Исследование коэффициента сдвига в зависимости от параметров стержня

Выполнил: Филимонов А. С.

Научный руководитель: профессор Иванова Е. А

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Июнь 2017

Ведение

В настоящее время в машиностроении, авиации, строительстве, железнодорожном транспорте все больше используются конструкции, выполненные из тонкостенных и штампованных профилей или просто из тонколистовой стали.

Основным признаком тонкостенного стержня является характерное отношение его геометрических размеров. В поперечном сечении одно из измерений (толщина) существенно меньше другого - срединной длины контура *s*. Последняя в свою очередь намного меньше, чем длина стержня *l*.

Для расчета тонкостенных прямолинейных стержней рассматривается модель балки Тимошенко.

$A=kGS$, где G — модуль сдвига, S — площадь поперечного сечения.

Цель работы

Исследование коэффициентов сдвига прямолинейных тонкостенных стержней .

- определение коэффициентов сдвига на основании численного эксперимента.
- провести исследование влияния формы сечения стержня на коэффициент сдвига.

Основные уравнения

Уравнения движения прямолинейных стержней имеют вид:

$$\mathbf{T}' + \rho_0 \mathbf{f}(s) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \rho_0 \mathbf{m}(s) = \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \ddot{\psi}, \qquad (1)$$

где **T** — сила в сечении стержня , **M** — момент в сечении стержня, ρ_0 —удельная плотность стержня, **t** — орт касательной к оси стержня, $\mathbf{f}(s)$ — распределенная внешняя сила, $\mathbf{m}(s)$ — распределенный внешний момент, **u** — вектор перемещений, ψ — вектор углов поворота, $\boldsymbol{\Theta}_2$ — тензор инерции. Соотношения упругости имеют вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A} \cdot \varepsilon, \qquad \mathbf{M} = \mathbf{C} \cdot \kappa, \qquad (2)$$

где **A**, **C** — тензоры упругости, которые имеют вид:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{ii} + A_y \mathbf{jj} + A_z \mathbf{kk}, \qquad \mathbf{C} = C_x \mathbf{ii} + C_y \mathbf{jj} + C_z \mathbf{kk} \qquad (3)$$

Линейные векторы деформации ε и κ имеют вид:

$$\varepsilon = \mathbf{u}' + \mathbf{t} \times \psi, \qquad \kappa = \psi' \qquad (4)$$

Метод определения упругих модулей

Решение трехмерной задачи реализовано в программном конечно-элементном комплексе Abaqus.

Вектор перемещения и вектор положения точек поперечного сечения в теории стержней и в трехмерной теории связаны соотношениями:

$$\rho_0 \mathbf{u} = \int_S \rho \mathbf{u}^{(3)} dxdy\,, \qquad \rho_0 \boldsymbol{\Theta}_2 \cdot \psi = \int_S \rho \mathbf{a} \times \mathbf{u}^{(3)} dxdy, \qquad (5)$$

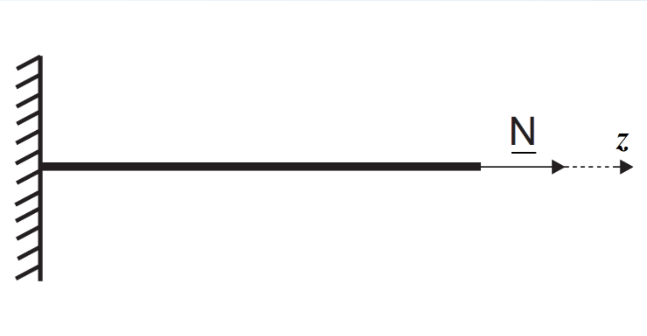
где ρ — объемная плотность массы материала стержня,

$\mathbf{u}^{(3)}$ — вектор смещений точек трехмерной среды,

$\mathbf{a}$ — вектор положения точек поперечного сечения,

S — площадь поперечного сечения.

Тестовая задача: модуль жесткости при растяжении стержня



Модуль жесткости на растяжение:

$$A_z = \frac{N_0 z}{\mathrm{u}^{(3)}(z)} \qquad (6)$$

Известная формула для модуля жесткости:

