ПОЛИТЕХ
Институт прикладной математики и механики

120

ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Е. Н. Вильчевская

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Е. Н. Вильчевская

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2019

УДК 539.3(075.8)
В46

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор,
директор Института проблем машиноведения Российской академии наук
А. К. Беляев
Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой «Теоретическая механика» Санкт-Петербургского
политехнического университета Петра Великого
А. М. Кривцов

Вильчевская Е. Н. **Тензорная алгебра и тезорный анализ** : учеб. пособие / Е. Н. Вильчевская. — СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. – 128 с.

Соответствует государственному образовательному стандарту и содержанию направления подготовки бакалавров, обучающихся по специальности 01.03.03 «Механика и математическое моделирование». Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по физико-математическим и техническим специальностям.

В учебном пособии на языке прямого (бескоординатного) тензорного исчисления, наиболее соответствующего потребностям современной механики, рассмотрены основы тензорной алгебры, теории тензорных функций и тензорного анализа. Представлена теория симметрии тензоров и тензорных функций. Приведены основные определения и теоремы тензорной алгебры и тензорного анализа, а также ряд полезных формул и тождеств, широко применяемых во многих курсах при изучении механических специальностей.

Табл. 1. Ил. 10. Библиогр.: 29 назв.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-6705-8
doi:10.18720/SPBPU/2/id19-193

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Историческими предшественниками тензоров были векторы, матрицы и системы с индексами, использовавшиеся в алгебре, геометрии, теории поверхностей, механике и других областях науки. Операции над системами с индексами были весьма громоздки и требовали развития нового математического аппарата. К середине XIX в. Дж. У. Гибс создал векторную алгебру с операциями сложения, скалярного и векторного умножения и векторный анализ — теорию дифференциального исчисления векторных полей. Вскоре Дж. Риччи обобщил векторное исчисление на системы с произвольным числом индексов. К середине XX века тензорное исчисление развилось в эффективный математический аппарат, широко используемый в различных областях науки: в механике, дифференциальной геометрии, электродинамике, теории относительности и многих других. Более подробное описание истории развития тензорного исчисления можно найти, например, в [3, 4].

В настоящее время существует два основных подхода к изложению теории тензоров: координатный и прямой. При координатном подходе под тензором понимается матрица, компоненты которой преобразуются при переходе от одного координатного базиса к другому по определенным формулам (см. например [3, 10, 19]). При прямом подходе тензор рассматривается как элемент линейного пространства, полученного специальным перемножением векторных пространств. В этом случае никакие координатные системы не привлекаются к рассмотрению, а сами тензоры не зависят от выбора системы координат.

От прямой записи тензора легко перейти к его координатному представлению, введя в пространство тензоров базис. Таким образом, с чисто математической точки зрения оба подхода эквивалентны. Тем не менее именно язык прямого тензорного исчисления наиболее адекватно отражает сущность основных понятий и представлений механики сплошных сред и поэтому хорошо приспособлен к задачам теории упругости, дина-

мики твердого тела, гидродинамики, теории пластичности и пр.

Теории тензоров посвящено большое число фундаментальных монографий и учебников (см. например [1, 3, 9, 18, 21]). Не ставя перед собой задачи представления подробного обзора литературы, упомянем только работы [7, 18, 20], знакомящие начинающих с основами тензорного исчисления; книгу [13], описывающую применение тензорных методов в аналитической и дифференциальной геометрии, а также в динамике твердого тела, гидродинамике и теории электромагнитного поля; книги [25, 26], в которых подробно описывается применение тензорного анализа в теории упругости и теории пластин и оболочек. Отдельного упоминания заслуживают приложения в книгах [11, 12], где на языке прямого тензорного исчисления приводятся основные определения и формулы тензорной алгебры и тензорного анализа, необходимые при изучении теории упругости; книга [4], включающая в себя изложение векторного и тензорного исчисления с приложениями к описанию движения тел, теории симметрии тензоров, тензорных функций, введение аксиальных объектов и многое другое; а также [16], где в доступной форме, простым и понятным языком излагаются основы тензорной алгебры и тензорного анализа, демонстрируются простота и компактность уравнений механики, получаемых с использованием прямого тензорного исчисления и обсуждается инвариантность тензорных соотношений.

Данное пособие базируется в первую очередь на материалах, представленных в [4, 7, 11, 12, 16]. В пособии рассмотрены основные положения тензорной алгебры, теории тензорных функций, тензорного анализа, представлена теория симметрии тензоров и тензорных функций. Большая часть материала, приведенного в пособии, излагается с точки зрения прямого тензорного исчисления, позволяющего избежать координатной записи при выводе и анализе основных уравнений механики сплошных сред, поскольку многоиндексная координатная запись зачастую делает формулы более громоздкими и затрудняет понимание рассматриваемых

явлений. Тем не менее иногда координатная форма записи бывает более удобна для проведения промежуточных выкладок при доказательстве тензорных соотношений. Тогда целесообразно использовать простейшую декартову систему координат, возвращаясь к инвариантной форме записи после получения конечного результата. Координаты также вводятся на конечной стадии постановки задачи, при этом выбор системы координат определяется особенностями конкретной задачи.

В большинстве классических работ по механике сплошных сред используют вмороженные в тело «материальные» координаты, позволяющие естественным образом связать изменение внутренней геометрии тела с его деформацией (см. [14, 22, 23]). Эти координаты порождают неортогональный базис, что, в свою очередь, влечет за собой необходимость введения взаимного базиса, ковариантных и контрвариантых компонент, символов Кристоффеля и т. п. Основные понятия и операции тензорной алгебры и тензорного анализа в неортогональном базисе будут рассмотрены в последнем разделе данного пособия.

Автор благодарит К. П. Фролову за помощь в подготовке пособия.

1. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Векторы и тензоры в трехмерном пространстве

1.1.1. Система отсчета и система координат. Полярные и аксиальные объекты

В соответствии с идеологией прямого тензорного исчисления понятие вектора и тензора любого ранга лишено всякого смысла вне системы отсчета. Система отсчета является в большей степени философским понятием, существование которого невозможно доказать, а можно только постулировать. Задание системы отсчета означает в частности построение модели абсолютного пространства, все точки которого параметризованы путем введения в данной системе отсчета трех независимых на-

правлений и масштаба длины. Классическая механика постулирует существование бесконечного числа равноправных систем отсчета, причем все физические законы должны быть инвариантны, т. е. неизменны относительно перехода от одной системы отсчета к другой. Кроме того, положение любой точки в данной системе отсчета можно задать тройкой чисел. Способ, посредством которого каждой точке системы отсчета ставится во взаимно однозначное соответствие тройка чисел, называется выбором системы координат. В выбранной системе отсчета можно ввести множество различных систем координат, каждая из которых является равноправной. Необходимо отчетливо осознавать различие между системой отсчета и системой координат. В частности, многие физические величины (скорость, ускорение, кинетическая энергия и др.) зависят от выбора системы отсчета, но ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат в данной системе отсчета.

В выбранной системе отсчета необходимо ввести дополнительное соглашение о том, какие повороты считать положительными, т. е. выбрать ориентацию пространства. Система отсчета называется *правоориентированной*, если положительным считается поворот против хода часовой стрелки, и *левоориентированной*, если положительным считается поворот по часовой стрелке.

Все физические объекты делятся на два типа по отношению к выбору ориентации в системе отсчета. Объекты, не зависящие от ориентации системы отсчета, называются *полярными*; объекты, которые умножаются на -1 при замене ориентации системы отсчета на противоположную, называются *аксиальными*. Например, температура, перемещения и трансляционная скорость являются полярными объектами. Аксиальные объекты обычно связаны с ориентацией тел в пространстве. Типичными примерами аксиальных объектов являются вектор поворота, угловые скорость и ускорение.

Отметим, что ориентация системы отсчета производится до выполнения каких-либо операций над объектами в данной системе отсчета и в дальнейшем никакие операции с объектами не меняют выбранной изначально ориентации. В частности, ориентация пространства сохраняется при зеркальных отражениях.

1.1.2. Скаляры или тензоры нулевого ранга

Определение. *Скаляром или тензором нулевого ранга* называется физическая величина, независящая от выбора системы координат и определяемая заданием одного вещественного числа.

Примерами скаляров в механике являются температура, плотность, энергия и т. п. Не все числа можно назвать скалярами. Например, координаты вектора скалярами не являются, поскольку они зависят от выбора системы координат. Следует отметить, что скалярные величины могут оставаться прежними или изменяться при замене системы отсчета. Например, температура, плотность и внутренняя энергия не меняются при переходе к другой системе отсчета, в то время, как кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета. Скаляры могут быть функциями точек системы отсчета, например распределение температуры в теле. В этом случае рассматривается скалярное поле.

Будем считать скаляры элементами множества вещественных чисел, $\mathcal{T}_0$, на котором введены операции сложения, умножения и деления по правилам элементарной арифметики. Будучи физическими величинами, скаляры имеют размерность. Складывать и вычитать можно только скалярные величины одного типа, имеющие одинаковые размерности. При этом делить и умножать можно скаляры разных размерностей.

1.1.3. Векторное пространство

Исходным элементом векторного пространства является вектор или тензор первого ранга, понимаемый как направленный отрезок и определяемый своей длиной и направлением. В качестве примера векторных

величин в механике можно привести перемещения, трансляционная и угловая скорости, вектор поворота. Нулевым вектором будем называть вектор, длина которого равна нулю. Очевидно, что направление нулевого вектора не имеет значения.

Введем на множестве векторов четыре закона композиции.

1. *Правило сложения векторов* однозначным образом ставит в соответствие каждым двум векторам одного типа третий вектор того же типа согласно правилу параллелограмма или треугольника. Легко устанавливаются следующие свойства операции сложения:

– коммутативность: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$;

– ассоциативность: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;

– существование нулевого вектора: $\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{o}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$;

– существование противоположного вектора: $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{o}$.

2. *Правило умножения вектора на скаляр.* Любому вектору $\mathbf{a}$ и скаляру α можно однозначным образом сопоставить вектор $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$, имеющий длину $|\alpha||\mathbf{a}|$ и направление, совпадающее с направлением $\mathbf{a}$, если $\alpha>0$, и противоположное, если $\alpha<0$. Принятое правило обладает следующими свойствами:

$$(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a};\quad \alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a};\quad \alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}.$$

Тип вектора сохраняется при умножении на полярный скаляр и меняется на противоположный при умножении на аксиальный скаляр.

Множество векторов с заданными на нем двумя законами композиции, удовлетворяющими перечисленным свойствам, называется *линейным векторным пространством.*

3. *Скалярное умножение векторов.* Скалярное умножение каждой паре векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ставит в соответствие скаляр $\alpha=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$ и обладает следующими свойствами:

– коммутативность: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$;

– дистрибутивность: $(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})+\beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$;

– положительная определенность: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geq 0$; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{a}=\mathbf{o}$.

Результатом скалярного умножения будет полярный скаляр, если участвующие в умножении векторы имеют одинаковый тип, и аксиальный скаляр, если типы векторов различны.

Нормой вектора называется его длина:

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}.$$

Множество векторов, на котором заданы три вышеперечисленных закона композиции называется *линейным нормированным пространством или Евклидовым пространством.*

Введем ряд терминов, связанных со скалярным произведением.

Два ненулевых вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равняется нулю.

Ортом (*направляющим вектором*) вектора $\mathbf{a}$ называется единичный вектор

$$\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|, \ (\|\mathbf{a}\| \neq 0).$$

Проекцией вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{b}$ называется вектор

$$\mathbf{a_b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{e}_b.$$

Часто проекцией вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ называют длину

$$\|\mathbf{a_b}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b).$$

4. *Векторное умножение векторов.* В отличие от предыдущих данный закон композиции имеет смысл только в ориентированной системе отсчета. Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ длина которого равна $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$, а направление ортогонально плоскости, натянутой на векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. В правоориентированной системе отсчета при взгляде с конца вектора $\mathbf{c}$ кратчайший поворот от первого сомножителя ко второму происходит против часовой стрелке, а в левоориентированной системе отсчета – по часовой стрелке. Тип вектора $\mathbf{c}$ зависит от типа векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если оба исходных вектора одинаковый

тип, то вектор $\mathbf{c}$ будет аксиальным вектором. Если же один из сомножителей полярный, а другой аксиальный, то вектор $\mathbf{c}$ будет полярным.

Свойства векторного произведения:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}; \qquad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Часто используются произведения трех векторов: смешанное и двойное векторное. Модуль смешанного произведения равняется объему параллелепипеда, построенного на данных векторах. Отметим, что смешанное произведение является аксиальным скаляром, если все входящие в него векторы относятся к одному типу или два из них аксиальны.

Напомним известные тождества:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}); \tag{1.1}$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Введенное множество направленных отрезков с вышеперечисленными законами композиции — векторное ориентированное пространство $\mathcal{T}_1$. В заключение отметим, что на векторном множестве не определена операция деления, поскольку она может быть определена только на тех множествах, где существует единственный единичный элемент. Векторное пространство таким не является, поскольку в нем имеется бесконечное количество различных по направлению единичных векторов.

1.1.4. Тензорное пространство

Скаляры и векторы являются лишь частью всего многообразия величин и понятий, необходимых современной науке. Тензоры более высоких рангов естественным образом возникают в механике, как обобщение векторных пространств. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из трех пружин с разной продольной жесткостью k_i (рис. 1). Придадим центру скрепления пружин смещение $\Delta\mathbf{r}$. Очевидно, что возвращающей силой будет сумма упругих сил, возникающих в пружинах:

$\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_i$ — орт, направленный вдоль i-й пружины, а величина силы F_i пропорциональна проекции смещения центра сцепления на соответствующий орт: $F_i = -k_i\mathbf{e}_i \cdot \Delta\mathbf{r}$. Таким образом, имеем $\mathbf{F} = -(k_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3)\cdot\Delta\mathbf{r} = -\mathbf{K}\cdot\Delta\mathbf{r}$, где тензор $\mathbf{K}$, являющийся суммой трех пар векторов, умноженных на соответствующие жесткости пружины, можно трактовать как тензорную жесткость системы пружин. Заметим, что при этом вышеупомянутые пары векторов выступают как единое целое, причем первый вектор в этой паре задает направление пружины, а второй — направление силы, которые в данной задаче совпадают. Чтобы сделать эту разницу более отчетливой, рассмотрим, как описывается напряженное состояние в деформируемом теле.

Рис. 1. Тензор жесткости системы пружин

Рассечем мысленно тело на две части поверхностью ΔS и рассмотрим одну из частей. Обозначим через $\mathbf{n}$ внешнюю нормаль к поверхности. На площадку ΔS со стороны отброшенной части действует сила $\Delta\mathbf{f}(\mathbf{n})$, которая зависит от ориентации площадки (рис. 2). Вектором напряжений в точке M, действующим на бесконечно малый элемент поверхности ΔS называется предел отношения

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = \lim_{d\to 0} \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta S},$$

где d — наибольший диаметр площадки.

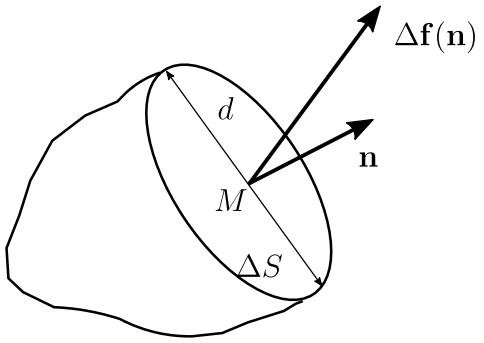

Рис. 2. Тензор напряжений

Таким образом, чтобы определить напряжения в точке M, необходимо задать ориентированную площадку, определяемую нормалью $\mathbf{n}$, и вектор напряжений, действующий на этой площадке. Таким образом, тензор напряжений есть упорядоченная пара векторов $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$, первый из которых задает площадку, а второй — действующую на этой площадке силу. Очевидно, что порядок следования сомножителей имеет принципиальное значение и не может быть изменен. Пары $\mathbf{n}\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}$ — различны. Для того, чтобы полностью описать напряженное состояние в точке M, необходимо задать векторы напряжений на всех площадках, проходящих через M. Таких площадок бесконечно много. Путем стандартных рассуждений, приведенных, например, в работе [17], можно показать, что напряженное состояние в точке полностью определено, если задана неупорядоченная совокупность трех упорядоченных пар векторов.

Формальное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, принадлежащих множеству $\mathcal{T}_1$ называется *диадой*. Отметим, что в литературе часто используется специальный знак для обозначения тензорного умножения $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, однако, в данном пособии он не будет использоваться. Термин «тензорное умножение» указывает на то, что данной операции присущи некоторые свойства обычной операции умножения.

Рассмотрим конечную сумму диад:

$$\mathbf{A} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{ef} + ...$$

Элементы $\mathbf{A}$ называются тензорами второго ранга, если выполнены условия эквивалентности (α — скаляр):

$$\mathbf{ab} + \mathbf{cd} = \mathbf{cd} + \mathbf{ab}; \quad \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac};$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}; \quad (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}).$$

Таким образом, тензором второго ранга является неупорядоченная совокупность упорядоченных диад.

Обозначим множество тензоров второго ранга, получаемое тензорным произведением трехмерных линейных пространств $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_1$ через $\mathcal{T}_2$. Введем на множестве $\mathcal{T}_2$ операции сложения и умножения на число, не выводящие за пределы множества:

$$\mathbf{A} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd}; \qquad \mathbf{B} = \mathbf{de} + \mathbf{gh};$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{ab} + \mathbf{cd} + \mathbf{de} + \mathbf{gh};$$
$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} + (\alpha\mathbf{c})\mathbf{d} = \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}) + \mathbf{c}(\alpha\mathbf{d}).$$

Введенное таким образом множество $\mathcal{T}_2$ является линейным пространством. Важным свойством линейного пространства является наличие нулевого и противоположного тензоров.

