

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А.М. Кривцов
«__» _____ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПИСАТЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ УСИЛИЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАТЯЖЕНИЯ ВАНТ

по направлению 01.03.03 «Механика и математическое моделирование»
Направленность
01.03.03_01 «Механика и математическое моделирование сред с
микроструктурой»

Выполнил
студент гр.5030103/90101

А.Н. Ситдииков

Руководитель
профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

А.В. Порубов

Консультант
главный специалист АО «Институт «Стройпроект»

М.Ю. Горохов

Санкт-Петербург

2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО**

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А. М. Кривцов

«__» _____ 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Ситдикову Артур Наилевичу, гр. 5030103/90101

1. Тема работы: Исследование описательных возможностей математических представлений области допустимых значений усилий предварительного натяжения вант
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 05.06.2023
3. Исходные данные по работе: трехмерная модель конструкции, справочная литература, актуальные научные публикации по теме работы.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов): построение модели машинного обучения, построение обучающей выборки, написание алгоритмов, анализ и сравнение результатов.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): не предусмотрено.
6. Консультанты по работе: М. Ю. Горохов, главный специалист АО «Институт «Стройпроект»
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР:

А. В. Порубов, профессор ВШТМиМФ, д.ф.-м.н.

Задание принял к исполнению: 27.02.2023

Студент:

А. Н. Ситдиков

РЕФЕРАТ

На 65 с., 36 рисунков, 15 таблиц.

ВАНТОВЫЙ МОСТ, МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ, ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ, НЕЙРОННАЯ СЕТЬ, ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ.

В данной работе изложено исследование различных методов машинного обучения в качестве инструмента для поиска усилий предварительного натяжения вант. Методы машинного обучения использовались для непосредственного вычисления усилий предварительного натяжения и для построения псевдообратной матрицы. Выполнен анализ результатов и оценка эффективности рассмотренных методов.

THE ABSTRACT

65 pages, 36 pictures, 15 tables.

CABLE-STAYED BRIDGE, MACHINE LEARNING, LINEAR REGRESSION, NEURAL NETWORK, GENETIC ALGORITHM

This work presents the study of various machine learning methods as a tool for finding the pretension forces of stay cables. Machine learning methods were used for direct calculation of pretension forces and for constructing of pseudo-inverse matrix. The results were analyzed and the efficiency of the considered methods was evaluated.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	8
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	13
2.1. Построение набора данных	13
2.2. Линейная регрессия.....	16
2.3. Нейронная сеть	18
2.4. Генетический алгоритм.....	23
ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ.....	30
3.1. Исследование корректности непосредственного вычисления усилий предварительного натяжения.....	30
3.1.1. Задача равной размерности	30
3.1.2. Задача разной размерности	40
3.2. Исследование вычисления псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза	49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	62
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	64

ВВЕДЕНИЕ

В связи непрерывным увеличением количества автомобильного транспорта появляется необходимость в обеспечении транспортных развязок для снижения трафика в нагруженных местах. Строительство мостовых сооружений, эстакад, автомагистралей помогает решить данную проблему. В частности, мосты играют важную роль при обеспечении транспортной и пешей доступности в местах их отсутствия.

Мостовые сооружения бывают разных типов. Основные из них: балочные, вантовые и подвесные. На сегодняшний день к числу эффективных и архитектурно выразительных решений относятся вантовые мосты. Вантовый мост представляет собой висячий мост, состоящий из нескольких пилонов, соединенных с дорожным полотном посредством вант. В отличие от висячих мостов, где дорожное полотно поддерживается вертикальными тросами, прикрепленными к протянутым по всей длине моста основным несущим тросам, у вантовых мостов тросы (ванты) соединяются непосредственно с пилоном.

Несмотря на простоту конструкции она имеет ряд особенностей, что не присуще балочным сооружениям. Самое первое и главное – это ванты, соединяющие пролетное строение (балку жесткости) с пилоном. Их основная задача – это минимизация прогибов балки жесткости моста относительно её недеформированного состояния. Иными словами, проведя аналогию с балочными мостовыми сооружениями, у вантовых мостов в качестве постоянных опор выступают ванты.

Определенную сложность при расчете конструкций подобного типа составляет подбор усилий предварительного натяжения вант таким образом, чтобы в результате конструкция удовлетворяла всем необходимым требованиям (критериям), предъявляемым к отдельным ее элементам. Данная задача ставится при каждом строительстве вантового моста, поэтому на данный момент существуют различные подходы к ее решению.

Одним из таких подходов является применение методов прямой оптимизации, например, метода обобщенного приведенного градиента, при использовании матриц коэффициентов влияния для нужных нам параметров таких как, перемещений, опорных реакций и внутренних сил (усилий). Однако, данный подход, используемый до сегодняшнего дня, имеет ряд недостатков в использовании, что затрудняет решение задачи и замедляет темпы строительства. Например, к таким недостаткам можно отнести потерю стабильности в получении очередного приближения к оптимальном решению при малом изменении жесткостных параметров конструкции. Что предположительно объясняется наличием в решаемой задаче поиска усилий предварительного напряжения вант большого числа локальных минимумов, сходимость к одному из которых может иметь вероятностный характер.

Поэтому актуальной является задача поиска альтернативных методов нахождения усилий предварительного натяжения вант, либо повышающих стабильность получения решений, либо, что более предпочтительно, обеспечивающих получение глобального минимума в решении задачи оптимизации. Интерес так же представляет поиск методов решения задачи в такой форме, когда при неизменных параметрах конструкции, но при изменении количественных значений ограничений на значения перемещений, опорных реакций и внутренних сил в конструкции, решение бы получалось в замкнутой форме, исключаяющей необходимость повторных запусков итерационного процесса подбора решения.

В качестве темы выпускной квалификационной работы было принято решение исследовать описательные возможности различных альтернативных математических представлений допустимых значений предварительного натяжения вант, которые бы были более эффективными, чем используемые на данный момент.

В работе были поставлены следующие задачи:

- Выбрать и исследовать различные математические модели для возможности решения задачи определения усилий предварительного натяжения вант
- Определить возможность интерпретации решаемой задачи в рамках исследуемых математических моделей
- Оценить эффективность применения исследуемых математических моделей и точность результатов, получаемых с их помощью.

В качестве рабочей гипотезы в работе принято предположение о возможности применения различных моделей машинного обучения в качестве методов решения поставленной задачи [4]. На данный момент возможности машинного обучения, и, в частности, искусственного интеллекта (или более узко искусственных нейронных сетей), позволяют решать подобные оптимизационные задачи. Однако, необходимо правильно подобрать необходимый инструментарий, чтобы качественно использовать данный математический аппарат в исследуемой области.

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной работе в качестве модели механической системы было рассмотрено вантовое мостовое сооружение, которое включает в себя пролетное строение, пилон и ванты.

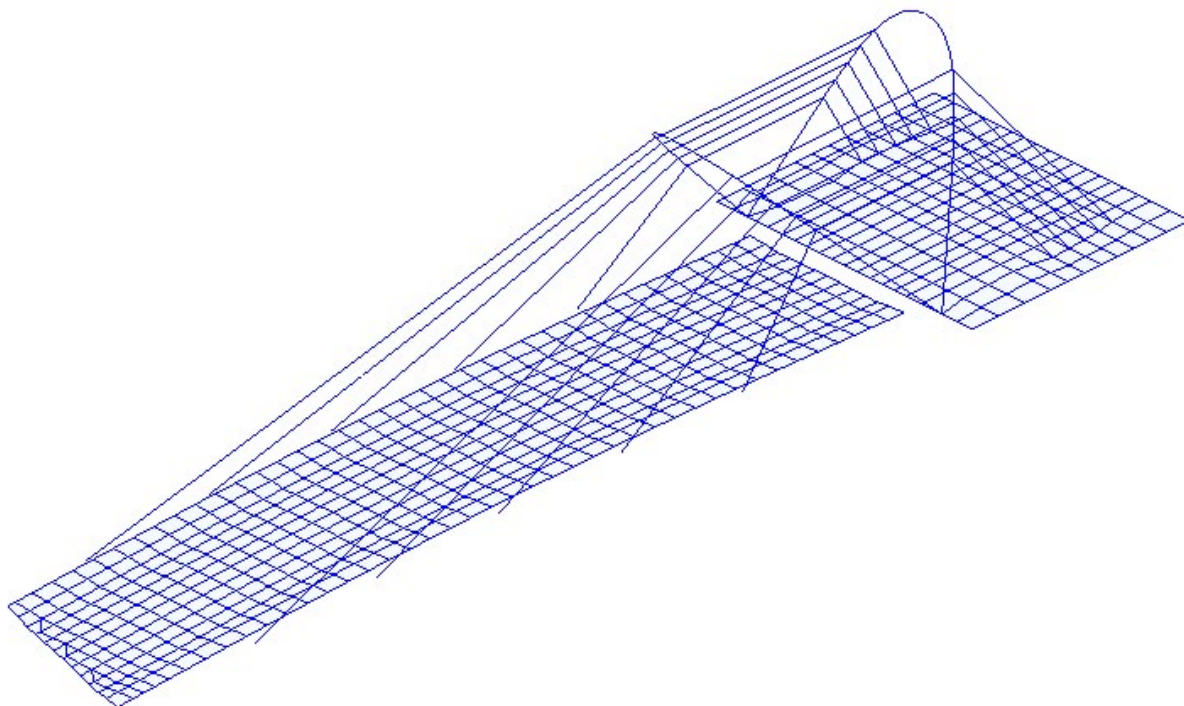


Рисунок 1.1. 3D-модель Лазаревского вантового моста

Решаемой задачей являлась задача минимизации наблюдаемых (контролируемых) параметров посредством изменения управляющих параметров. В качестве наблюдаемых параметров в данном случае выступали следующие величины:

- Вертикальные перемещения в отслеживаемых точках пролетного строения
- Опорные реакции в точках опирания балки жесткости на постоянные опоры

В качестве управляющих параметров выступали усилия предварительного натяжения вант.

Стоит отметить, что данная работа не ставила целью определение параметров вантового моста, таких как сечения главных балок и вант, толщины плитных элементов и др. В рамках данной работы все элементы конструкции и

нагрузки, кроме усилий предварительного натяжения вант, считались заранее известными.

Таким образом, задачу возможно переформулировать следующим образом: необходимо найти такие усилия предварительного натяжения вант, которые позволят заранее известным элементам оказаться после нагружения в требуемом проектировщиком геометрическом положении. Как правило, это положение, в котором они были до натяжения и до нагружения (так называемая недеформируемая конфигурация).

Задача рассматривалась в рамках линейной теории упругого поведения материалов и малых относительных деформаций элементов конструкции. То есть зависимости между усилиями предварительного натяжения и наблюдаемыми параметрами будут иметь линейный вид. Тогда рассматриваемую задачу можно представить в следующей математической постановке

$$\begin{cases} M_{11}X_1 + M_{12}X_2 + \dots + M_{1N}X_N = Y_1 \\ \dots \\ M_{M1}X_1 + M_{M2}X_2 + \dots + M_{MN}X_N = Y_M \end{cases} \quad (1.1)$$

или в матричном виде

$$MX = Y, \quad (1.2)$$

где

$M = \{M_{ij}\}_{i=1, j=1}^{i=M, j=N}$ – матрица коэффициентов влияния

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix}$ – вектор-столбец управляющих параметров (усилия предварительного натяжения)

$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_M \end{pmatrix}$ – вектор-столбец наблюдаемых параметров (перемещения, опорные реакции)

Матрица коэффициентов влияния представляет собой матрицу, в которой количество строк равно количеству наблюдаемых параметров, а количество столбцов равно количеству управляющих параметров. Значениями в каждом столбце являются значения наблюдаемых параметров при единичном воздействии управляющего параметра, соответствующего данному столбцу. То есть a_{ij} – это величина наблюдаемого параметра Y_i с учетом того, что на механическую систему воздействует только единичное усилие в X_j управляющем параметре. Иными словами, каждый столбец матрицы коэффициентов влияния – это «реакция» наблюдаемых величин на единичное воздействие в соответствующем управляющем параметре.

Основное содержание данной работы – это исследование различных методов машинного обучения в качестве математического аппарата для решения поставленной задачи в двух ее вариантах:

1. $N > M$ (количество управляющих параметров больше, чем количество наблюдаемых)
2. $N = M$ (количество управляющих параметров равно количеству наблюдаемых)

Как уже было упомянуто во введении, существует проблема при решении подобного рода задач. Суть ее заключается в том, что на практике бывают случаи, когда наблюдаемых параметров меньше, чем управляющих. Таким образом, система (1.1) становится недоопределенной [14] и имеет бесконечное число решений. Это существенно затрудняет решение таких задач, так как на практике необходимо иметь единственное и устойчивое к малому изменению параметров системы решение. На данный момент наиболее известные методы решения подобной задачи основаны на методе наименьших квадратов и его модификация, который заключается в минимизации следующего функционала

$$J = \sqrt{(MX + U_0)(MX + U_0)^T} \quad (1.3)$$

где

U_0 – вектор-столбец наблюдаемых параметров без учета натяжения вант,

M – матрица коэффициентов влияния,

X – вектор-столбец усилий предварительного натяжения вант в кН, при помощи варьирования столбца X . Его суть заключается в том, что разность перемещений пролетного строения в отслеживаемых точках только от действия усилий предварительного натяжения MX и U_0 была минимальна. Эта задача может решаться, например, при помощи надстройки Microsoft Excel «Поиск решения», который основывается на методе обобщенного приведенного градиента. Однако, при таком подходе решение попадает в локальный минимум из-за произвольности выбора начального состояния вектор-столбца X , что в случае недоопределенной системы является одним из множества возможных решений.

Известно, что одним из возможных вариантов того, что можно называть решением системы (1.2) является

$$X = M^{-1}Y, \quad (1.4)$$

где в общем случае для прямоугольной матрицы в качестве обратной матрицы принимается псевдообратная матрица Мура-Пенроуза [7, 8].

Определение. Для любой прямоугольной матрицы $A \in C^{m \times n}$, если $X \in C^{n \times m}$ удовлетворяет одному или нескольким из следующих условий

$$AXA = A, \quad (1.5)$$

$$XAX = X, \quad (1.6)$$

$$(AX)^T = AX, \quad (1.7)$$

$$(XA)^T = XA, \quad (1.8)$$

то матрица X называется обобщенной обратной матрицей A . Если X удовлетворяет всем условиям (1.5) – (1.8), то такая матрица называется псевдообратной матрицей Мура-Пенроуза.

Особенностью получаемого с помощью псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза решения является то, что оно наилучшим образом из возможных приближенно удовлетворяет равенству (1.2) в смысле метода наименьших квадратов, т.е. доставляет глобальный минимум задачи типа (1.3) [9].

К рассмотрению принимаются следующие математические модели для исследования их возможностей описывать область допустимых значений усилий предварительного натяжения вант:

- Метод линейной регрессии
- Нейронная сеть
- Генетический алгоритм

Эти методы будут исследованы в качестве инструментов для непосредственного получения усилий предварительного натяжения (в качестве результата метода будут усилия предварительного натяжения при заранее известных ограничениях на систему) и для построения псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза.

Результатом проделанной работы будет являться выявление возможностей качественно и количественно описывать поведение изучаемой механической системы при помощи исследуемых методов.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В широком понимании машинное обучение — это раздел науки, который нацелен на создание машин (алгоритмов), способных обучаться с помощью предоставляемой им информации, без необходимости их точного программирования.

Если же понимать под термином «машинное обучение» некий процесс, то это работа математического алгоритма, направленная на определение оптимального набора параметров в окончательной модели, способной максимально точно предсказывать изучаемый исход [5].

В рамках данной работы рассматривалась разновидность машинного обучения – обучение с учителем. В качестве обучаемого субъекта выступает структура цифровых данных, значения в которой необходимо подобрать в процессе «подгонки» получаемого решения под желаемое, определенное человеком условие. Таким образом, модель машинного обучения в нашем случае будет являться неким «хранилищем» данных, которое будет использовано для извлечения информации.

2.1. Построение набора данных

Большинство методов машинного обучения требуют для их построения набора данных, благодаря которой модель подбирает весовые коэффициенты таким образом, чтобы итоговый результат был наиболее близок к истинному. Данный процесс и называется обучением. Набор данных представляет собой совокупность прецедентов и соответствующий им исход. Иными словами, это набор управляющих параметров и соответствующие им наблюдаемые параметры. Выборка генерируется либо из набора заранее известных данных, либо случайным образом, если нет каких-либо результатов эксперимента, наблюдений или вычислений [12].

Набор данных строился следующим образом:

1. В качестве источника данных использовалось уравнение

$$U_0 + MX = U, \quad (2.1.1)$$

где

M – матрица коэффициентов влияния,

X – вектор-столбец искомых усилий предварительного натяжений в кН,

U_0 и U – вектор-столбцы наблюдаемых параметров без учета и с учетом натяжения соответственно.

U_0 является постоянным и не меняющимся значением в процессе расчета, так как подбор усилий предварительного натяжения на него не влияет. Данное уравнение по сути является заменой трехмерной модели и использовалось как инструмент для быстрого получения необходимых значений.