$$A_{z0} = \mathrm{ES} \qquad (7)$$

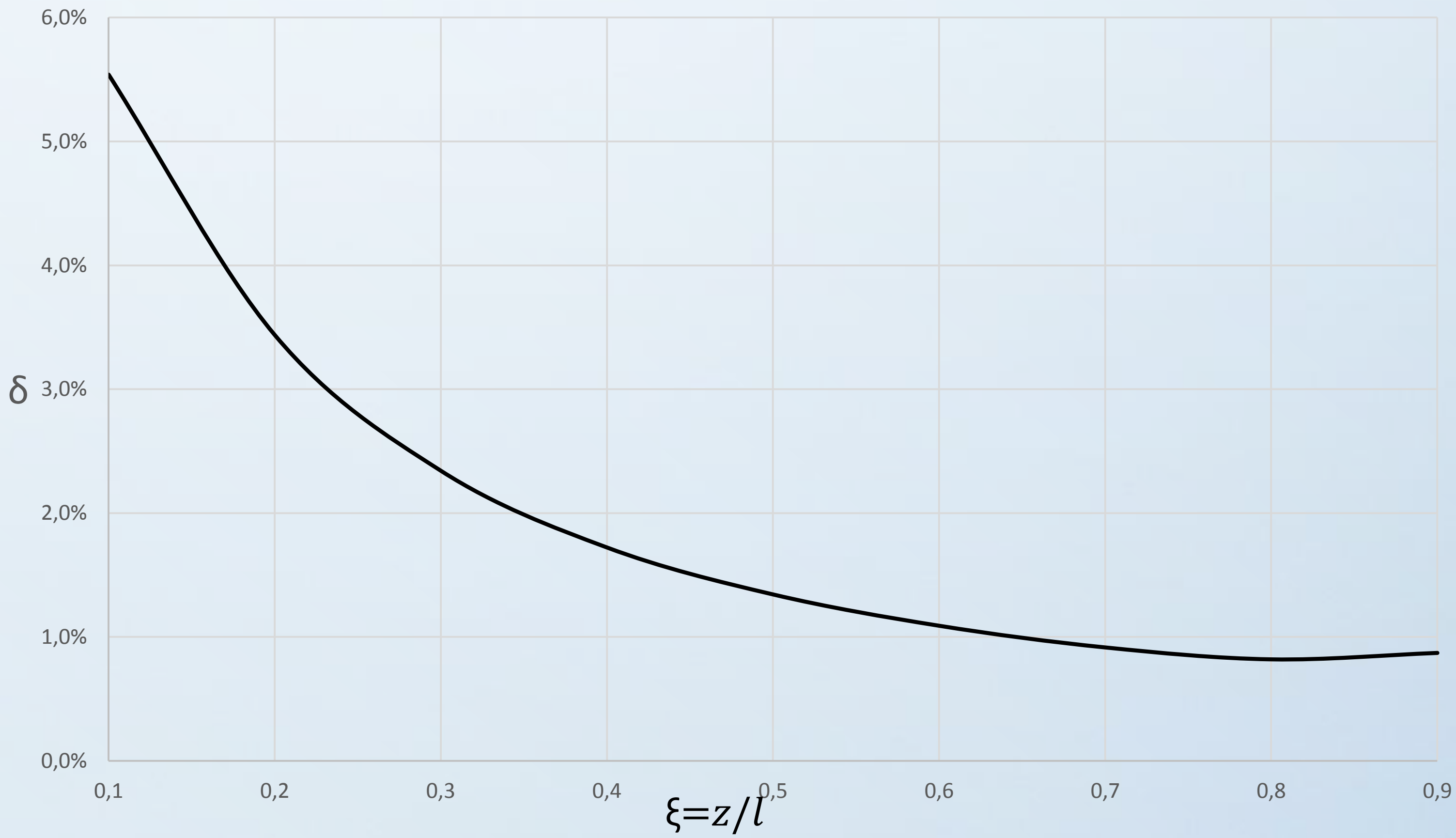
Где E — модуль Юнга, S — площадь поперечного сечения.

$\mathbf{N} = N_0\mathbf{k}, N_0$ — приложенная сила.

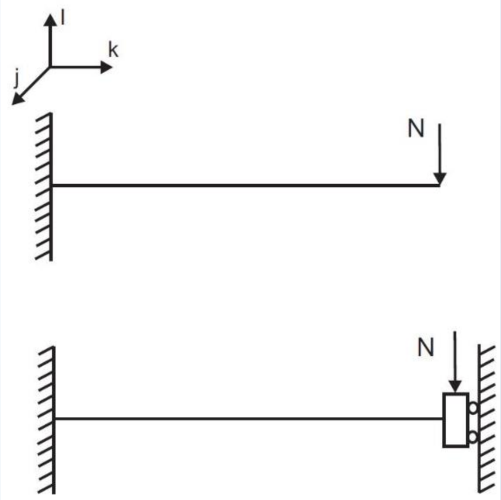
z — координата сечения.

Сравнение результатов для A_z и A_{z0}

$$\delta = \frac{A_z - A_{z0}}{A_{z0}} \cdot 100\% \qquad (8)$$



Постановка задачи для определения коэффициента сдвига



Постановка задачи для изгиба стержня

$$\psi_1 = \frac{N_0}{C_y} z\left(l - \frac{z}{2}\right), \qquad u_1 = \frac{N_0}{A_x} z + \frac{N_0}{2C_y}\left(z^2 l - \frac{z^3}{3}\right) \tag{9}$$

$$\psi_2 = \frac{N_0 z}{2C_y}(z - l), \qquad u_2 = \frac{N_0}{A_x} z + \frac{N_0}{2C_y}\left(\frac{z^2 l}{2} - \frac{z^3}{3}\right) \tag{10}$$

Постановка задачи для определения коэффициента сдвига

Итоговая формула для модуля жесткости на поперечный сдвиг:

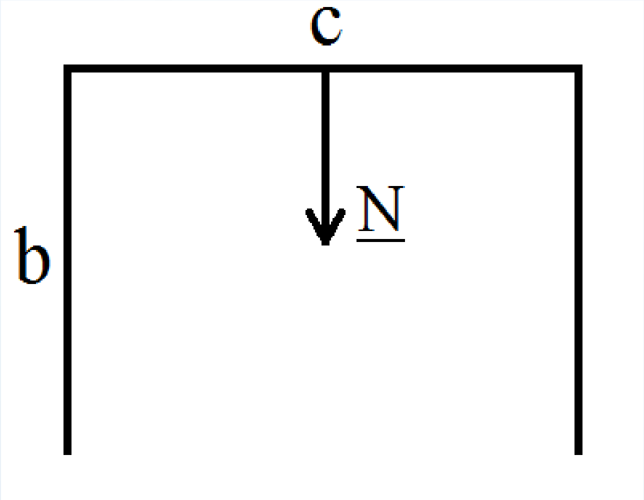
$$A_x = \frac{3\xi l N_0}{2u_2(3-\xi) - u_1(3-2\xi)} \tag{11}$$