Нулевым тензором второго ранга называется тензор $\mathbf{0} = \mathbf{oo}$, где $\mathbf{o}$ — нулевой вектор. Представив нулевой вектор в виде $\mathbf{o} = 0\mathbf{a}$, получим альтернативные представления нулевого тензора:

$$\mathbf{0} = \mathbf{oa} = \mathbf{ao}.$$

Противоположным тензором называется тензор, суммирование с которым приводит к нулевому тензору.

$$\mathbf{\Pi} = (-1)\mathbf{A}.$$

Аналогичным образом вводятся тензоры более высокого ранга. Определим тензорное произведение k векторных пространств: $\mathcal{T}_k = \underbrace{\mathcal{T}_1\mathcal{T}_1\ldots\mathcal{T}_1}_{k}$.

Упорядоченную совокупность k векторов называют k-адой: $\mathbf{ab}$ — диада, $\mathbf{abc}$ — триада, $\mathbf{abcd}$ — тетрада и т. д.

Элементы множества $\mathcal{T}_k$, для которых выполняются соответствующие соотношения эквивалентности, называются тензорами k-го ранга и обозначаются ${}^k\mathbf{A}$. ${}^2\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}$ — тензор второго ранга.

Поскольку пространство тензоров k-го ранга $\mathcal{T}_k$ является линейным пространством, то в нем определены операции сложения и умножения на число:

$$\alpha({}^k\mathbf{A} + {}^k\mathbf{B}) = \alpha\,{}^k\mathbf{A} + \alpha\,{}^k\mathbf{B}.$$

Отметим, что сумма тензоров определена только для тензоров одного ранга.

1.1.5. Векторный и тензорный базисы. Координаты тензора

Трехмерность системы отсчета означает, что во введенном пространстве $\mathcal{T}_1$ существуют тройки линейно независимых векторов, но любые четыре вектора оказываются линейно зависимыми.

О п р е д е л е н и е. Любая тройка линейно независимых векторов называется *базисом*.

Следует заметить, что все операции над тензорами являются инвариантными и не зависят от выбранного базиса. Поэтому для простоты изложения выберем в качестве базиса три произвольно ориентированных ортогональных единичных вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$[1]:

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \tag{1.2}$$

где δ_{mn} — символ Кронекера. Базис, удовлетворяющий условию (1.2), называется *ортонормированным*.

Для любого вектора $\mathbf{a}$ существует единственный набор чисел a_1, a_2, $a_3 \in \mathcal{T}_0$, называемых координатами вектора в выбранном базисе:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 = a_i\mathbf{e}_i;\ \ a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i.$$

[1] Неортогональный базис будет рассмотрен в разделе 4.1.

Здесь и далее в соответствии с правилом Эйнштейна проводится суммирование по дважды повторяющимся индексам[2] от 1 до 3.

Скалярное умножение векторов $\mathbf{a} = a_m\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{b} = b_n\mathbf{e}_n$ в координатной форме имеет вид:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_m b_n \delta_{mn} = a_n b_n.$$

Упорядочим вектора базиса таким образом, чтобы они образовывали правую тройку векторов $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ и рассмотрим векторное произведение $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k. \tag{1.3}$$

где ε_{ijk} — символы Леви–Чивиты. Величины ε_{ijk} равны нулю, если в числе индексов ijk имеются повторяющиеся, равны 1 для последовательности индексов 123 и получающихся из нее круговой перестановкой последовательностей и, наконец, равны -1 при нарушении этого порядка, т. е. для последовательностей 132, 213 и 321.

Умножив соотношение (1.3) скалярно на $\mathbf{e}_n$, получим удобную формулу для определения символов Леви–Чивиты:

$$\varepsilon_{ijn} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_n. \tag{1.4}$$

Рассмотрим теперь тензорное умножение векторов. Любая диада $\mathbf{ab}$ может быть представлена в виде:

$$\mathbf{ab} = (a_m\mathbf{e}_m)(b_n\mathbf{e}_n) = a_m b_n \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n. \tag{1.5}$$

Представляя в аналогичной форме все диады, входящие в выражение тензора, получим, что всякий тензор второго ранга может быть представлен в виде следующего разложения:

$$\mathbf{A} = A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n, \qquad A_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n. \tag{1.6}$$

Комбинации $\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$ называются элементами тензорного базиса, а величины A_{mn} — координатами тензора относительно введенного тензорного

[2] Для неортогонального базиса данное правило будет модифицировано (см. раздел 4.1).

базиса. Таким образом, тензор второго ранга представим в виде суммы девяти диад.

Т е о р е м а. *Размерность пространства $\mathcal{T}_2$ равна 9, т.е. элементы тензорного базиса $\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$ линейно независимы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Линейная независимость элементов тензорного базиса означает, что равенство

$$\boldsymbol{\alpha}_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{1.7}$$

возможно тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\alpha}_{mn} = 0$. Умножив скалярно равенство (1.7) на $\mathbf{e}_k$, получим: $\boldsymbol{\alpha}_{mn}\mathbf{e}_m\delta_{nk} = \boldsymbol{\alpha}_{mk}\mathbf{e}_m = \mathbf{o},\ k = 1,\ 2,\ 3$. Таким образом, в силу линейной независимости элементов векторного базиса, следует, что $\boldsymbol{\alpha}_{mn} = 0$. Следовательно, в некотором фиксированном базисе тензор второго ранга полностью определяется матрицей его координат порядка 3×3. $\square$

У т в е р ж д е н и е. *Любой тензор второго ранга может быть представлен в виде суммы трех диад.*

Действительно, сгруппировав слагаемые в формуле (1.6), получим

$$\mathbf{A} = (A_{m1}\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_1 + (A_{m2}\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_2 + (A_{m3}\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{e}_3.$$

Отметим, что хотя любая диада является тензором второго ранга, произвольный тензор второго ранга может быть сведен к одной диаде только в исключительных случаях.

Тензор второго ранга может быть представлен в инвариантном виде, как элемент тензорного пространства: $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$, в диадном виде, как сумма диад: $\mathbf{A} = \mathbf{a}_m\mathbf{b}_m$ и в координатном виде путем разложения по элементам тензорного базиса: $\mathbf{A} = A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$.

По аналогии с формулой (1.5) может быть представлена любая k-ада:

$${}^k\mathbf{A} = A_{n_1n_2\ldots n_k}\mathbf{e}_{n_1}\mathbf{e}_{n_2}\ldots\mathbf{e}_{n_k}. \tag{1.8}$$

Элементы $\mathbf{e}_{n_1}\mathbf{e}_{n_2}\ldots\mathbf{e}_{n_k}$ образуют полибазис в пространстве $\mathcal{T}_k$, а числа $A_{n_in_2\ldots n_k}$ являются координатами тензора k-го ранга в данном полибази-

се. Порядок следования индексов у координат повторяет порядок следования индексов у базисных векторов в полибазисе.

Легко доказать, что размерность пространства $\mathcal{T}_k$ равна 3^k. Сгруппировав слагаемые в представлении (1.8), можно показать, что тензор k-го ранга может быть представлен в виде суммы 3^{k-1} k-ад: тензор третьего ранга — совокупность девяти триад, тензор четвертого ранга — совокупность двадцати семи тетрад и т. д.

$$^k\mathbf{A} = \sum_{n=1}^{3^{k-1}} \mathbf{a}_{n_1}\mathbf{a}_{n_2}\ldots\mathbf{a}_{n_k}.$$

В заключение отметим, что хотя тензор любого ранга полностью определяется его координатами в выбранном базисе, не следует отождествлять тензор с его координатами. Тензор — инвариантный объект, не связанный от выбора базиса в то время, как его координаты зависят от выбора базиса.

1.2. Действия над тензорами второго ранга

1.2.1. Симметричный и антисимметричный тензоры

Транспонированным тензором $\mathbf{A}^T$, называется тензор, в котором изменен порядок сомножителей во всех диадах:

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m)^T = \mathbf{b}_m\mathbf{a}_m.$$

Очевидно, что $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$ для любого тензора второго ранга.

Тензор второго ранга называется *симметричным*, если справедливо равенство $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, и *антисимметричным* (или *кососимметричным*), если он удовлетворяет равенству $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Произвольному тензору второго ранга $\mathbf{A}$ можно однозначным образом сопоставить симметричный тензор $\mathbf{A}^S$ по правилу:

$$\mathbf{A}^S = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right). \tag{1.9}$$

Тензор $\mathbf{A}^S$ называется симметричной частью $\mathbf{A}$, а операция (1.9) — симметрированием тензора $\mathbf{A}$.

Аналогично произвольному тензору $\mathbf{A}$ можно однозначно сопоставить антисимметричный тензор $\mathbf{A}^A$:

$$\mathbf{A}^A = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right).$$

Любой тензор второго ранга $\mathbf{A}$ допускает единственное представление в виде суммы его симметричной $\mathbf{A}^S$ и антисимметричной $\mathbf{A}^A$ частей: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A$.

1.2.2. Умножение тензоров

Представим тензоры $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в виде: $\mathbf{A} = \mathbf{a}_m\mathbf{b}_m,\ \mathbf{B} = \mathbf{d}_n\mathbf{f}_n$.

1. Скалярные умножения тензора на вектор:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}_m\left(\mathbf{b}_m\cdot\mathbf{c}\right); \qquad \mathbf{c}\cdot\mathbf{A} = \left(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}_m\right)\mathbf{b}_m.$$

Результат умножения — вектор.

Очевидно, что в общем случае в результате умножения тензора на вектор слева и справа получаются разные вектора. Справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{A} = (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}_m)\mathbf{b}_m = \mathbf{b}_m(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}_m) = (\mathbf{b}_m\,\mathbf{a}_m)\cdot\mathbf{c} = \mathbf{A}^T\cdot\mathbf{c}.$$

Отсюда следуют другие определения симметричного и антисимметричного тензоров.

Тензор второго ранга симметричен, если для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{A}$, и антисимметричен, если для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}$. Умножив это соотношение скалярно на $\mathbf{x}$, получим важное свойство антисимметричного тензора: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = 0$.

2. Векторные умножения тензора на вектор:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}_m \left(\mathbf{b}_m \times \mathbf{c}\right); \qquad \mathbf{c} \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m\right) \mathbf{b}_m.$$

Результат умножения — тензор второго ранга.

Справедливо следующее соотношение:

$$\left(\mathbf{c} \times \mathbf{A}\right)^T = -\mathbf{A}^T \times \mathbf{c}. \tag{1.10}$$

Для доказательства вычислим по отдельности левую и правую части равенства:

$$\left(\mathbf{c} \times \mathbf{A}\right)^T = \left((\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m)\mathbf{b}_m\right)^T = \mathbf{b}_m(\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m);$$

$$-\mathbf{A}^T \times \mathbf{c} = -\mathbf{b}_m(\mathbf{a}_m \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}_m(\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m).$$

3. Тензорные умножения тензора на вектор:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{a}_m\mathbf{b}_m\mathbf{c}; \qquad \mathbf{c}\mathbf{A} = \mathbf{c}\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m.$$

Результат умножения — тензор третьего ранга.

4. Внутреннее умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m) \cdot (\mathbf{d}_n\mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}_n)\mathbf{a}_m\mathbf{f}_n.$$

Результат умножения — тензор второго ранга.

В отличие от скалярного умножения векторов внутреннее умножение тензоров некоммутативно, т. е. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, так как:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}_n)\mathbf{a}_m\mathbf{f}_n; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{a}_m)\mathbf{d}_n\mathbf{b}_m.$$

Транспонирование внутреннего умножения тензоров:

$$\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right)^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T;$$

$$\left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\right)^T = \left(\mathbf{a}_m(\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}_n)\mathbf{f}_n\right)^T = \mathbf{f}_n(\mathbf{d}_n \cdot \mathbf{b}_m)\mathbf{a}_m = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.$$

5. Векторное умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \times (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = \mathbf{a}_m (\mathbf{b}_m \times \mathbf{d}_n) \mathbf{f}_n.$$

Результат умножения — тензор третьего ранга.

6. Тензорное умножение тензора на тензор:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{a}_m \mathbf{b}_m \mathbf{d}_n \mathbf{f}_n.$$

Результат умножения — тензор четвертого ранга.

7. Скалярное произведение тензоров:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \odot (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{d}_n)(\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{f}_n).$$

Результат умножения — скаляр. Часто скалярное произведение тензоров обозначается двумя вертикальными точками $\mathbf{A} : \mathbf{B}$.

Скалярное произведение тензоров коммутативно

$$\mathbf{B} \odot \mathbf{A} = (\mathbf{d}_n \cdot \mathbf{a}_m)(\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{b}_m) = (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{d}_n)(\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{f}_n) = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}$$

и положительно определено. Показать положительную определенность скалярного произведения тензоров легче всего на примере диады:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A} = (\mathbf{ab}) \odot (\mathbf{ab}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})$$

Данное выражение равно нулю только тогда, когда один из векторов диады обращается в ноль, при этом диада совпадает с нулевым элементом тензорного пространства.

8. Двойное внутреннее умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \cdot\cdot\, (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}_n)(\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{f}_n).$$

Результат умножения — скаляр. Двойное внутреннее умножение коммутативно: $\mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot\cdot\, \mathbf{A}$, что следует из коммутативности скалярного умножения векторов, однако в отличие от скалярного произведения тензоров $\mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$ может равняться нулю, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны.

Двойное внутреннее умножение тензоров связано со скалярным умножением следующими соотношениями:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T \cdot\cdot \mathbf{B}.$$

Легко показать, что

$$\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \cdot\cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T \cdot\cdot \mathbf{A}^T.$$

Рассмотрим теперь двойное внутреннее умножение симметричного $\mathbf{S}$ и антисимметричного $\mathbf{A}$ тензоров:

$$\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{S} = \mathbf{A}^T \cdot\cdot \mathbf{S}^T = -\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{S}.$$

Поскольку число может равняться своему противоположному числу только если оно равно нулю, приходим к тождеству:

$$\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{S} = 0.$$

Из этого следует, что при разложении тензоров на симметричную и антисимметричную части:

$$\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^S \cdot\cdot \mathbf{B}^S + \mathbf{A}^A \cdot\cdot \mathbf{B}^A.$$

Пусть один из тензоров в двойном внутреннем умножении является результатом внутреннего умножения двух других тензоров. Непосредственной проверкой можно доказать, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathbf{A} \cdot\cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot\cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot\cdot \mathbf{B}.$$

Скалярное и двойное внутреннее умножения тензоров также могут быть использованы в качестве альтернативной записи скалярных умножений тензора на вектора слева и справа:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{A} \cdot\cdot (\mathbf{d}\mathbf{c}) = \mathbf{A} \odot (\mathbf{c}\mathbf{d}).$$

9. Двойное векторное умножение тензоров:

$$\mathbf{A} \times\times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \mathbf{b}_m) \times\times (\mathbf{d}_n \mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \times \mathbf{d}_n)(\mathbf{a}_m \times \mathbf{f}_n).$$

Результат умножения — тензор второго ранга.

Заметим, что в данных обозначениях на первое место ставится результат векторного умножения ближайших векторов, а на второе — дальних. Операцию двойного векторного умножения можно ввести иначе. Например, можно считать, что, аналогично скалярному произведению тензоров, первый знак относится к первым векторам в диадах, а второй – ко вторым:

$$\mathbf{A} \overset{\times}{\times} \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m \times \mathbf{d}_n)(\mathbf{b}_m \times \mathbf{f}_n).$$

Легко проверить, что:

$$\mathbf{A} \overset{\times}{\times} \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \times\times \mathbf{B}.$$

Аналогично двойному внутреннему умножению тензоров, двойное векторное умножение является альтернативной формой записи векторному умножению тензора на вектор справа и слева:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{A} \times \mathbf{d} = -(\mathbf{dc}) \times\times \mathbf{A}.$$

Появляющийся здесь знак минус связан с перестановкой сомножителей в векторном умножении векторов.

Отметим также, что справедлива формула, аналогичная (1.1):

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{d} \times \mathbf{A}) = \mathbf{d}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})\mathbf{A}.$$

Но в случае другой последовательности умножения результат будет отличаться:

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times \mathbf{A} = (-\mathbf{a}_m \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}))\mathbf{b}_m =$$
$$= (-\mathbf{c}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}_m) + \mathbf{d}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}_m))\mathbf{b}_m = (\mathbf{dc} - \mathbf{cd}) \cdot \mathbf{A} = -2(\mathbf{cd})^A \cdot \mathbf{A}.$$

9. Смешанное умножение тензоров:

Существует два типа смешанного умножения тензоров: скалярно-векторное

$$\mathbf{A} \cdot\times \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m) \cdot\times (\mathbf{d}_n\mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{d}_n)(\mathbf{a}_m \times \mathbf{f}_n)$$

и векторно-скалярное

$$\mathbf{A} \times\cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m) \times\cdot (\mathbf{d}_n\mathbf{f}_n) = (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{b}_m \times \mathbf{d}_n).$$

В обоих случаях результат умножения — вектор.