2. Для более оптимального поиска решения область управляющих параметров рассматривалась в диапазоне $(0, a)$ для каждого отдельного ванта, где a – это какой-то процент от его длины. Данное ограничение на область рассматриваемых значений также имеет и физический смысл: подбор различных комбинаций предварительного натяжения вант на множестве всех рациональных чисел будет некорректен с физической точки зрения. Так как теперь усилия предварительного натяжения ищутся в виде длин начального укорочения и, учитывая то, что рассматривается линейная теория, усилия предварительного натяжения можно считать по закону Гука в виде

$$F = k\Delta x, \quad (2.1.2)$$

где

F – сила упругости в кН,

k – жесткость ванта в кН/мм

Δx – длина растяжения в мм

то уравнение (2.1.1) необходимо поделить на жесткость вант k , которая равна [3]

$$k = \frac{EA}{l}, \quad (2.1.3)$$

где

E – модуль Юнга материала ванта в кН/мм²,

A – площадь поперечного сечения ванта мм²,

l – длина ванта в мм.

Таким образом, появится возможность рассматривать усилия предварительного натяжения в виде длин начального укорочения.

3. Каждый интервал, полученный в пункте 2, делился на N равных частей. Это необходимо, чтобы рассмотреть все возможные области на исследуемом интервале для более точного описания поведения механической системы в самых различных комбинациях усилий предварительного натяжения вант.
4. Брались случайные значения из каждой части интервала для каждого ванта. Таким образом, формировался набор управляющих параметров, состоящий из различных комбинаций усилий, которые в последующем будут представлены как вектор-столбцы.
5. Для каждого из полученных в пункте 4 вектор-столбца вычислялся вектор-столбец наблюдаемых параметров U при помощи уравнения (2.1.1).

В результате проделанных манипуляций, описанных в пунктах 1 – 5, будет получена выборка, которая наиболее корректно будет описывать работу механической системы и которая зависит от 2 параметров: длина исследуемого интервала a и количество разбиений N .

Однако, есть минус у данного подхода к построению набора данных для обучения. Размерность получаемой выборки будет иметь степенную зависимость N^M , где M – количество вант. Таким образом, при увеличении количества вант в системе размер выборки будет расти в геометрической прогрессии, но это можно контролировать количеством разбиений N .

Получившаяся выборка делилась на тестовую и обучающую выборки в соотношении 1:4. Обучающая выборка – это набор данных, на которых модель обучается, то есть подбирает нужные коэффициенты таким образом, чтобы

результат работы модели был наиболее близок к точному. Тестовая выборка – это набор данных, на котором тестируется обученная модель посредством различных метрик. Метрика – это способ оценки обучения модели машинного обучения. В качестве метрики в данной работе использовалась средняя квадратичная ошибка.

2.2. Линейная регрессия

Линейная регрессия – это модель зависимости одних переменных от других переменных (факторов, регрессоров, независимых переменных) с линейной функцией зависимости [13].

Самым главным преимуществом линейной регрессии является простота. Работа данного метода легко описывается математической формулой. Именно поэтому линейная регрессия является признанным статистическим методом, который легко применяется в различных областях вычислений. В частности, машинное обучение и искусственный интеллект используют данный метод для решения сложных задач.

По своей сути различают 2 основных типа линейной регрессии: простая и множественная. Их главным отличием является то, что во множественной линейной регрессии переменных-предикторов (входных параметров) больше одного.

В рамках задачи, рассматриваемой в данной работе, будет использована модель множественной линейной регрессии [2], так как количество ограничений на систему, то есть переменных-предикторов, зачастую больше единицы. В таком случае функция линии линейной регрессии превратится в гиперплоскость размерности N , где N – количество переменных-предикторов, и примет следующий вид

$$y = a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b \quad (2.2.1)$$

или

$$y = \underbrace{(a_0, a_1, \dots, a_n)}_{\bar{a}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\bar{x}} + b \quad (2.2.2)$$

Суть обучения данной модели заключается в том, чтобы подобрать такую вектор-строку коэффициентов \bar{a} и константу b , чтобы прогнозируемая переменная y была наиболее близка к истинному значению.

На основе вышесказанного можно адаптировать данный метод под решаемую задачу. В качестве переменных-предикторов будут выступать наблюдаемые параметры (перемещения в отслеживаемых точках и опорные реакции на постоянных опорах), а в качестве прогнозируемых переменных будут усилия предварительного натяжения вант. Таким образом, построенная модель множественной линейной регрессии для задачи определения усилий предварительного натяжения вант в математической формулировке будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + \dots + a_{0m}y_m = x_0 \\ \dots \\ a_{n0}y_0 + a_{n1}y_1 + \dots + a_{nm}y_m = x_n \end{cases} \quad (2.2.3)$$

или

$$Ay = x, \quad (2.2.4)$$

где

A – матрица коэффициентов модели,

x – вектор-столбец наблюдаемых параметров,

y – вектор-столбец усилий предварительного натяжения вант.

Как можно заметить, получившаяся система очень похожа на систему линейных алгебраических уравнений (1.1) – (1.2), описанную в постановке задачи. Однако, в данном случае в качестве неизвестных параметров выступают усилия предварительного натяжения.

В итоге обучения на основе построенной выборки будет получена модель машинного обучения, способная «предсказывать» необходимые нам значения

усилий предварительного натяжения вант при заданных заранее значениях ограничений на систему в форме требуемых значений наблюдаемых параметров.

В данной работе не ставилась задача самостоятельного написания алгоритма обучения, модели линейной регрессии, формирования обучающей и тестовой выборок. Вместо этого была использована библиотека `sklearn` языка программирования Python.

2.3. Нейронная сеть

В работе была рассмотрена полносвязная нейронная сеть прямого распространения с обратным распространением ошибки. Нейронная сеть – это метод машинного обучения, который использует взаимосвязанные узлы или нейроны в слоистой структуре.

Простейшая нейронная сеть имеет следующую структуру: входной слой, выходной слой и скрытые слои. Каждый слой состоит из некоторого количества узлов, называемых нейронами. В полносвязной нейронной сети каждый нейрон n -ого слоя связан с каждым нейроном $n+1$ -го слоя. Прямое распространение означает, что входной сигнал проходит от входа к выходу, не имея никаких обратных связей. Входной слой принимает, обрабатывает и передает на следующий слой данные, которые человек подает в нейронную сеть. Выходной слой дает окончательный результат обработки всех данных нейронной сетью. Между входным слоем и выходным слоем могут находиться скрытые слои. Скрытых слоев может быть достаточно много, каждый из них принимает данные, поступившие с предыдущего слоя, обрабатывает их и передает на следующий слой. Размерность каждого слоя разработчик выбирает самостоятельно, однако, размерность входного и выходного слоя зависит от решаемой задачи. Размерностью каждого слоя называют количество нейронов, которые он содержит.

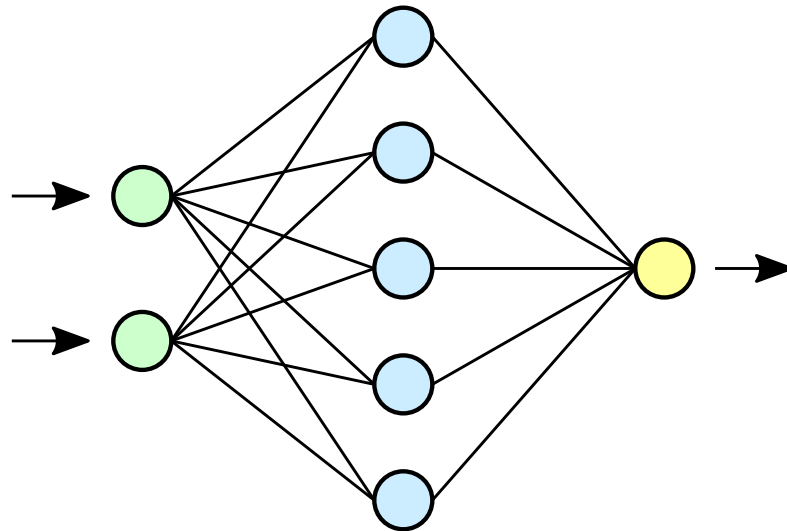


Рисунок 2.3.1. Архитектура нейронной сети

Архитектура нейронной сети представляет собой набор нейронов, связанных между собой (рис.2.3.1). Каждая связь между ними определяется числом, называемым весом ω_{ji} , где j – номер нейрона на n -ом слое, i – номер нейрона на $n+1$ -ом слое. Значение данного числа влияет на взаимоотношения двух соединенных нейронов следующим образом: $\omega_{ji}x_i$. То есть, когда сигнал x_i проходит по определенной связи, то он умножается на вес ω_{ji} . Нейрон представляет собой элемент сети, который суммирует поступающие сигналы и генерирует выходящий сигнал посредством заданной функции (рис.2.3.2). Данная функция называется функцией активации и может иметь вид гиперболического тангенса, арктангенса, сигмоиды и других функций.

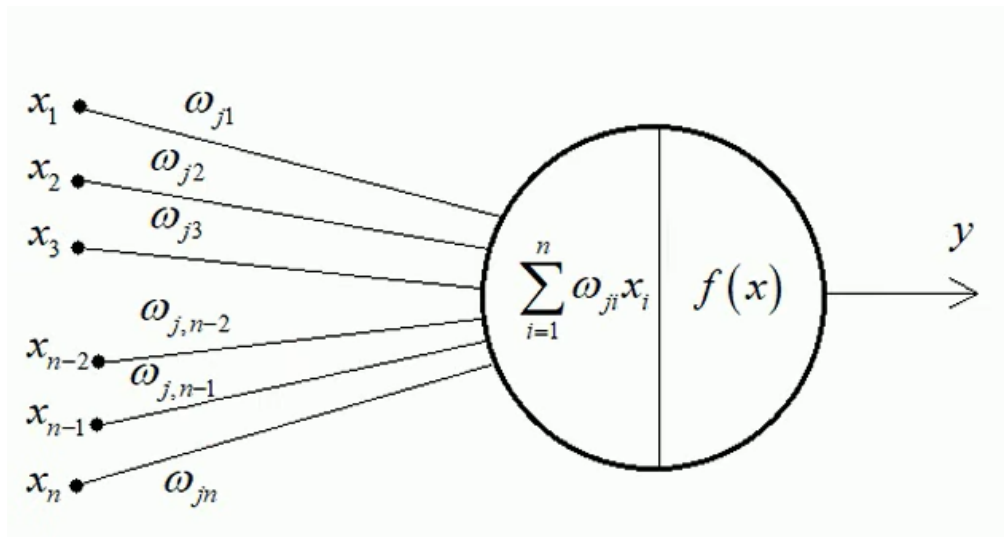


Рисунок 2.3.2. Нейрон

В данной работе в качестве функций активации была рассмотрена функция ReLU, изображенная на рис.2.3.3.

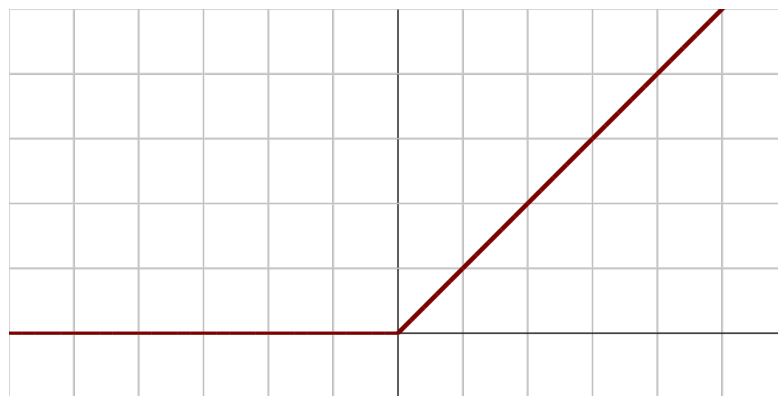


Рисунок 2.3.3. Функция ReLU

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

В данной работе будет рассматриваться алгоритм обучения, который называется обучение с обратным распространением ошибки [6, 11]. Он базируется на методе градиентного спуска. В основе идеи алгоритма лежит использование выходной ошибки нейронной сети для вычисления величин коррекции весов. Веса нейронов сети корректируются после подачи на ее вход одного обучающего примера. Назовем данный процесс одной итерацией.

На каждой итерации происходит 2 прохода сети – прямой и обратный. На прямом входные данные проходят от входного слоя к выходному и формирует

вектор фактических выходных значений. Далее вычисляется ошибка нейронной сети как разность между фактическим и истинным значениями E по заранее заданной функции ошибки. После этого происходит обратный проход по сети, при котором полученная ошибка распространяется выхода к входу, и производится коррекция весов при помощи следующей формулы

$$\Delta\omega_{ji} = -\mu \frac{\partial E}{\partial(\omega_{ji})} \quad (2.3.2)$$

где

μ – параметр скорости обучения.

Исходя из сказанного выше можно сказать, что ошибка, вычисляемая на выходе, зависит от всех весовых коэффициентов и функций активаций, содержащихся в сети. Поэтому важно знать, что функция активации должна быть как минимум один раз дифференцируема и не быть равной нулю в любой точке.

Таким образом, алгоритм использует так называемый стохастический градиентный спуск, проходя в многомерном пространстве весов в направлении антиградиента с целью достичь минимума функции ошибки.

Также существенным фактором процесса обучения модели является количество эпох обучения и размер батча. Так как тренировочный сет достаточно большой, его делят на некоторое число частей, называемыми батчами. Размером батча называется количество экземпляров выборки, содержащимся в 1 батче. Говорят, что прошла 1 эпоха обучения, когда весь тренировочный набор данных прошел все итерации обучения. В данном случае итерация – это прохождение одним батчем полного цикла обучения.

В рамках работы нейронная сеть рассматривается как инструмент, при помощи которого инженер сможет при известных ограничениях, накладываемых на поведение механической системы вантового моста, получить усилий предварительного натяжения вант. В данном случае структура нейронной сети состояла из 2 слоев: входного слоя и выходного слоя. Входной слой будет иметь размерность, равную количеству ограничений на мост, а выходной слой –

количеству определяемых усилий предварительных натяжений вант. В качестве функции ошибки рассматривается функция, вычисляющая среднюю квадратичную ошибку

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y - d)^2, \quad (2.3.3)$$

где

N – количество вант,

y – истинное значение,

d – фактическое значение, вычисленное нейронной сетью.

Также данная модель машинного обучения рассматривалась в качестве способа получения псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [7]. В этом случае была произведена попытка провести обучение модели таким образом, чтобы весовые коэффициенты формировали псевдообратную матрицу. Из теории про псевдообратную матрицу, сказанной в постановке задачи, можно сказать, что при умножении псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза справа на матрицу коэффициентов влияния должна получаться единичная матрица [10]

$$MM^+ = E, \quad (2.3.4)$$

где

M – матрица коэффициентов влияния,

M^+ - псевдообратная матрица Мура-Пенроуза,

E – единичная матрица.

Таким образом, одна из идей заключалась в том, чтобы в процессе обучения модели в качестве входного вектора подавалась i -ая строка из матрицы коэффициентов влияния, а выходным вектором, принимаемым за истинное значение, являлась i -ый столбец из единичной матрицы. В итоге обучения формировалась псевдообратная матрица в виде весовых коэффициентов нейронной сети. С математической точки зрения это можно описать, исходя из положений, описанных ниже.

Нейронная сеть состоит из двух слоев. Соответственно, опираясь на теорию, сказанную выше, значение на выходе будет иметь вид

$$y_j = \sum_{i=1}^N \omega_{ji} x_i \quad (2.3.5)$$

где

ω_{ji} – весовой коэффициент между j -ым нейроном входного слоя и i -ым нейроном выходного слоя.

Если же взглянуть на уравнение (1.2), то по правилам матричного умножения значение итоговой матрицы будет иметь точно такой же вид как (2.3.6).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1M} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & \dots & b_{NM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1M} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{M1} & \dots & c_{MM} \end{pmatrix} \quad (2.3.6)$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj} \quad (2.3.7)$$

Также была предложена другая идея для получения псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза. Была произведена попытка изменения внутренней структуры модели путем корректирования функции ошибки таким образом, чтобы нейронная сеть учитывала критерии (1.5) – (1.8), которым должна удовлетворять искомая матрица. Процесс обучения происходил в такой же форме, как и в предыдущем случае. Однако, данный метод не был использован из-за недостатка необходимой информации о нейронных сетях.

Аналогично модели линейной регрессии для построения модели нейронной сети использовалась библиотека Keras языка программирования Python.

2.4. Генетический алгоритм

Генетический алгоритм – это «эволюционный» алгоритм (оптимизационный метод, основанный на эволюции особей популяции) [1]. Он получен в результате обобщения и имитации в искусственных системах свойств

живой природы: приспособляемость, естественный отбор, наследование потомками наиболее «ценных» свойств родителей и т.д. Данный метод явно отличается от рассмотренных ранее, так как оно не подходит к описанию обучения с учителем, потому что в нем отсутствует формирование структуры, по которой метод считает результат.

Для решения задачи процедуры, которые проводятся в алгоритме, описываются числами или величинами нечисловой природы. Поиск оптимального решения схож с эволюционным процессом, в котором действуют 3 механизма, представленных на рис.2.4.1.



Рисунок 2.4.1. Схема генетического алгоритма

Для использования генетического алгоритма необходимо представить потенциальные решения в виде определенной структуры данных. Структура данных алгоритма представляет собой индивид (хромосома), который может быть скаляром, вектором или массивом данных. Индивид в свою очередь состоит из генов. Наглядно это изображено на рис.2.4.2.

