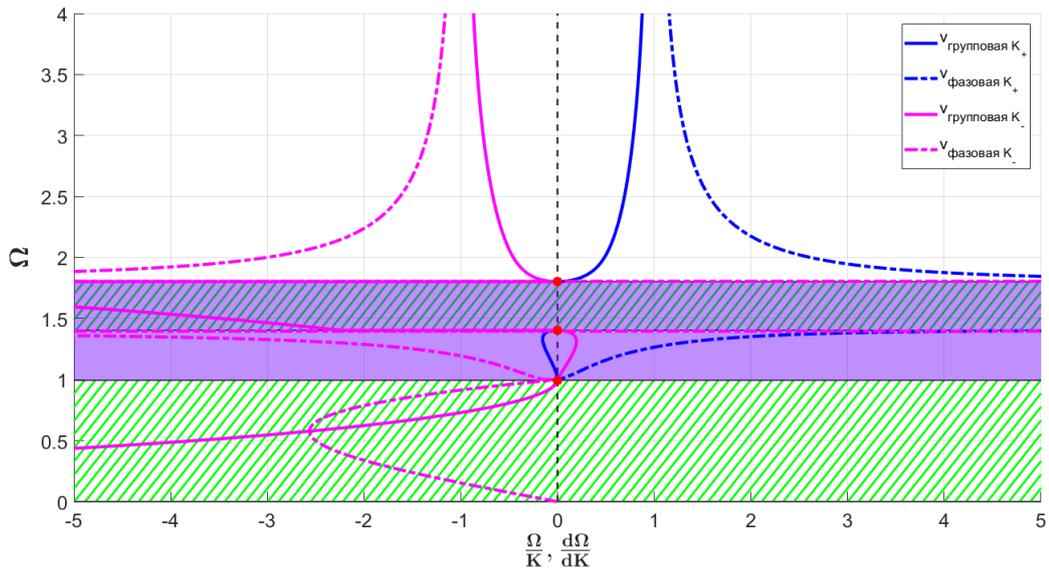
Обратимся к (2.50), (2.51), (2.52), получим, что точки ветвления (в которых групповая скорость равна нулю) должны располагаться следующим

образом (рассматривается случай  $\xi > 0$ ):

1.  $K \rightarrow \infty; \Omega = \Omega_- = 1$
  2.  $K = \frac{\xi}{p_{\omega_1}^2 - 1} = o(1) > 0, \Omega = \Omega_+ \rightarrow (2.55)$
  3.  $K = \frac{\xi}{\Omega_0^2 - 1} = o(1) > 0, \Omega = \Omega_0$
- (2.60)



(a) Дисперсионные кривые  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 1.4$



(b) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 1.4$

Рис. 2.5:  $\Omega_- \approx 1, \Omega_+ \approx 1.4, \Omega_0 \approx 1.8, \xi = 0.15$

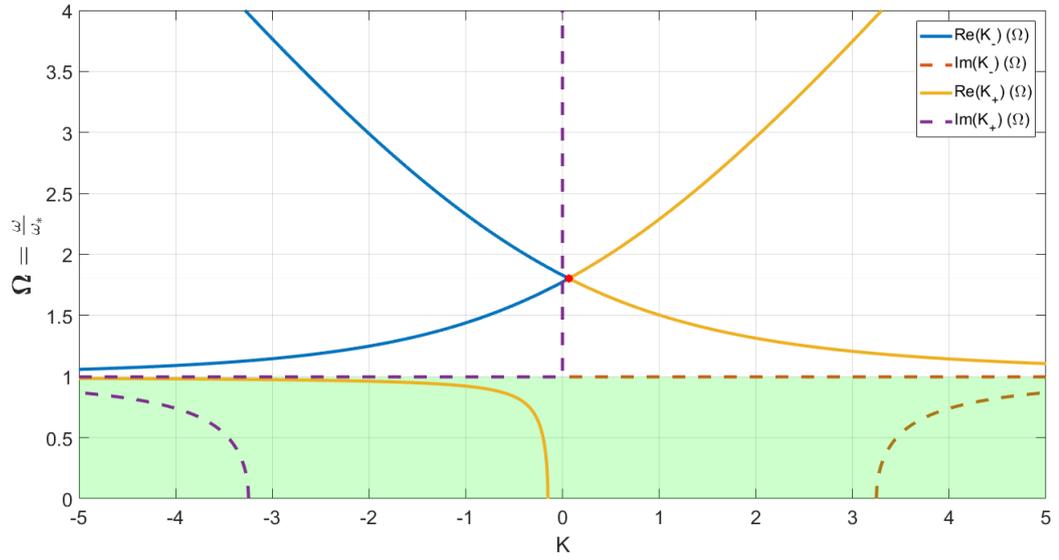
Данный случай очень похож на предыдущий поведением точек ветв-

ления, зон существенного поглощения и аномального преломления, что подтверждается (2.59), (2.60), стоит также упомянуть, что предсказанное в (2.55) поведение соответствует численной реализации, основное отличие состоит в том, что в данном случае верхней границей в верхней зоне существенного поглощения является частота  $\Omega_+$ . При дальнейшем уменьшении параметра  $p_c$  мы получим такую же картину для дисперсионных кривых, как в изотропном материале, где перевязка  $C_{10} = 0$ , графики дисперсионных кривых в случае (2.54) и (2.55) при очень малом значении  $\xi$  будут соответствовать одному и тому же виду дисперсионных кривых, однако будут различны граничные частоты для верхней зоны существенного поглощения. Сравнение рисунков (2.2(b)) и (2.5(b)) дает те же результаты, что и в ранее рассмотренном случае  $\Omega_+ > \Omega_0$ .

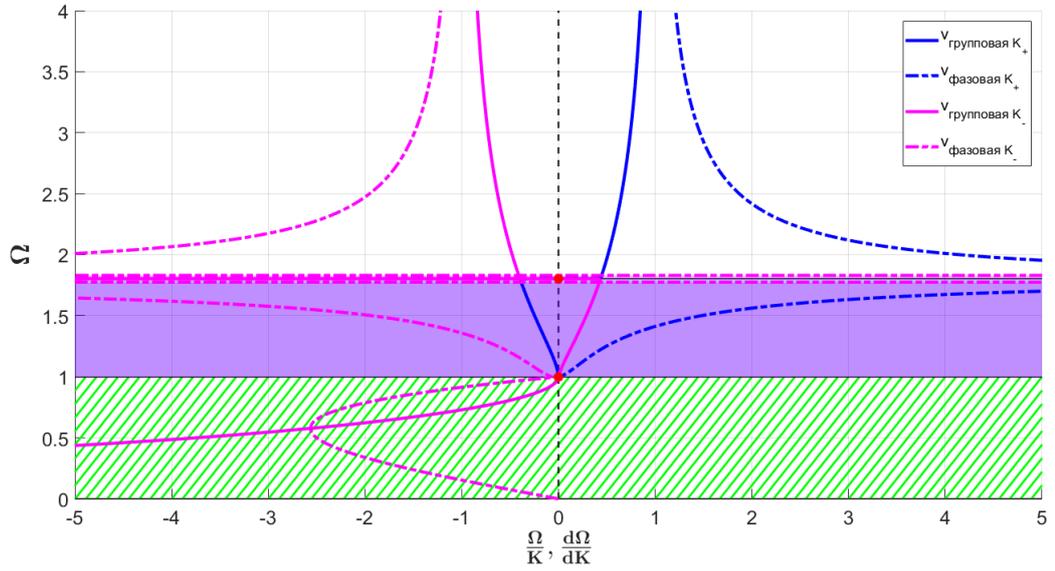
**Случай**  $\Omega_- \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} 1$      $\Omega_+ \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} p_{\omega_1} = \Omega_0$