Легко получить связи между этими типами умножений:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \cdot\times \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \times\cdot \mathbf{B}^T; \\ &\mathbf{A}^T \cdot\times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times\cdot \mathbf{B}^T; \\ &\mathbf{A} \cdot\times \mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T \times\cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{d} = -\mathbf{A} \cdot\times(\mathbf{dc}) = (\mathbf{dc}) \times\cdot \mathbf{A};$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{d} = \mathbf{A} \times\cdot(\mathbf{dc}) = -(\mathbf{dc}) \cdot\times \mathbf{A}.$$

Также как и с двойными скалярными и векторными умножениями, здесь можно ввести альтернативные правила смешанных умножений тензоров:

$$\mathbf{A} \overset{\times}{\cdot} \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m) \overset{\times}{\cdot} (\mathbf{d}_n\mathbf{f}_n) = (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{f}_n)(\mathbf{a}_m \times \mathbf{d}_n) = \mathbf{A} \cdot\times \mathbf{B}^T;$$

$$\mathbf{A} \overset{\cdot}{\times} \mathbf{B} = (\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m) \overset{\cdot}{\times} (\mathbf{d}_n\mathbf{f}_n) = (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{d}_n)(\mathbf{b}_m \times \mathbf{f}_n) = \mathbf{A} \times\cdot \mathbf{B}^T.$$

1.2.3. Единичный тензор и тензор Леви–Чивиты

О п р е д е л е н и е. Тензор второго ранга, соответствующий тождественному преобразованию в евклидовом векторном пространстве, называется *единичным.*

То есть для любого вектора $\mathbf{x}$ справедливо равенство:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{x}.$$

В ортонормированном базисе

$$\mathbf{x} = x_n \mathbf{e}_n = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{e}_n \mathbf{e}_n) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Аналогично проверяется, что

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{X}$$

для любого тензора $\mathbf{X}$.

Ниже приводится сводка основных формул, связанных с различными типами умножения на единичный тензор.

1. $\mathbf{E} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{E}$.

Для доказательства умножим разность между левой и правой частями скалярно на произвольный вектор $\mathbf{x}$:

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{e}_k \, (\mathbf{e}_k \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{x} - \mathbf{c} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} =$$
$$= (\mathbf{c} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k - \mathbf{c} \times \mathbf{x} = \mathbf{o}.$$

Поскольку это соотношение должно выполняться для любого $\mathbf{x}$, то, следовательно, операции векторного умножения единичного тензора на вектор слева и справа коммутативны.

2. $(\mathbf{c} \times \mathbf{E})^T = -\mathbf{c} \times \mathbf{E}$.

Воспользуемся соотношением (1.10):

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{E})^T = -\mathbf{E}^T \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \mathbf{E}.$$

Таким образом, $\mathbf{c} \times \mathbf{E}$ является антисимметричным тензором.

3. $\mathbf{c} \times \mathbf{E} \times \mathbf{d} = \mathbf{dc} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})\mathbf{E}$.

Докажем вначале формулу, полезную при упрощении связанных с двойным векторным произведением выражений:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) = \\ = \mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{e}_n \times (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)) = \mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_j) - \mathbf{e}_j(\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_i)) = \\ = \delta_{nj}\,\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_i - \delta_{ni}\,\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{in}\delta_{jm}.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Здесь при вычислениях мы вначале воспользовались представлением символа Леви–Чивиты (1.4), а затем свойствами смешанного и двойного векторного произведения.

Запишем теперь выражение $\mathbf{c} \times \mathbf{E} \times \mathbf{d}$ в координатной форме:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{E} \times \mathbf{d} = (c_j\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k \times d_m\mathbf{e}_m) = c_j d_m \varepsilon_{jki}\varepsilon_{kmn}\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_n.$$

Сделаем циклические перестановки в символах Леви–Чивиты и воспользуемся формулой (1.12):

$$\begin{gathered}\mathbf{c} \times \mathbf{E} \times \mathbf{d} = c_j d_m\,\mathbf{e}_i\mathbf{e}_n(\delta_{mi}\delta_{nj} - \delta_{in}\delta_{jm}) = \\ = d_m\mathbf{e}_m\,c_j\mathbf{e}_j - c_j d_j\,\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n = \mathbf{dc} - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{c})\mathbf{E}.\end{gathered}$$

4. $(\mathbf{E} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{A}$.

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{c} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{A}.$$

5. $\mathbf{E} \times\times\mathbf{E} = 2\mathbf{E}$.

$$\begin{gathered}\mathbf{E} \times\times\mathbf{E} = (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s) = \\ = -\mathbf{e}_k \times \mathbf{E} \times \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k\mathbf{E} = -\mathbf{E} + 3\mathbf{E} = 2\mathbf{E}.\end{gathered}$$

Тензор Леви–Чивиты — тензор третьего ранга — вводится соотношением:

$${}^3\mathbf{L} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}. \tag{1.13}$$

Запишем тензор Леви–Чивиты в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$:

$${}^3\mathbf{L} = -\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_s)\mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_k(\varepsilon_{ksm}\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_s = \varepsilon_{kms}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_s.$$

Таким образом, компонентами данного тензора в полибазисе $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_s$ являются символы Леви–Чивиты. Этот тензор позволяет по-новому взглянуть на векторное произведение

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})\times(\mathbf{E}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{b}.$$

Из этого следует, что

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{a}\cdot{}^3\mathbf{L}\cdot\mathbf{b}.$$

Таким образом, тензор Леви–Чивиты позволяет заменить операцию векторного умножения двумя операциями скалярного умножения.

Формулу (1.13) можно записать в другом виде:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=a_k\mathbf{e}_k\times b_m\mathbf{e}_m=a_kb_m\varepsilon_{kms}\mathbf{e}_s=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)(\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_m)\varepsilon_{kms}\mathbf{e}_s=$$
$$=\mathbf{ba}\cdot\cdot\,\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_s\varepsilon_{kms}=\mathbf{ba}\cdot\cdot\,{}^3\mathbf{L}$$

или

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\mathbf{ba}\cdot\cdot\,\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m)\mathbf{e}_s\varepsilon_{kms}=\varepsilon_{kms}\mathbf{e}_s(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\cdot\cdot\,\mathbf{ba})=$$
$$=\varepsilon_{skm}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\cdot\cdot\,\mathbf{ba}=\,{}^3\mathbf{L}\cdot\cdot\,\mathbf{ba}.$$

Подобные комбинации возможны также и с тензорами:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{B}=a_kB_{mn}\varepsilon_{kms}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_n=\varepsilon_{kms}\mathbf{e}_s(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_m\cdot\mathbf{B})=$$
$$=-\varepsilon_{smk}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k\cdot\cdot\,\mathbf{aB}=-{}^3\mathbf{L}\cdot\cdot\,\mathbf{aB}.$$

1.2.4. След тензора второго ранга

О п р е д е л е н и е. *Следом тензора* $\mathbf{A}=\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m$, называется скаляр $\operatorname{tr}\mathbf{A}$, вычисляемый по правилу:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}=\mathbf{a}_m\cdot\mathbf{b}_m.$$

Справедливы соотношения:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\operatorname{tr}\mathbf{A}+\operatorname{tr}\mathbf{B},\qquad\operatorname{tr}(\alpha\mathbf{A})=\alpha\operatorname{tr}\mathbf{A}.$$

Таким образом, след тензора является линейной операцией, переводящей пространство $\mathcal{T}_2$ в $\mathcal{T}_0$.

След тензора также может быть записан в инвариантной форме через двойную свертку с единичным тензором:

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{E} = \mathbf{A} \odot \mathbf{E}.$$

Действительно,

$$\mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{E} = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_k.$$

Координатное представление

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \cdot\cdot \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k = A_{mn}\delta_{mk}\delta_{nk} = A_{kk},$$

т. е. след тензора второго ранга равен сумме диагональных элементов матрицы координат тензора.

Из коммутативности скалярного произведения следует, что

$$\operatorname{tr}\mathbf{A} = \operatorname{tr}\mathbf{A}^T; \qquad \operatorname{tr}\mathbf{A}^A = 0.$$

Также справедливы следующие цепочки формул для следа склярного произведения тензоров:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T) = \mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \odot \mathbf{B}^T;$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot\cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot\cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot\cdot \mathbf{B}.$$

Из соотношения $\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot\cdot \mathbf{B}$ следует, что след внутреннего умножения симметричного и антисимметричного тензоров равен нулю.

В заключение раздела приведем ряд формул со следом от векторных произведений тензора и вектора:

1. $\operatorname{tr}(\mathbf{A} \times \mathbf{c}) = \operatorname{tr}(\mathbf{c} \times \mathbf{A})$;
   $\operatorname{tr}(\mathbf{A} \times \mathbf{c}) = \operatorname{tr}(\mathbf{a}_m\mathbf{b}_m \times \mathbf{c}) = \mathbf{a}_m \cdot (\mathbf{b}_m \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}_m \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m)$;
   $\operatorname{tr}(\mathbf{c} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m) \cdot \mathbf{b}_m = \mathbf{b}_m \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m)$.
2. $\operatorname{tr}(\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{b}) = \operatorname{tr}(\mathbf{b}\mathbf{a} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{E}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - 3\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = -2\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.
3. $\operatorname{tr}\ (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{C})) = \operatorname{tr}(\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \operatorname{tr}\mathbf{C}$.

1.2.5. Векторный инвариант. Сопутствующий вектор

О п р е д е л е н и е. *Векторным инвариантом тензора* $\mathbf{A} = \mathbf{a}_m \mathbf{b}_m$ называется вектор $\mathbf{A}_\times$, вычисляемый по правилу:

$$\mathbf{A}_\times = \mathbf{a}_m \times \mathbf{b}_m.$$

Векторный инвариант, как и след, является линейной операцией:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_\times = \mathbf{A}_\times + \mathbf{B}_\times; \qquad (\alpha\, \mathbf{A})_\times = \alpha\, \mathbf{A}_\times.$$

Из свойства векторного умножения следует, что векторный инвариант симметричного тензора равняется нулю, т. е. $\mathbf{A}_\times = \left(\mathbf{A}^A\right)_\times$.

Для получения инвариантной формы записи векторного инварианта запишем следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{A}_\times = \mathbf{a}_m \times \mathbf{b}_m = (\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{E}) \times \mathbf{b}_m = \mathbf{E} \times\cdot\, \mathbf{b}_m \mathbf{a}_m = \mathbf{E} \times\cdot\, \mathbf{A}^T = -\mathbf{E} \times\cdot\, \mathbf{A},$$

где $\mathbf{A}$ — антисимметричный тензор, или в другой форме:

$$\mathbf{A}_\times = \mathbf{a}_m \times (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}_m) = \mathbf{b}_m \mathbf{a}_m \times\cdot\, \mathbf{E} = -\mathbf{A} \times\cdot\, \mathbf{E}.$$

Воспользовавшись соотношениями (1.11), можно получить другие инвариантные формы записи векторного инварианта:

$$\mathbf{A}_\times = \mathbf{A} \cdot\times\, \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot\times \mathbf{A}.$$

Также векторный инвариант может быть записан с использованием тензора Леви–Чивиты:

$$\mathbf{A}_\times = {}^3\mathbf{L} \odot \mathbf{A}.$$

Наконец, в координатной форме: $\mathbf{A}_\times = A_{mn} \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n = A_{mn} \varepsilon_{mnk} \mathbf{e}_k$.

Приведем также часто встречающиеся формулы для векторного инварианта векторного умножения тензора и вектора:

1. $(\mathbf{c} \times \mathbf{E})_\times = (\mathbf{c} \times \mathbf{e}_k) \times \mathbf{e}_k = -\left(\mathbf{c}\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_k \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_k\right) = -3\mathbf{c} + \mathbf{c} = -2\mathbf{c}$;
2. $(\mathbf{c} \times \mathbf{A})_\times = -\mathbf{b}_m \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}_m) = -\mathbf{c}\,(\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{b}_m) + \mathbf{a}_m (\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{c}) =$
$= -\mathbf{c}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}$.

Т е о р е м а. *Для любого антисимметричного тензора* $\mathbf{A}$ *найдется такой вектор* $\boldsymbol{\omega}$, *что тензор* $\mathbf{A}$ *можно представить в виде:*

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.14}$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ *называется сопутствующим вектором тензора* $\mathbf{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного вектора $\mathbf{x}$ и антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ верно равенство: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$. Обозначив $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{y}$, из соотношения $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0$, получим, что $\mathbf{y} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, где вектор $\boldsymbol{\omega}$ произволен. Таким образом, верно равенство: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$.

Взяв в качестве $\mathbf{x}$ базисные векторы и, просуммировав получившиеся соотношения, придем к (1.14). $\square$

Для нахождения сопутствующего вектора по исходному тензору $\mathbf{A}$ вычислим векторные инварианты от обеих частей равенства (1.14)

$$\mathbf{A}_\times = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E})_\times = -2\boldsymbol{\omega}.$$

Из этого следует, что

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\mathbf{A}_\times = \frac{1}{2}\mathbf{A} \times \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{2}\,{}^3\mathbf{L} \odot \mathbf{A}.$$

Эта формула устанавливает связь между векторным инвариантом тензора и его сопутствующим вектором.

1.2.6. Линейные отображения

Альтернативой представлению тензора второго ранга в виде неупорядоченной суммы диад является интерпретация тензора второго ранга как линейного оператора в евклидовом векторном пространстве.

Рассмотрим векторную функцию векторного аргумента $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, переводящую $\mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$. Отображение называется линейным, если

$$\mathbf{f}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \text{где } \alpha, \beta \text{ — числа.}$$

Т е о р е м а. *Любое линейное отображение представимо в виде*

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{A}$ *— тензор второго ранга, называемый тензором линейного отображения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линейное отображение $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ в базисе $\mathbf{e}_k$: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x_k\mathbf{e}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{e}_k)x_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$;
$\mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3$. Поскольку $\mathbf{A}$ — сумма трех диад, то это тензор второго ранга. □

Тензор линейного отображения полностью определен, если заданы его значения на трех линейно независимых векторах, например на базисных векторах $\mathbf{e}_k$: $\mathbf{y}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k$, $(k = 1, 2, 3)$. Умножая обе части этого равенства тензорно на $\mathbf{e}_k$ и суммируя все три получившихся соотношения, получим: $\mathbf{y}_k\mathbf{e}_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k = \mathbf{A}$.

Для однозначной обратимости линейного отображения (1.15) необходимо и достаточно, чтобы тензор линейного отображения был однозначно определен, т. е. векторы $\mathbf{y}_k$ должны быть линейно независимы. Другими словами, линейный оператор $\mathbf{A}$ должен переводить пространство $\mathcal{T}_1$ в трехмерное векторное пространство.

1.2.7. Определитель тензора

Пусть $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — линейно независимая тройка векторов. Обозначим линейные отображения исходных векторов через $\mathbf{a}'_k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_k$.

Линейная независимость исходных векторов эквивалентна условию $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 \neq 0$.

О п р е д е л е н и е. *Определителем тензора* называется отношение

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{a}'_1 \times \mathbf{a}'_2) \cdot \mathbf{a}'_3}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3}. \tag{1.16}$$

Определение (1.16) имеет простой геометрический смысл. Вспомнив, что смешанное произведение с точностью до знака равняется объему построенного на перемножаемых векторах параллелепипеда V, получим, что

определитель тензора $\det \mathbf{A} = \pm V'/V$ определяет отношение объемов деформированного параллелепипеда и исходного.

Равенство определителя нулю означает, что тензор линейного отображения $\mathbf{A}$ понижает размерность пространства $\mathcal{T}_1$, переводя любой вектор из $\mathcal{T}_1$ в одну плоскость или одну прямую.

О п р е д е л е н и е. Тензор второго ранга, определитель которого не равен нулю, называется *неособым* или *невырожденным.*

Важно, что значение определителя не зависит от выбора исходных векторов. Действительно, для произвольных линейно независимых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

$$(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}' = (A_{mn} a_n \mathbf{e}_m \times A_{kl} b_l \mathbf{e}_k) \cdot A_{pt} c_t \mathbf{e}_p = A_{mn} A_{kl} A_{pt} a_n b_l c_t \varepsilon_{mkp}.$$

Поскольку

$$A_{m1} A_{k2} A_{p3} \varepsilon_{mkp} = A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) + A_{21}(A_{32}A_{13} - A_{12}A_{33}) + \\ + A_{31}(A_{12}A_{23} - A_{23}A_{13}) = \det(A_{ij}),$$

где $\det(A_{ij})$ — определитель матрицы координат тензора $\mathbf{A}$ то

$$A_{mn} A_{kl} A_{pt} \varepsilon_{mkp} = \det(A_{ij}) \varepsilon_{nlt}.$$

Следовательно

$$\det \mathbf{A} = \frac{\det(A_{ij}) a_n b_l c_t \varepsilon_{nlt}}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} = \det(A_{ij}).$$

Таким образом, определитель тензора, введенный формулой (1.16), совпадает с определителем матрицы координат тензора в ортонормированном базисе.

Свойства определителя:

1. $\det \mathbf{E} = 1$.
2. $\det(\alpha \mathbf{A}) = \dfrac{(\alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_1) \times \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_2)) \cdot \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_3)}{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3} = \alpha^3 \det \mathbf{A}$.
3. $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

4. $\det(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A})$.

Обозначим $\mathbf{a}''_k = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a}'_k = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_k$, тогда

$$\det(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = \frac{(\mathbf{a}''_1\times\mathbf{a}''_2)\cdot\mathbf{a}''_3}{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{a}_3}.$$

Домножим и разделим это соотношение на $(\mathbf{a}'_1\times\mathbf{a}'_2)\cdot\mathbf{a}'_3$:

$$\det(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = \frac{(\mathbf{a}''_1\times\mathbf{a}''_2)\cdot\mathbf{a}''_3}{(\mathbf{a}'_1\times\mathbf{a}'_2)\cdot\mathbf{a}'_3}\cdot\frac{(\mathbf{a}'_1\times\mathbf{a}'_2)\cdot\mathbf{a}'_3}{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{a}_3} = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A}).$$

Приведем еще пару полезных тождеств, связанных с определителем тензора.