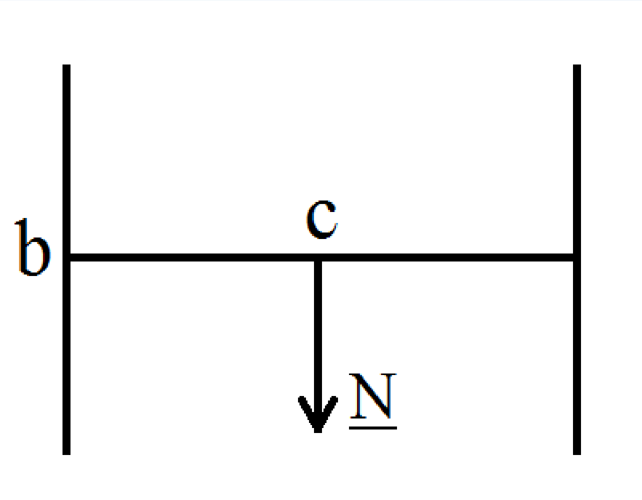
Перейдем от найденного модуля жесткости на поперечный сдвиг к коэффициенту сдвига:

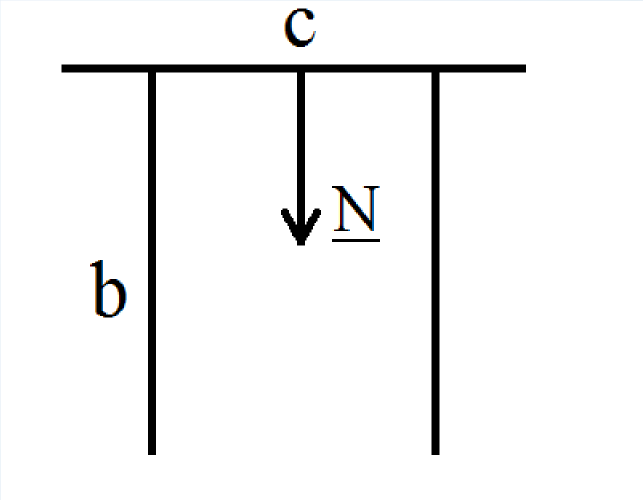
$$k = \frac{A_x}{GS} \tag{12}$$

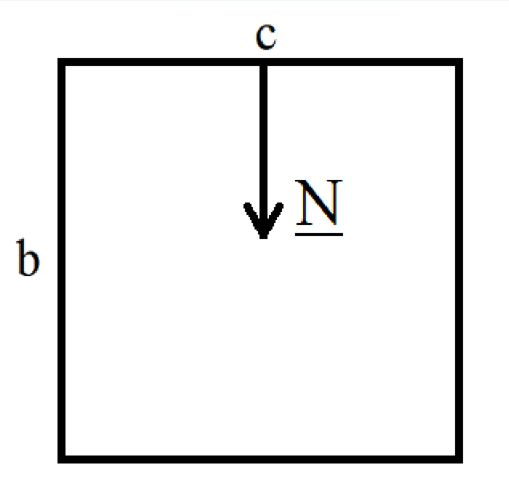
Здесь G — модуль сдвига, S — площадь поперечного сечения, $\xi = \frac{z}{l}$ — координата сечения.

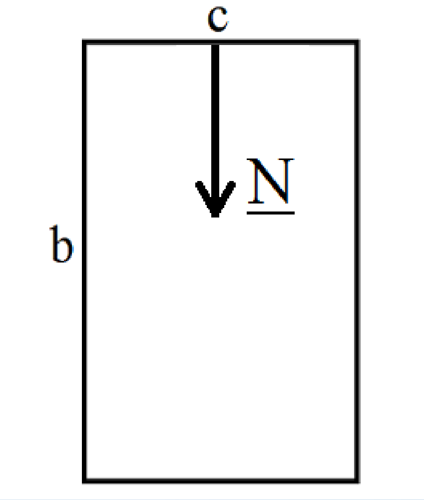
Исследуемые сечения



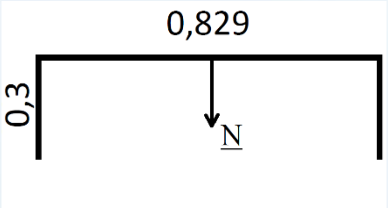
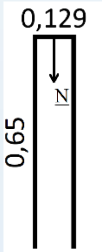
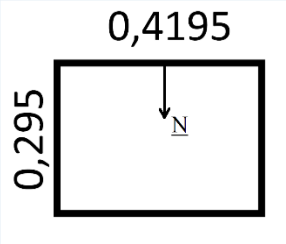
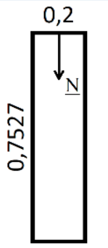




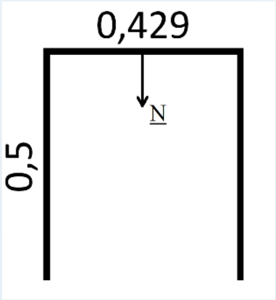
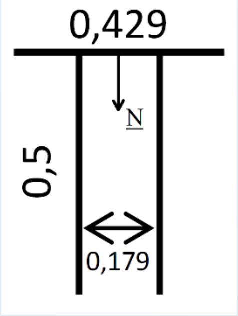