Обратимся к (2.50), (2.51), (2.52), получим, что точки ветвления (в которых групповая скорость равна нулю) должны располагаться следующим образом (рассматривается случай  $\xi > 0$ ):

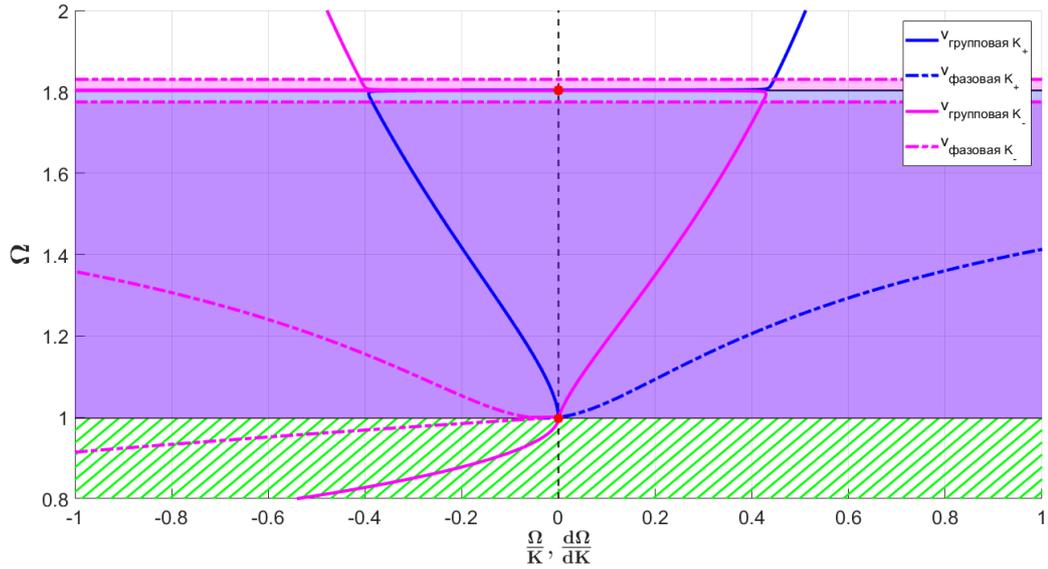
1.  $K \rightarrow \infty; \Omega = \Omega_- = 1$
  2.  $K = \frac{\xi}{p_n^2} = o(1) > 0, \Omega = \Omega_+ \rightarrow (2.56)$
- (2.61)



(a) Дисперсионные кривые  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} \approx 1.8$



(b) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} \approx 1.8$



(с) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} \approx 1.8$

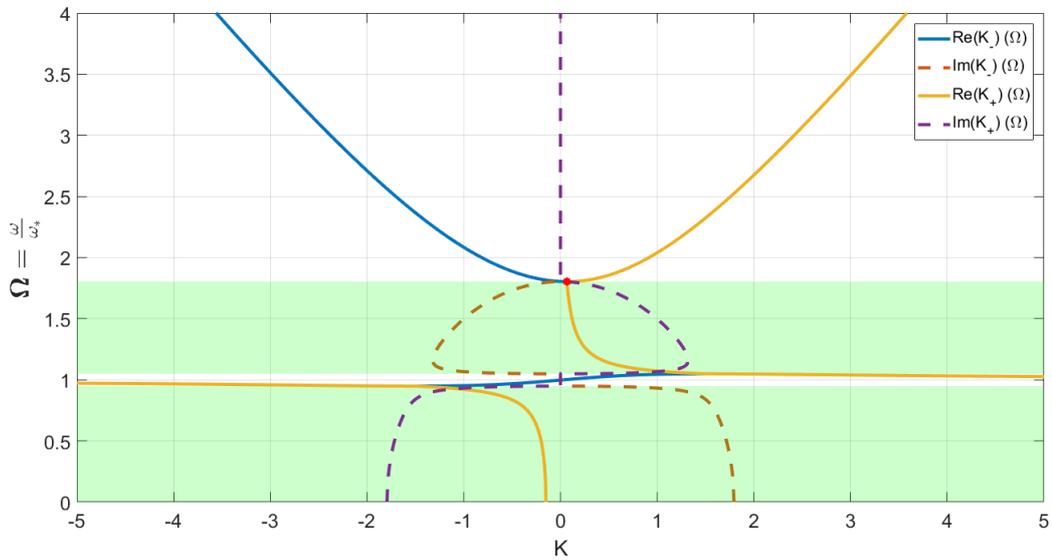
Рис. 2.6:  $\Omega_- \approx 1, \Omega_+ \approx 1.8, \Omega_0 \approx 1.8, \xi = 0.15$

Точка ветвления на верхней границе нижней зоны существенного поглощения смещается от вертикали при уменьшении  $\xi$  относительно рисунка 2.2(а), верхняя зона существенного поглощения почти пропадает, что соответствует (2.56), (2.43), поэтому точки ветвления на границах верхней зоны существенного поглощения смещаются к вертикальной оси и стремятся совпасть друг с другом, что подтверждается (2.53). Анализ рисунков 2.6(б), 2.6(с) показывает, что зоны аномального преломления, не являющиеся общими для обеих ветвей, почти исчезают, однако сразу после нижней зоны существенного поглощения находится зона аномального преломления для обеих веток дисперсионной кривой. Также на рисунке 2.6(а) в верхней точке ветвления поведение дисперсионных кривых напоминает их поведение в точках магнитоакустического резонанса, когда две ветви сближаются, при этом групповая скорость каждой из них сильно меняется, и рядом находятся точки различных ветвей, соответствующие одинаковым групповым скоростям. Однако в данном случае эти кривые разделены малой зоной существенного поглощения.

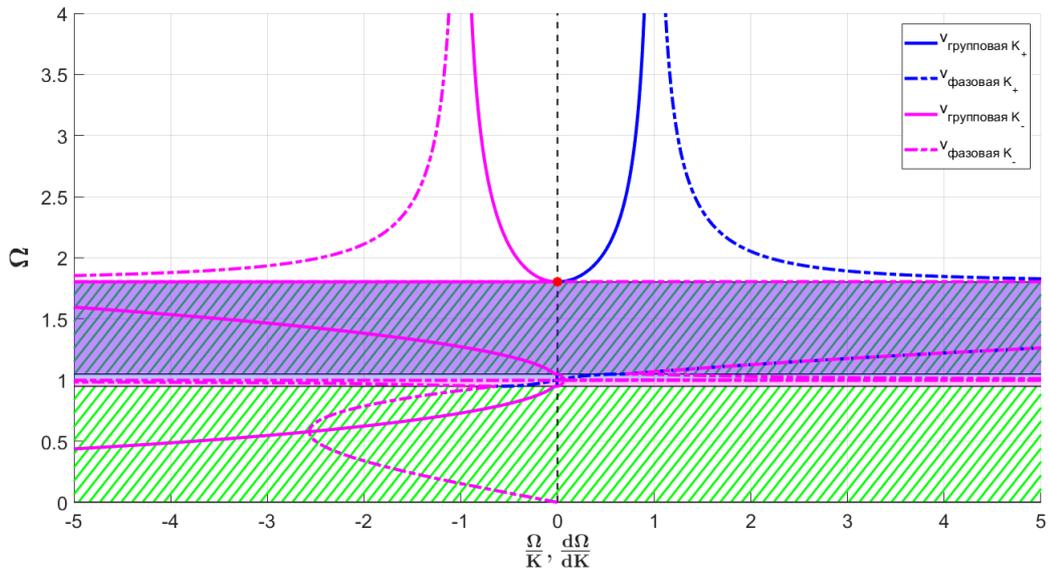
Случай  $\Omega_- \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} 1$      $\Omega_+ \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} 1$