1. Домножив (1.16) на $(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{a}_3$ и учитывая произвольность вектора $\mathbf{a}_3$, получим

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_1)\times(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}_2) = (\det\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2). \tag{1.17}$$

2. $\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^T\right)_\times = (\det\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}\cdot\mathbf{B}_\times$.

Перепишем левую часть равенства в виде:

$$\left((\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}_k)(\mathbf{d}_k\cdot\mathbf{A}^T)\right)_\times = ((\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}_k)(\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}_k))_\times =$$
$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}_k)\times(\mathbf{A}\cdot\mathbf{d}_k) = (\det\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}\cdot(\mathbf{c}_k\times\mathbf{d}_k) = (\det\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}\cdot\mathbf{B}_\times.$$

1.2.8. Обратный тензор. Теорема Кэйли–Гамильтона

Пусть тензор $\mathbf{A}$ невырожденный, тогда существует, причем единственный, *обратный тензор* $\mathbf{A}^{-1}$, удовлетворяющий равенству

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}. \tag{1.18}$$

Покажем, что исходный и обратный тензор являются перестановочными, т. е. $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$. Для этого рассмотрим тензор $\mathbf{B}$, такой, что $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Домножим это равенство на $\mathbf{A}^{-1}$ справа:

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \;\rightarrow\; \mathbf{B}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Зная обратный тензор линейного отображения, легко найти обратное отображение $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \ \rightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}$.

Свойства обратного тензора:

1. $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$.

Для доказательства вычислим определитель (1.18): $\det \mathbf{A} \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$.

2. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

Доказательство получается прямой проверкой.

3. $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T}$, т. е. транспонирование обратного тензора приводит к тензору обратному транспонированному. Действительно, $\mathbf{A}^T \cdot \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \left(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}\right)^T = \mathbf{E}$.

Вычисление обратного тензора может быть проведено разными способами. Один из них основан на тождестве Кэйли–Гамильтона, доказательство которого на языке матриц дано, например, в [2].

Тождество Кэйли–Гамильтона. Произвольный тензор второго ранга $\mathbf{A}$ удовлетворяет уравнению

$$-\mathbf{A}^3 + I_1(\mathbf{A})\mathbf{A}^2 - I_2(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_3(\mathbf{A})\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{1.19}$$

где *степень тензора* $\mathbf{A}^n$ определяется как n–кратное умножение тензора $\mathbf{A}$ на себя:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}}_{n}.$$

Аналогично для отрицательных степеней:

$$\mathbf{A}^{-n} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}^{-1}}_{n}.$$

Функции I_1, I_2 и I_3, входящие в соотношение (1.19), называются *главными инвариантами тензора* и определяются соотношениями:

$$I_1(\mathbf{A}) = \operatorname{tr} \mathbf{A}; \quad I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr} \mathbf{A}^2\right); \quad I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}. \tag{1.20}$$

Обратный тензор получается после умножения (1.19) на $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})}\left(\mathbf{A}^2 - I_1(\mathbf{A})\mathbf{A} + I_2(\mathbf{A})\mathbf{E}\right).$$

Вычислив след от этого выражения, получим связь первого инварианта обратного тензора с инвариантами исходного:

$$I_1(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{I_3(\mathbf{A})}\left(I_1(\mathbf{A}^2) - I_1^2(\mathbf{A}) + 3I_2(\mathbf{A})\right) = \frac{I_2(\mathbf{A})}{I_3(\mathbf{A})}. \qquad (1.21)$$

Тождество Кэйли–Гамильтона также может быть использовано для нахождения определителя тензора. Для этого вычислим след от левой и правой частей формулы (1.19):

$$\operatorname{tr}\mathbf{A}^3 = I_1 \operatorname{tr}\mathbf{A}^2 - I_2 \operatorname{tr}\mathbf{A} + 3I_3.$$

Учитывая соотношения (1.20), получим выражение для определителя тензора:

$$\det\mathbf{A} = \frac{1}{6}\left(\operatorname{tr}^3\mathbf{A} - 3\operatorname{tr}\mathbf{A}\operatorname{tr}\mathbf{A}^2 + 2\operatorname{tr}\mathbf{A}^3\right).$$

С помощью формулы Кэйли–Гамильтона любую натуральную степень тензора второго ранга можно представить как квадратный трехчлен от тензора с коэффициентами, являющимися полиномами главных инвариантов. Действительно, четвертая степень тензора может быть получена путем умножения соотношения (1.19) на $\mathbf{A}$ и последующего исключения из результата третьей степени тензора:

$$\mathbf{A}^4 = (I_1^2 - I_2)\mathbf{A}^3 + (I_3 - I_1 I_2)\mathbf{A} + I_1 I_3 \mathbf{E}.$$

Аналогичная процедура может быть осуществлена для любой целой степени тензора:

$$\mathbf{A}^n = \alpha_2\mathbf{A}^2 + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{E}, \quad \alpha_i = \alpha_i(I_1,\, I_2,\, I_3).$$

1.2.9. Норма тензора второго ранга. Тензорные ряды

Норма тензора вводится как квадратный корень из скалярного умножения тензора на себя: $\|\mathbf{A}\| = (\mathbf{A} \odot \mathbf{A})^{1/2}$.

Легко проверяется, что введенная таким образом норма удовлетворяет всем необходимым свойствам, а именно:

1. $\|\mathbf{A}\| > 0$ для любого $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

2. $\|\mathbf{A}\| = 0$ только при $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

3. $\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\|$ для любого действительного α.

4. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$.

Стоит отметить еще два важных свойства введенной нормы. Для произвольных тензоров второго ранга $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и вектора $\mathbf{x}$ выполняются следующие соотношения:

1. $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$.

2. $\|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$.

Последнее неравенство означает также, что

$$\|\mathbf{A}^k\| \leq \|\mathbf{A}\|^k. \tag{1.22}$$

Данное свойство позволяет обосновать введение различных тензорных функций, как обобщение представлений элементарных функций в виде ряда. Например, экспоненциальная функция может быть записана в виде бесконечной суммы

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Определим тензорную экспоненту как

$$e^{\mathbf{A}} = 1 + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots . \tag{1.23}$$

Согласно (1.22) ряд в правой части сходится для любого тензора $\mathbf{A}$.

Отметим, что, несмотря на сходство определений, свойства экспоненциальной функции и тензорной экспоненты различны. В частности, правило $e^{x+y} = e^x\, e^y$ не распространяется в общем случае на тензорную экспоненту, что связано с некоммутативностью внутреннего умножения тензоров, поскольку

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}+\mathbf{A}}, \quad \text{но} \quad e^{\mathbf{A}}\, e^{\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{B}}\, e^{\mathbf{A}}.$$

Соотношение $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}\, e^{\mathbf{B}}$ справедливо только в том случае, когда тензора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ коммутативны, т. е. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Аналогично тензорной экспоненте на основе разложения функции в ряд Тейлора могут быть введены другие тензорные функции: $\sin \mathbf{A}$, $\ln \mathbf{A}$ и т. п.

Особенностью тензорных рядов является то, что они всегда могут быть приведены к виду:

$$f(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2, \ \alpha_i = \alpha_i(I_1, I_2, I_3)$$

путем последовательного исключения при помощи тождества Кейли–Гамильтона степеней выше второй.

1.3. Ортогональное отображение

О п р е д е л е н и е. *Ортогональным отображением* называется линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение векторов, т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Данное отображение не меняет длины векторов и сохраняет углы между ними.

Пусть ортогональное отображение описывается тензором $\mathbf{Q}$. Определим, каким условиям должен удовлетворять тензор $\mathbf{Q}$, чтобы соответствующее ему линейное отображение было бы ортогональным:

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

т. е. тензор $\mathbf{Q}$ должен удовлетворять условию

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}. \tag{1.24}$$

О п р е д е л е н и е. *Ортогональным тензором* называется тензор второго ранга, удовлетворяющий условию (1.24).

Таким образом, транспонированный ортогональный тензор совпадает с обратным к нему $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Поскольку транспонированный тензор существует всегда, то любой ортогональный тензор является невырожденным и, следовательно, обратимым.

Вычислим определитель ортогонального тензора:

$$\det(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) = (\det \mathbf{Q})^2 = \det \mathbf{E} = 1 \ \rightarrow \det \mathbf{Q} = \pm 1.$$

Ортогональные тензоры с определителем, равным 1, называются *собственно ортогональными*, ортогональные тензоры с определителем, равным -1, называются *несобственно ортогональными*. В соответствии с формулой (1.16) собственно ортогональные тензоры, не меняя длину векторов и углы между ними, переводят правую тройку векторов в правую, а левую — в левую, т. е. осуществляют поворот исходной тройки векторов, как жесткого целого. Поэтому собственно ортогональный тензор также носит название тензора поворота $\mathbf{P}$. Несобственно ортогональный тензор переводит правую тройку векторов в левую и наоборот. Тогда исходные и преобразованные тройки векторов невозможно совместить только поворотами, нужна дополнительная операция — инверсия, определяемая тензором $-\mathbf{E}$. Таким образом, любой несобственно ортогональный тензор $\mathbf{Q}$ можно представить в виде суперпозиции тензора поворота и инверсии $\mathbf{Q} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{P}$.

Множество ортогональных тензоров образуют группу. Этому множеству принадлежит единичный тензор, для любого элемента группы существует, причем единственный, обратный тензор и множество ортогональных тензоров замкнуто относительно операции скалярного умножения, поскольку из ортогональности тензоров $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$ следует ортогональность тензора $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2$. Действительно,

$$\mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_3^T = (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) \cdot (\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2)^T = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_2^T \cdot \mathbf{Q}_1^T = \\ = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{E}.$$

Совокупность всех ортогональных тензоров называется *полной ортогональной группой*. Множество собственно ортогональных тензоров называется *собственно ортогональной группой* и является подгруппой полной ортогональной группы.

Из определения ортогонального отображения следует, что оно переводит ортонормированный базис $\mathbf{e}_k$ в ортонормированный базис $\mathbf{e}'_k$. Если оба базиса известны, то ортогональный тензор, переводящий один базис

в другой, может быть записан в виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{e}'_k \mathbf{e}_k = \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}'_3 \mathbf{e}_3. \tag{1.25}$$

Приведем формулы с ортогональным тензором.

Первая формула

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \tag{1.26}$$

следует из формулы (1.17), с учетом того, что $\mathbf{Q}^{-T} = \mathbf{Q}$.

Для доказательства второй формулы

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E} \tag{1.27}$$

перепишем формулу (1.26) в виде

$$((\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b}.$$

В силу произвольности вектора $\mathbf{b}$ получаем равенство

$$\det(\mathbf{Q}) \left((\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}).$$

Откуда, после умножения обоих частей равенства справа на $\mathbf{Q}^T$, следует (1.27).

Третья формула

$$(\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}$$

доказывается аналогично.

Для вывода четвертой формулы

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{Q}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{Q}^T) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{Q}^{-1}) = \frac{I_2(\mathbf{Q})}{I_3(\mathbf{Q})} = \pm I_2(\mathbf{Q})$$

было использовано соотношение (1.21).

1.3.1. Тензор поворота

Рассмотрим вначале действие тензора поворота, записанного через исходный и повернутый базисы (1.25), на вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_m a_m) = a_m \mathbf{e}'_m. \tag{1.28}$$

Из (1.28) видно, что координаты вектора $\mathbf{a}'$ в новом базисе имеют те же значения, что и координаты исходного вектора в старом, т. е. длина вектора не изменилась. Вектор $\mathbf{a}'$ будем называть повернутым вектором.

По аналогии с этим определением повернутый тензор определяется соотношением:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{a}'\mathbf{b}' + \cdots + \mathbf{c}'\mathbf{d}' = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}) + \cdots + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}) =$$
$$= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{ab} + \cdots + \mathbf{cd}) \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T$$

или $\mathbf{A}' = (\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_k) \cdot (A_{mn} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n) \cdot (\mathbf{e}'_s \mathbf{e}_s)^T = A_{ks} \mathbf{e}'_k \mathbf{e}'_s$.

Термин «повернутый тензор» можно распространить и на тензоры более высокого ранга

$$\mathbf{A}' = \mathbf{a}' \ldots \mathbf{b}' + \cdots + \mathbf{c}' \ldots \mathbf{d}' = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \ldots (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}) + \cdots + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{c}) \ldots (\mathbf{P} \cdot \mathbf{d}).$$

Инвариантную (не связанную с выбором базиса) форму записи тензора поворота дает следующая теорема.

Т е о р е м а Э й л е р а [4]. *Произвольный тензор поворота* $\mathbf{P}$*, отличный от* $\mathbf{E}$*, допускает единственное представление:*

$$\mathbf{P} = (1 - \cos\theta)\mathbf{mm} + \cos\theta\, \mathbf{E} + \sin\theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \qquad -\pi < \theta < \pi, \tag{1.29}$$

где единичный вектор $\mathbf{m}$ *является неподвижным вектором тензора* $\mathbf{P}$ *и определяет прямую в пространстве, называемую осью поворота;* θ *называется углом поворота и считается положительным, если поворот при взгляде с конца вектора* $\mathbf{m}$ *происходит против хода часовой стрелки.*

Доказательство теоремы начнем с доказательства существования для каждого тензора поворота единственного неподвижного вектора. Неподвижный вектор — вектор, сохраняющий свое направление при повороте пространства векторов:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{m}=\mathbf{m} \quad \text{или} \quad (\mathbf{P}-\mathbf{E})\cdot\mathbf{m}=\mathbf{o}. \tag{1.30}$$

Таким образом, вектор $\mathbf{m}$ является решением системы однородных линейных уравнений. Условием существования нетривиального решения является равенство нулю определителя системы: $\det(\mathbf{P}-\mathbf{E})=0$. Для проверки этого условия выполним следующие преобразования:

$$\det(\mathbf{P}-\mathbf{E})=\det(\mathbf{P}\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{P}^T))=\det(\mathbf{E}-\mathbf{P}^T)=$$
$$=\det(-\mathbf{E}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{E}))=-\det(\mathbf{P}-\mathbf{E}),$$

что возможно только при $\det(\mathbf{P}-\mathbf{E})=0$, и, следовательно, неподвижный вектор существует.

Из (1.30) следует, что если $\mathbf{m}$ является решением уравнения, то противоположный вектор $-\mathbf{m}$ также удовлетворяет (1.30). Однако оба эти вектора соответствуют одной и той же прямой в пространстве — оси поворота. Покажем теперь, что каждому $\mathbf{P}$, отличному от $\mathbf{E}$, соответствует единственная ось поворота. Предположим, что существуют два вектора $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}_1$, имеющих разное направление и удовлетворяющих (1.30). Тогда вектор $\mathbf{m}_2=\mathbf{m}\times\mathbf{m}_1$ также является неподвижным вектором. Действительно, согласно формуле (1.26),

$$(\mathbf{P}\cdot\mathbf{m})\times(\mathbf{P}\cdot\mathbf{m}_1)=\mathbf{P}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{m}_1), \qquad (\det\mathbf{P}=1).$$

Следовательно, поскольку $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}_1$ — неподвижные векторы:

$$\mathbf{m}\times\mathbf{m}_1=\mathbf{P}\cdot(\mathbf{m}\times\mathbf{m}_1).$$

Аналогичным образом можно показать, что вектор $\mathbf{m}_3=\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2$ также будет неподвижным вектором для $\mathbf{P}$. Тройка векторов $\mathbf{m}_k$ образует ортонормированный базис, который сохраняется при соответствующем тензору $\mathbf{P}$ повороте ($\mathbf{m}'_k=\mathbf{m}_k$). Тогда, согласно (1.25), тензор

поворота будет равняться единичному тензору:

$$\mathbf{P} = \mathbf{m}'_k \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k \mathbf{m}_k = \mathbf{E},$$

т. е. тензор поворота может иметь более одного неподвижного вектора только в случае отсутствия поворота.

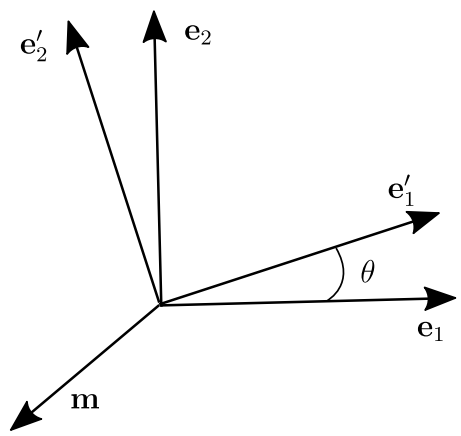

Рис. 3. Исходный и повернутый базисы

Итак, тензор $\mathbf{P}$ имеет один неподвижный вектор $\mathbf{m}$. Возьмем его в качестве одного из базисных векторов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{m}$). Тогда тензор поворота может быть записан в виде

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{m}\mathbf{m}, \tag{1.31}$$

причем векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ лежат в одной плоскости, поскольку они ортогональны одному и тому же вектору $\mathbf{m}$ (рис. 3). Обозначим через θ угол между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}'_1$ и запишем разложение векторов повернутого базиса по исходному:

$$\mathbf{e}'_1 = \cos\theta\, \mathbf{e}_1 + \sin\theta\, \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}'_2 = -\sin\theta\, \mathbf{e}_1 + \cos\theta\, \mathbf{e}_2; \quad -\pi < \theta < \pi.$$

При этом положительным значениям θ соответствует вращение против часовой стрелки при взгляде с конца вектора $\mathbf{m}$. Замена $\mathbf{m}$ на $-\mathbf{m}$ влечет за собой замену θ на $-\theta$.