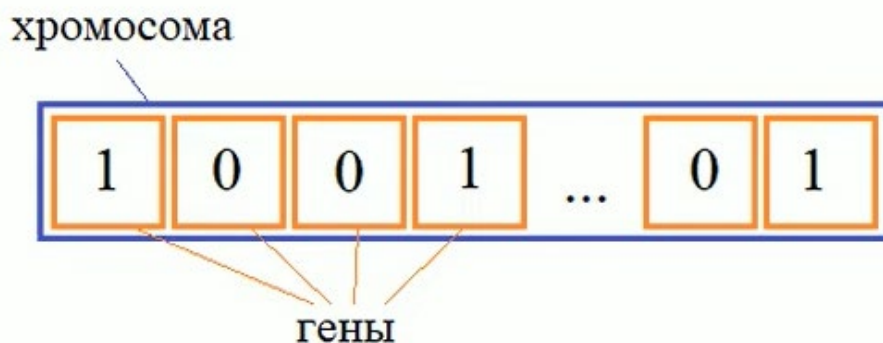


Рисунок 2.4.2. Вид структуры данных

В качестве индивида будет рассматриваться вектор, содержащий в себе усилия предварительного натяжения вант, а ген в свою очередь будет являться значением усилия. Таким образом, размер одного индивида N – это количество вант в вантовой системе.

Можно выделить следующие этапы алгоритма, которые являются основной его частью:

- Отбор сильнейших индивидов, которым соответствует наиболее оптимальное значение функции приспособленности.
- Скращивание – получение новых индивидов при помощи смешивания генов отобранных индивидов.
- Мутации – случайное изменение одного или нескольких генов.

В данной выпускной квалификационной работе в качестве метода скрещивания рассматривается одноточечный кроссинговер (рис. 2.4.3). Он заключается в том, что части индивидов-родителей меняются местами, в результате чего получаются 2 новых индивида, наследующие гены своих родителей. Разберем данный метод подробнее.

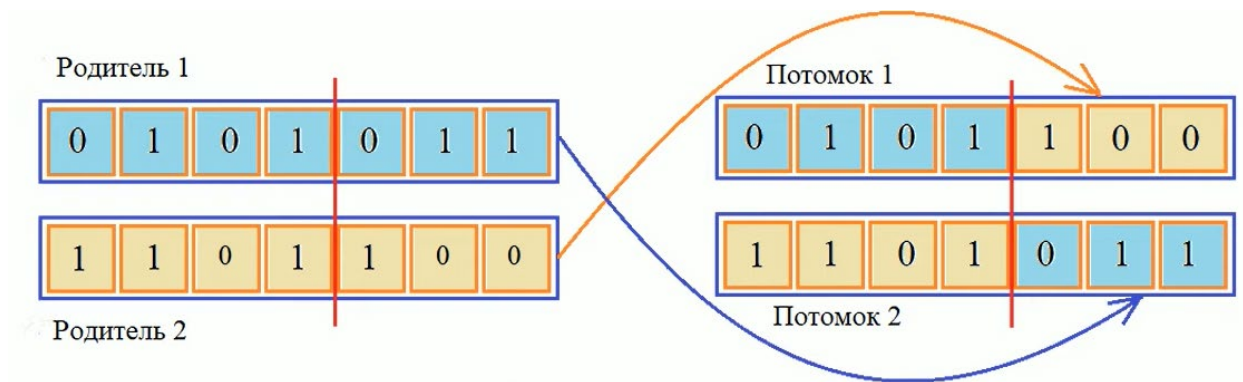


Рисунок 2.4.3. Одноточечный кроссинговер

Пусть имеем двух индивидов-родителей

$$S_i = \{S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{iN}\} \text{ и } S_j = \{S_{j1}, S_{j2}, \dots, S_{jN}\}.$$

Случайным образом выбирается точка разрыва из диапазона $(1, N-1)$, и эти 2 индивида разрываются на 2 части по этой точке разрыва. Затем соответствующие сегменты соединяются и получаются 2 потомка:

$$S'_i = \{S_{i1}, \dots, S_{ip}, S_{jp}, \dots, S_{jN}\} \text{ и } S'_j = \{S_{j1}, \dots, S_{jp}, S_{ip}, \dots, S_{iN}\},$$

где

p – точка разрыва.

Также существуют другие методы скрещивания, однако, в данной работе они рассматриваться не будут.

Преимущество генетического алгоритма по сравнению с другими методами заключается в способности манипулировать одновременно многими параметрами, что позволяет пользователю получить оптимальное для него решение сложной функции, зависящей от нескольких входных параметров.

Для более полного описания ниже будут рассмотрены каждый из этапов генетического алгоритма.

1. Начальная популяция. Генерируется набор возможных решений задачи, состоящий из случайно заданных чисел или же по заранее известному принципу,

$$S_k(0) = \{S_{k1}, S_{k2}, \dots, S_{kZ}\},$$

где Z – размер популяции.

2. Функция приспособленности. Так как генетический алгоритм является итерационным процессом, он имеет критерий остановки (критерий качества), которым может являться удовлетворение одного или нескольких заранее определенных условий. Обычно одним из условий является некая целевая функция, которая выступает критерием обучаемости популяции и зависит от одного индивида, то есть показывает, насколько тот или иной индивид близок к точному решению задачи. Эту функцию называют функцией приспособленности.

$$F = \{f(S_k) \mid S_k \in S_k(t)\}$$

где

F – логическая функция (неравенство),

f – функция приспособленности.

Если данное условие не будет выполнено за определенное количество поколений, то алгоритм автоматически прекращает свою работу. Таким образом, задается вторая логическая функция остановки.

3. Если критерий остановки выполнен, то выполняются действия из пункта 4. Если не выполнен критерий остановки алгоритма, то далее следует
- 3.1. Отбор. Происходит выбор двух индивидов, которые рассматриваются в качестве «родителей», S_{k1} и S_{k2} из *текущей* популяции. В данной работе была взята идея турнирного отбора. Его суть заключается в том, что случайным образом выбираются 3 индивида из *текущей* популяции. Из них один, который имеет наибольшее значение функции приспособленности проходит отбор и встает в конец *нового списка популяции*. Данный процесс продолжается пока размерность селектированной популяции не станет равна размеру старой, то есть пока все индивиды не пройдут отбор.
- 3.2. Скрещивание. Поочередно берутся четный и нечетный по *новому списку популяции* индивиды. Затем при помощи генератора случайных чисел берется случайное рациональное число и

сравнивается с шансом скрещивания. Если получившееся случайное число будет больше, чем $1 - c$, где c – шанс скрещивания, то производится скрещиванием двух индивидов по правилу кроссинговера и «потомки» перейдут в *новую популяцию*. Иначе, два индивида, рассмотренных в качестве родителей, сами перейдут в новую популяцию. В данной работе $c = 0.9$.

3.3. Мутация. Каждый индивид в популяции рассматривается как кандидат на мутацию. При помощи генератора случайных чисел берется случайное рациональное число и сравнивается с шансом мутации. Если получившееся случайное число будет больше, чем $1 - m$, где m – шанс мутации, то производится мутация путем замены одного из генов индивида на случайное значение. В данной работе $m = 0.1$.

3.4. Вычисляются функции приспособленности *новой получившейся популяции* и производится проверка критерия останова алгоритма. После этого возвращаемся обратно к пункту 3.

4. Решение. В результате работы генетического алгоритма будет получено решение, которым является индивид с наилучшим значением функции приспособленности, или в рамках задачи будет получен вектор усилий предварительного натяжения, который наиболее лучшим образом удовлетворяет необходимым ограничениям.

Также генетический алгоритм рассматривался в качестве инструмента для построения псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза [7]. В таком случае все остается таким, как и описывалось ранее, кроме следующего:

- В качестве индивида теперь рассматривается потенциальная псевдообратная матрица. (Слово «потенциальная» используется из-за того, что в течение всего процесса работы алгоритма все индивиды стремятся к псевдообратной матрице, но в большинстве случаев ей не являются. Для удобства в последующем слово «потенциальная» будет опущено.)

Соответственно, в качестве гена теперь выступает значение элемента псевдообратной матрицы.

- В качестве функции приспособленности будут выступать сразу несколько функций, которые являются необходимыми и достаточными критериями построения псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза (1.5) – (1.8), или же их комбинация в зависимости от степени обучаемости популяции. Так как значением функции приспособленности должно быть одно единственное число, то при использовании комбинации функций будет браться сумма элементов вектора, составленного из их значений.

ГЛАВА 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

На примере Лазаревского моста через р. Малая Невка в Санкт-Петербурге, представленного на рис.1.1, изучается построение математических моделей для определения усилий предварительного натяжения вант. Математической моделью механической системы является конечно-элементная модель в программном пакете Midas Civil [15], разработанная в АО «Институт «Стройпроект» в 2008 году на стадии разработки рабочей документации. Данный объект был выбран в качестве модельного для проведения дальнейшего исследования по причине малой размерности пространства неизвестных.

3.1. Исследование корректности непосредственного вычисления усилий предварительного натяжения

Рассмотрена такая работа линейной регрессии, нейронной сети и генетического алгоритма, при которой по введённым ограничениям на систему результатом их работы являлись усилия предварительного натяжения вант.

3.1.1. Задача равной размерности

В данном случае в качестве ограничений на систему рассматривались перпендикулярные относительно плоскости пролетного строения перемещения в точках крепления вант, выделенных на рис.3.1.1.1.

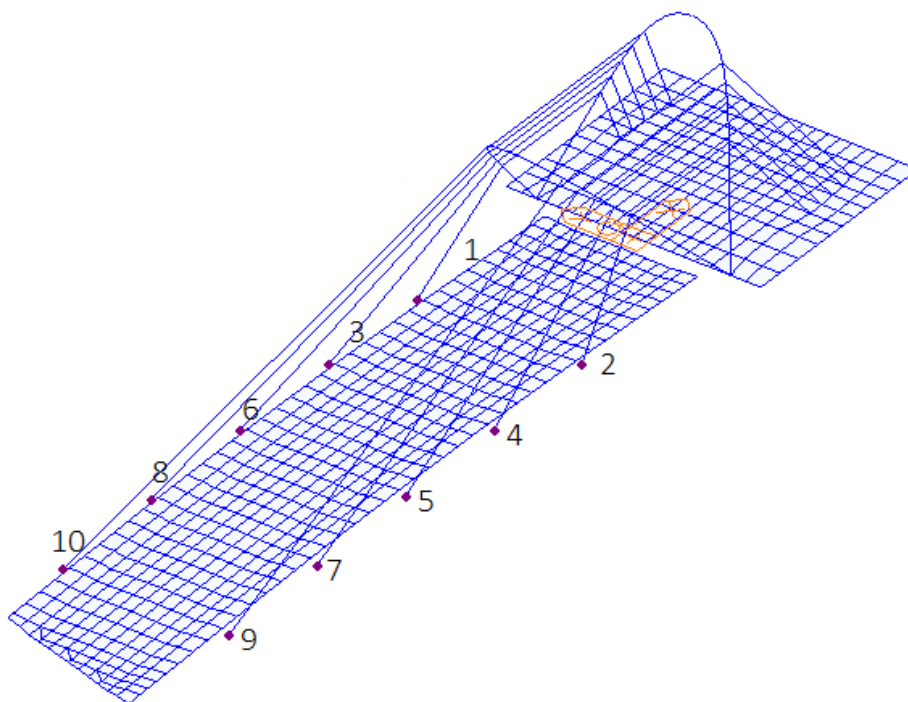


Рисунок 3.1.1.1. Отслеживаемые точки

Вертикальные перемещения в этих точках рассматривались в качестве наблюдаемых параметров системы и подавались в исследуемые методы как входные данные.

Был построен набор данных для задачи равной размерности. Конструкция симметрична относительно оси пролетного строения (см. рис.3.1.1.1), поэтому длины и сечения вант имеют одинаковые значения у соответствующих данной симметрии элементов. Модуль упругости (модуль Юнга) у всех вант одинаковый. Значения названных параметров указаны в табл. 3.1.1.1. Далее без ущерба общности вместо усилий будут рассматриваться длины начального укорочения.

Таблица 3.1.1.1
Параметры вант

Номер ванта	1 и 2	3 и 4	5 и 6	7 и 8	9 и 10
Длина L, мм	18873	33173.39	48495.29	54361.7	80461.54
Диаметр сечения D, мм	97.7205	100.609	109.691	118.076	104.337
Модуль Юнга E, кН/мм ²	176.52	176.52	176.52	176.52	176.52
Жесткость, кН/мм	70.1478	42.3027	34.3974	35.5561	18.7574

С 3D-модели вантового моста были сняты значения вертикальных перемещений U_0 , которые указаны в табл. 3.1.1.2.

Таблица 3.1.1.2

Вертикальные перемещения под действием постоянных нагрузок без учета натяжения

Номер ванта	U_0 , мм
1	-87.637
2	-87.438
3	-229.739
4	-228.544
5	-398.821
6	-383.853
7	-491.392
8	-432.049
9	-382.789
10	-255.789

Исходя из теории параграфа 2.1 были выбраны длина рассматриваемого интервала размером $a = 0.01$ (1%) от длины вант и количество его разбиений $N = 4$. Таким образом, при вышеуказанных параметрах выборки интервалы будут иметь вид, указанный в табл. 3.1.1.3.

Таблица 3.1.1.3

Интервалы построения набора данных

Номер интервала	Интервалы, мм				
	1 и 2	3 и 4	5 и 6	7 и 8	9 и 10
1	(0, 47.1825)	(0, 82.9335)	(0, 121.2382)	(0, 135.9043)	(0, 201.1538)
2	(47.1825, 94.365)	(82.9335, 165.867)	(121.2382, 242.4765)	(135.9043, 271.8085)	(201.1538, 402.3077)
3	(94.365, 141.5475)	(165.867, 248.8)	(242.4765, 363.7147)	(271.8085, 407.7127)	(402.3077, 603.4616)
4	(141.5475, 188.73)	(248.8, 331.7339)	(363.7147, 484.9529)	(407.7127, 543.617)	(603.4616, 804.6154)

Исходя из всего вычисленного выше, был построен набор данных в виде таблицы размером 1048576 строк и 20 столбцов, где первые 10 столбцов

управляющих параметры (выходные) и вторые 10 столбцов наблюдаемые параметры (входные).

В качестве входного вектора ограничений системы в модель линейной регрессии и нейронной сети был подан нулевой вектор, что соответствует нулевым вертикальным перемещениям в точках крепления вант (см. рис.3.1.1.1).

Для генетического алгоритма была выбрана функция приспособленности в виде

$$f(x) = \|MX + U_0 - U\|, \quad (3.1.1.1)$$

где

M – матрица коэффициентов влияния в перемещениях,

X – длины начального укорочения вант в мм,

U_0 – перемещения под действием постоянных нагрузок без учета преднатяжения в мм,

U – перемещение под действием постоянных нагрузок с учетом натяжения в мм.

Размер популяции – 1000 индивидов. Результат, приведенный в табл. 3.1.1.4, для генетического алгоритма был достигнут за 5000 поколений.

Ниже будут приведены результаты, полученные тремя разными методами (см. табл.3.1.1.4).

Таблица 3.1.1.4
Длины начального укорочения вант

Номер ванта	Длина начального укорочения, мм		
	Линейная регрессия	Нейронная сеть	Генетический алгоритм
1	62.00026703	62.00282	60.597
2	61.91745758	61.923798	61.1665
3	94.82142639	94.83898	102.4686
4	94.55384827	94.56253	99.4254
5	144.14501953	144.1425	126.9841
6	143.35891724	143.36794	131.2694
7	169.79396057	169.80432	190.2571
8	170.99124146	170.9876	186.05
9	356.9536438	356.94052	327.29888
10	325.03738403	325.06494	298.159

После домножения на соответствующие жесткости (см. табл.3.1.1.1) были получены усилия предварительного натяжения и подставлены в трехмерную модель. После расчета с рассчитанными и уже заданными усилиями получили следующие деформированные состояния, показанные на рис.3.1.1.2 – 3.1.1.4.