Обратимся к (2.50), (2.51), (2.52), получим, что точки ветвления (в которых групповая скорость равна нулю) должны располагаться следующим образом (рассматривается случай  $\xi > 0$ ):

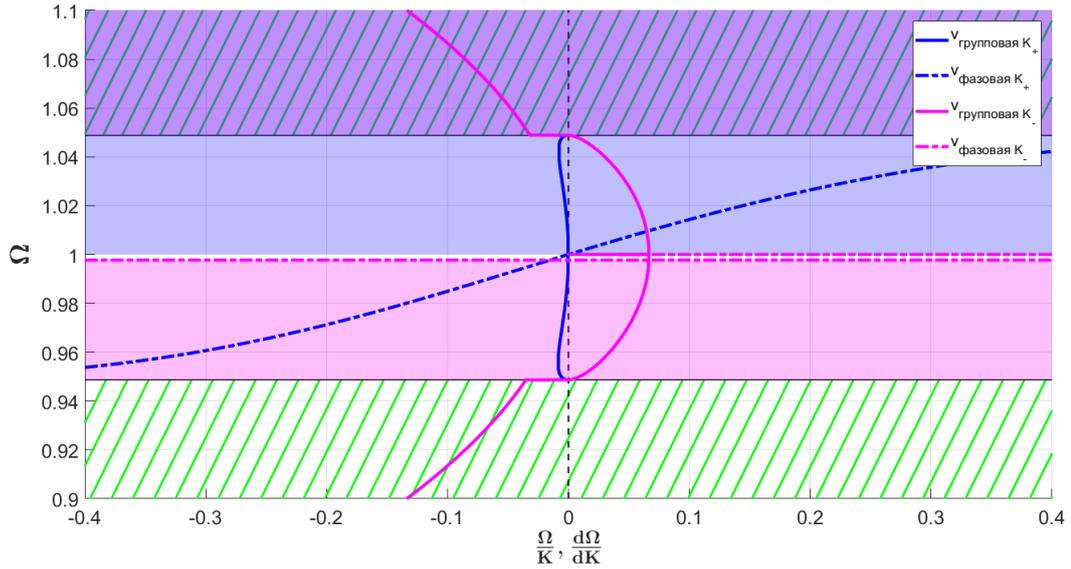
1.  $K \rightarrow \infty; \Omega = \Omega_- = \Omega_+ = 1 \rightarrow (2.57)$
2.  $K = \frac{\xi}{\Omega_0^2 - 1} = o(1) > 0, \Omega = \Omega_0$  (2.62)



(a) Дисперсионные кривые  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 1$



(b) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 1$

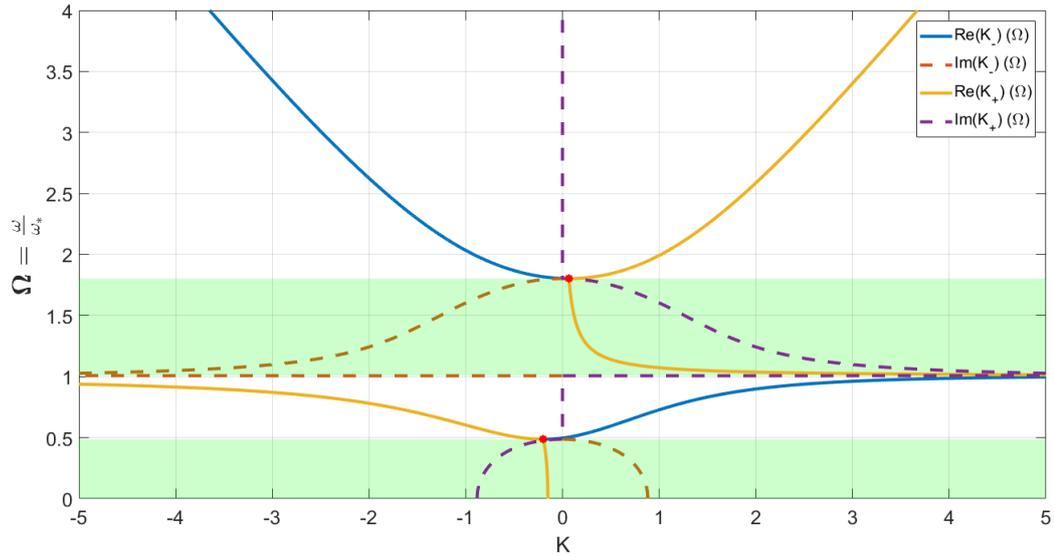
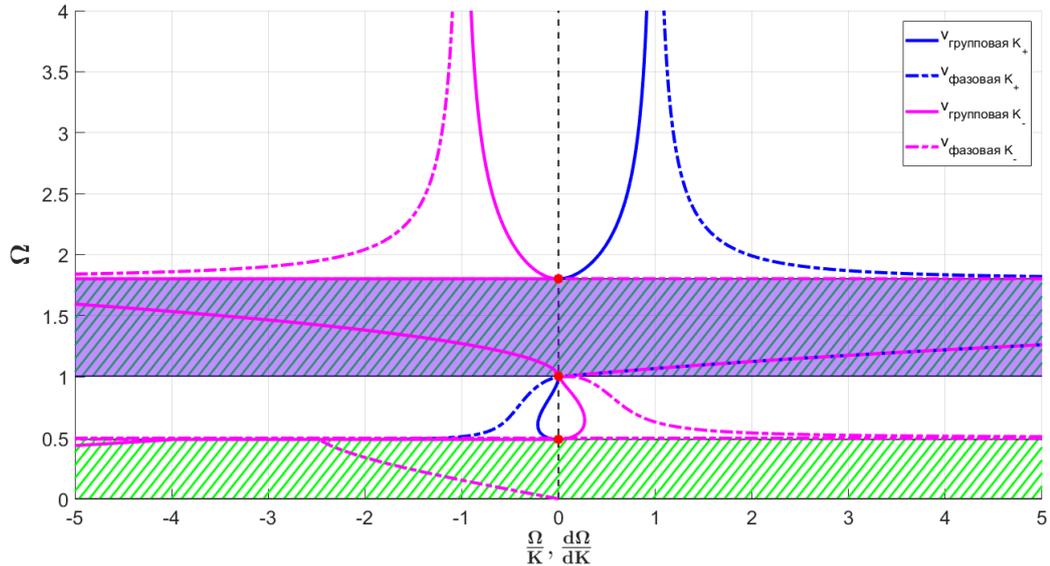
(с) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 1$ Рис. 2.7:  $\Omega_- \approx 1, \Omega_+ \approx 1, \Omega_0 \approx 1.8, \xi = 0.15$ 

Заметим, что в данном случае по сравнению с рисунком 2.2(а) групповые скорости при удалении от точек ветвления на верхней и нижней границах растут по модулю очень медленно, поскольку, согласно (2.43), верхняя и нижняя зоны существенного поглощения почти сливаются. Это можно увидеть на рисунке 2.7(а). Точка ветвления на верхней границе верхней зоны существенного поглощения сместилась ближе к оси ординат, что соответствует (2.62). Также сравнение рисунков 2.2(а) и 2.7(б), 2.7(с) подтверждает правильность (2.57).