Подставив выражения для $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ в (1.31), прибавив и отняв $\cos\theta\mathbf{mm}$, перегруппировав слагаемые, получим представление Эйлера:

$$\mathbf{P} = \mathbf{mm} + \cos\theta\,(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) + \sin\theta\,(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \pm \cos\theta\,\mathbf{mm} =$$
$$= (1-\cos\theta)\mathbf{mm} + \cos\theta\,\mathbf{E} + \sin\theta\,\mathbf{m}\times\mathbf{E}.$$

Здесь учтено, что $\mathbf{E} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{mm}$ и, соответственно, $\mathbf{m}\times\mathbf{E} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Отметим, что выбор противоположного направления для неподвижного вектора не меняет выражения для тензора поворота, поскольку знак θ при этом также меняется. □

Рассмотрим теперь действие тензора поворота (1.29) на вектор $\mathbf{a}$. Предположим вначале, что вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярен $\mathbf{m}$. Тогда

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P}\cdot\mathbf{a} = \cos\theta\,\mathbf{a} + \sin\theta\,\mathbf{m}\times\mathbf{a}.$$

Эта ситуация показана на левой части рис. 4.

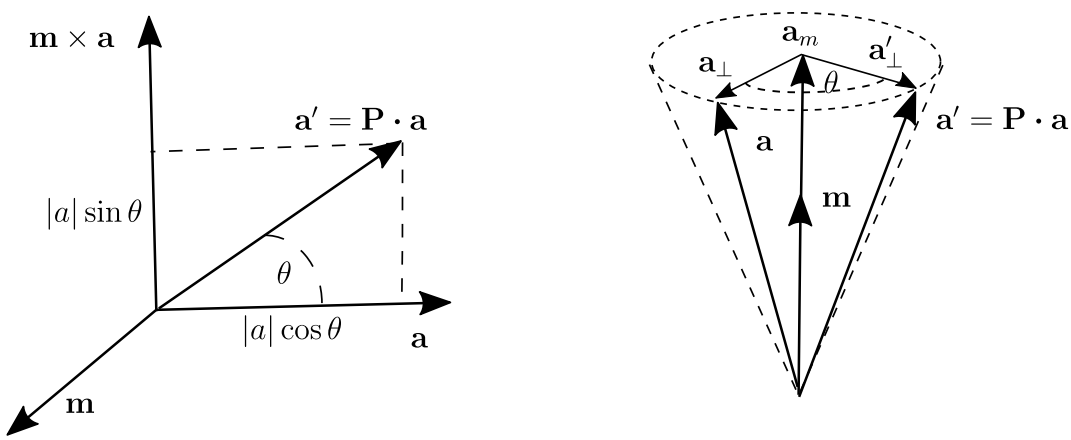

Рис. 4. Поворот вектора $\mathbf{a}$ вокруг оси $\mathbf{m}$.

Произвольный вектор $\mathbf{a}$ разложим на две составляющие – направленную по оси поворота $\mathbf{a}_m$ и лежащую в ортогональной ей плоскости $\mathbf{a}_\perp$, как изображено на правой части рис. 4. При повороте вокруг вектора $\mathbf{m}$ составляющая $\mathbf{a}_m$ не изменится, а $\mathbf{a}_\perp$ повернется на угол θ в перпендикулярной $\mathbf{m}$ плоскости. Следует отметить, что θ это угол между векторами $\mathbf{a}_\perp$ и $\mathbf{a}_\perp'$, а не между исходным и повернутым векторами.

Теорема Эйлера дает простой способ нахождения угла поворота θ и неподвижного вектора $\mathbf{m}$ по известному тензору поворота. Для этого вычислим след и векторный инвариант от представления (1.29):

$$\operatorname{tr}\mathbf{P} = 1 + 2\cos\theta, \quad \mathbf{P}_\times = -2\sin\theta\,\mathbf{m}.$$

Первое равенство позволяет определить угол поворота, а второе при известном угле поворота определяет ось поворота.

Заметим также, что из теоремы Эйлера следует, что тензор поворота полностью определен, если заданы три независимые скалярные величины — угол поворота и два угла, определяющие направление $\mathbf{m}$ относительно какого-либо выбранного базиса ($|\mathbf{m}| = 1$), что соответствует однозначному определению вектора. Таким образом, поворот в пространстве можно задавать аксиальным вектором поворота

$$\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{m}. \tag{1.32}$$

Этот вектор является аксиальным, поскольку повороту против часовой стрелки при взгляде с конца $\mathbf{m}$ в право ориентированной системе отсчета соответствуют положительные значения θ, а в лево ориентированной системе отсчета — отрицательные.

Выразив из (1.32) вектор $\mathbf{m}$ и подставив его в представление Эйлера, получим представление тензора поворота через $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta} + \cos\theta\,\mathbf{E} + \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{E}. \tag{1.33}$$

Посмотрим, как тензор поворота $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ действует на вектор $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\cdot\mathbf{a} = \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{a}) + \cos\theta\,\mathbf{a} + \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{a}.$$

Поскольку $\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{a}) = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{a}) - \theta^2\mathbf{a}$, то выражение для повернутого вектора можно упростить:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{a}) + \frac{\sin\theta}{\theta}\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{a}.$$

В приложениях также часто встречается представление поворота через логарифмический тензор поворота:

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}. \tag{1.34}$$

Как следует из его определения, логарифмический тензор поворота является антисимметричным тензором, а его квадрат выражается через вектор поворота:

$$\mathbf{R}^2 = (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta} - \theta^2\,\mathbf{E}.$$

Выразив отсюда $\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}^2 + \theta^2\,\mathbf{E}$ и подставив это выражение в (1.33), получим представление тензора поворота через логарифмический тензор поворота:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}) = \mathbf{E} + \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{R} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\mathbf{R}^2.$$

Норма логарифмического тензора поворота характеризует величину поворота. Действительно:

$$\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\mathbf{R} \odot \mathbf{R}} = \sqrt{\mathbf{R} \cdot\cdot\, \mathbf{R}^T} = \sqrt{-\mathrm{tr}\,(\mathbf{R}^2)} = \sqrt{2}\,|\boldsymbol{\theta}|.$$

Отметим, что норма тензора поворота:

$$\|\mathbf{P}\| = \sqrt{\mathrm{tr}\,(\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T)} = \sqrt{\mathrm{tr}\,\mathbf{E}} = \sqrt{3}$$

постоянна и никак не связана с величиной поворота.

Теорема о логарифмическом тензоре поворота [4]. Тензор поворота является тензорной экспонентой от логарифмического тензора поворота.

Для доказательства проведем разделение представления тензорной экспоненты (1.23) на суммы по четным и нечетным степеням $\mathbf{R}$

$$e^{\mathbf{R}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,\mathbf{R}^k = \mathbf{E} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\,\mathbf{R}^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\,\mathbf{R}^{2k}$$

и вычислим степени $\mathbf{R}^k$. Учитывая, что из формулы (1.34) следует, что $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{o}$, можно записать следующие равенства:

$$\mathbf{R}^2 = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta} - \theta^2\mathbf{E}; \quad \mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^2 \cdot \mathbf{R} = (\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta} - \theta^2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{R} = -\theta^2\mathbf{E};$$

$$\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^4 \cdot \mathbf{R} = -\theta^2\mathbf{R}; \qquad \mathbf{R}^5 = \mathbf{R}^4 \cdot \mathbf{R} = \theta^4\mathbf{R} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом,

$$\mathbf{R}^{2k+1} = (-\theta^2)^k\,\mathbf{R},\ \mathbf{R}^{2k} = (-\theta^2)^{k-1}\,\mathbf{R}^2.$$

Подставляя эти выражения в тензорную экспоненту и учитывая известные разложения в степенные ряды

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta^2)^k}{(2k+1)!}; \qquad \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\theta^2)^{k-1}}{(2k)!},$$

получим, что

$$e^{\mathbf{R}} = \mathbf{E} + \frac{\sin\theta}{\theta}\mathbf{R} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\mathbf{R}^2 = \mathbf{P}(\mathbf{R}). \quad \square$$

В приложениях часто встречаются случаи, когда вектор поворота мал $|\theta| \ll 1$, при этом норма $\mathbf{R}$ также мала, и в разложении тензорной экспоненты можно оставить только линейное слагаемое

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} + \mathbf{R} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}.$$

Учитывая, что для малых поворотов $\cos\theta \approx 1$ и $\sin\theta \approx \theta$, выражение для повернутого вектора также упрощается

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}.$$

1.3.2. Проекторы и тензоры отражений

О п р е д е л е н и е. Тензор $\mathbf{\Pi}$, рассматриваемый как линейный оператор в пространстве векторов, называется *проектором*, если выполнены условия:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^T,\ \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}.$$

Примерами проекторов являются тензоры

$$\mathbf{nn},\ \mathbf{mm}+\mathbf{nn},$$

где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ — единичные ортогональные векторы.

В первом случае результатом действия таких линейных операторов на произвольный вектор $\mathbf{a}$ будет проекция вектора на прямую, натянутую на вектор $\mathbf{n}$. Во втором случае — проекция $\mathbf{a}$ на плоскость, натянутую на векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$.

Проекция вектора $\mathbf{a}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{n}$, получается в результате действия на вектор $\mathbf{a}$ тензора вида $\mathbf{\Pi}=\mathbf{E}-\mathbf{nn}$ (рис. 5):

$$\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}-|\mathbf{a}_n|\mathbf{n}=\mathbf{a}-\mathbf{a}_n=\tilde{\mathbf{a}}.$$

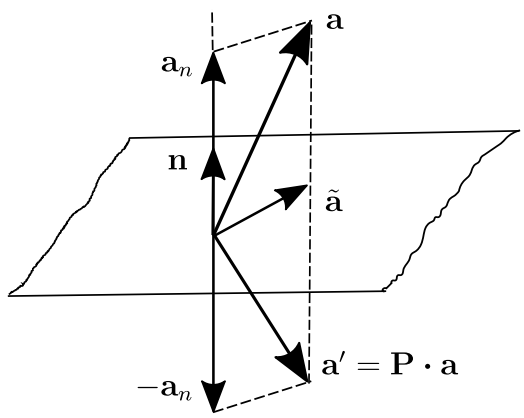

Рис. 5. Отражение вектора $\mathbf{a}$ от плоскости и его проекция на эту плоскость

О п р е д е л е н и е. *Тензором отражения* от плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$, является тензор

$$\mathbf{Q}=\mathbf{E}-2\mathbf{nn}.$$

В результате действия этого тензора на вектор $\mathbf{a}$

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}-2\mathbf{a}_n=\tilde{\mathbf{a}}+\mathbf{a}_n-2\mathbf{a}_n=\tilde{\mathbf{a}}-\mathbf{a}_n$$

проекции исходного и отраженного векторов на эту плоскость совпадают, а проекции этих векторов на вектор $\mathbf{n}$ равны по модулю и противоположны по направлению (рис. 5). Тензор $\mathbf{Q}$ называется *тензором зеркального отражения* и является несобственно ортогональным тензором.

1.4. Разложения тензоров второго ранга

1.4.1. Спектральное разложение тензора

Действие тензора на вектор приводит к повороту исходного вектора и изменению его длины. Однако для каждого тензора второго ранга существуют такие векторы, действие тензора на которые сводится только к изменению их длины, т. е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \tag{1.35}$$

Такие векторы называются *собственными векторами* тензора $\mathbf{A}$, а числа λ — *собственными числами или собственными значениями* тензора $\mathbf{A}$. Поскольку наряду с вектором $\mathbf{e}$ равенству (1.35) удовлетворяет любой вектор $\alpha\mathbf{e}$, то для определенности считаем, что $\mathbf{e}$ — единичный вектор.

Заменяя вектор $\mathbf{e}$ выражением $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}$ и перенеся его в левую часть уравнения, получаем соотношение

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{o}. \tag{1.36}$$

Таким образом, получаем однородную систему линейных уравнений, которая имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

Это уравнение называется *характеристическим уравнением* для тензора $\mathbf{A}$. В развернутом виде это уравнение третьей степени относительно неизвестной λ:

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0, \tag{1.37}$$

где I_i — главные инварианты тензора $\mathbf{A}$, определяемые соотношениями (1.20). Вычисление коэффициентов уравнения (1.37) приведено, например, в [16].

Как любое уравнение третьей степени, уравнение (1.37) имеет три корня λ_k, которые называются также главными значениями тензора $\mathbf{A}$. Каждому главному значению соответствует свое главное направление $\mathbf{e}_k$, определяемое уравнением (1.36).

Т е о р е м а. *Собственные значения симметричного тензора вещественны, а собственные вектора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Докажем первую часть теоремы от противного. Предположим, что уравнение (1.37) имеет один вещественный и два комплексно-сопряженных корня: λ_1 и $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Им соответствуют комплексно-сопряженные собственные векторы: $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{e}}_1$. Умножим обе части равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$ скалярно на $\bar{\mathbf{e}}_1$:

$$\lambda_1 = \frac{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1}{\mathbf{e}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1}.$$

Знаменатель этого выражения $\mathbf{e}_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = |\mathbf{e}|^2$ — положительный. Для вещественного симметричного тензора $\mathbf{A}$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 = \overline{\overline{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1)} \cdot \mathbf{e}_1} = \overline{\mathbf{e}_1 \cdot \overline{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1)}} = \overline{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1},$$

где использовано, что

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{x} \cdot \overline{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{y})}.$$

Таким образом, получаем, что $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$, т. е. λ_1 — вещественное число. Следовательно, все собственные значения и собственные векторы симметричного тензора — вещественны.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим два различных собственных числа $\lambda_m \neq \lambda_n$ и соответствующие им собственные векторы:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_m = \lambda_m \mathbf{e}_m, \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n.$$

Умножив первое из равенств скалярно на $\mathbf{e}_n$, второе на $\mathbf{e}_m$, и, вычитая одно из другого, получим, что

$$(\lambda_m - \lambda_n)\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_m - \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = 0, \tag{1.38}$$

т. е. направления $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{e}_n$ ортогональны. $\square$

Из формулы (1.38) также следует еще одно свойство собственных векторов, соответствующих различным собственным числам, известное, как обобщенная ортогональность

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n = 0.$$

Таким образом, если все собственные числа различны, то собственные векторы образуют ортонормированный базис, который называется *главным базисом тензора*. Запишем координатное представление тензора $\mathbf{A}$ в этом базисе: $\mathbf{A} = A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$. Поскольку $\mathbf{e}_n$ является собственным вектором, то $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n$ и, следовательно,

$$A_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = \lambda_n \delta_{mn}.$$

То есть координаты тензора $\mathbf{A}$ в главном базисе отличны от нуля только для диад с одинаковыми индексами, а диадное представление тензора записывается в виде трехчлена

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3. \tag{1.39}$$

Это представление носит название *спектрального разложения симметричного тензора*.

Если два собственных числа совпадают ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \lambda_3$), то любой вектор, ортогональный $\mathbf{e}_3$, является собственным для $\mathbf{A}$. Множество этих векторов образует плоскость, ортогональную $\mathbf{e}_3$. Тогда мы можем выбрать в качестве собственных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ любую пару

ортогональных векторов из этого множества. Представление (1.39) для симметричного тензора с парными собственными значениями принимает вид

$$\mathbf{A} = \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \lambda(\mathbf{E} - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3).$$

Если все три собственных числа равны между собой $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, то $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}$ и любой вектор является собственным вектором тензора $\mathbf{A}$.

У т в е р ж д е н и е. Любое ортогональное отображение сохраняет собственные значения тензора и поворачивает/отражает его главные оси. Покажем, что $\mathbf{e}'_k = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k$ являются собственными векторами тензора $\mathbf{A}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T$. Действительно, учитывая что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$ (не суммировать по k), получим

$$\begin{gathered}\mathbf{A}' \cdot \mathbf{e}'_k = \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T\right) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k = \\ = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k) = \mathbf{Q} \cdot (\lambda_k \mathbf{e}_k) = \lambda_k \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k\right) = \lambda_k \mathbf{e}'_k.\end{gathered}$$

В нелинейной теории упругости широко используется обратное утверждение: два симметричных тензора с одинаковыми собственными числами отличаются только поворотом.