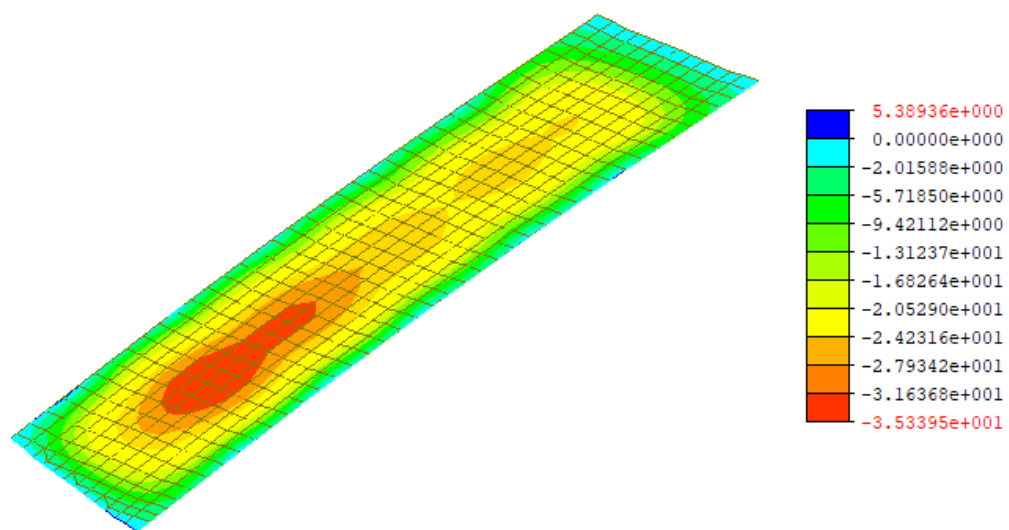


Рисунок 3.1.1.2. Поле вертикальных перемещений при усилиях, вычисленных при помощи линейной регрессии

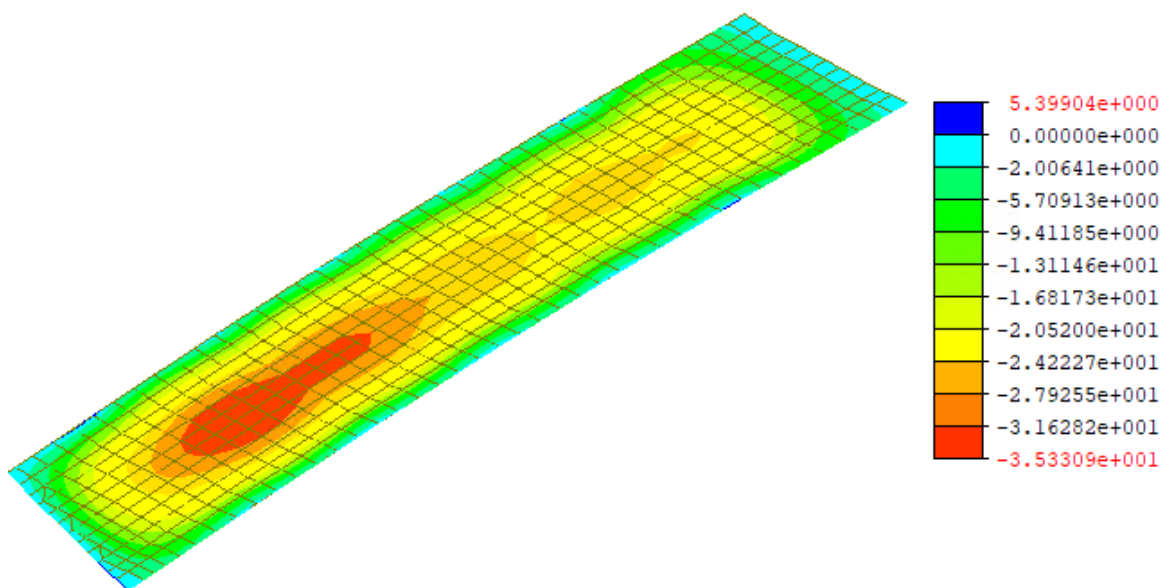


Рисунок 3.1.1.3. Поле вертикальных перемещений при усилиях, вычисленных при помощи нейронной сети

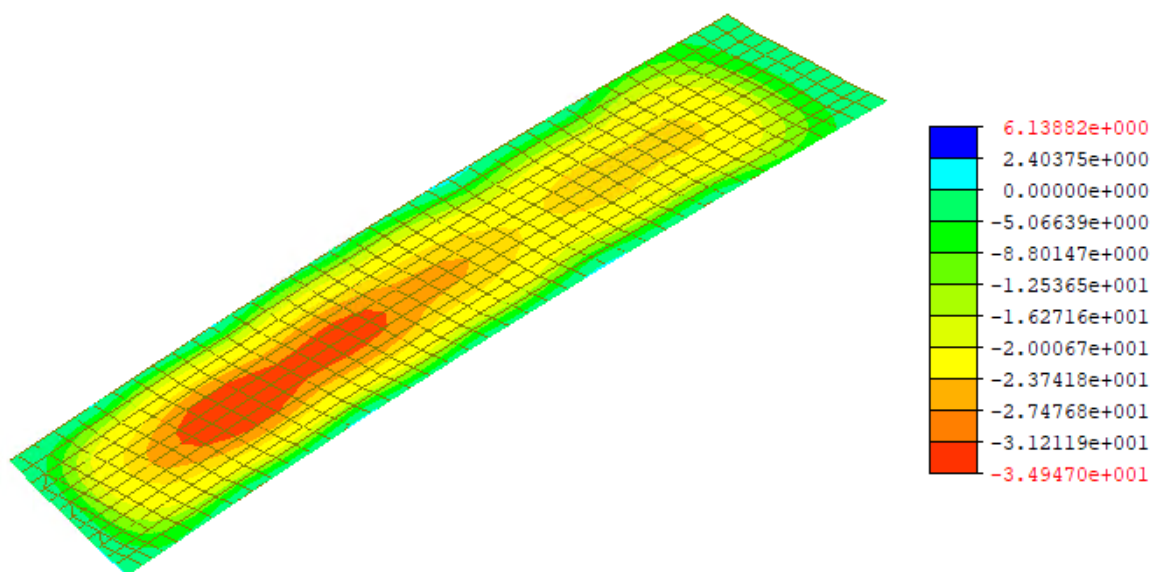


Рисунок 3.1.1.4. Поле вертикальных перемещений при усилиях, вычисленных при помощи генетического алгоритма

Как можно увидеть из рисунков выше, значения усилий предварительного натяжения вант, полученных при помощи всех представленных методов, обеспечивают приблизительно одинаковую картину перемещений. Если рассматривать результаты количественно, то значение максимальных вертикальных перемещений, а также средние значения вертикальных перемещений по всему пролету имеют одни и те же значения для каждого метода.

Так как рассматривается задача равной размерности, что означает, количество наблюдаемых параметров (вертикальных перемещений) в отслеживаемых точках равно количеству управляемых параметров (усилий предварительного натяжения вант), то есть возможность получить точное решение путем нахождения обратной матрицы. Это возможно сделать стандартными способами, так как матрица коэффициентов влияния имеет квадратный вид. Таким образом, решается матричное линейное уравнение (2.1.1) относительно неизвестного вектор-столбца усилий X следующим образом

$$X^* = M^{-1}(U - U_0) \quad (3.1.1.2)$$

Учитывая, что U – это результирующие вертикальные перемещения, то они принимаются нулевым вектором и ищется идеальное решение задачи, которое будет обеспечивать нулевой прогиб пролетного строения. Тогда уравнение (3.1.1.2) переписывается в следующем виде

$$X^* = -M^{-1}U_0. \quad (3.1.1.3)$$

Для квадратной матрицы можно найти обратную матрицу, только если она невырождена. Так как определитель матрицы коэффициентов влияния равен 0.0079936, то есть возможность воспользоваться равенством (3.1.1.3). Получим следующий вектор-столбец усилий предварительного натяжения, указанный в табл. 3.1.1.5 и деформированное состояние, соответствующую этим преднатяжениям на рис.3.1.1.5.

Таблица 3.1.1.5

Точное длин начального укорочения предварительного натяжения вант

Номер ванта	X^* , мм
1	62.0032033224794
2	61.9227593170796
3	94.8388233134479
4	94.5621149269789
5	144.142963875660
6	143.368158059234
7	169.803829520752
8	170.985826260967
9	356.940473047735
10	325.065461042356

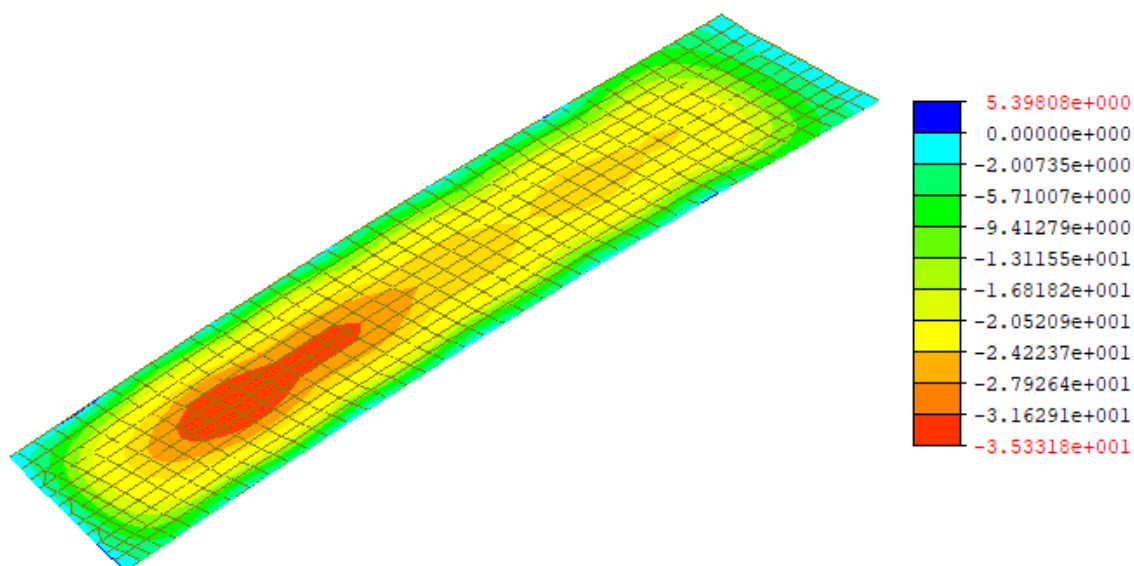


Рисунок 3.1.1.5. Вертикальные перемещения при усилиях, вычисленных решением матричного уравнения

Были рассмотрены относительные ошибки вычисления длин начального укорочения каждого ванта и отображены в табл. 3.1.1.6.

Таблица 3.1.1.6
Относительная ошибка вычисления методов машинного обучения

Номер ванга	Относительная ошибка вычисления, %		
	Линейная регрессия	Нейронная сеть	Генетический алгоритм
1	0.004736	0.000618	3.230806
2	0.008562	0.001677	3.105093
3	0.018344	0.000165	5.442051
4	0.008742	0.000439	7.865608
5	0.001426	0.000322	5.649227
6	0.006446	0.000152	8.626851
7	0.005812	0.000289	3.649017
8	0.003167	0.001037	5.856727
9	0.00369	0.0000132	1.664276
10	0.008637	0.00016	3.711702

Интересно заметить, что несмотря на значительно большее расхождение с точным решением у результатов, полученных путем генетического алгоритма, картина вертикальных перемещений существенно не поменялась. Помимо того, значение максимальных по модулю вертикальных перемещений остались лежать в пределах допустимой нормы (недопустимые вертикальные перемещения в мостовых конструкция подобного типа более 5 см). Таким образом, можно сказать, что существует область допустимых значений усилий предварительного натяжения вант, для которых вертикальные перемещения рассматриваемой системы остаются в пределах нормы. Также, можно добавить, что подобный результат вполне логичен, так как отслеживались точки в местах крепления вант, но тем самым контролировался прогиб во всем пролетном строении, и полученный результат означает, что существует множество комбинаций, которые будут показывать подобные удовлетворительные поля вертикальных перемещений.

Что касается рассматриваемых методов, то метод линейной регрессии показал себя лучше остальных рассмотренных методов, затратив на обучение наименьшее количество времени и показав результаты очень близкие к точным.

Модель линейной регрессии в результате обучения показала значение средней квадратичной ошибки в размере 0.00015903093.

Несмотря на самое долгое время работы, генетический алгоритм показал удовлетворительные результаты, а самое главное вертикальные перемещения во всей балки жесткости, соответствующие лучшему индивиду, лежат в пределах допустимой нормы. Помимо того, как было приведено ранее, существует множество различных комбинаций, которые удовлетворяют требуемым ограничениям на систему. Генетический алгоритм в свою очередь по факту своей работы строит набор «хороших» решений исследуемой задачи, что тоже является очевидным преимуществом в сравнении исследуемых методов. Наглядный пример указан на диаграмме, изображенной на рис.3.1.1.6, где указано процентное соотношение результатов, чьи наблюдаемые параметры (вертикальные перемещения в отслеживаемых точках) соответствуют определенной области, к общему числу индивидов (1000).

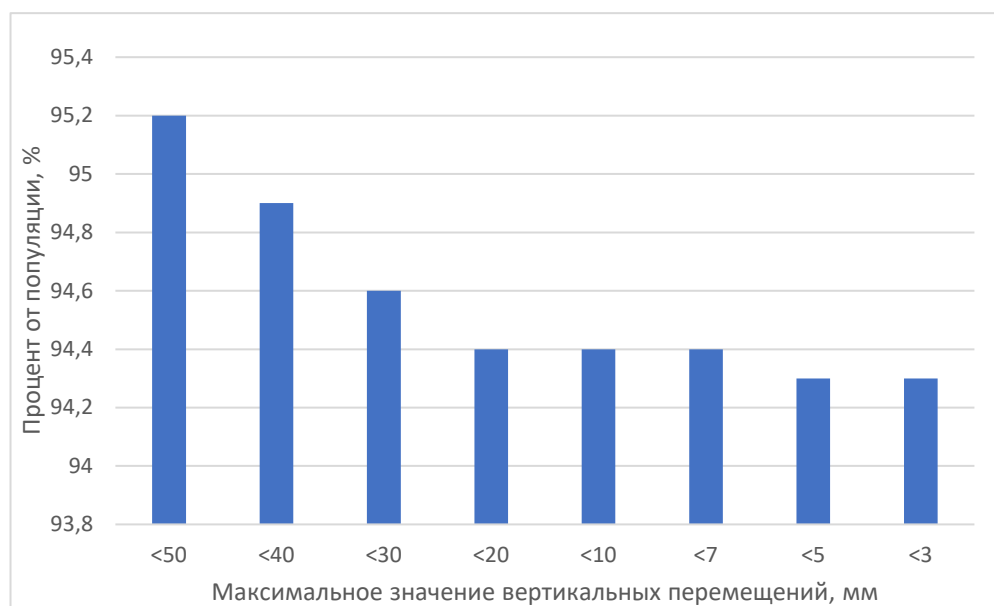


Рисунок 3.1.1.6. Диаграмма долей индивидов в популяции

Что касается эффективности работы нейронной сети в данной работе, то на мой взгляд этот метод оказался менее действенным в текущей постановке задачи при указанных параметрах нейронной сети. Для достижения значения функции ошибки 0.0037 (средняя квадратичная ошибка), что является больше, чем у линейной регрессии, методу потребовалось 68 эпох и заняло столько же времени,

сколько и на работу генетического алгоритма, который в свою очередь построил целое множество удовлетворительных решений. Однако, результат и деформационная картина оказались достаточно близко к точным. Кроме того, если рассматривать количественное сравнение, то результаты нейронной сети оказались самыми точными относительно точного решения, но это никак не повлияло на прогибы во всей балке жесткости.

3.1.2. Задача разной размерности

В данном случае в качестве ограничений на систему рассматривались опорные реакции в точках опирания балки жесткости на постоянную опору и вертикальное перемещение в центре пролета (рис.3.1.2.1).

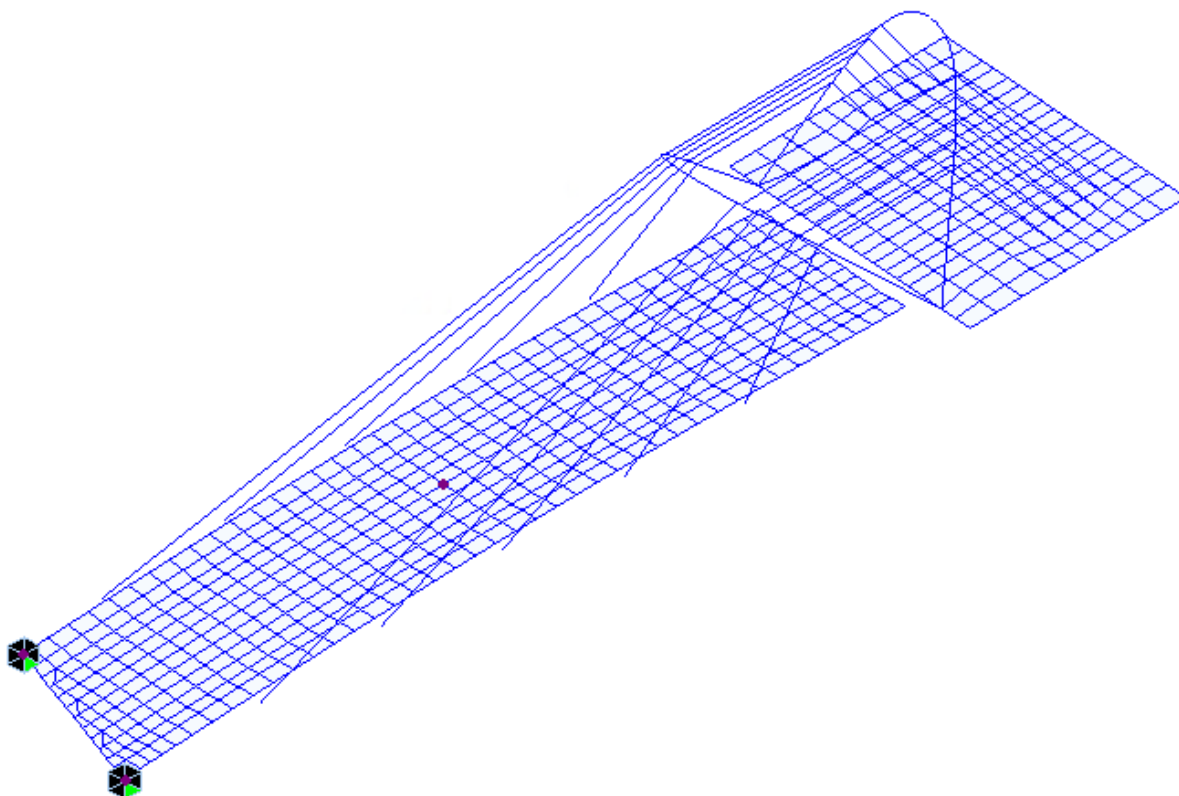


Рисунок 3.1.2.1. Точки наблюдаемых параметров

Опорные реакции и вертикальное перемещение в центре полета брались в качестве наблюдаемых параметров и передавались в исследуемые методы в качестве входных параметров. Таким образом, такой тип ограничений можно сформулировать следующим образом: необходимо обеспечить отсутствие

прогиба в центре пролетного строения так, чтобы не допустить отрыва пролетного строения от постоянной опоры. Так как предельное значение реакции в момент отрыва равно 0 кН, то это значение бралось с запасом равным 200 кН.