**Случай**  $\Omega_- \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} p_{\omega_1} \quad \Omega_+ \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} \mathbf{1} < \Omega_0$

Обратимся к (2.50), (2.51), (2.52), получим, что точки ветвления (в которых групповая скорость равна нулю) должны располагаться следующим образом (рассматривается случай  $\xi > 0$ ):

1.  $K \rightarrow \infty; \Omega = \Omega_+ = 1 \rightarrow$  (2.58)
2.  $K = \frac{\xi}{\Omega_0^2 - 1} = o(1) > 0, \Omega = \Omega_0$  (2.63)
3.  $K = \frac{\xi}{\Omega_-^2 - 1} = o(1) < 0, \Omega = \Omega_- \rightarrow$  (2.58)

(a) Дисперсионные кривые  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 0.5$ (b) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 0.1; p_n = 1.5; p_{\omega_1} = 0.5$ Рис. 2.8:  $\Omega_- \approx 0.5, \Omega_+ \approx 1, \Omega_0 \approx 1.8, \xi = 0.15$ 

Заметим, что точки ветвления, расположенные на верхних границах нижней и верхней зон существенного поглощения сместились ближе к вертикальной оси, точка ветвления, расположенная на нижней границе верхней зоны существенного поглощения, наоборот, удаляется от вертикальной оси о сравнению с рисунком 2.2(a), что соответствует (2.63). При сравнении графиков фазовой и групповой скорости заметим, что групповая скорость во всех точках ветвления как для конечного значения  $\xi$ , так и при  $\xi \xrightarrow{p_c \rightarrow 0} 0$  близка к нулю, однако при малых значениях  $\xi$  почти пропадают зоны аномального преломления, это легко увидеть, сравнивая рисунки

2.2(b), 2.8(b). Также стоит отметить, что полученные нами дисперсионные кривые на рисунке 2.8(a) совпадают с кривыми для изотропного материала  $C_{10} = 0$ , полученными в [20],[22],[9] с точностью до границ зон существенного поглощения и вида кривых, а также отсутствия падающих участков дисперсионной кривой.

$$\xi \xrightarrow{p_n \rightarrow 0} \mathbf{0}$$

В данном случае следует учесть, что:

$$\Omega_0 = \sqrt{1 + p_n^2} \xrightarrow{p_n \rightarrow 0} 1 \quad (2.64)$$

Воспользуемся (2.35) и получим условия на характеристические частоты:

1.  $\Omega_+ > 1 \rightarrow$  из (2.39), поскольку  $p_c$  конечно
2.  $\Omega_- < 1$

(2.65)

Заметим, что (2.65) исключает из рассмотрения почти все случаи кроме  $\Omega_+ > \Omega_0$  независимо от значений  $p_{\omega_1}$ . Стоит отметить, что из (2.42) следует, что для  $|p_{\omega_1}|$  существует только нижняя граница равная  $|p_c|$ , верхней границы не существует, отсюда следует, что нам интересны следующие случаи:

1.  $|p_{\omega_1}| = |p_c|$
2.  $|p_{\omega_1}| \neq |p_c| < \infty$
3.  $|p_{\omega_1}| \gg |p_c|$

(2.66)

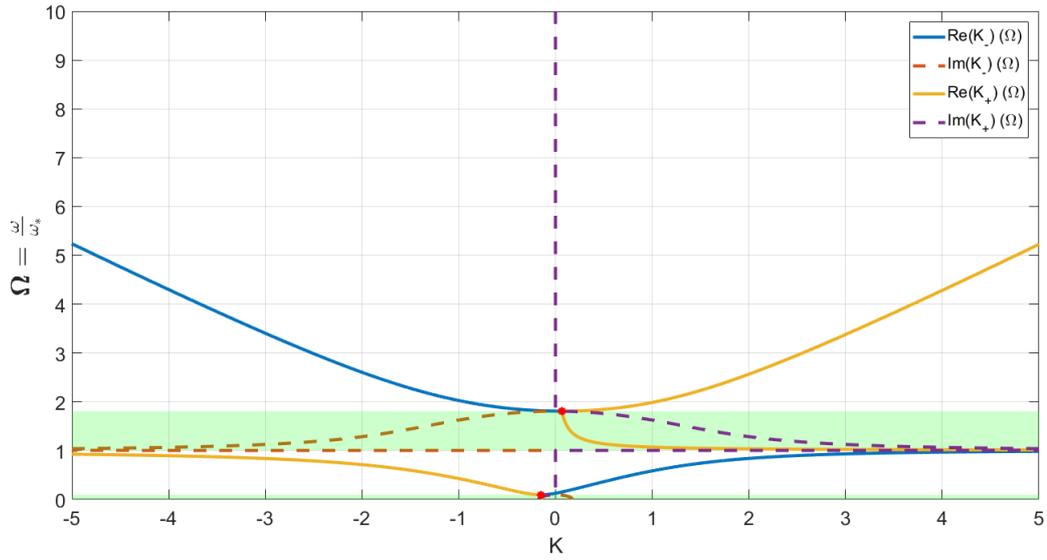
**Случай**  $|p_{\omega_1}| = |p_c|$

Обратимся к (2.39), получим условия на характеристические частоты в таком случае, помимо условия на  $\Omega_0$ :

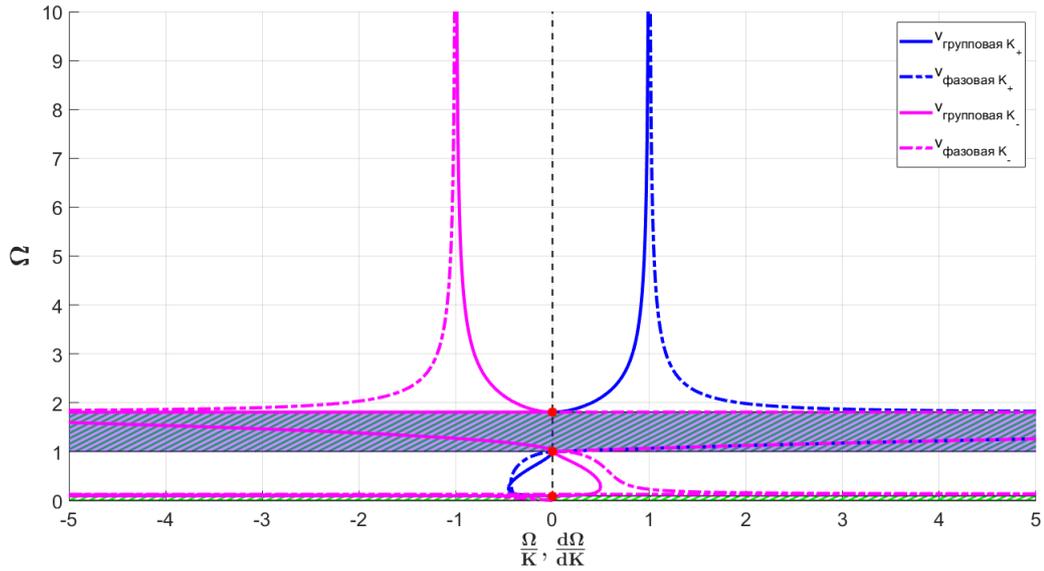
$$\begin{aligned} X_{\pm} &= \frac{1}{2}(p_{\omega_1}^2 + 1 \pm \sqrt{(p_{\omega_1}^2 - 1)^2 + 4p_c^2}) \xrightarrow{p_c \rightarrow p_{\omega_1}} \frac{1}{2}(p_c^2 + 1 \pm p_c^2 + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \Omega_+ \rightarrow \sqrt{1 + p_c^2} \\ \Omega_- \rightarrow 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Из (2.51), (2.50) для  $\xi = o(1) > 0$  легко получить:

1.  $\Omega = 1 \Rightarrow K = \infty$
2.  $\Omega = \Omega_- \Rightarrow K_{\pm} = \frac{\xi}{\Omega_-^2 - 1} = o(1) < 0 \rightarrow$  (2.67)
3.  $\Omega = \Omega_+ \Rightarrow K_{\pm} = \frac{\xi}{\Omega_+^2 - 1} = o(1) > 0 \rightarrow$  (2.67)



(a) Дисперсионные кривые  $p_c = 1.5; p_n = 0.1; p_{\omega_1} = 1.51$

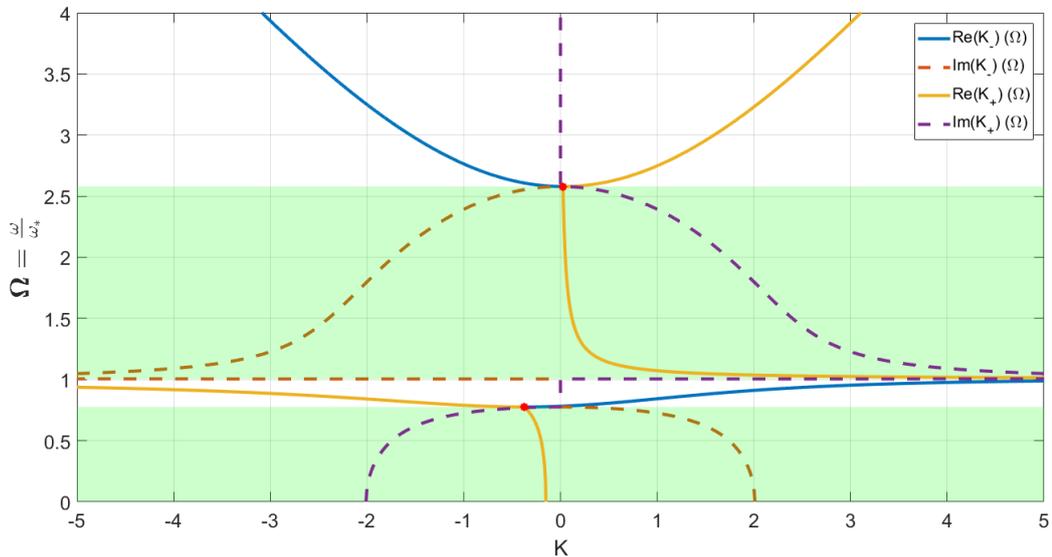


(b) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 1.5; p_n = 0.1; p_{\omega_1} = 1.51$

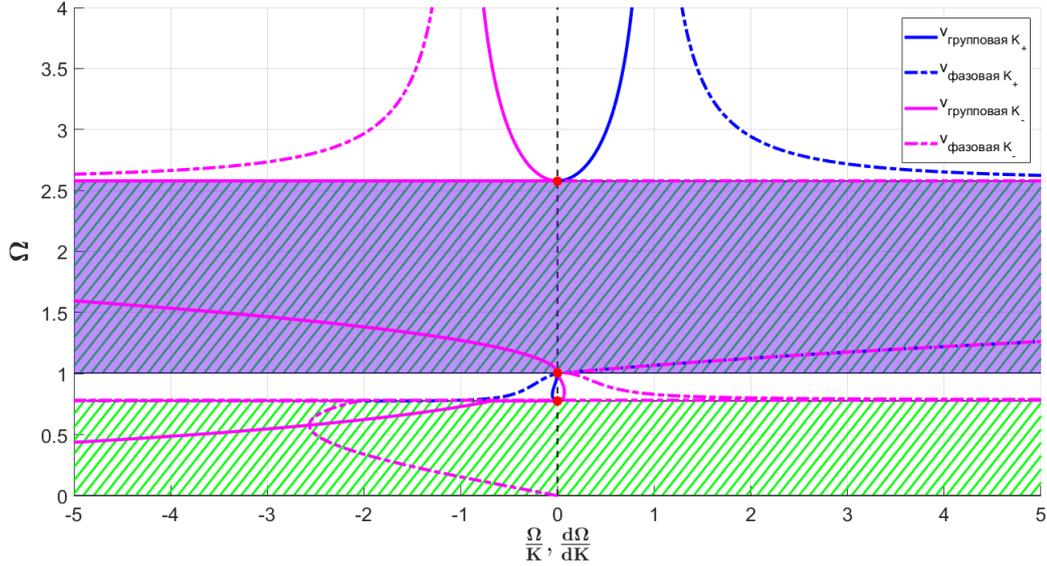
Рис. 2.9:  $\Omega_- \approx 0.1, \Omega_+ \approx 1.8, \Omega_0 \approx 1, \xi = 0.15$

Заметим, что наши предположения (2.68) подтверждаются при сравнении рисунков 2.9(a), 2.2(a). Как уже было упомянуто выше, такое поведение точек ветвления (смещение к вертикальной оси) должно приводить к постепенному исчезновению зон аномального преломления, что и наблюдается на рисунке 2.9(b). Поведение зон существенного поглощения также соответствует (2.43). Вид дисперсионных кривых очень похож на случай изотропного материала с  $N = 0$ , это видно при сравнении с результатами, полученными в [22].

**Случай**  $|\mathbf{p}_{\omega_1}| \neq |\mathbf{p}_c| < \infty$



(a) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 1.5; p_n = 0.1; p_{\omega_1} = 2.5$

(b) Фазовая и групповая скорости  $p_c = 1.5; p_n = 0.1; p_{\omega_1} = 2.5$ Рис. 2.10:  $\Omega_- \approx 1, \Omega_+ \approx 1, \Omega_0 \approx 1.8, \xi = 0.15$ 

Данный случай отличается от предыдущего тем, что нижняя зона существенного поглощения имеет конечную ширину, определяемую параметрами  $p_c, p_n$ , в остальном, из (2.43), (2.35), легко получается выражение аналогичное (2.68). Это подтверждается при сравнении рисунков 2.9(а), 2.10(а).