Спектральное разложение позволяет легко вычислять степени тензора $\mathbf{A}^n$ для целых n:

$$\mathbf{A}^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \cdot \sum_{j=1}^{3} \lambda_j \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} \lambda_i \lambda_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i.$$

Схожим образом показывается, что

$$\mathbf{A}^n = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^n \, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{A}^{-n} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\lambda_i^n} \, \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i.$$

В заключение выпишем представление главных инвариантов тензо-

ра через его собственные значения:

$$I_1(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2\mathbf{A} - \operatorname{tr}\mathbf{A}^2\right) = \frac{1}{2}\left((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2\right) =$$

$$= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3;$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \det\mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

1.4.2. Разложение тензора на шаровую часть и девиатор

Пусть тензор $\mathbf{A}$ является симметричным. Воспользуемся спектральным разложением тензора $\mathbf{A}$ и запишем его двойную свертку с произвольным вектором $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda_m x_m^2,$$

где x_m — проекции $\mathbf{x}$ на главные оси тензора $\mathbf{A}$. Рассмотрим теперь в трехмерном пространстве поверхность второго порядка

$$\lambda_m x_m^2 = \pm 1. \tag{1.40}$$

Если собственные числа λ_m имеют разные знаки, то уравнение (1.40) описывает пару сопряженных гиперболоидов. Если знаки собственных чисел совпадают, то (1.40) определяет поверхность эллипсоида. При этом тензору с двумя одинаковыми собственными числами соответствует эллипсоид вращения, а с трехкратным собственным числом — сфера. Последнее свойство объясняет следующее

О п р е д е л е н и е. Тензор вида $\lambda\mathbf{E}$ называется *шаровым тензором.*

Любому тензору $\mathbf{A}$ можно однозначно сопоставить шаровой тензор по правилу

$$\mathbf{A}_b = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{A}\,\mathbf{E}.$$

О п р е д е л е н и е. *Девиатором тензора* называется разность между тензором и его шаровой частью. Таким образом, произвольный

тензор можно представить в виде разложения на шаровую часть и девиатор:

$$\mathbf{A} = I_1(\mathbf{A})/3\,\mathbf{E} + \operatorname{dev}\mathbf{A}.$$

Используя спектральное разложение девиатора, легко показать, что главные оси девиатора и исходного тензора совпадают, а собственные числа девиатора выражаются через собственные числа исходного тензора:

$$d_k = \lambda_k - I_1(\mathbf{A})/3.$$

Вычислим главные инварианты девиатора:

$$I_1\left(\operatorname{dev}\mathbf{A}\right) = \mathbf{E}\cdot\cdot\operatorname{dev}\mathbf{A} = \mathbf{E}\cdot\cdot\left(\mathbf{A} - \frac{I_1}{3}\mathbf{E}\right) = I_1(\mathbf{A}) - I_1(\mathbf{A}) = 0;$$

$$I_2\left(\operatorname{dev}\mathbf{A}\right) = \frac{1}{2}\left(I_1^2(\operatorname{dev}\mathbf{A}) - I_1((\operatorname{dev}\mathbf{A})^2)\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{dev}\mathbf{A}\cdot\cdot\operatorname{dev}\mathbf{A} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right) = -\frac{1}{6}\left((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)^2\right) \le 0;$$

$$I_3\left(\operatorname{dev}\mathbf{A}\right) = d_1 d_2 d_3.$$

Равенство нулю первого инварианта является отличительной особенностью девиатора, из чего следует, что девиатор от девиатора равен самому девиатору. Также, поскольку первый инвариант антисимметричного тензора равен нулю, рассмотрение его девиатора теряет смысл:

$$\operatorname{dev}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}).$$

В применении к девиатору теорема Кэли–Гамильтона имеет вид:

$$(\operatorname{dev}\mathbf{A})^3 + I_2(\operatorname{dev}\mathbf{A})\operatorname{dev}\mathbf{A} - I_3(\operatorname{dev}\mathbf{A})\mathbf{E} = \mathbf{0},$$

из этого следует, что

$$I_3(\operatorname{dev}\mathbf{A}) = \frac{1}{3}I_1((\operatorname{dev}\mathbf{A})^3).$$

В заключение данного раздела приведем еще одну полезную формулу для двойной свертки тензоров:

$$\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{3}I_1(\mathbf{A})I_1(\mathbf{B}) + \operatorname{dev}(\mathbf{A})\cdot\cdot\operatorname{dev}(\mathbf{B}).$$

1.4.3. Полярное разложение

О п р е д е л е н и е. Симметричный тензор второго ранга называется *положительно определенным*, если для любого вектора $\mathbf{a} \neq 0$ справедливо неравенство $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} > 0$.

Используя спектральное разложение тензора, можно показать, что симметричный тензор $\mathbf{A}$ положительно определен тогда и только тогда, когда его собственные числа положительны:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \left(\sum_{k=1}^{3} \lambda_k \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k \right) \cdot \mathbf{a} = a_k^2 \lambda_k.$$

Для положительно определенного тензора можно определить дробные степени тензора:

$$\mathbf{A}^\alpha = \lambda_1^\alpha \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1 + \lambda_2^\alpha \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2 + \lambda_3^\alpha \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_3.$$

Отметим, что операции возведения в дробную степень и извлечение квадратного корня не эквивалентны. Под корнем из тензора понимается одно из решений квадратного уравнения $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$. Если тензор $\mathbf{A}$ симметричный и положительно определенный, то тензор вида

$$\mathbf{X} = \pm \lambda_1^\alpha \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1 \pm \lambda_2^\alpha \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2 \pm \lambda_3^\alpha \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_3$$

будет являться решением при любой комбинации знаков, и только в одном случае он будет положительно определенным.

У т в е р ж д е н и е. *Если тензор* $\mathbf{A}$ *невырожденный, то тензор* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ *является симметричным и положительно определенным.*

Симметрия следует из равенства

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^T)^T \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T.$$

Доказательство положительной определенности начнем с определения собственных чисел тензора $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

Выразим отсюда λ при помощи скалярного умножения на $\mathbf{x}$ слева

$$\lambda = \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}.$$

Числитель этого выражения положительный, поскольку

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}) = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}|^2.$$

Следовательно, все собственные числа тензора $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ положительны, что означает, что тензор $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ положительно определенный.

Для невырожденных несимметричных тензоров часто используется следующая теорема.

Теорема о полярном разложении. *Любой невырожденный тензор второго ранга* $\mathbf{A}$ *единственным образом представим в виде произведения положительно определенного симметричного тензора и ортогонального тензора. Это представление можно записать в виде левого полярного разложения* $\mathbf{A} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}$, *и правого полярного разложения* $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}$.

Доказательство. Поскольку тензор $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ симметричный, то его собственные векторы образуют ортонормированный базис

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Из положительной определенности $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ следует, что мы можем ввести тензор

$$\mathbf{V} = \left(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T\right)^{1/2} = \lambda_1^{1/2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2^{1/2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3^{1/2} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Для тензора $\mathbf{V}$ легко находится обратный тензор:

$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\lambda_2^{1/2}} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\lambda_3^{1/2}} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3.$$

Тензор $\mathbf{Q}$ находится по формуле

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A}.$$

Проверим, что построенный таким образом тензор $\mathbf{Q}$ действительно является ортогональным тензором:

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T = (\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{V}^{-T}) = \mathbf{V}^{-1}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T)\cdot\mathbf{V}^{-1} = \\ = \mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{V}^2\cdot\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Покажем теперь единственность подобного представления. Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{V}'\cdot\mathbf{Q}'$ другое левое полярное разложение тензора $\mathbf{A}$. Вычислим

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T = \mathbf{V}'\cdot\mathbf{Q}'\cdot(\mathbf{V}'\cdot\mathbf{Q}')^T = \mathbf{V}'\cdot\mathbf{Q}'\cdot\mathbf{Q}'^T\cdot\mathbf{V}' = \mathbf{V}'^2.$$

То есть тензор $\mathbf{V}'$ является положительно-определенным корнем из тензора $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^T$, но такой корень является единственным. Таким образом $\mathbf{V}' = \mathbf{V}$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{Q}' = \mathbf{V}'^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{Q}.$$

Для получения правого полярного разложения применим левое полярное разложение к тензору $\mathbf{A}^T$: $\mathbf{A}^T = \mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}_u$, где $\mathbf{U} = \left(\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A}\right)^{1/2}$. Транспонируем это равенство, учитывая, что $\mathbf{U}$ — симметричный положительно определенный тензор, и получим

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U} = \mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U}\cdot(\mathbf{Q}_u\cdot\mathbf{Q}_u^T) = (\mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}_u)\cdot\mathbf{Q}_u^T. \tag{1.41}$$

Тензор $\mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}_u$ также является симметричным и положительно определенным, поскольку

$$(\mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}_u)^T = \mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U}^T\cdot\mathbf{Q}_u = \mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}_u;$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}_u\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{a}' \geq 0, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{Q}_u\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{Q}_u^T.$$

Таким образом, формула (1.41) — это левое полярное разложение тензора $\mathbf{A}$. В силу единственности такого представления, находим:

$$\mathbf{Q}_u^T = \mathbf{Q}, \qquad \mathbf{V} = \mathbf{Q}_u^T\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}_u = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{Q}, \qquad \mathbf{U} = \mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{Q}.$$

Из последнего равенства следует, что:

$$\mathbf{U} = \lambda_1^{1/2}\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_1' + \lambda_2^{1/2}\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_2' + \lambda_3^{1/2}\mathbf{e}_3'\mathbf{e}_3', \ \mathbf{e}_i' = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_i,$$

т. е. собственные значения тензоров $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ равны, а собственные векторы повернуты друг относительно друга тензором поворота $\mathbf{Q}$. $\square$

В случае, когда $\mathbf{A}$ является симметричным тензором, то

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2} = |\lambda_1^A| \mathbf{e}_1^A \mathbf{e}_1^A + |\lambda_2^A| \mathbf{e}_2^A \mathbf{e}_2^A + |\lambda_3^A| \mathbf{e}_3^A \mathbf{e}_3^A,$$

где λ_i^A и $\mathbf{e}_i^A$ — собственные числа и собственные векторы тензора $\mathbf{A}$. Таким образом, тензоры $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ совпадают с $\mathbf{A}$, если он положительно определен. В свою очередь,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{|\lambda_k^A|} \mathbf{e}_k^A \mathbf{e}_k^A \cdot \sum_{s=1}^{3} \lambda_s^A \mathbf{e}_s^A \mathbf{e}_s^A = \sum_{k=1}^{3} \operatorname{sign}(\lambda_k) \mathbf{e}_k^A \mathbf{e}_k^A.$$

1.5. Тензоры высших рангов

1.5.1. Основные действия с тензорами

1. Тензорное умножение.

В отличие от сложения тензоров, это действие совершается с произвольными тензорами, не обязательно имеющими одинаковый ранг:

$$^k\mathbf{A} = A_{n_1 \ldots n_k} \mathbf{e}_{n_1} \ldots \mathbf{e}_{n_k} \in \mathcal{T}_k, \quad ^p\mathbf{B} = B_{m_1 \ldots m_p} \mathbf{e}_{m_1} \ldots \mathbf{e}_{m_p} \in \mathcal{T}_p,$$
$$^k\mathbf{A}\, ^p\mathbf{B} = A_{n_1 \ldots n_k} B_{m_1 \ldots m_p} \mathbf{e}_{n_1} \ldots \mathbf{e}_{n_k} \mathbf{e}_{m_1} \ldots \mathbf{e}_{m_p} \in \mathcal{T}_{k+p}.$$

Тензорное произведение произвольного числа тензоров ассоциативно

$$(^k\mathbf{A}\, ^p\mathbf{B})\, ^q\mathbf{C} = {}^k\mathbf{A}\, (^p\mathbf{B}\, ^q\mathbf{C}).$$

2. Скалярное произведение определено только для тензоров одного ранга. Результатом скалярного произведения является скаляр.

$$^k\mathbf{A} \odot {}^k\mathbf{B} = \sum_{n=1}^{3^{k-1}} \mathbf{a}_{n_1} \mathbf{a}_{n_2} \ldots \mathbf{a}_{n_k} \odot \sum_{m=1}^{3^{k-1}} \mathbf{b}_{m_1} \mathbf{b}_{m_2} \ldots \mathbf{b}_{m_k} =$$
$$= \sum_{m,n=1}^{3^{k-1}} (\mathbf{a}_{n_1} \cdot \mathbf{b}_{m_1})(\mathbf{a}_{n_2} \cdot \mathbf{b}_{m_2}) \ldots (\mathbf{a}_{n_k} \cdot \mathbf{b}_{m_k}).$$

3. *Перестановкой* $T_{(i,j)}$ называется линейная функция, переводящая $\mathcal{T}_k$ в $\mathcal{T}_k$ и состоящая во взаимной перестановке в каждой k-аде векторов, стоящих на i-м и j-м местах или, что то же самое, в перестановке i-го и j-го базисного вектора в полибазисе тензора $\mathbf{A}$:

$$
{}^k\mathbf{A}^{T_{i,j}} = \left(\sum_{n=1}^{3^{k-1}} \mathbf{a}_{n_1}\mathbf{a}_{n_2}\ldots\mathbf{a}_{n_i}\ldots\mathbf{a}_{n_j}\ldots\mathbf{a}_{n_k}\right)^T_{(i,j)} =
$$

$$
= \left(\sum_{n=1}^{3^{k-1}} \mathbf{a}_{n_1}\mathbf{a}_{n_2}\ldots\mathbf{a}_{n_j}\ldots\mathbf{a}_{n_i}\ldots\mathbf{a}_{n_k}\right).
$$

Для тензоров второго ранга возможна только одна перестановка — транспонирование тензора.

4. *Свертыванием* $\mathrm{tr}_{\,i,j}$ называется линейная функция, понижающая ранг тензора на 2, и состоящая в скалярном умножении векторов, стоящих на i-м и j-м местах в каждой k-аде:

$$
\mathrm{tr}_{\,i,j}({}^k\mathbf{A}) = \mathrm{tr}_{\,i,j}\left(\sum_{n=1}^{3^{k-1}} \mathbf{a}_{n_1}\ldots\mathbf{a}_{n_i}\ldots\mathbf{a}_{n_j}\ldots\mathbf{a}_{n_k}\right) =
$$

$$
= \sum_{n=1}^{3^{k-1}} (\mathbf{a}_{n_i}\cdot\mathbf{a}_{n_j})\mathbf{a}_{n_1}\ldots\mathbf{a}_{n_{i-1}}\mathbf{a}_{n_{i+1}}\ldots\mathbf{a}_{n_{j-1}}\mathbf{a}_{n_{j+1}}\ldots\mathbf{a}_{n_k}.
$$

5. Внутреннее умножение на вектор понижает ранг тензора на единицу и состоит в скалярном умножении вектора на m-й вектор в каждой k-аде:

$$
{}^k\mathbf{A}\,{}^m\!\cdot\mathbf{c} = (A_{n_1\ldots n_k}\mathbf{e}_{n_1}\ldots\mathbf{e}_{n_m}\ldots\mathbf{e}_{n_k})\,{}^m\!\cdot\mathbf{c} =
$$

$$
= A_{n_1\ldots n_k}(\mathbf{e}_{n_m}\cdot\mathbf{c})\mathbf{e}_{n_1}\ldots\mathbf{e}_{n_{m-1}}\mathbf{e}_{n_{m+1}}\ldots\mathbf{e}_{n_k}.
$$

Если вектор умножается на первый или последний базисный вектор, индекс над знаком скалярного умножения опускается:

$$
{}^k\mathbf{A}\,{}^k\!\cdot\mathbf{c} = {}^k\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}; \qquad {}^k\mathbf{A}\,{}^1\!\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\cdot{}^k\mathbf{A}.
$$

6. Внутреннее умножение тензоров:

$$
{}^k\mathbf{A} \overset{s}{\underset{q}{\cdot}} {}^p\mathbf{B} = (A_{n_1\ldots n_k}\mathbf{e}_{n_1}\ldots\mathbf{e}_{n_s}\ldots\mathbf{e}_{n_k}) \overset{s}{\underset{q}{\cdot}} \left(B_{m_1\ldots m_p}\mathbf{e}_{m_1}\ldots\mathbf{e}_{m_q}\ldots\mathbf{e}_{m_p}\right) =
$$

$$
= A_{n_1\ldots n_k}B_{m_1\ldots m_p}(\mathbf{e}_{n_s}\cdot\mathbf{e}_{m_q})\mathbf{e}_{n_1}\ldots\mathbf{e}_{n_{s-1}}\mathbf{e}_{n_{s+1}}\ldots\mathbf{e}_{n_k}\mathbf{e}_{m_1}\ldots\mathbf{e}_{n_{m-1}}\mathbf{e}_{n_{m+1}}\ldots\mathbf{e}_{m_p}.
$$

В этой операции s-й базисный вектор полибазиса ${}^k\mathbf{A}$ $(1 \le s \le k)$ скалярно умножается на q-й базисный вектор полибазиса ${}^p\mathbf{B}$ $(1 \le q \le p)$. То есть верхний индекс относится к первому сомножителю, а нижний — ко второму. Если перемножаются соседние базисные векторы у ${}^k\mathbf{A}$ и ${}^p\mathbf{B}$ (последний вектор в ${}^k\mathbf{A}$ и первый вектор в ${}^p\mathbf{B}$), то индексы над знаком скалярного умножения не ставятся:

$$
{}^k\mathbf{A} \overset{k}{\underset{1}{\cdot}} {}^p\mathbf{B} \equiv {}^k\mathbf{A}\cdot{}^p\mathbf{B}.
$$

Результатом внутреннего умножения тензоров является тензор ранга $k+p-2$.

Аналогично могут быть введены и многократные внутренние умножения тензоров. Например, m-кратное умножение:

$$
{}^k\mathbf{A} \overset{s_1}{\underset{q_1}{\cdot}} \cdots \overset{s_m}{\underset{q_m}{\cdot}} {}^p\mathbf{B}, \qquad m \le k, \quad m \le p.
$$

Если скалярно последовательно умножаются соседние вектора в ${}^k\mathbf{A}$ и ${}^p\mathbf{B}$, то индексы над знаком скалярного умножения опускаются:

$$
{}^k\mathbf{A} \overset{k-m}{\underset{m}{\cdot}} \cdots \overset{k}{\underset{1}{\cdot}} {}^p\mathbf{B} \equiv {}^k\mathbf{A} \underbrace{\cdot\cdot\ \cdot\cdot\cdot\cdot}_{m} {}^p\mathbf{B}.
$$

Результатом умножения является тензор ранга $k+p-2m$.