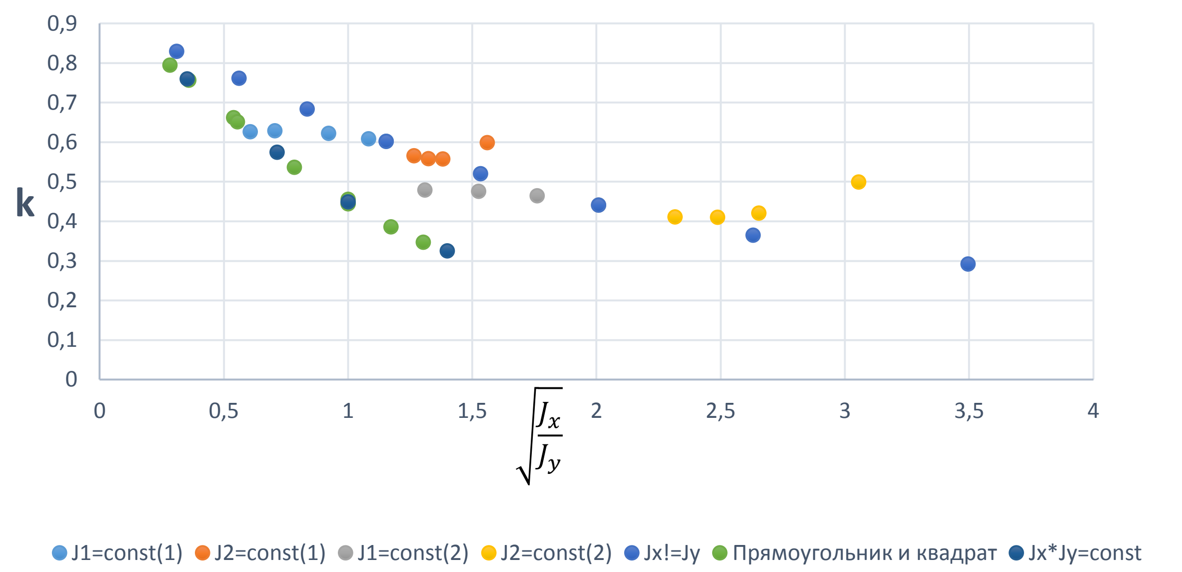
Результаты

Форма сечения	a, м	b, м	c, м	ξ, м	Коэф. сдвига
	0,02	0,3	0,829	0,4	0,3144
				0,6	0,2843
				0,9	0,2783
	0,02	0,65	0,129	0,4	0,8342
				0,6	0,8297
				0,9	0,8267
	0,02	0,295	0,4195	0,4	0,3583
				0,6	0,3473
				0,9	0,3360
	0,02	0,801	0,209	0,4	0,7649
				0,6	0,7610
				0,9	0,7547

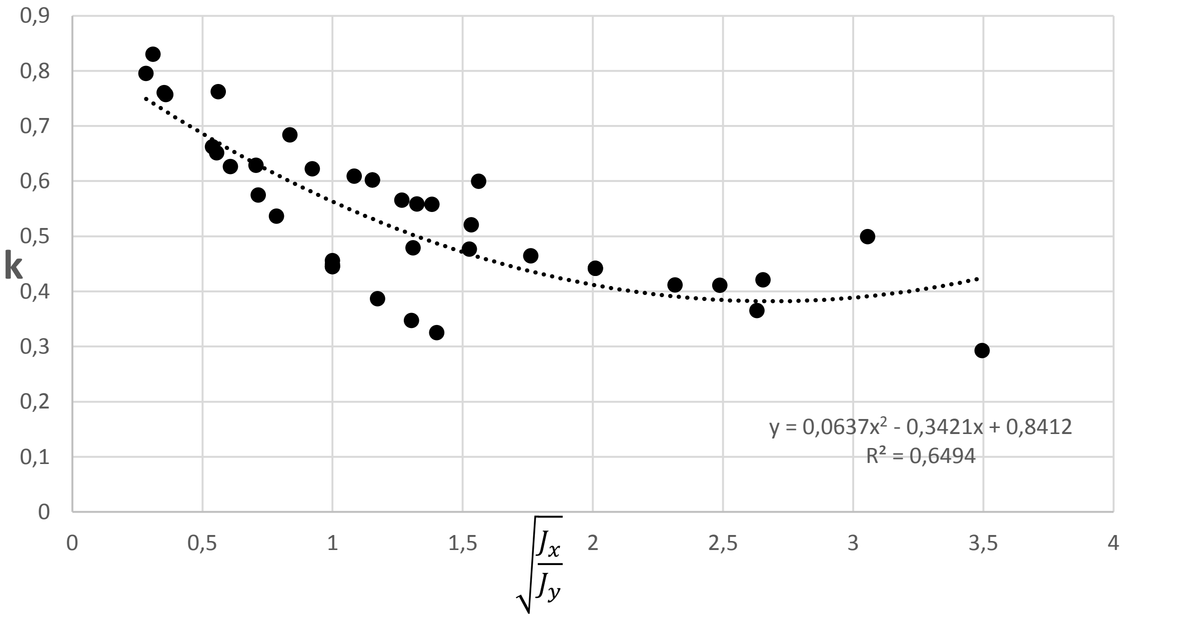
Результаты

<table>
<tr><th>Форма сечения</th><th>a, м</th><th>b, м</th><th>c, м</th><th>ξ, м</th><th>Коэф. сдвига</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">0,02</td><td rowspan="3">0,5</td><td rowspan="3">0,429</td><td>0,4</td><td>0,6124</td></tr>
<tr><td>0,6</td><td>0,6013</td></tr>
<tr><td>0,9</td><td>0,5927</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td colspan="3" rowspan="3">Боковые стены сместили внутрь на 0,125м каждую</td><td>0,4</td><td>0,6296</td></tr>
<tr><td>0,6</td><td>0,6254</td></tr>
<tr><td>0,9</td><td>0,6243</td></tr>
</table>