Был построен набор данных для задачи разной размерности по такому же принципу, что и для задачи равной размерности, поэтому данные использовались в данном типе задачи в таком же виде (см. табл.3.1.1.1 и табл.3.1.1.3). В качестве постоянного вектор-столбца U_0 теперь выступает вектор-столбец, состоящий из опорных реакций и вертикальном перемещении, поэтому табл.3.1.1.2 будет заменена на следующий вектор-столбец (рис.3.1.2.2 – 3.1.2.3).

$$U_0 = \begin{pmatrix} 817.1 \\ 922.9 \\ -398.6 \end{pmatrix} \quad (3.1.2.1)$$

где

$U_{01} - U_{02}$ – значения вертикальной составляющей опорных реакций в отслеживаемых точках в кН,

U_{03} – вертикальные перемещения центра пролетного строения в мм.

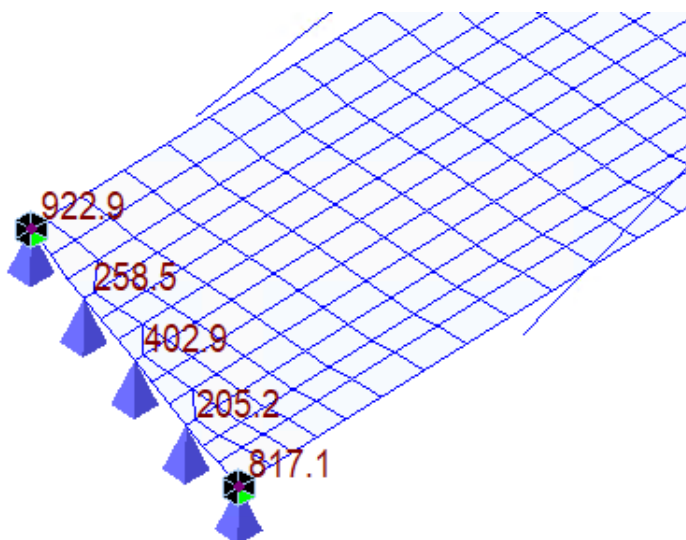


Рисунок 3.1.2.2. Опорные реакции при действии постоянных нагрузок без учета натяжения

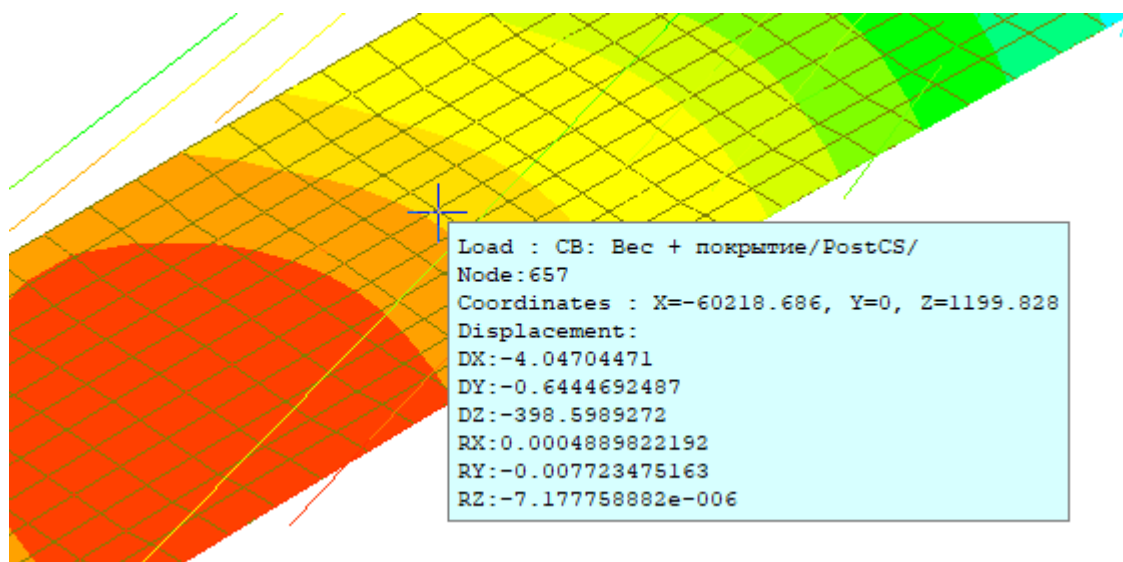


Рисунок 3.1.2.3. Вертикальные перемещения в центре пролета при действии постоянных нагрузок без учета натяжения

Исходя из всего вычисленного выше, был построен набор данных в виде таблицы размером 1048576 строк и 13 столбцов, где первые 10 столбцов – управляющие параметры (выходные) и 11 – 13 столбцы – наблюдаемые параметры (входные).

В качестве входного вектора ограничений системы в модель линейной регрессии и нейронной сети был подан вектор

$$U = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.2.2)$$

что соответствует необходимым опорным реакциям и нулевому перемещению в отслеживаемых точках (см. рис.3.1.2.1).

Для генетического алгоритма функция приспособленности использовалась аналогичная той, что использовалась в задаче равной размерности. Размер популяции – 1000 индивидов. Результат, приведенный в табл. 3.1.2.1, для генетического алгоритма был достигнут за 5000 поколений.

Ниже будут приведены результаты, полученные тремя разными методами (см. табл.3.1.2.1).

Таблица 3.1.2.1
Длина начального укорочения вант

Номер ванта	Длина начального укорочения, мм		
	Линейная регрессия	Нейронная сеть	Генетический алгоритм
1	92.4262486	93.166	113.95
2	92.63023633	92.4509	83.47762
3	123.2490167	122.9399	33.01645
4	125.4928395	124.2251	9.045206
5	134.4752015	134.4313	437.8283
6	136.9707276	138.5048	35.7254
7	188.5325505	187.8964	195.5972
8	169.8461634	169.561	77.41258
9	397.3682896	394.2947	489.8105
10	324.0411211	321.9225	416.1493

Как можно заметить, значения длин начального укорочения, вычисленные при помощи метода линейной регрессии и нейронной сети, очень схожи между собой. Это может означать, что обучение для обеих моделей прошло таким образом, что подобранные коэффициенты линейной регрессии и нейронной сети близки друг с другом. Это вполне возможно, так как суть и параметры обоих подходов, описанных в параграфах 2.2 – 2.3, имеет одну структуру в виде системы линейных алгебраических уравнений из-за выбора архитектуры нейронной сети и функции активации. Результаты, полученные при помощи генетического алгоритма, отличаются от тех, что были получены двумя другими методами.

Стоит отметить, что значения длин начального укорочения, полученных любым из трех методов, лежат в пределах допустимых интервалов (см. табл.3.1.1.3). Это очевидно в случае генетического алгоритма, так как в этом методе значения генов индивида задаются вручную разработчиком, что позволяет учесть выбранные интервалы. В случае линейной регрессии и нейронной сети «попадание» в допустимые интервалы можно объяснить тем, что

набор данных для обучения данных моделей был построен с учетом указанных интервалов.

После домножения на соответствующие жесткости (см. табл.3.1.1.1) были получены усилия предварительного натяжения и подставлены в трехмерную модель. После расчета с рассчитанными и уже заданными усилиями получили следующие результаты, показанные на рис.3.1.2.4 – 3.1.2.9.

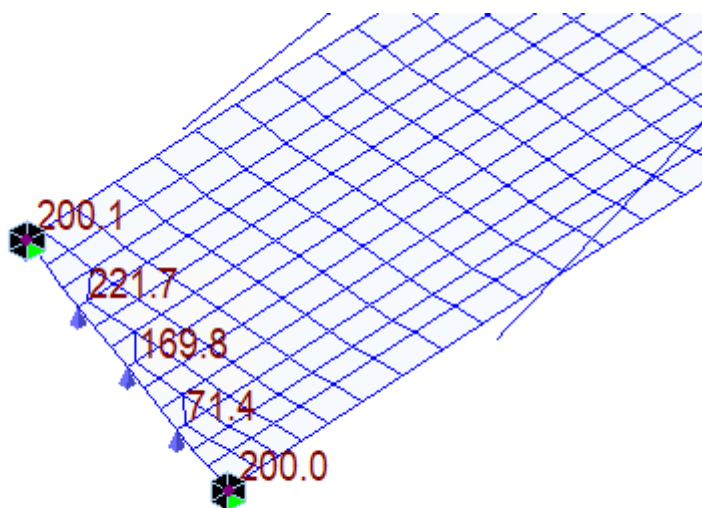


Рисунок 3.1.2.4. Вертикальная компонента опорных реакций при усилиях, вычисленных при помощи линейной регрессии

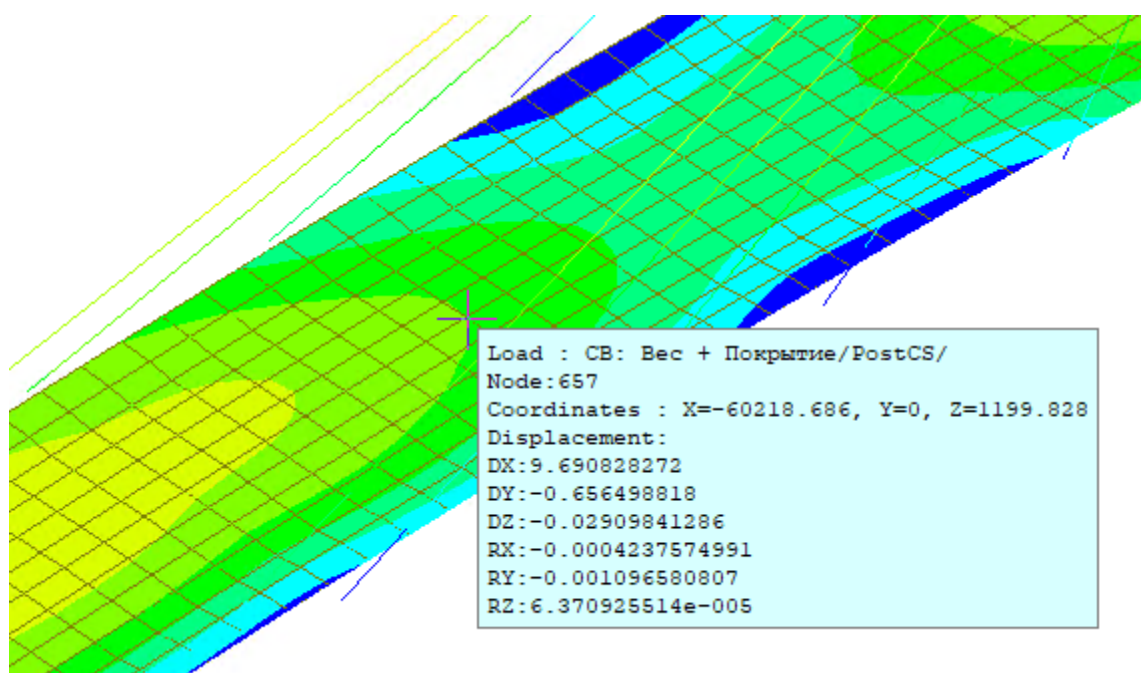


Рисунок 3.1.2.5. Вертикальные перемещения в отслеживаемой точке при усилиях, вычисленных при помощи линейной регрессии

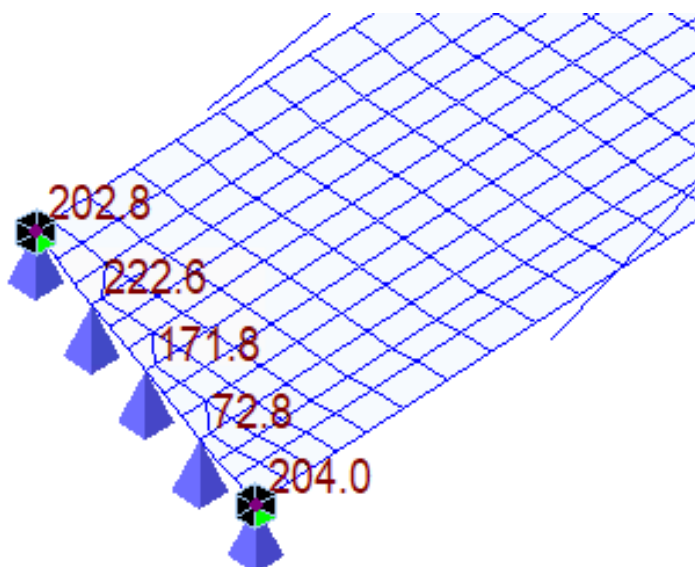


Рисунок 3.1.2.6. Вертикальная компонента опорных реакций при усилиях, вычисленных при помощи нейронной сети

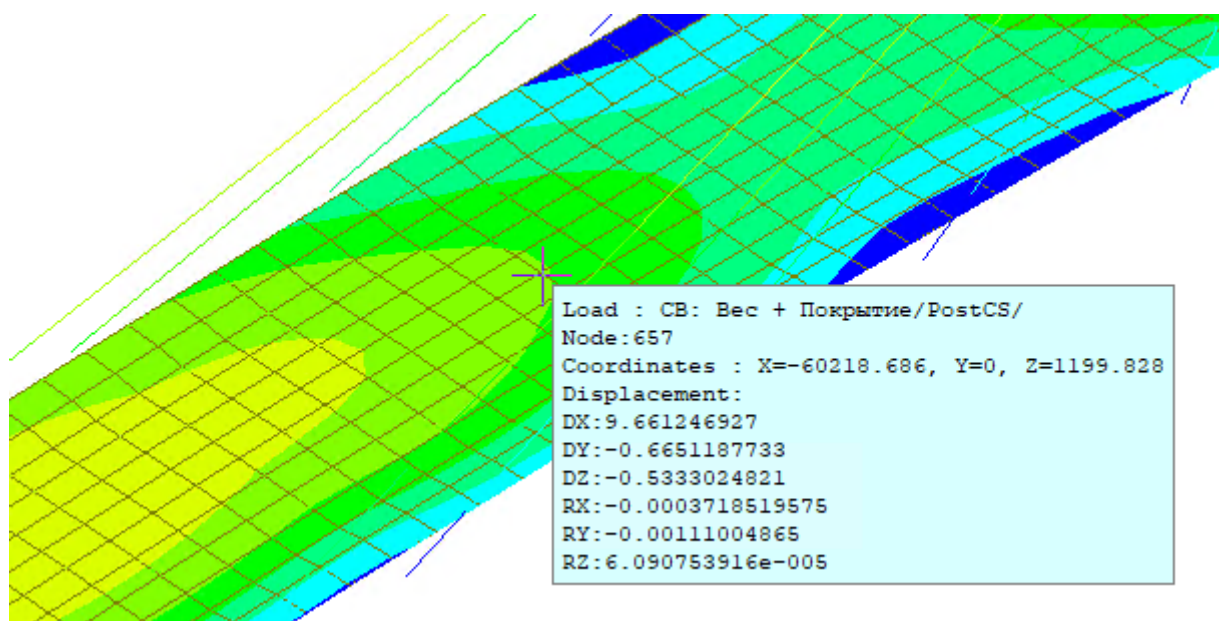


Рисунок 3.1.2.7. Вертикальные перемещения в отслеживаемой точке при усилиях, вычисленных при помощи нейронной сети

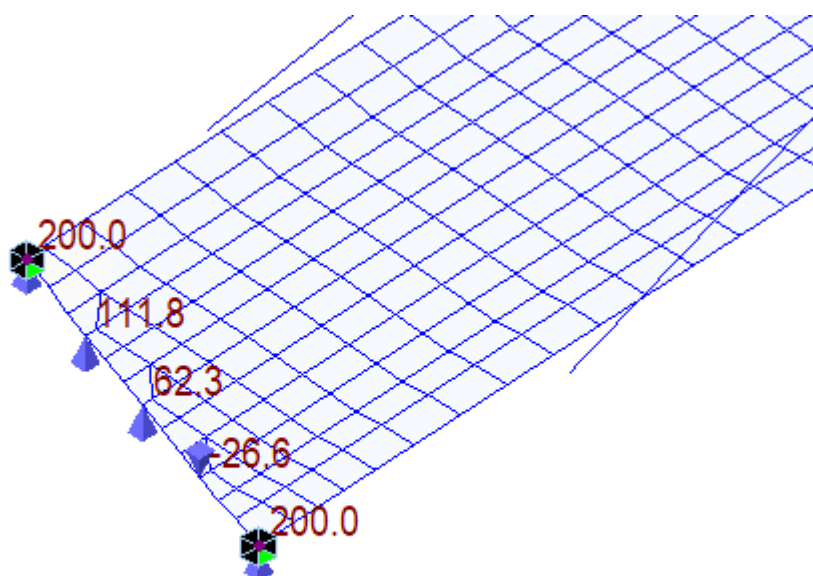


Рисунок 3.1.2.8. Вертикальная компонента опорных реакций при усилиях, вычисленных при помощи генетического алгоритма