Наиболее часто в приложениях встречаются двойные скалярные умножения ${}^k\mathbf{A}\cdot\cdot{}^p\mathbf{B}$ и ${}^k\mathbf{A} : {}^p\mathbf{B}$, где под операцией $:$ понимается скалярное произведение тензоров второго ранга

$$
{}^k\mathbf{A} : {}^p\mathbf{B} = {}^{k-2}\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2 : \mathbf{B}_2)\,{}^{p-2}\mathbf{B}_1,
$$

или в координатной форме

$$
{}^k\mathbf{A} : {}^p\mathbf{B} = A_{n_1\ldots n_k}B_{m_1\ldots m_p}(\mathbf{e}_{n_{k-1}}\cdot\mathbf{e}_{m_1})(\mathbf{e}_{n_k}\cdot\mathbf{e}_{m_2})\mathbf{e}_{n_1}\ldots\mathbf{e}_{n_{k-2}}\mathbf{e}_{m_3}\ldots\mathbf{e}_{m_p}.
$$

7. Полное умножение — операция последовательного скалярного умножения последних базисных векторов в ${}^k\mathbf{A}$ и ${}^p\mathbf{B}$ $(k \geq p)$, пока не будут исчерпаны все векторы в тензоре ${}^p\mathbf{B}$. В координатной форме:

$$
\begin{aligned}
{}^k\mathbf{A} \bar{\odot} {}^p\mathbf{B} &= A_{n_1 \ldots n_k} \mathbf{e}_{n_1} \ldots \mathbf{e}_{n_k} \bar{\odot} B_{m_1 \ldots m_p} \mathbf{e}_{m_1} \ldots \mathbf{e}_{m_p} = \\
&= A_{n_1 \ldots n_k} B_{m_1 \ldots m_p} \underbrace{(\mathbf{e}_{n_{k-p+1}} \cdot \mathbf{e}_{m_1}) \ldots (\mathbf{e}_{n_k} \cdot \mathbf{e}_{m_p})}_{p} \mathbf{e}_{n_1} \ldots \mathbf{e}_{n_{k-p}}.
\end{aligned}
$$

8. Векторное умножение тензоров:

$$
{}^k\mathbf{A} \times {}^p\mathbf{B} = A_{n_1 \ldots n_k} B_{m_1 \ldots m_p} \mathbf{e}_{n_1} \ldots (\mathbf{e}_{n_k} \times \mathbf{e}_{m_1}) \ldots \mathbf{e}_{m_p}.
$$

Результатом операции является тензор ранга $k + p - 1$.

Аналогично внутреннему умножению можно вводить внутренние векторные и многократные векторные умножения тензоров высших рангов, но они крайне редко используются на практике.

1.5.2. Симметрия тензоров. Изотропные тензоры

Если тензор не меняется в результате действия некоторой перестановки $T_{(i,j)}$, то говорят, что тензор симметричен относительно индексов (i, j). Такой тип симметрии носит название *внутренней симметрии тензоров*.

Симметричность тензора ранга k по паре индексов дает 3^{k-1} соотношений между его координатами и уменьшает число независимых координат до $2 \cdot 3^{k-1}$. Симметричность по двум парам индексов дает $5 \cdot 3^{k-2}$ соотношений между его координатами и уменьшает число независимых координат до $4 \cdot 3^{k-2}$.

Внешней симметрией тензора называется его свойство не меняться при некоторых ортогональных преобразованиях. Классические теории симметрии применимы только для полярных (евклидовых) векторов и тензоров [7,15]. Применение классических подходов к аксиальным объектам приведет к ошибочным результатам. Поэтому П. А. Жилиным было предложено следующее понятие ортогонального преобразования [5, 6].

О п р е д е л е н и е. *Ортогональным преобразованием* тензора ранга k называется преобразование $\mathcal{T}_k \to \mathcal{T}_k$, осуществляемое по следующему правилу:

$$^k\mathbf{A}' = (\det \mathbf{Q})^{\alpha} A_{n_1 \ldots n_k} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{n_1}) \ldots (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_{n_k}), \tag{1.42}$$

где $\alpha = 0$ для полярных объектов и $\alpha = 1$ для аксиальных объектов. В частности, для скаляра, вектора и тензора второго ранга:

$$a' = (\det \mathbf{Q})^{\alpha}\, a, \qquad \mathbf{a}' = (\det \mathbf{Q})^{\alpha}\, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}; \tag{1.43}$$

$$\mathbf{A}' = (\det \mathbf{Q})^{\alpha}\, (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}_k) = (\det \mathbf{Q})^{\alpha}\, \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k) \cdot \mathbf{Q}^T = \\ = (\det \mathbf{Q})^{\alpha}\, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Предложенное определение ортогонального преобразования совпадает с классическим для полярных объектов и позволяет естественным образом распространить его на аксиальные объекты.

Рассмотрим ортогональное преобразование скалярного произведения угловой скорости (аксиальный вектор – $\alpha = 1$) и трансляционной скорости (полярный вектор – $\alpha = 0$). Их скалярное произведение — аксиальный скаляр, следовательно $\alpha = 1$, тогда

$$a' = \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{v}' = (\det Q)\, (\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) = (\det Q)\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \\ = (\det Q)\, \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v} = (\det Q)\, a.$$

В результате пришли к определению (1.43) для аксиального скаляра.

Для ортогонального преобразования векторного произведения двух полярных векторов приходим к определению (1.43) для аксиального вектора

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q})\, \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q})\, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c},$$

где было использовано тождество (1.26).

Аналогичным образом можно объяснить определение (1.42) для тензоров любого ранга. Предложенная расширенная трактовка ортогонального преобразования, позволяющая естественным образом распространить теорию симметрии на аксиальные объекты, имеет принципиальное

значение при построении моделей различных мультиполярных сред — среды Коссера, среды Кельвина, теории стержней, теории пластин и оболочек, а также при построении моделей пьезоупругих, магнитоупругих и прочих сред, в которых учитываются вращательные степени свободы.

О п р е д е л е н и е. *Группой симметрии* называется совокупность ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$, для которых ортогональное преобразование объекта совпадает с исходным объектом.

Заметим, что группа симметрии любого тензора не является пустой: в ней всегда содержится единичный тензор $\mathbf{E}$, соответствующий тождественному преобразованию.

Группа симметрии полярного скаляра совпадает с полной ортогональной группой ($a' = 1 \cdot a,\ \forall \mathbf{Q}$), а группой симметрии аксиального скаляра является собственно ортогональная группа ($a' = (\det Q)\, a$ т. е. $a' = a$, если $\det \mathbf{Q} = 1$).

Группа симметрии полярного вектора $\mathbf{a}$ состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}' = \left(\frac{1 - \cos\theta}{a^2}\, \mathbf{a}\mathbf{a} + \cos\theta\, \mathbf{E} + \frac{\sin\theta}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \times \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} + \frac{\sin\theta}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

и отражений от плоскостей, проходящих через $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a}' = (-1)^0\, (\mathbf{E} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \qquad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0).$$

Для аксиального вектора группа симметрии состоит из тензоров поворота вокруг $\mathbf{a}$ и отражений от плоскостей, ортогональных $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a}' = (-1) \left(\mathbf{E} - \frac{2}{|\mathbf{a}|^2}\, \mathbf{a}\mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Геометрически очевидно, что других ортогональных преобразований, сохраняющих исходный вектор, нет.

Группа симметрии симметричного полярного тензора второго ранга, все собственные числа которого различны, совпадает с группой совмещений эллипсоида: повороты вокруг каждой из собственных осей этого тензора на π, отражения от плоскостей, ортогональных собственным

векторам, инверсия и тождественное преобразование, т. е. восемь комбинаций знаков в $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \pm\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 \pm \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{e}_k$ — собственные векторы рассматриваемого тензора.

Тензору с двухкратным собственным значением соответствует поверхность вращения. Следовательно, группа симметрии такого тензора расширяется за счет произвольных поворотов вокруг оси симметрии. Такие тензоры называются *трансверсально-изотропными.* В случае шарового полярного тензора группа симметрии совпадает с полной ортогональной группой.

Отметим, что разница между полярными и аксиальными объектами проявляется только при рассмотрении отражений. При этом обладающие одинаковыми элементами зеркальной симметрии полярный и аксиальный тензора второго ранга имеют различную структуру. Например, пусть тензор зеркального отражения от ортогональной $\mathbf{e}_1$ плоскости принадлежит к группам симметрии обоих тензоров. Тогда полярный тензор должен иметь вид:

$$\mathbf{A} = A_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + A_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + A_{32}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2,$$

где A_{mn} — полярные скаляры. В то время, как аксиальный тензор, обладающий этой симметрией, имеет вид:

$$\mathbf{B} = B_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + B_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + B_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + B_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1,$$

где B_{mn} — аксиальные скаляры.

О п р е д е л е н и е. Если группа симметрии тензора произвольного ранга совпадает с полной ортогональной группой, то такой тензор называется *изотропным.*

Единственным изотропным вектором является нулевой вектор. Не существует аксиальных изотропных скаляров и тензоров второго ранга. Примером полярного изотропного тензора второго ранга является ша-

ровой тензор $\lambda\mathbf{E}$, где λ — полярный скаляр. Действительно,

$$\mathbf{Q}\cdot(\lambda\mathbf{E})\cdot\mathbf{Q}^T=\lambda\mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{Q}^T=\lambda\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T=\lambda\mathbf{E},\ \forall\mathbf{Q}.$$

Единственным изотропным тензором третьего ранга является аксиальный тензор Леви–Чивита. Поскольку ${}^3\mathbf{L}=-\mathbf{e}_k(\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_s)\mathbf{e}_s$, то с учетом (1.26) получим

$$-\lambda(\det\mathbf{Q})(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_k)\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{Q}^T)=$$
$$=-\lambda(\det\mathbf{Q})^2(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{Q}^T)\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{Q}^T)=-\lambda\,\mathbf{E}\times\mathbf{E},\quad\forall\mathbf{Q}.$$

Отметим, что в общепринятом определении ортогонального преобразования тензор Леви–Чивита не является изотропным, поскольку его группа симметрии совпадает только с собственно ортогональной группой, т. е. его координаты не изменяются при произвольных поворотах и меняют знак при отражениях.

У т в е р ж д е н и е. *Любая перестановка изотропного тензора также является изотропным тензором.* Можно доказать, что любой изотропный тензор четного ранга $2k$ представляет собой линейную комбинацию перестановок тензора $\underbrace{\mathbf{EE}\ldots\mathbf{E}}_{k}$. Таким образом, существуют три типа изотропных тензоров четвертого ранга:

$${}^4\mathbf{I}_1=\mathbf{EE}=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s;\quad {}^4\mathbf{I}_2=\mathbf{e}_k\mathbf{E}\mathbf{e}_k=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k;\quad {}^4\mathbf{I}_3=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s.\quad(1.44)$$

Таким образом, любой изотропный тензор четвертого ранга может быть записан в виде линейной комбинации [24]

$${}^4\mathbf{A}=\alpha\,{}^4\mathbf{I}_1+\beta\,{}^4\mathbf{I}_2+\gamma\,{}^4\mathbf{I}_3.\qquad(1.45)$$

Поскольку изотропные тензоры вида (1.45) широко используются при описании изотропных материалов, выпишем результат двойной свертки этих тензоров с произвольным тензором второго ранга $\mathbf{A}$

$$\begin{gathered}\mathbf{A}\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{I}_1={}^4\mathbf{I}_1\cdot\cdot\,\mathbf{A}=\mathbf{E}\,\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k\cdot\cdot\,A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n=(\operatorname{tr}\mathbf{A})\,\mathbf{E};\\ \mathbf{A}\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{I}_2={}^4\mathbf{I}_2\cdot\cdot\,\mathbf{A}=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\cdot\cdot\,A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n=A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n=\mathbf{A};\qquad(1.46)\\ \mathbf{A}\cdot\cdot\,{}^4\mathbf{I}_3={}^4\mathbf{I}_3\cdot\cdot\,\mathbf{A}=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\cdot\cdot\,A_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n=A_{mn}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m=\mathbf{A}^T.\end{gathered}$$

Поэтому двукратное свертывание с $\frac{1}{2}({}^4\mathbf{I}_2 + {}^4\mathbf{I}_3)$ выделяет симметричную, а с $\frac{1}{2}({}^4\mathbf{I}_2 - {}^4\mathbf{I}_3)$ — антисимметричную часть тензора $\mathbf{A}$. Получаем

$$\left(\lambda\, {}^4\mathbf{I}_1 + \frac{2\mu}{2}\,({}^4\mathbf{I}_2 + {}^4\mathbf{I}_3) + \frac{\nu}{2}\,({}^4\mathbf{I}_2 - {}^4\mathbf{I}_3)\right) \cdot\cdot\, \mathbf{A} = \lambda I_1(\mathbf{A})\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{A}^S + \nu\mathbf{A}^A.$$

К примеру, тензор

$${}^4\mathbf{C} = \lambda\, {}^4\mathbf{I}_1 + 2\mu\, {}^4\mathbf{E}; \quad {}^4\mathbf{E} = \frac{1}{2}\,({}^4\mathbf{I}_2 + {}^4\mathbf{I}_3)$$

представляет собой тензор модулей упругости изотропного материала.

Справедливы также следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
{}^4\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{A}; \qquad \mathbf{A} \cdot {}^4\mathbf{I}_1 = \mathbf{A}\mathbf{E}; \qquad {}^4\mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot {}^4\mathbf{I}_2; \\
\left({}^4\mathbf{I}_1 \cdot\cdot\, \mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{B} = I_1(\mathbf{A})\mathbf{B}; \qquad {}^4\mathbf{I}_1 \cdot\cdot\, (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = I_1(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{E}; \\
\left({}^4\mathbf{I}_2 \cdot\cdot\, \mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}; \qquad {}^4\mathbf{I}_2 \cdot\cdot\, (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}; \\
\left({}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}; \qquad {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T.
\end{gathered}$$

1.5.3. Тензоры четвертого ранга. Специальные тензорные базисы

В механических приложениях тензоры четвертого ранга часто рассматриваются как линейные отображения, переводящие пространство $\mathcal{T}_2$ в $\mathcal{T}_2$. К примеру, тензоры жесткости ${}^4\mathbf{C}$ и податливости ${}^4\mathbf{S}$, связывающие между собой тензоры напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = {}^4\mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}$.

В классической механике сплошных сред тензоры напряжений и деформаций — симметричные тензоры, поэтому большинство тензоров четвертого рода, возникающих в механических приложениях, обладают соответствующими типами внутренней симметрии

$${}^4\mathbf{A}^T_{(1,2)} = {}^4\mathbf{A}^T_{(3,4)} = {}^4\mathbf{A}. \tag{1.47}$$

Таким образом, двойные скалярные умножения ${}^4\mathbf{A} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{B}$ и ${}^4\mathbf{A} : {}^4\mathbf{B}$ эквивалентны.

Операцию перестановки первой и второй диады ${}^4\mathbf{A}^T_{((1,2),(3,4))}$ часто называют транспонированием тензора четвертого ранга. В координатной форме записи это эквивалентно перестановке первой и второй пар индексов: ${}^4\mathbf{A}^T = A_{mnij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$.

Если выполняется условие ${}^4\mathbf{A}^T = {}^4\mathbf{A}$, то такой тензор называют симметричным. Если же ${}^4\mathbf{A}^T = -{}^4\mathbf{A}$, то тензор — антисимметричный.

Единичный тензор четвертого ранга ${}^4\mathbf{E}$ определяется соотношением:

$$ {}^4\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left({}^4\mathbf{I}_2 + {}^4\mathbf{I}_3\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\right). $$

Таким образом, для тензора четвертого ранга, удовлетворяющего соотношениям (1.47), выполняется

$$ {}^4\mathbf{E} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{A} = {}^4\mathbf{A} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{E} = {}^4\mathbf{E} : {}^4\mathbf{A} = {}^4\mathbf{A} : {}^4\mathbf{E} = {}^4\mathbf{A}. $$

Для тензора второго ранга $\mathbf{A}$ тензор ${}^4\mathbf{E}$ выступает в роли единичного тензора, если тензор $\mathbf{A}$ симметричен:

$$ {}^4\mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{E} = {}^4\mathbf{E} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : {}^4\mathbf{E} = \mathbf{A}. $$

В случае антисимметричного тензора $\mathbf{A}$ тензор ${}^4\mathbf{E}$ выделяет его симметричную часть.

Тензор ${}^4\mathbf{A}$ называется *обратимым*, если существует ${}^4\mathbf{A}^{-1}$ такой, что:

$$ {}^4\mathbf{A}^{-1} : {}^4\mathbf{A} = {}^4\mathbf{A} : {}^4\mathbf{A}^{-1} = {}^4\mathbf{E}. $$

Изотропные тензоры. Рассмотрим линейное пространство изотропных тензоров четвертого ранга. Базис этого пространства состоит из двух элементов ${}^4\mathbf{I}_1$ и $\frac{1}{2}({}^4\mathbf{I}_2 + {}^4\mathbf{I}_3)$. Для операций с тензорами из этого пространства удобно использовать следующий базис:

$$ {}^4\mathbf{E}_1 = \frac{1}{3}\,{}^4\mathbf{I}_1; \quad {}^4\mathbf{E}_2 = {}^4\mathbf{E} - {}^4\mathbf{E}_1. $$

Результатом двойной свертки этих тензоров с тензором второго ранга являются соответственно шаровая часть и девиатор тензора

$$^4\mathbf{E}_1 : \mathbf{A} = \frac{1}{3}\mathbf{E}(\mathbf{E} : \mathbf{A}) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\mathbf{A}\,\mathbf{E};$$

$$^4\mathbf{E}_2 : \mathbf{A} = \left(^4\mathbf{E} - {}^4\mathbf{E}_1\right) : \mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_b = \mathrm{dev}\,\mathbf{A}$$

Тензоры $^4\mathbf{E}_1$ и $^4\mathbf{E}_2$ обладают двумя важными свойствами.

1. Ортогональность: $^4\mathbf{E}_1 : {}^4\mathbf{E}_2 = {}^4\mathbf{E}_2 : {}^4\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$.

2. Идемпотентность: $^4\mathbf{E}_1 : {}^4\mathbf{E}_1 = {}^4\mathbf{E}_1$; $\quad {}^4\mathbf{E}_2 : {}^4\mathbf{E}_2 = {}^4\mathbf{E}_2$.