Результаты

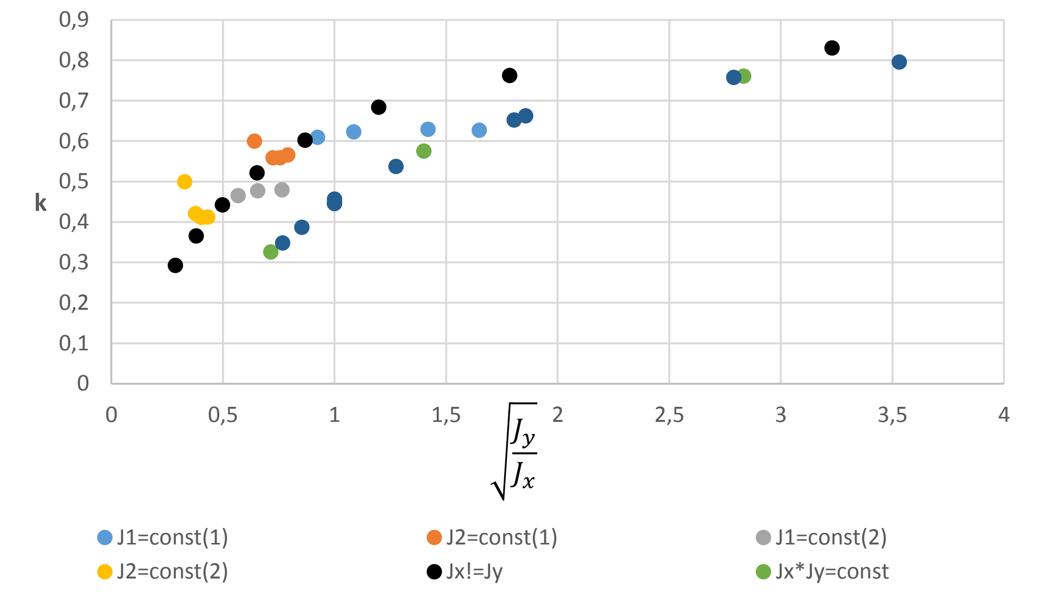


0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
k
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$
J1=const(1)
J2=const(1)
J1=const(2)
J2=const(2)
Jx!=Jy
Прямоугольник и квадрат
Jx*Jy=const

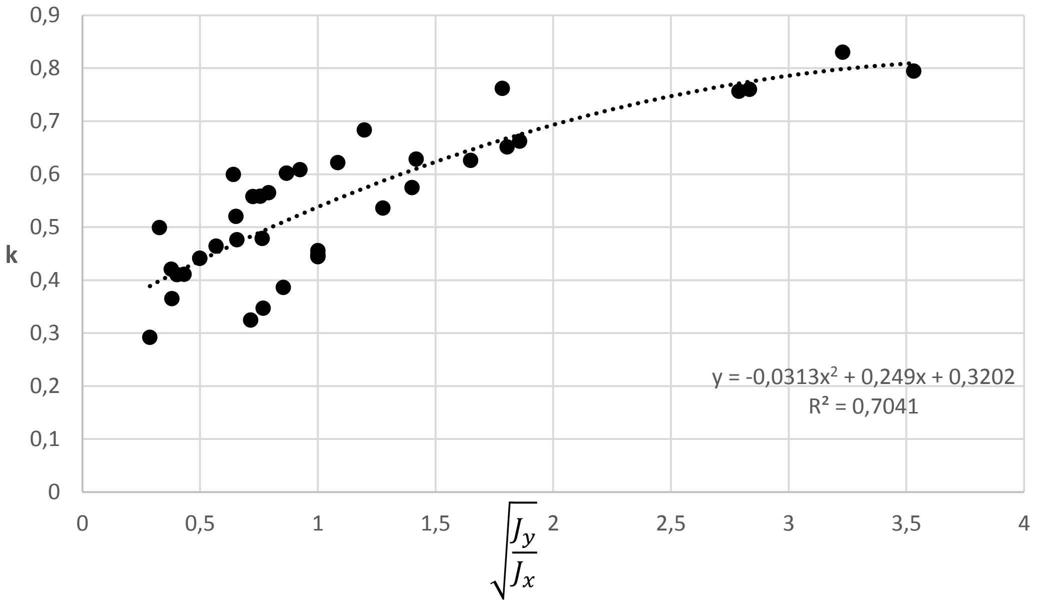


0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
k
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$
$y = 0{,}0637x^2 - 0{,}3421x + 0{,}8412$
$R^2 = 0{,}6494$