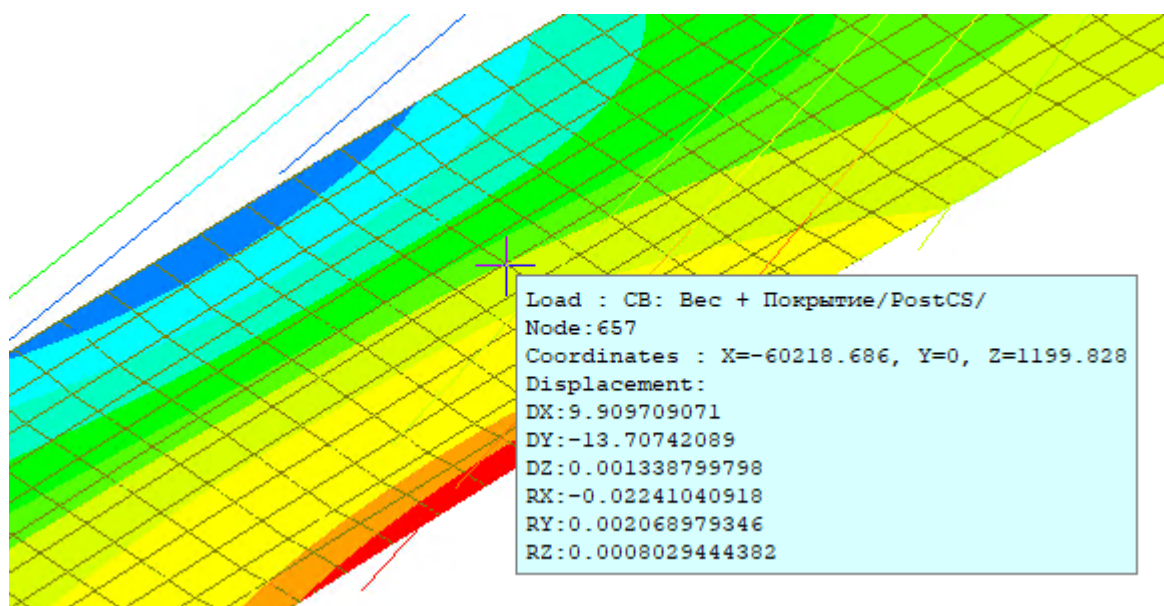


Рисунок 3.1.2.9. Вертикальные перемещения в отслеживаемой точке при усилиях, вычисленных при помощи генетического алгоритма

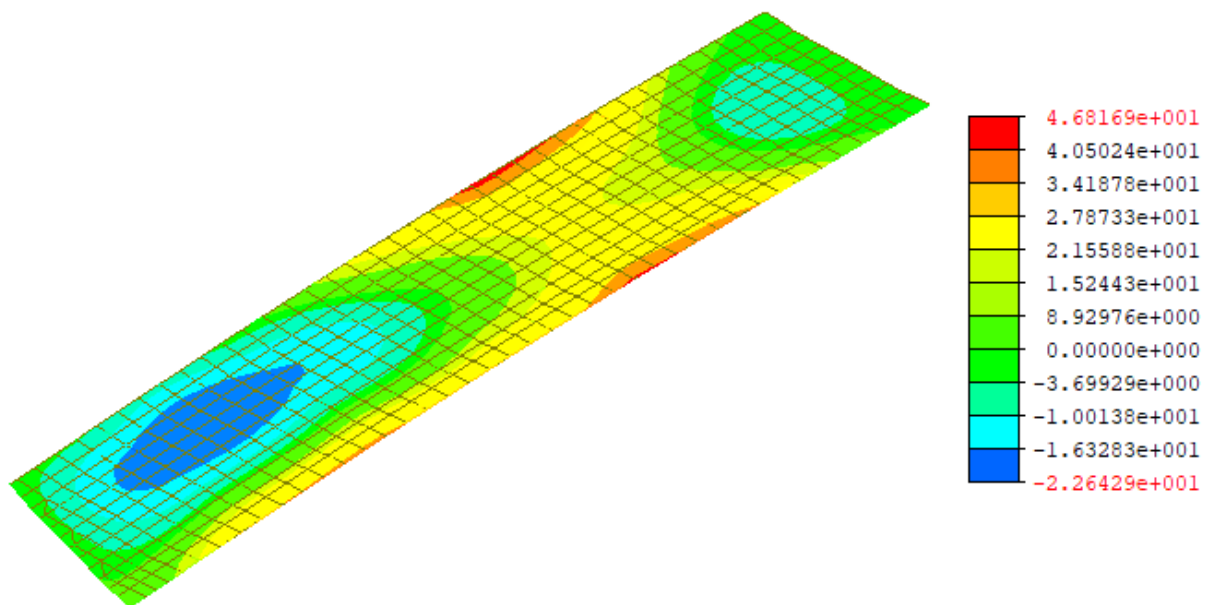


Рисунок 3.1.2.10. Поле вертикальных перемещений при усилиях, вычисленных при помощи линейной регрессии

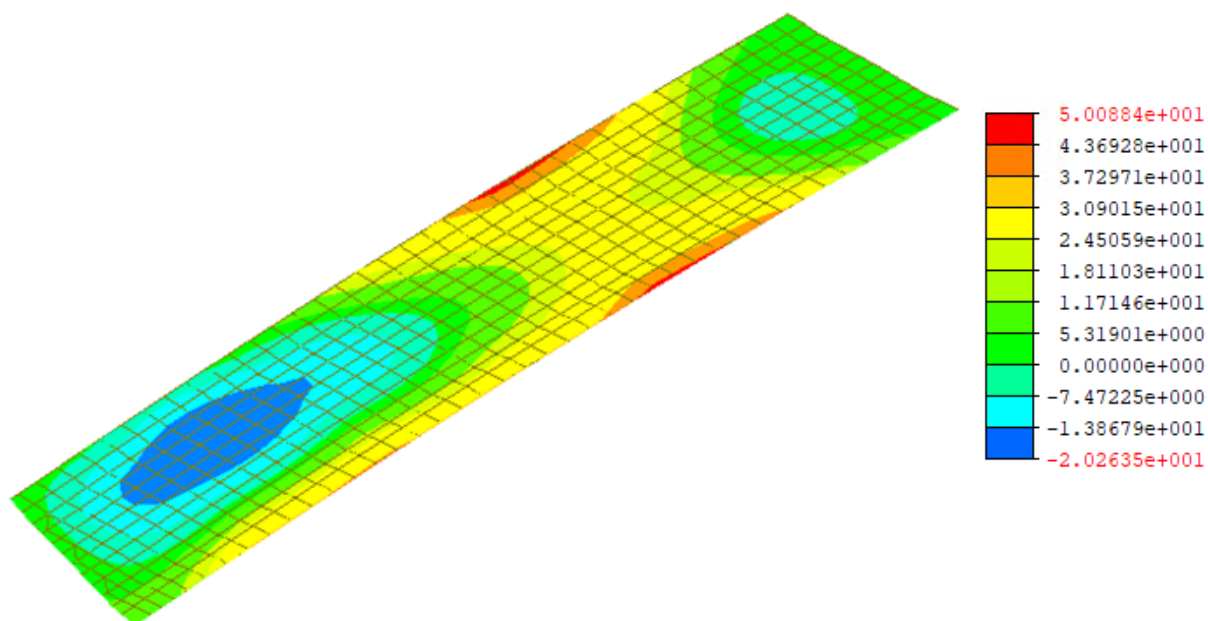


Рисунок 3.1.2.11. Поле вертикальные перемещения при усилиях, вычисленных при помощи нейронной сети

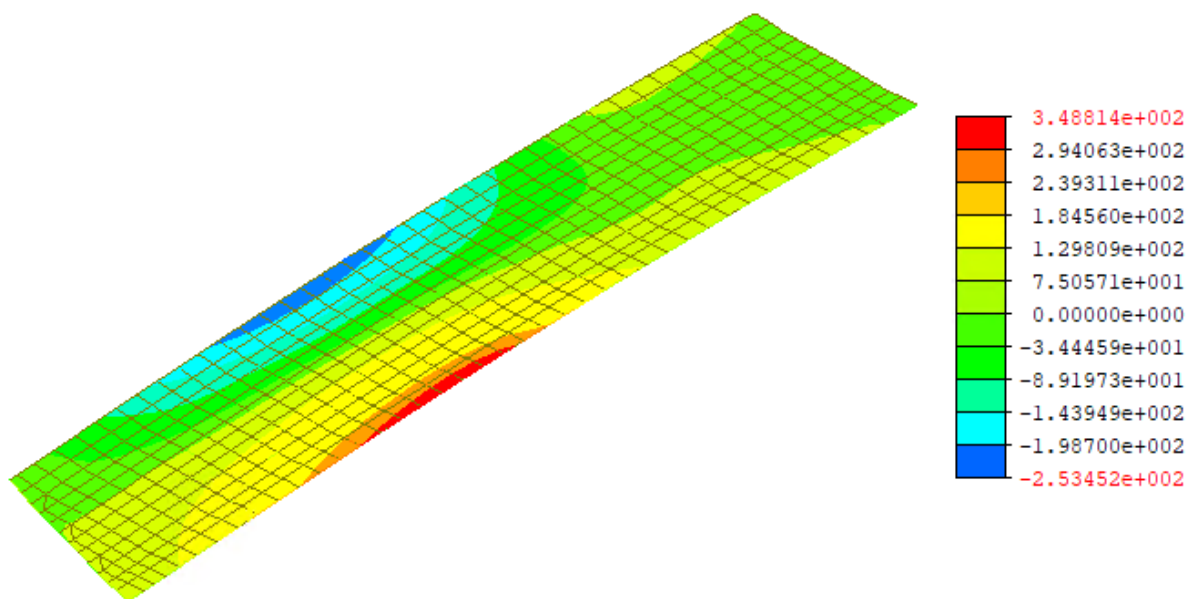


Рисунок 3.1.2.12. Поле вертикальные перемещения при усилиях, вычисленных при помощи генетического алгоритма

На основе рис.3.1.2.4 – 3.1.2.12 можно сделать следующие выводы:

- Линейная регрессия и нейронная сеть достаточно качественно описывают требуемое поведение вантового моста как механической системы. Значения усилий предварительного натяжения вант были вычислены таким образом, что, кроме обеспечения необходимого значения опорных реакций в отслеживаемых точках, также не происходит отрыва и в других точках опирания балки жесткости на постоянную опору. Это видно из значений опорных реакций в других точках опирания (см. рис.3.1.2.4 и 3.1.2.6), так как они имеют положительное значение. Генетический алгоритм в свою очередь подобрал усилия предварительного натяжения так, чтобы удовлетворялись ограничения наложенные на отдельные элементы конструкции без учета работы всей механической системы (см. рис.3.1.2.8). Это объясняется тем, что первые 2 метода обучаются на таком наборе данных, который был построен специально под исследуемый вантовый мост и где были учтены все различные варианты поведения конструкции. Генетический алгоритм данный набор данных в своей работе не использует, а работает непосредственно с объектом при помощи

функции приспособленности, которое нацелено на удовлетворение накладываемых ограничений.

- Вертикальные перемещения в центре пролета (см. рис.3.1.2.5, 3.1.2.7 и 3.1.2.9), вычисленные всеми тремя методами, достаточно малы, поэтому можно сказать, что данное ограничение также выполняется. Если рассмотреть их количественно, то минимальные вертикальные перемещения были получены при значениях усилий предварительного натяжения, вычисленных генетическим алгоритмом. Однако, если взглянуть на длины начального укорочения (см табл.3.1.2.1), то значения, полученные при помощи линейной регрессии и нейронной сети, близки к симметричным относительно оси пролетного строения, что приводит к симметричным деформированным состояниям (см. рис.3.1.2.10 – 3.1.2.11). Значения длин начального укорочения (см. табл.3.1.2.1), вычисленных этим методом, сильно отличаются между собой относительно оси пролетного строения, что является причиной деформированного состояния (см. рис.3.1.2.12). На ней явно видно, что присутствует кручение моста относительно его оси, что недопустимо с технической точки зрения.

3.2. Исследование вычисления псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза

Вычисление псевдообратной матрицы в задаче равной размерности с математической точки зрения не имеет смысла, так как система (1.2) становится полностью определенной, и матрица коэффициентов имеет квадратный вид и не является вырожденной. Представляет интерес задача разной размерности, при которой матрица коэффициентов влияния имеет прямоугольный вид и не имеет обратной матрицы в общепринятом смысле. Как было упомянуто в постановке задачи (параграф 1), в качестве обратной матрицы рассматривается псевдообратная матрица Мура-Пенроуза.

В качестве псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза рассматривается обратная матрица коэффициентов влияния M из уравнения (2.1.1). Таким образом, ищется такая матрица, что

$$X = M^{-1}(U - U_0) \quad (3.2.1)$$

Матрицы, что строятся в случае линейной регрессии и нейронной сети в задаче неравной размерности, не подходят как решение уравнения (3.2.1), так как эти модели имеют следующую структуру

$$X = M_*^{-1}U, \quad (3.2.2)$$

где

X – вектор-столбец усилий предварительного натяжения вант в кН,

U – значение ограничений, накладываемых на систему.

То есть отсутствует вектор-столбец значений наблюдаемых параметров при постоянных нагрузках без учета натяжения U_0 , потому что он уже учитывался в построении набора данных.

Чтобы воспользоваться моделями линейной регрессии и нейронной сети, необходимо перестроить набор данных для их обучения без учета вектор-столбца U_0 . Матрицы коэффициентов новых исследуемых моделей, обученных на новой выборке представлены в табл. 3.2.1 и 3.2.2.

Таблица 3.2.1

Матрица коэффициентов модели линейной регрессии

0.00407	0.00061665	0.0124433
0.00416	0.0022212	0.0139167
0.05628	0.010506	0.25034
0.0281	0.016013	0.238869
0.12669	0.029954	0.639982
0.013346	0.01128	0.55632
-0.043875	0.041645	0.475055
-0.099058	-0.095793	0.31132
-0.685758	0.021259	-0.1815366
-0.11325	-0.296285	-0.153042

Таблица 3.2.2
Матрица весовых коэффициентов нейронной сети

-0.00862792	-0.00461921	0.12917775
-0.00927745	-0.0020911	0.12611274
0.04644891	0.00790002	0.33238524
0.01685988	0.01346251	0.31572855
0.1274512	0.03196176	0.6123575
0.02942144	0.01499894	0.46725264
-0.04456321	0.04283933	0.47631654
-0.08782724	-0.09648108	0.21122749
-0.70794076	0.02049501	-0.12084961
-0.12881476	-0.30243543	-0.04508448

Также обратная матрица была вычислена при помощи метода, описанного в параграфе (2.3), суть которого заключается в удовлетворении равенства (2.3.4). Результат, полученный таким способом представлен в табл. 3.2.3.

Таблица 3.2.3
Обратная матрица коэффициентов влияния, вычисленная при помощи нейронной сети

0.10439265	0.8314503	-0.03084123
0.62456864	0.51583457	1.0482988
0.21787877	0.55163753	0.34391963
0.24382462	0.05563253	0.308393
0.46583557	-0.39462903	0.8087665
-0.09482041	-0.19196676	0.34886268
-0.89186835	-0.25577745	0.21675637
-0.3135997	0.19758552	0.15233065
-0.15431717	0.19699445	0.11096764
0.09032597	-0.4957252	0.10897597

При помощи генетического алгоритма была вычислена псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, где учитывались критерии (1.5) – (1.8) в функции приспособленности. Результат ее вычисления, представлен в табл. 3.2.4.

Таблица 3.2.4

Псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, вычисленная при помощи генетического алгоритма

0.05052696	0.00239764	0.07533228
0.04361976	0.02785064	0.12067772
0.18079085	0.01219551	0.4628908
0.07389973	0.04810552	0.47767781
0.15406678	0.02634313	0.53772556
-0.07673182	-0.00834447	0.37989536
-0.16765201	0.05761432	0.31436543
-0.19729618	-0.16169181	0.33320407
-0.56034894	0.03820567	-0.05019498
-0.02260791	-0.22924029	-0.12003692

Ниже в табл. 3.2.5 приведены значение критериев (1.5) – (1.8) в виде, проведя заранее обезразмеривание матриц

$$\|MM^*M - M\|, \quad (3.2.3)$$

$$\|M^*MM^* - M^*\|, \quad (3.2.4)$$

$$\|(MM^*)^T - MM^*\|, \quad (3.2.5)$$

$$\|(M^*M)^T - M^*M\|, \quad (3.2.6)$$

где M^* - псевдообратная матрица.

Таблица 3.2.5

Значение критериев псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза

	Матрица коэффициентов линейной регрессии	Матрица весовых коэффициентов нейронной сети	Нейронная сеть	Генетический алгоритм
$\ MM^*M - M\ $	9.47e-07	0.064	7.9667	0.051797
$\ M^*MM^* - M^*\ $	2.069e-07	0.02159	9.393	0.029166
$\ (MM^*)^T - MM^*\ $	2.655e-07	0.04663	3.50083e-07	0.0001259
$\ (M^*M)^T - M^*M\ $	0.888	0.8892	21.8529	0.27492

Все матрицы, полученные разными способами (см. табл.3.2.1 – 3.2.4), отличаются между собой. Значит можно ввести предположение о том, что из всех представленных методов получения обратной матрицы, строит истинную псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза либо один, либо никакой из методов, так как для любой матрицы псевдообратная матрица Мура-Пенроуза существует и единственна.