### Случай $|p_{\omega_1}| \gg |p_c|$

Рассмотрим, как себя ведут характеристические частоты в таком случае:

$$\begin{aligned} X_+ &= \frac{1}{2}(p_{\omega_1}^2 + 1 + \sqrt{(p_{\omega_1}^2 - 1)^2 + 4p_c^2}) \xrightarrow{p_{\omega_1} \gg p_c} p_{\omega_1}^2 \\ X_- &= \frac{1}{2}(p_{\omega_1}^2 + 1 - \sqrt{(p_{\omega_1}^2 - 1)^2 + 4p_c^2}) \xrightarrow{p_{\omega_1} \gg p_c} 1 \end{aligned} \quad (2.69)$$

Оба предела получаются домножением на сопряженный множитель. То есть в данном случае нижняя зона существенного поглощения становится почти неотделимой от верхней, а верхняя зона существенного поглощения становится очень широкой. В остальном, из (2.43), (2.35) получаются условия, аналогичные (2.63), соответственно и дисперсионные соотношения будут аналогичны ранее представленным. Вид дисперсионных кривых и скоростей аналогичен предыдущим случаям для  $p_n \rightarrow 0$ .

$$\xi \xrightarrow{p_n, p_c \rightarrow 0} 0$$

В данном случае мы ожидаем, что итоговые графики дисперсионных кривых, фазовой и групповой скорости будут сочетать поведение, описанное в предыдущих случаях. Поскольку все возможные случаи отдельного стремления уже были описаны ранее, нам будет достаточно совместить выражения, полученные для конкретного случая  $p_c \rightarrow 0$  и случая  $p_n \rightarrow 0$ , главное, чтобы данные случаи были совместимы.

$$\Omega^2 - \Omega_0^2 = 2\Omega_0\Delta\Omega = o(\xi^2); \Omega_0 > \Omega_+$$

То есть рассматривается случай конечного значения  $\xi$  вблизи характеристических частот. В таком случае получим:

$$K = \frac{\xi \pm \sqrt{2\Omega_0\Delta\Omega}\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega_+^2)(\Omega_0^2 - \Omega_-^2)}}{\Omega_0^2 - 1} + o(\xi^2) \quad (2.70)$$

Из данного выражения мы видим, что в характеристических частотах дисперсионные кривые ветвятся, причем возникающие в точке ветви обладают групповыми скоростями разных знаков вблизи точки ветвления. Поэтому для одной из ветвей вблизи данной точки имеет место аномальное преломление.

Из (2.45) видно, что групповая скорость приближается к нулю в окрестности характеристических частот, однако получим выражение для групповой скорости:

$$\begin{aligned} \Omega_0 v_{group} &= \pm \frac{(\Omega_0^2 - 1)\sqrt{2\Omega_0\Delta\Omega}\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega_+^2)(\Omega_0^2 - \Omega_-^2)} + o(\xi^2)}{2\Omega_0\Delta\Omega(2\Omega_0^2 - \Omega_+^2 - \Omega_-^2) + (\Omega_0^2 - \Omega_-^2)(\Omega_0^2 - \Omega_+^2) - 2K\sqrt{2\Omega_0\Delta\Omega}\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega_+^2)(\Omega_0^2 - \Omega_-^2)} + o(\xi^2)} = \\ &= \frac{o(\xi^2)}{(\Omega_0^2 - \Omega_-^2)(\Omega_0^2 - \Omega_+^2) + o(\xi^2)} = o(\xi^2) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Аналогичные выражения можно получить и для двух других характеристических частот, то есть на границах зон существенного преломления существуют точки, в которых групповая скорость равна нулю, такие точки мы наблюдали на рисунке 2.2(a), 2.2(b), они были названы точками ветвления, при переходе через эти точки  $\frac{d\Omega}{d\text{Re}K}$  меняет знак, что приводит к возникновению зон аномального преломления. При исследовании  $\xi \rightarrow 0$  мы

убедились в том, что  $sign(\frac{\xi}{\Omega_{0,\pm}^2-1})$  влияет на положение этих точек относительно оси ординат, (2.70), (2.71) показывает, что это справедливо и в случае конечного значения параметра  $\xi$ . Также стоит заметить, что есть еще одно значение частоты, из-за которого может возникнуть зона аномального преломления:  $\Omega = 1$ . В отличие от характеристических частот, эта частота не соответствует никакой точке ветвления, поскольку хоть групповая скорость и обретает нулевое значение при этой частоте, смена ее знака может произойти только для одной из ветвей, что делает эту точку подозрительной на смену зон нормального и аномального преломления.

#### 2.1.4. Случаи, подозрительные на смену зон нормального и аномального преломления

Случай  $\Omega = 1 + \Delta\Omega$ ,  $\Delta\Omega = o(1)$

Запишем аппроксимацию для дисперсионного соотношения в таком случае:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\xi \pm \sqrt{(1 - \Omega_0^2)(1 - \Omega_-^2)(1 - \Omega_+^2) + o(\Delta\Omega)}}{2\Delta\Omega} = \\ &= \frac{\xi \pm \sqrt{(1 - \Omega_0^2)(1 - \Omega_-^2)(1 - \Omega_+^2)}}{2\Delta\Omega} + o(1) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Исходя из (2.72) можно сказать, что:

$$K_{\pm} \xrightarrow{\Delta\Omega \rightarrow 0} = \begin{cases} sign(\xi \pm \sqrt{(1 - \Omega_0^2)(1 - \Omega_-^2)(1 - \Omega_+^2)})\infty, & \Delta\Omega > 0 \\ -sign(\xi \pm \sqrt{(1 - \Omega_0^2)(1 - \Omega_-^2)(1 - \Omega_+^2)})\infty, & \Delta\Omega < 0 \end{cases} \quad (2.73)$$

Однако численно нами было показано, что одна из ветвей доопределяется до непрерывной и монотонной в окрестности  $\Omega = 1$  кривой (в случае  $\xi > 0$  — ветвь  $K_-$ ,  $\xi < 0$  — ветвь  $K_+$ . Это подтверждается рисунками 2.2(a) – 2.3(b)), аналитически пока что доказать данное утверждение не удалось.

Сначала рассмотрим ту ветвь, которая удовлетворяет (2.73) (не является монотонной и непрерывной в окрестности  $\Omega = 1$ ). Дальнейшие рассуждения проведем для  $\xi > 0$ . Если подставить полученное нами выражение для  $K_+ \rightarrow \pm\infty$  в выражение для групповой скорости, то заметим, что при переходе через  $\Omega = 1$  числитель поменяет знак, в знаменателе большую роль будет играть  $K_+$  (поскольку другие слагаемые в нем конечны), кото-

рое, согласно (2.73), изменяет знак при переходе через единицу, таким образом, групповая скорость ветви  $K_+$  сохраняет свое значение при переходе через  $\Omega = 1$ , причем несложно заметить, что ее значение отрицательно. Исходя из (2.73) при  $\Omega < 1$  фазовая скорость имеет отрицательное значение, в  $\Omega = 0$  она равна нулю, а при  $\Omega > 1$  положительна, поэтому в частотном диапазоне  $\Omega \in [1; \min(\Omega_+, \Omega_0)]$  будет находиться зона аномального преломления, верхняя граница соответствует границе зоны существенного поглощения, поскольку мы не рассматриваем рабочие зоны внутри зон существенного поглощения. К аналогичному выводу можно прийти для ветви  $K_-$  при  $\xi < 0$ .