Результаты

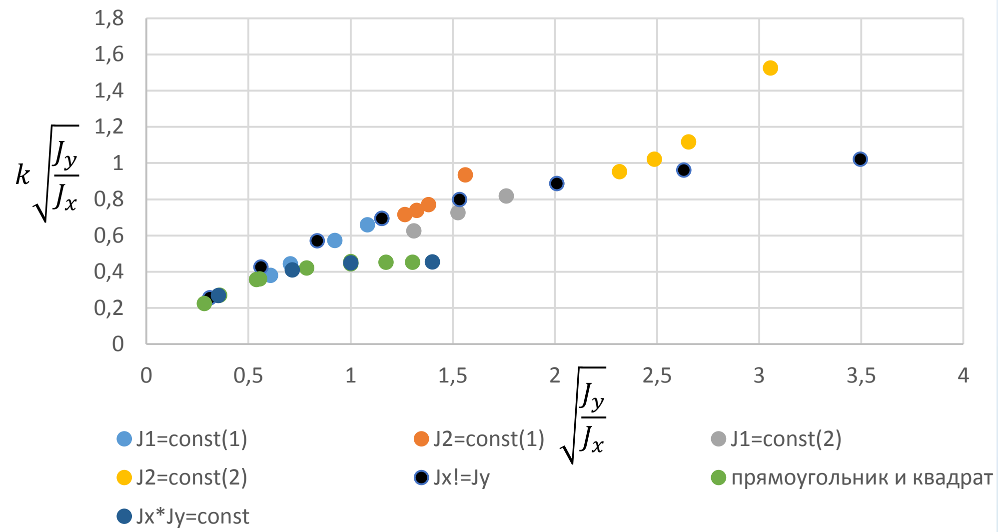


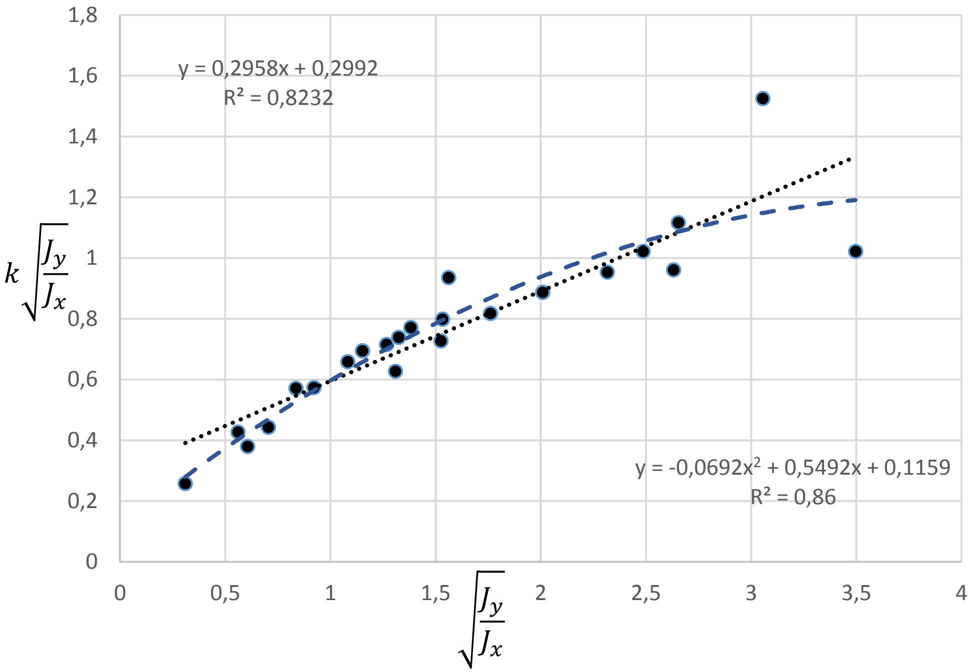
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
k
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\sqrt{\frac{J_y}{J_x}}$
J1=const(1)
J2=const(1)
J1=const(2)
J2=const(2)
Jx!=Jy
Jx*Jy=const



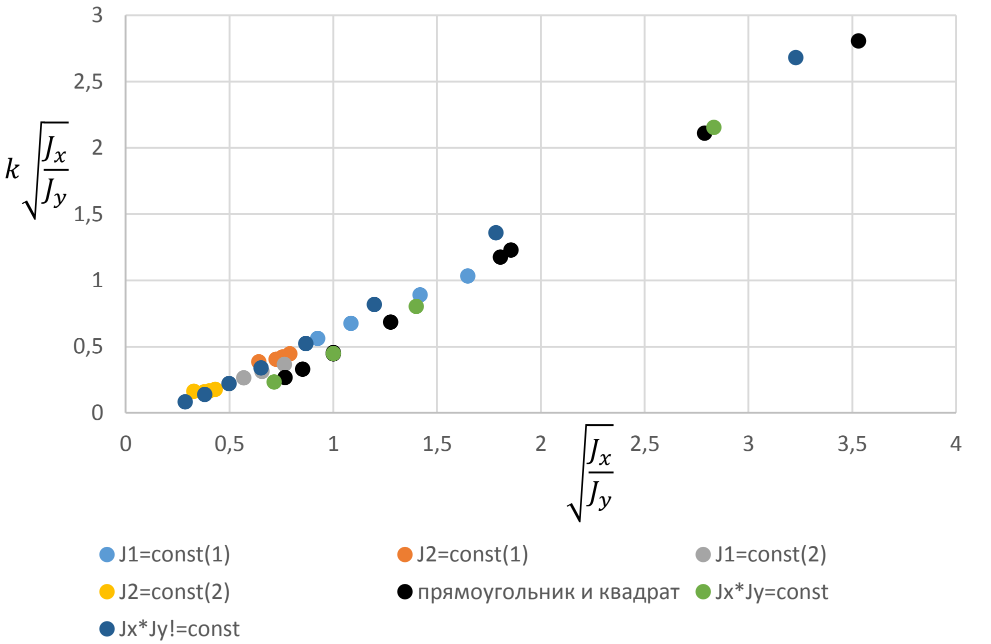
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
k
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$\sqrt{\frac{J_y}{J_x}}$
$y = -0,0313x^2 + 0,249x + 0,3202$
$R^2 = 0,7041$