Худшим методом приближения обратной матрицы к псевдообратной матрице Мура-Пенроуза является нейронная сеть, работа которой заключалась в удовлетворении равенства (2.3.4) (см. табл.3.2.5). Матрицы, которые наиболее близки по критериям к искомой матрице Мура-Пенроуза, являются те, что были получены из матрицы коэффициентов модели линейной регрессии и генетического алгоритма.

В табл. 3.2.6 представлены значения длин начального укорочения, вычисленные при помощи каждой из представленных обратных матриц.

Таблица 3.2.6
Длины начального укорочения

Номер ванта	Длина начального укорочения, мм			
	Матрица коэффициентов линейной регрессии	Матрица весовых коэффициентов нейронной сети	Нейронная сеть	Генетический алгоритм
1	62.32840441	60.15376517	-677.76942547	-2,885997
2	62.28032792	57.50530854	-340.46620315	1,05115864
3	101.43353111	98.11421498	-396.14539555	64,12610081
4	105.83842533	105.71312355	-67.75547459	110,0233691
5	141.34481086	142.33041051	320.1845164	100,2193479
6	159.68255365	157.24819855	336.34310716	204,8097127
7	187.72141205	186.39117481	821.67256856	187,114723
8	198.23206197	208.13964054	111.40680155	371,4536239
9	376.75152571	373.8837439	-2.94646199	298,1647337
10	290.26710025	280.15148201	346.05742038	131,8224339

Результаты, полученные при помощи матрицы, построенной методом, суть которого является удовлетворение уравнения (2.3.4), не подходят в качестве решения задачи, так как там присутствуют большие по значению отрицательные числа. Это означает, что вант должен быть растянут для достижения требуемых ограничений, но в данной задаче это недопустимо.

Также можно заметить отрицательное значение длины начального укорочения у первого ванта, полученной при помощи матрицы, вычисленной генетическим алгоритмом. Это значение достаточно мало, поэтому принимается, что длина его укорочения равна 0.

Все удовлетворительные результаты были домножены на соответствующие жесткости (см. табл.3.1.1.1) получены усилия предварительного натяжения и подставлены в трехмерную модель. После расчета с рассчитанными и уже заданными усилиями получили следующие деформационные картины, показанные на рис.3.2.1 – 3.2.9.

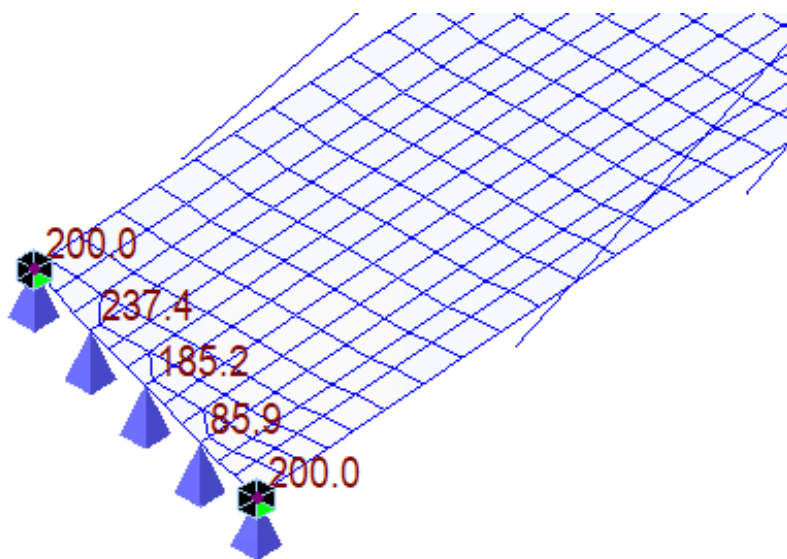


Рисунок 3.2.1. Вертикальная компонента опорных реакций при усилиях, полученных при помощи матрицы коэффициентов модели линейной регрессии

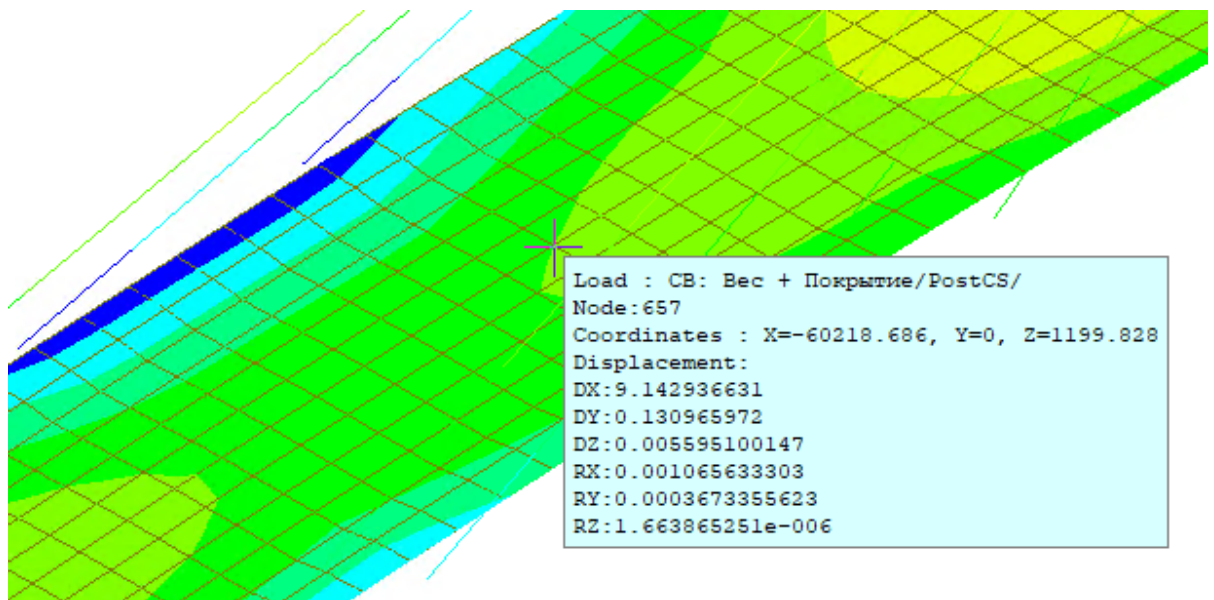


Рисунок 3.2.2. Вертикальные перемещения в отслеживаемой точке при усилиях, полученных при помощи матрицы коэффициентов модели линейной регрессии

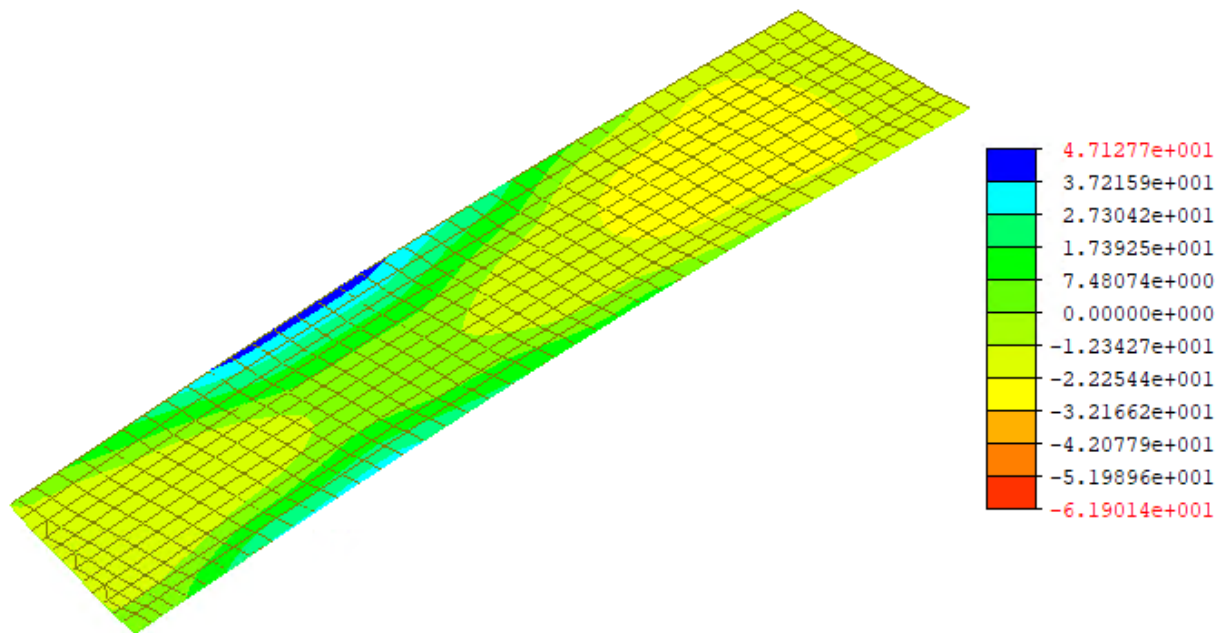


Рисунок 3.2.3. Поле вертикальных перемещений при усилиях, полученных при помощи матрицы коэффициентов модели линейной регрессии

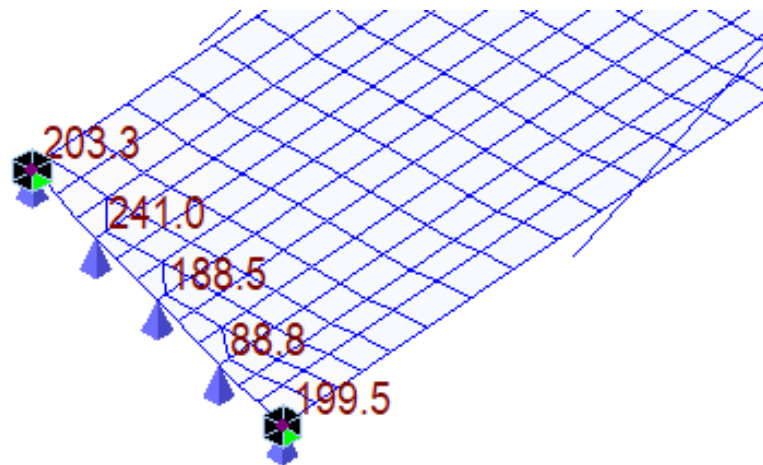


Рисунок 3.2.4. Вертикальная компонента опорных реакций при усилиях, полученных при помощи матрицы весовых коэффициентов нейронной сети

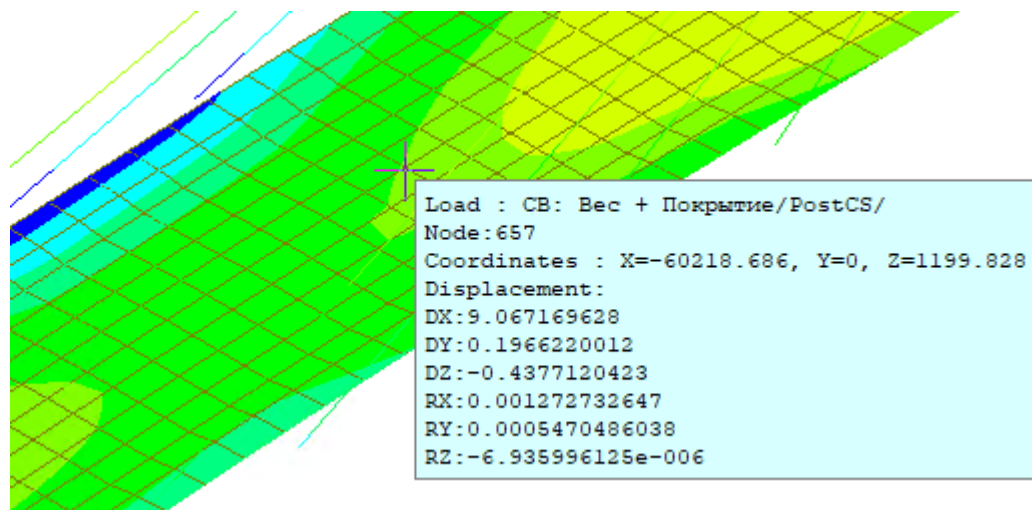


Рисунок 3.2.5. Вертикальные перемещения в отслеживаемой точке при усилиях, полученных при помощи матрицы весовых коэффициентов нейронной сети

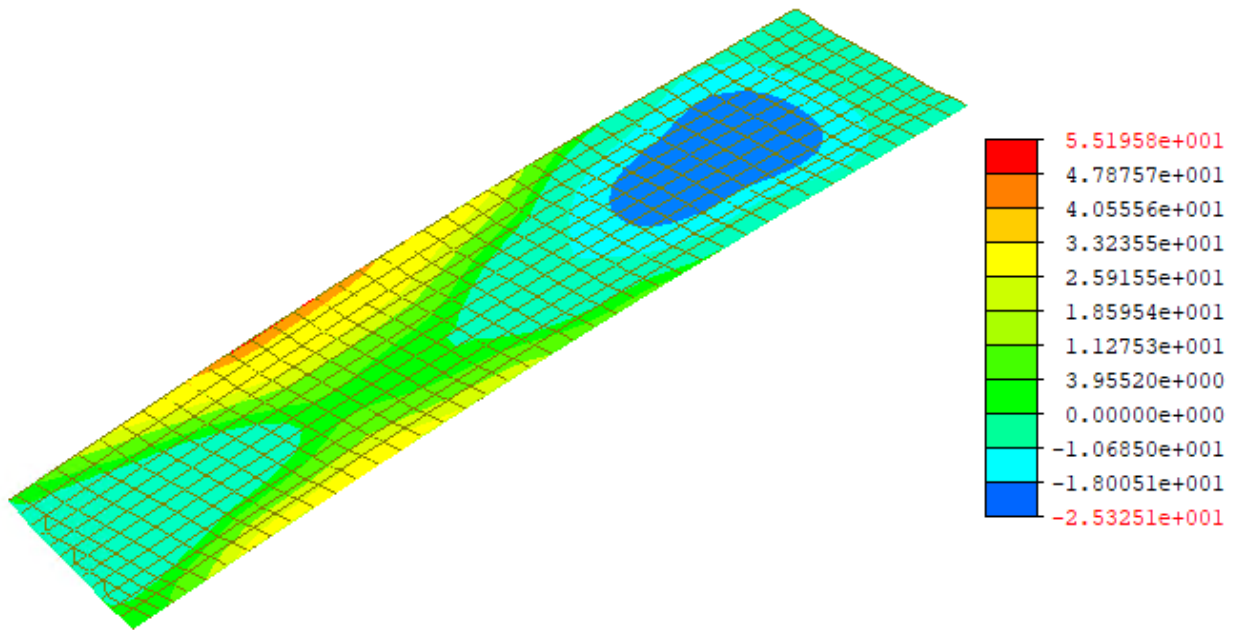


Рисунок 3.2.6. Поле вертикальных перемещений при усилиях, полученных при помощи матрицы весовых коэффициентов нейронной сети

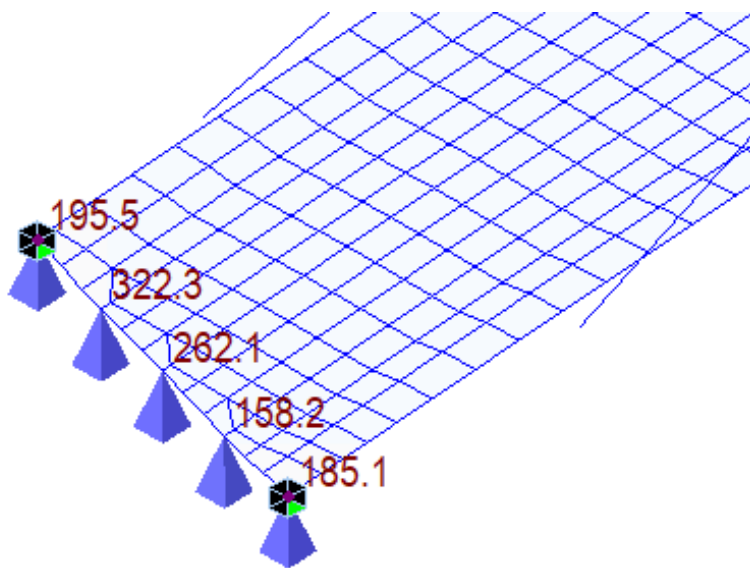


Рисунок 3.2.7. Вертикальная компонента опорных реакций при усилиях, полученных при помощи обратной матрицы, вычисленной генетическим алгоритмом

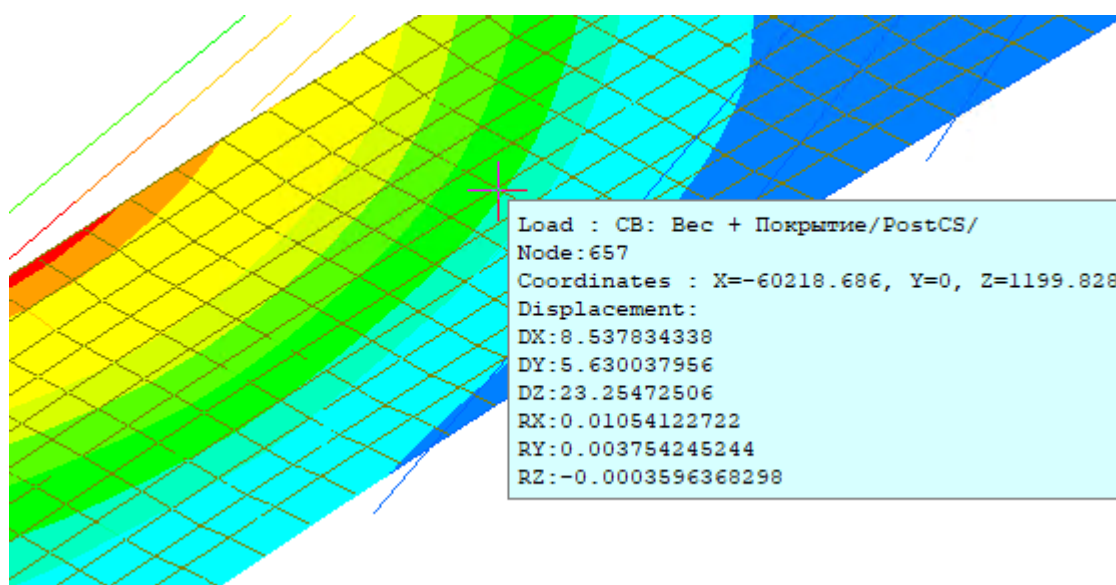


Рисунок 3.2.8. Вертикальные перемещения в отслеживаемой точке при усилиях, полученных при помощи обратной матрицы, вычисленной генетическим алгоритмом