Рассмотрим ветвь, которая непрерывна и монотонна в окрестности  $\Omega = 1$ . Поскольку мы рассматриваем поведение скоростей только вне зон существенного поглощения, а  $\Omega_- < 1 < \min(\Omega_0, \Omega_+)$  ( $\Omega_{0,\pm}$  — границы зон существенного поглощения), то логично предположить, что искомая рабочая зона находится в этом частотном диапазоне. Проведем рассуждения для  $\xi > 0$ : обе ветви должны пересечься в следующей по ходу после  $\Omega = \Omega_-$  точке ветвления:  $\Omega = \min(\Omega_0, \Omega_+)$ , которая расположена правее оси ординат и выше  $\Omega = \Omega_-$  в силу (2.35), а точка ветвления, соответствующая частоте  $\Omega_-$ , находится левее оси ординат, что говорит о том, что, с учетом монотонности, групповая скорость сохраняет свой знак в рассматриваемом частотном диапазоне положительным. Фазовая скорость левее  $K = 0$  отрицательна, после достижения частоты, соответствующей  $K = 0$ :  $\Omega_{K=0}$ , она меняет свой знак на противоположный, то есть частота  $\Omega_{K=0} < \min(\Omega_0, \Omega_+)$  — верхняя граница зоны аномального преломления, а поскольку мы не рассматриваем поведение скоростей внутри зон существенного поглощения, нижней границей зоны аномального преломления будет являться частота  $\Omega_-$ . Итого, для монотонной ветви есть зона аномального преломления в диапазоне  $\Omega_- < \Omega < \Omega_{K=0}$ . Описанное поведение легко увидеть на рисунках 2.2(a), 2.2(b).

**Случай  $K = 0$   $\Omega > \max(\Omega_0, \Omega_+)$**

Обозначим  $X$ , для которого  $K = 0$ , за  $\hat{X}$ . В таком случае

$$\xi = \mp \sqrt{(\hat{X} - X_0)(\hat{X} - X_-)(\hat{X} - X_+)},$$

Однако важно понимать, что  $\xi$  - параметр системы, качественно влияющий на ее поведение, это некоторое вещественное число, имеющее определенный знак, таким образом данный случай реализуем только для одной из двух возможных волн, поскольку для его выполнения нужно, чтобы знак  $\xi$  не совпадал со знаком стоящим перед корнем. Тогда получим, что фазовая скорость в таком случае, очевидно, меняет знак при переходе через эту точку, это легко увидеть из (2.44), а групповая скорость:

$$\left[ \begin{cases} \frac{dK}{dX}(\hat{X}) = \pm \frac{(\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-)}{2\xi} \cdot \frac{1}{\hat{X}-1} \neq 0 \\ (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-) \neq 0 \\ \frac{dK}{dX}(\hat{X}) = \pm \frac{(\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-)}{2\xi} \cdot \frac{1}{\hat{X}-1} = 0 \\ (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-) = 0 \end{cases} \quad (2.74)$$

Покажем, что в (2.74) может выполняться только один случай, для этого рассмотрим:

$$\begin{aligned} & \pm((\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-)) = 0 \\ & \pm(\xi + (\hat{X}-X_-)^2(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-)^2 = 0) \cdot (\hat{X}-X_0) \\ & \pm(\xi(\hat{X}-X_0) + \xi(\hat{X}-X_-) + (\hat{X}-X_0)^2(\hat{X}-X_-)^2 = 0) \cdot (\hat{X}-X_+)^2 \\ & \pm(\xi(\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_+)^2 + \xi(\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+)^2 + \xi^2 = 0) : \xi \neq 0 \\ & \xi = \mp(\hat{X}-X_+)^2 \left( 2\hat{X} - X_+ - X_- \right) \neq \mp \sqrt{(\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+)} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Итак, получаем, что

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dK}{dX}(\hat{X}) &= \pm \frac{(\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-)}{2\xi} \cdot \frac{1}{\hat{X}-1} \neq 0 \\ (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_-)(\hat{X}-X_+) + (\hat{X}-X_0)(\hat{X}-X_-) &\neq 0 \end{aligned} \right. \quad (2.76)$$

Таким образом, групповая скорость сохраняет свой знак, а фазовая изменяет при переходе через  $K = 0$ , то есть в данной точке происходит смена рабочих зон. Очевидно, что это справедливо лишь для той ветви, которая пересекает ось ординат. Мы рассматривали сразу оба знака перед корнем, т.к., как уже было сказано выше, в зависимости от знака параметра  $\xi$  это может быть либо ветвь  $K_- \rightarrow \xi > 0$ , либо  $K_+ \rightarrow \xi < 0$ . Заметим, что такое поведение можно наблюдать на рисунке 2.2. После выхода из

зоны существенного поглощения именно ветка, соответствующая  $K_-$  (т.к.  $\xi > 0$ ), сохраняет знак групповой скорости, но изменяет знак фазовой скорости, то есть левее  $K = 0$  находится зона нормального преломления, а для  $\Omega \in [\max(\Omega_0, \Omega_+), \hat{\Omega}]$  существует зона аномального преломления.

### 2.1.5. Частотные диапазоны зон аномального преломления

Подведем итог всему, что было получено нами выше. В зависимости от того, положителен или отрицателен параметр  $\xi$  для разных ветвей дисперсионной кривой, могут возникать разные зоны аномального преломления, которые в случае малых значений  $\xi$  могут перекрываться. Структурируем полученные нами выводы для конечных значений  $\xi$ . Будем придерживаться тех же обозначений:  $\Omega_{K=0}$  — частота, при которой монотонная и непрерывная в  $\Omega = 1$  ветвь пересекает ось ординат,  $\Omega_{K=0} < \min(\Omega_0, \Omega_+)$ ;  $\hat{\Omega}$  — также частота, при которой монотонная и непрерывная в  $\Omega = 1$  ветвь пересекает ось ординат во второй раз,  $\hat{\Omega} > \max(\Omega_0, \Omega_+)$ . Краткие выводы из дисперсионного анализа сведены в таблицу 2.1.

$\xi > 0$		
Ветвь	ЗАН №1	ЗАН №2
$K_+$	$\Omega \in [1, \min(\Omega_0, \Omega_+)]$	Не имеет
$K_-$	$\Omega \in [\Omega_-, \Omega_{K=0}]$	$\Omega \in [\max(\Omega_0, \Omega_+), \hat{\Omega}]$
$\xi < 0$		
Ветвь	ЗАН №1	ЗАН №2
$K_+$	$\Omega \in [\Omega_-, \Omega_{K=0}]$	$\Omega \in [\max(\Omega_0, \Omega_+), \hat{\Omega}]$
$K_-$	$\Omega \in [1, \min(\Omega_0, \Omega_+)]$	Не имеет

Таблица 2.1: Границы зон аномального преломления (ЗАН). ЗАН №1 — нижняя зона аномального преломления, ЗАН №2 — верхняя.

Несложно заметить, что границы зон существенного поглощения  $\Omega_0$ ,  $\Omega_{\pm}$ ,  $\Omega_{K=0}$ ,  $\hat{\Omega}$  зависят от значения и знака параметров  $p_c, p_n, p_{\omega_1}$ , поскольку именно они влияют на значения  $\xi$ , которое влияет на положение точек ветвления, а, соответственно, и на  $\hat{\Omega}, \Omega_{K=0}$ . Параметр  $p_{\omega_1}$  будет влиять на значения  $\Omega_-, \Omega_+$ , которые также являются границами зон аномального преломления. Из-за сложной зависимости дисперсионных кривых и характеристических частот от параметров, была проведена оценка их влияния, найдены границы зон аномального преломления.