Результаты

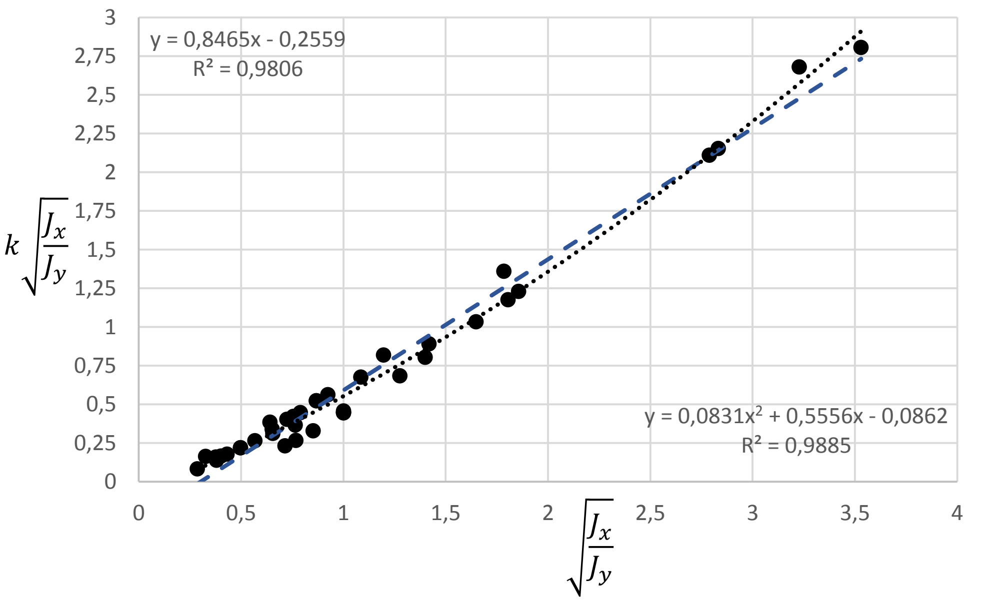

1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$k\sqrt{\frac{J_y}{J_x}}$
$\sqrt{\frac{J_y}{J_x}}$
J1=const(1)
J2=const(1)
J1=const(2)
J2=const(2)
Jx!=Jy
прямоугольник и квадрат
Jx*Jy=const


y = 0,2958x + 0,2992
R^2 = 0,8232
y = -0,0692x^2 + 0,5492x + 0,1159
R^2 = 0,86
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
$k\sqrt{\frac{J_y}{J_x}}$
$\sqrt{\frac{J_y}{J_x}}$

Результаты



$k\sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$
$\sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$
J1=const(1)
J2=const(1)
J1=const(2)
J2=const(2)
прямоугольник и квадрат
Jx*Jy=const
Jx*Jy!=const



y = 0,8465x - 0,2559
R² = 0,9806
y = 0,0831x² + 0,5556x - 0,0862
R² = 0,9885
$k\sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$
$\sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$

Результаты

Выпишем уравнение аппроксимирующей кривой:

$$y = 0.0831x^2 + 0.5556x - 0.0862 \tag{13}$$

Где $y = k\sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$, $x = \sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$, k — коэффициент сдвига.

$$k = 0.0831\sqrt{\frac{J_y}{J_x}} + 0.5556 - 0.0862\sqrt{\frac{J_x}{J_y}} \tag{14}$$

Результаты

Формула для коэффициента сдвига в случае не тонкостенных конструкций, когда $J_x \neq J_y$:

(Прокопенко А. " Исследование зависимости коэффициента сдвига от параметров сечения стержня):

$$k = 0.4566 + 0.0029\frac{S^4}{J_x J_y} - 0.067\frac{(J_x - J_y)S^2}{J_x J_y} + $$

$$+ 0.0831\sqrt{\frac{J_y}{J_x}} - 0.0862\sqrt{\frac{J_x}{J_y}} \qquad (15)$$

Сравнение задачи для балки Бернулли-Эйлера и Тимошенко

Решение для балки Бернулли-Эйлера:

$$u = \frac{N_0 z^2}{2EJ}\left(l - \frac{z}{3}\right) \qquad (16)$$

Решение для балки Тимошенко:

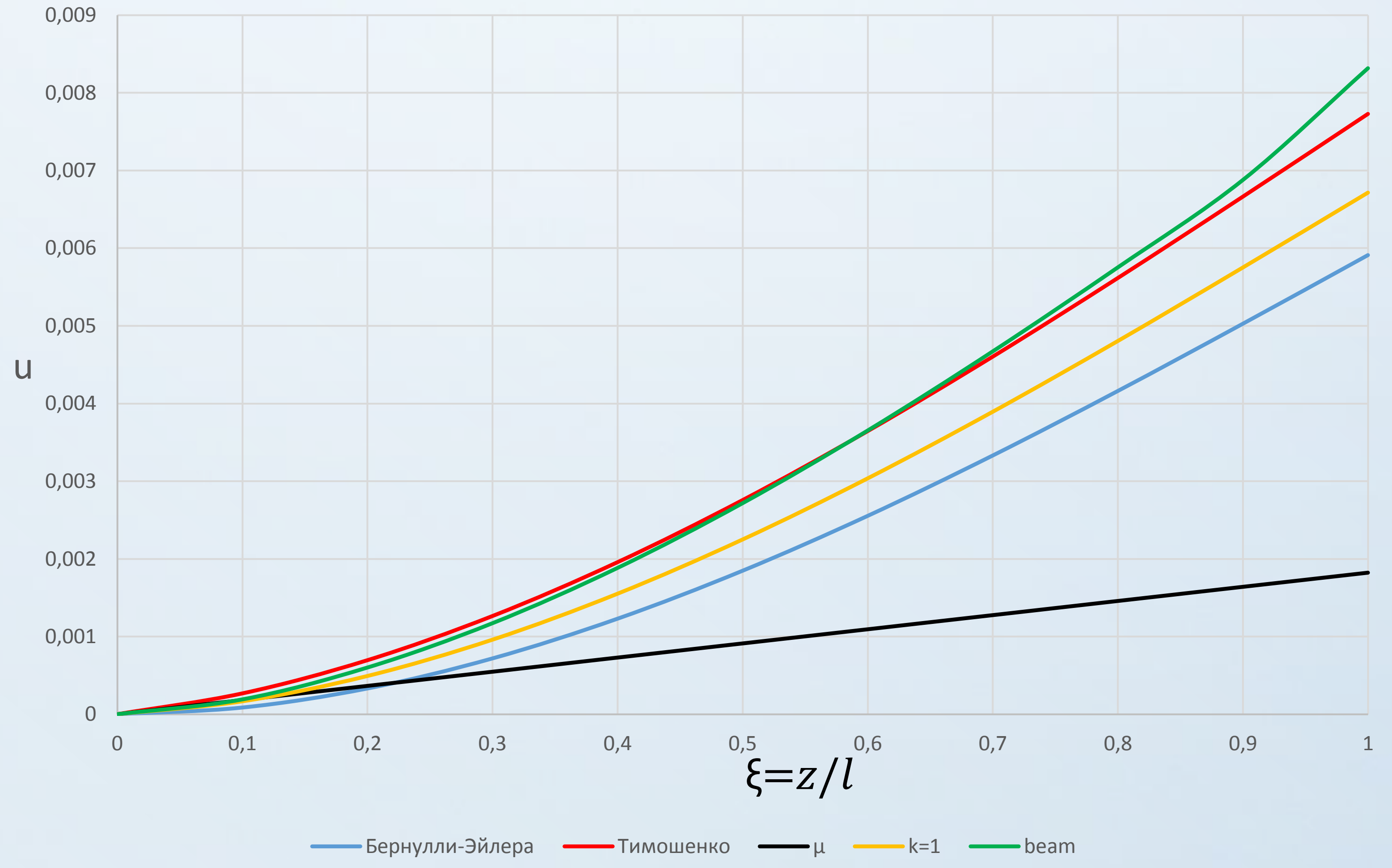
$$u = \frac{N_0}{A_x} z + \frac{N_0}{2C_y}\left(z^2 l - \frac{z^3}{3}\right) \qquad (17)$$

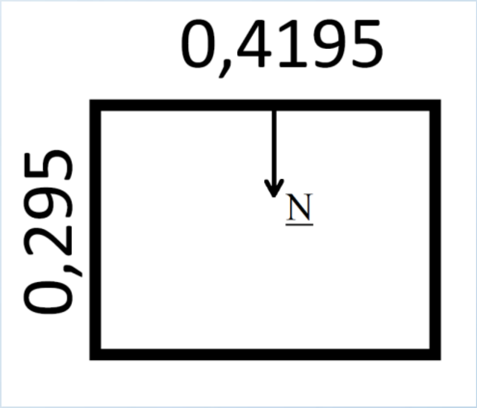
Отличие ищем в виде:

$$\mu = \frac{N_0}{A_x} z \qquad (18)$$

Сравнение задачи для балки Бернулли-Эйлера и Тимошенко

Зависимость решений для балки Бернулли-Эйлера, Тимошенко, а также погрешность этих решений μ, в зависимости от позиции сечения.





толщина a = 0.02,
$k_{cp} = 0,347$

Выводы

- В работе рассмотрен ряд сечений тонкостенного прямолинейного стержня и найдены корректирующие коэффициенты сдвига для них.
- К тому же, в случае на растяжение сделан вывод, что чем дальше по сечению от заделки находится координата сечения, тем меньше разница между известной и полученной формулами.
- Также удалось систематизировать данные и сделать вывод о влиянии формы сечения на коэффициент сдвига при поперечном сдвиге. А именно: при увеличении длин сторон сечения и уменьшения его ширины, коэффициент сдвига будет значительно увеличиваться, стремясь к 1.
- Кроме того, полученные результаты были нанесены на график, после чего стало очевидно, что точки можно довольно точно аппроксимировать кривой. С помощью уравнения этой кривой можно получить коэффициент сдвига, используя 2 момента инерции.

Спасибо за внимание!