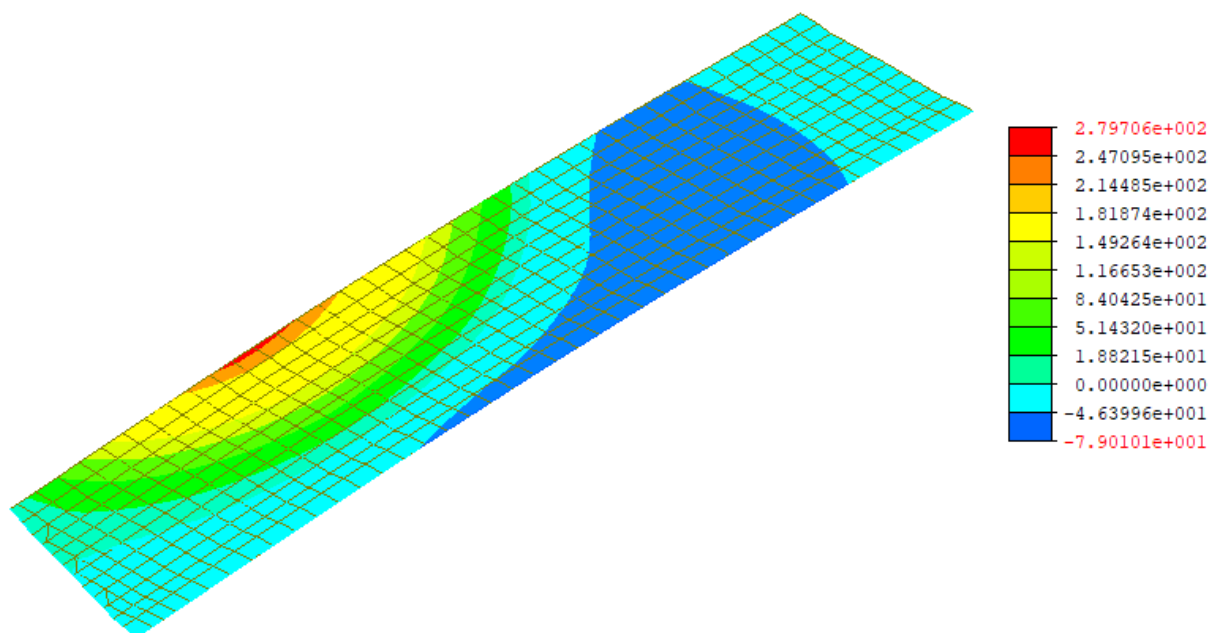


Рисунок 3.2.9. Поле вертикальных перемещений при усилиях, полученных при помощи обратной матрицы, вычисленной генетическим алгоритмом

Как можно увидеть из рис.3.2.1 – 3.2.9, наложенные ограничения были достаточно точно выполнены в случае линейной регрессии и нейронной сети. Ограничения, получившиеся при усилиях предварительного натяжения, вычисленных при помощи обратной матрицы из генетического алгоритма, немного отличаются от требуемых. Однако, без потери общности можно сказать, что ограничения также выполняются, так как опорные реакции в 200 кН были взяты с запасом, и перемещения лежат в пределах допустимой нормы в 50 мм.

Существует специальная библиотека `linalg` языка Python, при помощи которой можно вычислить псевдообратную матрицу Мура-Пенроуза, которая будет удовлетворять все четырем критериям (1.5) – (1.8). Ниже будут представлены в табл.3.2.7 псевдообратная матрица, вычисленная при помощи этой библиотеки, в табл.3.2.8 длины начального укорочения вант и на рис.3.2.10 – 3.2.12 результаты в трехмерной модели после подстановки в нее значений усилий предварительного натяжения.

Таблица 3.2.7

Псевдообратная матрица, вычисленная при помощи библиотеки `linalg`

0.04896836	0.00307807	0.06893119
0.04325577	0.02564152	0.07766704
0.18204929	0.0166873	0.44698702
0.04240865	0.04892723	0.4286732
0.17818082	0.02825213	0.53746032
-0.05993327	0.00120858	0.46954884
-0.15253372	0.06008588	0.31923552
-0.18145518	-0.16649785	0.2112672
-0.56153784	0.04172678	-0.04887964
-0.03477946	-0.22528094	-0.04559003

Таблица 3.2.8

Длины начального укорочения вант

Номер ванта	Длина начального укорочения, мм
1	-4.96754019
2	-14.27130328
3	53.76315726
4	109.32926573
5	83.85283451
6	223.27330457
7	177.93975744
8	316.54839202
9	296.87728894
10	166.14581038

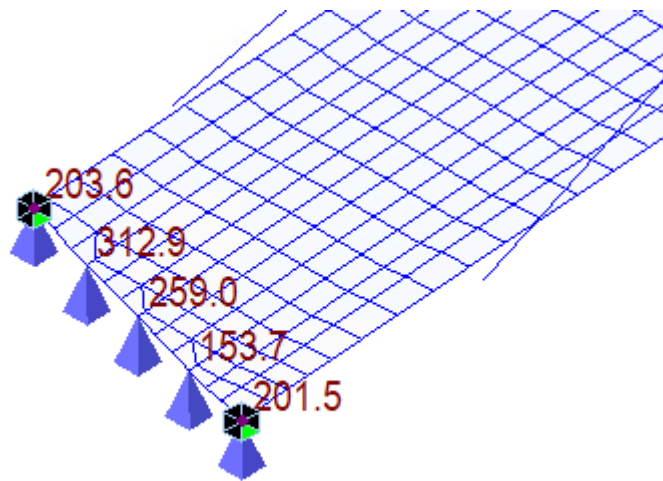


Рисунок 3.2.10. Вертикальная компонента опорных реакций при усилиях, полученных при помощи обратной матрицы, вычисленной библиотекой linalg

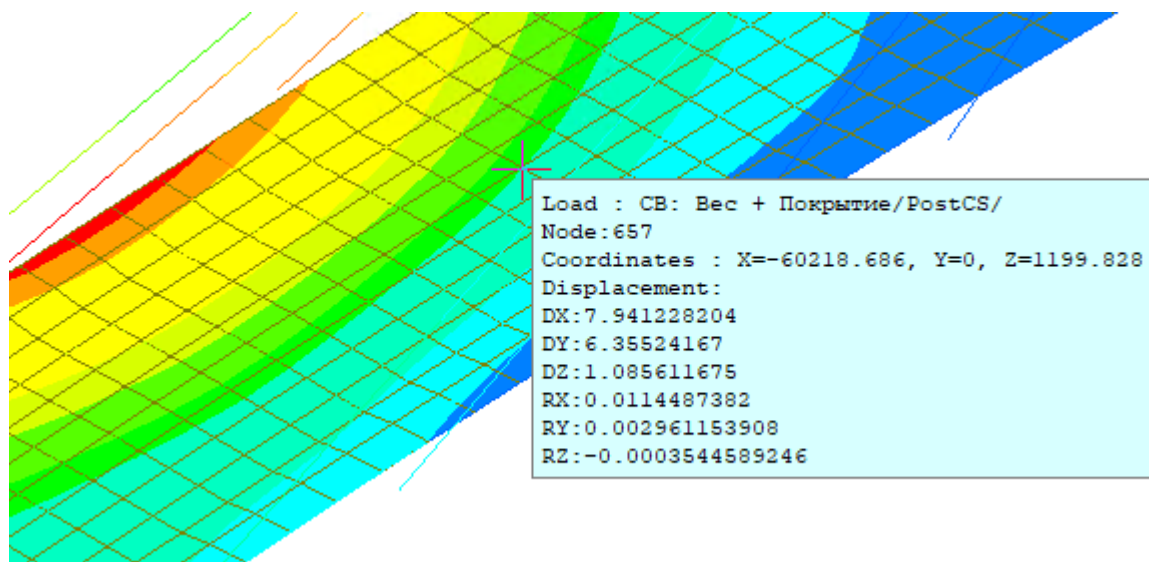


Рисунок 3.2.11. Вертикальные перемещения в отслеживаемой точке при усилиях, полученных при помощи обратной матрицы, вычисленной библиотекой linalg

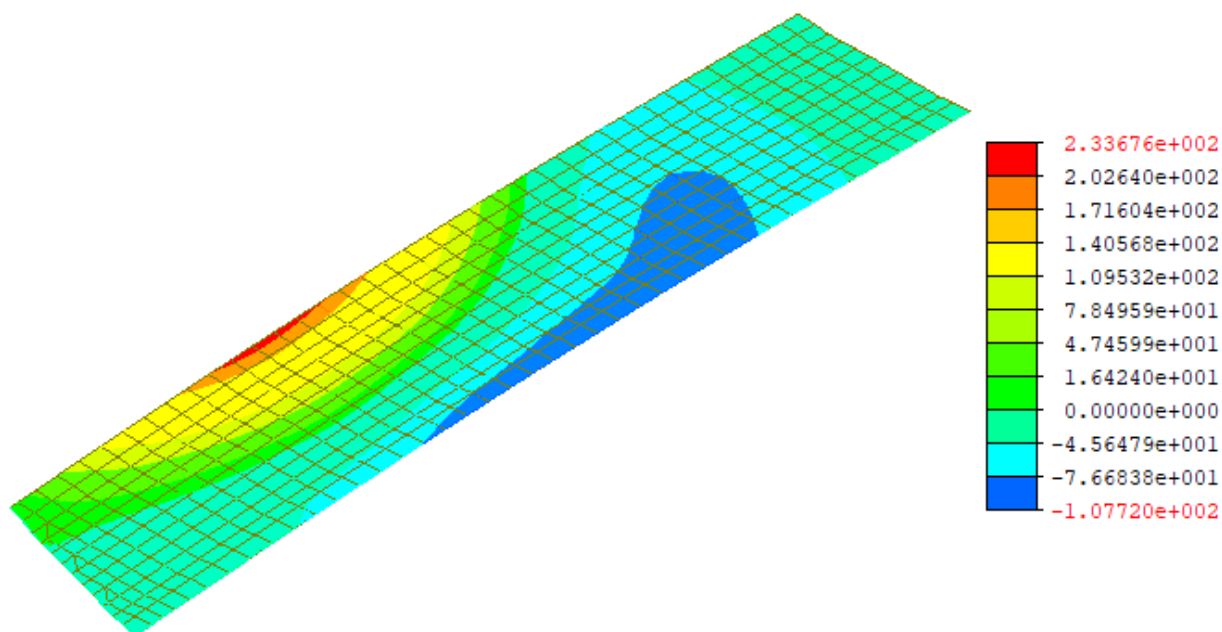


Рисунок 3.2.12. Поле вертикальных перемещений при усилиях, полученных при помощи обратной матрицы, вычисленной библиотекой linalg

Значения матрицы, представленных в табл. 3.2.4 и 3.2.7, очень схожи между собой, из чего можно сделать вывод, что обратная матрица, полученная при помощи генетического алгоритма, ближе остальных приблизилась к псевдообратной матрице Мура-Пенроуза.

В табл. 3.2.8 также присутствуют отрицательные значения длин начального укорочения, которые принимаются нулем по аналогичной причине, высказанной ранее.

Как можно увидеть из рис.3.2.10 – 3.2.12, ограничения, наложенные на систему, выполняются, обеспечивая требуемые значения опорных реакций и минимальный прогиб в центре пролета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были исследованы различные математические модели в качестве альтернативного решения задачи оптимизации, которая заключалась в подборе усилий предварительного натяжения вант таким образом, чтобы удовлетворялись ограничения, наложенные на вантовую механическую систему.

Были предложены новые подходы к решению проблемы данной задачи в случае недоопределенности системы (1.2) путем применения моделей машинного обучения, таких как линейная регрессия, нейронная сеть и генетический алгоритм.

Исследуемые методы были рассмотрены как инструменты для непосредственного вычисления усилий предварительного натяжения и для получения псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза, которая позволяет найти глобальный минимум задачи.

Задача была рассмотрена в двух постановках: определенная и недоопределенная системы. Первая из названных показала возможность использования моделей машинного обучения как метода определения усилий предварительного натяжения вант. В случае второй постановки, в которой присутствовала исследуемая проблема, были предложены 2 способа ее решения: непосредственное вычисление усилий и построение псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза.

При определенности системы все исследуемые методы показали результаты, совпадающие с точным решением, которое может быть вычислено обращением матрицы коэффициентов влияния. В данной постановке были получены усилия предварительного натяжения, которые полностью удовлетворяли ограничениям, наложенным на систему. Таким образом, все три метода подходят для поиска усилий в данной постановке, так как решение такой задачи единственно, и любой из рассмотренных подходов сойдется к нему.

Непосредственное вычисление усилий предварительного натяжения при недоопределенности системы показало, что существует множество возможных

решений задачи, при которых будут удовлетворяться ограничения, наложенные на систему. В такой постановке задачи была продемонстрирована основная проблема, которая решалась в рамках данной работы. Результаты, полученные при помощи всех исследуемых методов, в той или иной степени удовлетворяют наложенным на систему ограничениям. Однако, преимуществом моделей линейной регрессии и нейронной сети заключается в том, что после их обучения получают инструменты для стабильного получения нужного результата. Генетический алгоритм при каждом запуске вычисляет разные решения из множества возможных, что не решает исследуемую проблему.

Из всех исследуемых методов только генетический алгоритм смог вычислить матрицу, наиболее близкую к истинной псевдообратной матрице Мура-Пенроуза. Несмотря на то, что матрицы, полученные остальными методами, также показывали результат, который удовлетворяет все наложенным на систему ограничениям, линейная регрессия и нейронная сеть оказались не способны вычислить псевдообратную матрицу, которая бы доставляла глобальный минимум задачи.

Подводя итог проделанной работы, можно сказать, что каждый из рассмотренных методов может быть использован для поиска усилий предварительного натяжения вант в определенной постановке задачи. В качестве дальнейшего развития данной работы представляется рациональным выполнить исследование стабильности решений, получаемых представленными в работе методами, по отношению к малому изменению жесткостных параметров механической системы, а также по отношению к малому изменению требуемых значений наблюдаемых параметров.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клименко Е.Г. «Генетический алгоритм как разновидность эволюционного алгоритма». Журнал «Радиоэлектроника и информатика». 2002 г. с.125 – 128.
2. Левда Н.М., Якимов М.Р. «Множественная линейная регрессия: методические указания к выполнению контрольных заданий». Пермь: Изд-во Перм. Гос. Техн. Ун-та, 2010. – 44 с.
3. Мельников Б.Е. «Введение в сопротивление материалов». 1999 г.
4. Рашка С., Мирджалили В. «Python и машинное обучение». ООО «Диалектика», 2020.
5. Флах П. «Машинное обучение. Наука и искусство построения алгоритмов, которые извлекают знания из данных». ДМК «Пресс», 2015.
6. Fu-Chang Chen. «Back-propagation neural networks for nonlinear self-tuning adaptive control». IEEE Control Systems Magazine. April 1990. pp. 44 – 47.
7. Guo P., Lyu M.R. «A pseudoinverse learning algorithm for feedforward neural networks with stacked generalization applications to software reliability growth data». Neurocomputing 56 (2004) pp. 101-121
8. Jinhao Hu, Lin Li. An efficient second-order neural network model for computing Moore-Penrose inverse of matrices. The institution of engineering and technology. IET Signal Processing. August 2022. pp.1106 – 1116
9. Petković Marko D.; Predrag S. Stanimirović. Iterative method for computing the Moore–Penrose inverse based on Penrose equations. Journal of Computational and Applied Mathematics *vol. 235 iss. 6.* 2011 г
10. Yiyuan Chai, Haojin Li, Defeng Qiao, Sitian Qin, Jiqiang Feng. «A neural network for Moore-Penrose inverse of time-varying complex-valued matrices». International journal of computational intelligence systems. Vol. 13(1), 2020, pp. 663-671.

11. Алгоритм обратного распространения ошибки (Back propagation algorithm). Портал Вики. <https://wiki.loginom.ru/articles/back-propagation-algorithm.html>
12. Выборка. Портал MachineLearning. <http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Выборка>
13. Множественная регрессия. Портал StatSoft. Электронный учебник по статистике. <http://statsoft.ru/home/textbook/modules/stmulreg.html>
14. Система линейных алгебраических уравнений. Портал Википедия. https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_линейных_алгебраических_уравнений
15. MIDAS Information Technology Co., Ltd; Руководство по расчетам, оптимальное решение для проектирования мостов и гражданских сооружений