## Заключение

В ходе данной работы было проведено исследование редуцированных сред, не имеющих симметрии отражения, в частности, гиротропной редуцированной среды. Предложены две простейшие микроструктурные модели одномерных редуцированных сред без симметрии отражения, для них были решены уравнения Кристоффеля, получены параметры, влияющие на зоны существенного поглощения для смешанных волн и исследовано их влияние на ширину этих зон (**глава 1**).

В главе 2 впервые предложена одномерная микроструктурная модель, уравнения движения которой совпадают с уравнениями редуцированной гиротропной среды с комбинированной взаимосвязью субконтинуумов, обладающей богатыми волновыми свойствами. Для общего случая такой среды получены независимые параметры, качественно влияющие на зоны существенного поглощения и аномального преломления (2.39). Это позволило исправить имеющуюся в литературе неточность. Проведен анализ влияния этих параметров на рабочие зоны. Из условий неотрицательности энергии деформации были найдены условия на данные параметры (2.42). Исследованы дисперсионные соотношения в различных частотных диапазонах, например, были рассмотрены случаи слабых перевязок между смещениями несущего континуума и распределенного динамического гасителя или между деформацией несущего континуума и смещением распределенного динамического гасителя. Результат совпал с теоретическим ожиданием: в таком случае вид дисперсионных в редуцированных гиротропных средах стремится к картине, которая наблюдается при рассмотрении поперечных волн в изотропных редуцированных средах с точностью до значений границ рабочих зон (рисунки 2.2(a) – 2.10(b)). Нами было аналитически показано, что любая характеристическая частота является частотой ветвления, т.е. на данной частоте групповая скорость любой из двух возможных поперечных волн с различной поляризацией на данной частоте равна нулю (2.70), и выходящие из данной точки ветви в ее окрестности имеют разную по знаку групповую скорость. Аналитические результаты подтверждены вычислениями. Были численно показано, что одна из двух ветвей дисперсионной кривой в редуцированных гиротропных средах доопределяется до монотонной и непрерывной в окрестности частоты  $\Omega = 1$ , другая име-

ет горизонтальную асимптоту (показано аналитически (2.73)). То, какая именно ветвь будет монотонной и непрерывной, определяет знак параметра  $\xi = p_c p_n$ , который показывает, насколько сильно гиротропная среда будет отличаться от изотропной. При  $\xi > 0 \Rightarrow K_-$  монотонна и непрерывна в окрестности  $\Omega = 1$ , иначе это ветвь  $K_+$ . Численно показано, что такая волна будет всегда иметь две зоны аномального преломления, найдены частотные диапазоны этих рабочих зон, указано, какие параметры влияют на их ширину (2.1). Стоит отметить, что при анализе дисперсионных соотношений, мы не прибегали к микроструктурным параметрам предложенной нами модели, что говорит о справедливости полученных результатов и в более общих случаях редуцированных гиротропных сред.

## Список использованных источников

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Наука, 1965. Т. 7. С. 247–250.
2. Cosserat E., Cosserat F. Théorie des corps déformables. A. Hermann et fils, 1909.
3. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. Foundations of micropolar mechanics. Springer Science & Business Media, 2012.
4. Eringen A.C. Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids. Springer Science & Business Media, 2012.
5. Maugin G.A. Non-classical continuum mechanics. Springer, 2017.
6. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2, № 7. С. 1399–1409.
7. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 3. С. 283–283.
8. Гаврилов С.Н. Математическая модель среды Кельвина // Труды XXIII Школы–семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. Санкт-Петербург, ИПМаш РАН, 1996. С. 229–240.
9. Грекова Е.Ф. Об одном классе единожды отрицательных акустических метаматериалов // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462, № 3. С. 295–298.
10. Зубов Л.М., Еремеев В.А. Уравнения вязкоупругой микрополярной жидкости // Доклады Академии наук. 1996. Т. 351, № 4. С. 472–475.
11. Новацкий В. Моментные напряжения в термоупругости // Прикладная механика. 1967. Т. 3, № 1. С. 3–17.

12. Пальмов В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28, № 3. С. 401–405.
13. Chaki M. Sh., Singh A.K. Scattering and propagation characteristics of SH wave in reduced Cosserat isotropic layered structure at irregular boundaries // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Т. 44, № 7. С. 6143–6163.
14. Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O. Stationary longitudinal thermoelastic waves and the waves of the rotation type in the nonlinear micropolar medium // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2017. Т. 97, № 9. С. 1064–1071.
15. Gao N., Zhang Zh. Acoustic metamaterials for noise reduction: a review // Advanced Materials Technologies. 2022. Т. 7, № 6. С. 128–156.
16. Green A.E., Naghdi P.M. Micropolar and director theories of plates // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1967. Т. 20, № 2. С. 183–199.
17. Grekova E., Zhilin P. Basic equations of Kelvin's medium and analogy with ferromagnets // Journal of elasticity and the physical science of solids. 2001. Т. 64. С. 29–70.
18. Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model // Bulletin of the Seismological Society of America. 2009. Т. 99, № 2B. С. 1423–1428.
19. Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced and full Cosserat media: waves and instabilities // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2019. Т. 31, № 6. С. 1805–1824.
20. Grekova E.F. Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials // Dynamical processes in generalized continua and structures. 2019. С. 253–268.

21. Grekova E.F., Porubov A.V., dell'Isola F. Reduced linear constrained elastic and viscoelastic homogeneous Cosserat media as acoustic metamaterials // *Symmetry*. 2020. T. 12. C. 521–523.
22. Grekova E.F. Viscoelastic reduced enhanced isotropic continua as acoustic metamaterials // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2022. T. 380, № 2237. C. 321–457.
23. Grekova E.F., Isaeva S.M. Linear Reduced Elastic Isotropic Cosserat Medium Subjected to the External Follower Viscoelastic Torque as a Smart Acoustic Metamaterial // *Progress in Continuum Mechanics*. Springer, 2023. C. 171–190.
24. Haberman M.R., Guild M.D. Acoustic metamaterials // *Phys. Today*. 2016. T. 69, № 6. C. 42–48.
25. Ivanova E.A., Vilchevskaya E.N. Micropolar continuum in spatial description // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2016. T. 28. C. 1759–1780.
26. Ivanova E.A. A new approach to modeling of thermal and electrical conductivities by means of the Cosserat continuum // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2022. T. 34, № 5. C. 1313–1342.
27. Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar media — I: the classical theory // *International Journal of Engineering Science*. 1971. T. 9, № 3. C. 271–305.
28. Lalin V., Zdanchuk E. Nonlinear thermodynamic model for reduced Cosserat continuum // *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2014. T. 8, № 1. C. 208–213.
29. Müller W.H., Vilchevskaya E.N. Micropolar theory from the viewpoint of mesoscopic and mixture theories // *Physical Mesomechanics*. 2017. T. 20, № 3. C. 263–279.
30. Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng Sh. Vibrational modes in granular materials // *Physical review letters*. 1984. T. 52, № 10. C. 831–856.
31. Tong Q., Li J., Wang Sh. Acoustic circular dichroism in a three-dimensional chiral metamaterial // *Physical Review B*. 2023. T. 107, № 13. C. 103–134.