Эти свойства существенно облегчают умножение и обращение изотропных тензоров четвертого ранга. Представим тензоры $^4\mathbf{A}$ и $^4\mathbf{B}$ в виде линейных комбинаций:

$$^4\mathbf{A} = a_1\,{}^4\mathbf{E}_1 + a_2\,{}^4\mathbf{E}_2, \qquad {}^4\mathbf{B} = b_1\,{}^4\mathbf{E}_1 + b_2\,{}^4\mathbf{E}_2,$$

где a_i и b_i — скалярные коэффициенты. Тогда результатом двойного скалярного умножения этих тензоров будет тензор

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = a_1 b_1\,{}^4\mathbf{E}_1 + a_2 b_2\,{}^4\mathbf{E}_2,$$

а обратный тензор вычисляется по простой формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_1}\,{}^4\mathbf{E}_1 + \frac{1}{a_2}\,{}^4\mathbf{E}_2.$$

Трансверсально-изотропные тензоры. *Трансверсально-изотропным тензором* четвертого ранга называется тензор, в группу симметрии которого входит тензор поворота $\mathbf{Q}(\theta\mathbf{m})$, где орт $\mathbf{m}$ называется осью симметрии. Для полярного тензора к группе симметрии также принадлежат отражения от ортогональной к $\mathbf{m}$ плоскости и плоскостей, проходящих через $\mathbf{m}$.

Тензорный базис для трансверсально-изотропных тензоров состоит

из шести элементов [8, 28]:

$$
{}^4\mathbf{T}_1 = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}; \qquad {}^4\mathbf{T}_2 = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta})^T_{(1,4)} + (\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta})^T_{(2,3)} - \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}\right); \tag{1.48}
$$

$$
{}^4\mathbf{T}_3 = \boldsymbol{\theta}\mathbf{m}\mathbf{m}; \qquad {}^4\mathbf{T}_4 = \mathbf{m}\mathbf{m}\boldsymbol{\theta};
$$

$$
{}^4\mathbf{T}_5 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}\mathbf{m} + (\mathbf{m}\boldsymbol{\theta}\mathbf{m})^T_{(1,2)(3,4)} + (\boldsymbol{\theta}\mathbf{m}\mathbf{m})^T_{(1,4)} + (\boldsymbol{\theta}\mathbf{m}\mathbf{m})^T_{(2,3)}\right);
$$

$$
{}^4\mathbf{T}_6 = \mathbf{m}\mathbf{m}\mathbf{m}\mathbf{m},
$$

где $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E} - \mathbf{m}\mathbf{m}$ — проектор на плоскость ортогональную $\mathbf{m}$.

Эти тензоры образуют замкнутую алгебру относительно операции двойного скалярного умножения. Приведем таблицу умножения базисных тензоров.

	${}^4\mathbf{T}_1$	${}^4\mathbf{T}_2$	${}^4\mathbf{T}_3$	${}^4\mathbf{T}_4$	${}^4\mathbf{T}_5$	${}^4\mathbf{T}_6$
${}^4\mathbf{T}_1$	$2\,{}^4\mathbf{T}_1$	$\mathbf{0}$	$2\,{}^4\mathbf{T}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
${}^4\mathbf{T}_2$	$\mathbf{0}$	${}^4\mathbf{T}_2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
${}^4\mathbf{T}_3$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	${}^4\mathbf{T}_1$	$\mathbf{0}$	${}^4\mathbf{T}_3$
${}^4\mathbf{T}_4$	$2\,{}^4\mathbf{T}_4$	$\mathbf{0}$	$2\,{}^4\mathbf{T}_6$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
${}^4\mathbf{T}_5$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	${}^4\mathbf{T}_5/2$	$\mathbf{0}$
${}^4\mathbf{T}_6$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{T}_4$	$\mathbf{0}$	${}^4\mathbf{T}_6$

Отметим, что, вообще говоря, операция умножения некоммутативна: ${}^4\mathbf{T}_i : {}^4\mathbf{T}_j \neq {}^4\mathbf{T}_j : {}^4\mathbf{T}_i$. В таблице стоящие в левом столбце тензоры умножаются на тензоры, стоящие в верхней строке.

Любой трансверсально-изотропный тензор четвертого ранга может быть разложен по элементам базиса (1.48):

$$
{}^4\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{6} a_i\, {}^4\mathbf{T}_i.
$$

Тогда обратный тензор определяется соотношением:

$$
\mathbf{A}^{-1} = \frac{a_6}{2\Delta}\, {}^4\mathbf{T}_1 + \frac{1}{a_2}\, {}^4\mathbf{T}_2 - \frac{a_3}{\Delta}\, {}^4\mathbf{T}_3 - \frac{a_4}{\Delta}\, {}^4\mathbf{T}_4 + \frac{4}{a_5}\, {}^4\mathbf{T}_5 + \frac{2a_1}{\Delta}\, {}^4\mathbf{T}_6,
$$

где $\Delta = 2(a_1 a_6 - a_3 a_4)$.

В заключение раздела приведем представление изотропных тензоров ${}^4\mathbf{E}$ и ${}^4\mathbf{I}_1$ в трансверсально-изотропном базисе:

$$ {}^4\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_k\mathbf{E}\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\right) = \frac{1}{2}\,{}^4\mathbf{T}_1 + {}^4\mathbf{T}_2 + 2\,{}^4\mathbf{T}_5 + {}^4\mathbf{T}_6; $$

$$ {}^4\mathbf{I}_1 = \mathbf{E}\mathbf{E} = {}^4\mathbf{T}_1 + {}^4\mathbf{T}_3 + 2\,{}^4\mathbf{T}_4 + {}^4\mathbf{T}_6. $$

2. ФУНКЦИИ ТЕНЗОРНОГО АРГУМЕНТА

2.1. Тензорные функции

О п р е д е л е н и е. *Тензорной функцией* ${}^p\mathbf{Y} = f({}^m\mathbf{X}_1, {}^n\mathbf{X}_2, \ldots)$ называется отображение, ставящее в соответствие нескольким тензорам различных рангов тензор ранга p.

Например:

1. ${}^p\mathbf{Y} = f(\mathbf{x}, {}^k\mathbf{X}) = \mathbf{x}\cdot{}^k\mathbf{X}; \qquad p = k-1;$
2. $y = f(\mathbf{X}) = \mathbf{E}\cdot\cdot\,\mathbf{X}; \qquad p = 0;$
3. ${}^p\mathbf{Y} = f({}^m\mathbf{X}_1, {}^n\mathbf{X}_2) = {}^m\mathbf{X}_1\,{}^n\mathbf{X}_2; \qquad p = m+n;$
4. ${}^p\mathbf{Y} = f({}^k\mathbf{X}) = {}^k\mathbf{X}\cdot{}^k\mathbf{X}; \qquad p = 2k-2.$

В зависимости от значения p различают скалярно-значную функцию ($p = 0$), векторную функцию ($p = 1$) и тензорные функции ($p > 1$).

О п р е д е л е н и е. Функция называется линейной, если для любых тензоров ${}^m\mathbf{X}_1$ и ${}^n\mathbf{X}_2$ и скаляров α, β выполняется соотношение

$$ f(\alpha\,{}^m\mathbf{X}_1 + \beta\,{}^n\mathbf{X}_2) = \alpha f({}^m\mathbf{X}_1) + \beta f({}^n\mathbf{X}_2). $$

Т е о р е м а. *Для скалярно-значной линейной функции тензорного аргумента $f(\mathbf{X})$ существует единственный тензор $\mathbf{C}$ такой, что для всех $\mathbf{X}$ функция $f(\mathbf{X})$ представима в виде:* $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}\cdot\cdot\,\mathbf{X}^T = \mathbf{C}\odot\mathbf{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем координатное представление тензора $\mathbf{X} = X_{ks}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s$. Тогда по линейности

$$ f(\mathbf{X}) = X_{ks}f(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s) = f(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s)\delta_{km}\delta_{sn}X_{mn} = f(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_m)(\mathbf{e}_s\cdot\mathbf{e}_n)X_{mn} = $$
$$ = f(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s)\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\cdot\cdot\,\mathbf{e}_n\mathbf{e}_mX_{mn} = \mathbf{C}\cdot\cdot\,\mathbf{X}^T. $$

Предположим теперь, что существуют два тензора $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$, таких, что $\mathbf{C}_1 \cdot\cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{C}_2 \cdot\cdot \mathbf{X}^T$, следовательно, $(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) \cdot\cdot \mathbf{X}^T = 0$. Откуда следует, что $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2$. $\square$

Аналогичные представления существуют также для любых линейных тензорных функций тензорного аргумента. В частности, для линейной тензорной функции $\mathbf{F}(\mathbf{X})$, переводящей $\mathcal{T}_2$ в $\mathcal{T}_2$, существует единственный тензор четвертого ранга ${}^4\mathbf{C} = \mathbf{F}(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$ такой, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{X}^T.$$

Доказательство аналогично.

2.2. Изотропные функции. Инварианты системы тензоров

О п р е д е л е н и е. Совокупность ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$, для которых значение функции на ортогональных преобразованиях аргументов совпадает с ортогональным преобразованием функции, называется *группой симметрии тензорной функции* ${}^p\mathbf{Y}' = f({}^k\mathbf{X}')$.

Тензорная функция, группа симметрии которой совпадает с полной ортогональной группой, называется *изотропной функцией.*

Следующие функции являются изотропными:

1. $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$. Примем для определенности, что $\mathbf{x}_1$ – полярный, а $\mathbf{x}_2$ – аксиальный вектора. Тогда $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ будет аксиальным скаляром:

$$f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_1, (\det \mathbf{Q})\, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_2) = (\det \mathbf{Q})\, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_2 = (\det \mathbf{Q})\, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2;$$

2. $f(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2$, ($\mathbf{X}_i$ – полярные):

$$f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 \cdot \mathbf{Q}^T;$$

3. $f(\mathbf{X}) = \operatorname{tr} \mathbf{X}$, ($\mathbf{X}$ – полярный):

$$f(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{E} \cdot\cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot\cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot\cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot\cdot \mathbf{X} = \operatorname{tr} \mathbf{X}.$$

Справедливы следующие теоремы об изотропных тензорных функциях, доказательства которых можно найти, например, в [7].

1. Если тензорная функция $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, аргумент и значение которой симметричные тензоры, изотропна, то главные оси тензоров $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ совпадают.

2. Изотропная тензорная функция $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$, аргумент и значение которой, симметричные тензоры второго ранга, может быть представлена в виде $\mathbf{Y} = f_0\mathbf{E} + f_1\mathbf{X} + f_2\mathbf{X}^2$, где f_0, f_1, f_2 – функции главных инвариантов тензора $\mathbf{X}$.

Т е о р е м а. *Линейная скалярно-значная функция* $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{X}^T$ *изотропна тогда и только тогда, когда* $\mathbf{C}$ *является изотропным тензором, т.е.* $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(\mathbf{X})$ изотропна, то условие $\mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{X}^T = \mathbf{C} \cdot\cdot\, \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T\right)^T$ должно выполняться для любого ортогонального $\mathbf{Q}$.

Так как $\mathbf{A} \cdot\cdot\, \mathbf{B}^T = \operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T)$, то можно записать

$$\mathbf{C} \cdot\cdot\, \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T\right)^T = \operatorname{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Q}^T) =$$
$$= \operatorname{tr}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{X}^T) = (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}) \cdot\cdot\, \mathbf{X}^T.$$

Следовательно, условие изотропии будет выполнено только тогда, когда $\mathbf{C} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}$, т. е. $\mathbf{C}$ — изотропный тензор. $\square$

Единственным изотропным тензором второго ранга является шаровой тензор. Покажем, что функция $f(\mathbf{X}) = \lambda\mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{X}^T = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{X}$ будет изотропной. Действительно

$$\operatorname{tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{Q}^T) = (\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}) \cdot\cdot\, \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{X} = \operatorname{tr} \mathbf{X}.$$

Аналогичным образом доказывается, что линейная тензорная функция $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{X}^T$ будет изотропной только тогда, когда ${}^4\mathbf{C}$ — изотропный тензор вида (1.45). Таким образом, изотропная линейная тензорная функция второго ранга должна иметь вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \alpha(\operatorname{tr} \mathbf{X})\, \mathbf{E} + \beta\mathbf{X} + \gamma\mathbf{X}^T.$$

О п р е д е л е н и е. Любая изотропная скалярно-значная функция произвольного тензора называется *инвариантом этого тензора.*

Инвариант вектора может зависеть только от его модуля, поскольку при ортогональных преобразованиях длина вектора сохраняется, а углы, характеризующие его направление, меняются независимо друг от друга и принимают любые значения.

Инвариантами тензора второго ранга являются, в частности, его собственные числа $\lambda = f(\mathbf{A})$. Действительно, собственные значения тензора $\mathbf{A}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T$ удовлетворяют характеристическому уравнению:

$$\det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{E}) = 0.$$

Цепочка равенств

$$\det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{E}) = \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T) =$$
$$= \det(\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T) = (\det \mathbf{Q})^2 \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$$

показывает, что собственные числа $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ удовлетворяют одному и тому же уравнению и, следовательно, совпадают.

Можно построить множество функций, являющихся комбинациями собственных чисел тензора, которые будут его инвариантами (например $\operatorname{tr} \mathbf{A}$, $\operatorname{tr} \mathbf{A}^n$, $\det \mathbf{A}$), однако не все эти функции будут функционально независимыми. Можно показать, что симметричный тензор второго ранга имеет не более трех независимых инвариантов. Все остальные инварианты могут быть выражены через выбранные независимые инварианты. Инварианты $I_1(\mathbf{A})$, $I_2(\mathbf{A})$ и $I_3(\mathbf{A})$, входящие в тождество Кэли–Гамильтона, обычно называют главными инвариантами тензора. В общем случае, как будет показано ниже, тензор второго ранга (несимметричный) имеет шесть независимых инвариантов.

Может быть показано, что любая изотропная скалярная функция тензора второго ранга является функцией его инвариантов [12, 27, 29].

О п р е д е л е н и е. Изотропная скалярно-значная функция нескольких тензорных аргументов $f = f({}^m\mathbf{X}_1, {}^n\mathbf{X}_2, \ldots)$ называется *совместным инвариантом этих тензоров.*

У т в е р ж д е н и е. *Изотропная скалярно-значная функция нескольких аргументов является функцией совместных инвариантов этих аргументов.* При этом нахождение числа *независимых* совместных инвариантов и их определение, особенно при наличии аксиальных аргументов, является отдельной задачей. Подробное обсуждение этой проблемы можно найти в работе [5], здесь мы только кратко опишем основные положения, касающиеся определения числа независимых инвариантов.

Пусть в качестве аргументов функции задан конечный набор векторов и тензоров второго ранга:

$$\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \qquad \mathbf{A}_1\, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n. \tag{2.1}$$

Отметим, что поскольку любой тензор допускает разложение на симметричную и антисимметричную части, а антисимметричный тензор в свою очередь однозначно определяется сопутствующим вектором, то тензоры в формуле (2.1) можно считать симметричными.

Размерность базиса совместных инвариантов системы (2.1) N определяется числом величин, задание которых фиксирует эту систему с точностью до поворота в пространстве. Например, пусть собственные числа тензора $\mathbf{A}_1$ различны. Тогда число независимых совместных инвариантов равно $N = 3m+3n+3(n-1)$, где $3n$ — число инвариантов, входящих в систему тензоров; $3m$ — число координат векторов $\mathbf{a}_i$ в собственном базисе $\mathbf{A}_1$; $3(n-1)$ — количество углов, фиксирующих собственные векторы тензоров $\mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ относительно тройки собственных векторов $\mathbf{A}_1$.

Справедлива связь числа независимых совместных инвариантов с числом координат всех объектов в произвольном базисе N_*, выражаемая формулой $N = N_* - 3$; $(N_* > 3)$. Случай $N_* = 3$ соответствует набору аргументов, состоящему из одного вектора. При этом, как уже

упоминалось, $N = 1$.

2.3. Операции дифференцирования

2.3.1. Дифференцирование тензора по скалярному аргументу

Дифференцирование тензора по скалярному аргументу осуществляется с помощью обычного правила Лейбница дифференцирования произведения

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{A}} = (\mathbf{a}_k(t)\mathbf{b}_k(t))^{\cdot} = \dot{\mathbf{a}}_k(t)\mathbf{b}_k(t) + \mathbf{a}_k(t)\dot{\mathbf{b}}_k(t). \tag{2.2}$$

Очевидно, что операции дифференцирования и транспонирования коммутативны, т. е.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^T = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{A}\right)^T.$$

Из определения производной тензора по скалярному аргументу (2.2) следуют обычные правила дифференцирования суммы и умножения на число

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\mathbf{B}; \qquad \frac{d}{dt}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\frac{d}{dt}\mathbf{A}.$$

Рассмотрим теперь производную от произведения тензоров:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\cdot} = (\mathbf{a}_k(\mathbf{b}_k\cdot\mathbf{c}_m)\mathbf{d}_m)^{\cdot} =$$
$$= \left(\dot{\mathbf{a}}_k\mathbf{b}_k + \mathbf{a}_k\dot{\mathbf{b}}_k\right)\cdot\mathbf{c}_m\mathbf{d}_m + \mathbf{a}_k\mathbf{b}_k\cdot\left(\dot{\mathbf{c}}_m\mathbf{d}_m + \mathbf{c}_m\dot{\mathbf{d}}_m\right) = \dot{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\dot{\mathbf{B}}.$$

Аналогично для векторного умножения

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^{\cdot} = \dot{\mathbf{A}}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\dot{\mathbf{B}}.$$

Итак, правила дифференцирования тензора по скалярному аргументу вполне стандартны. В качестве примера найдем производную от тензора поворота.

Продифференцируем тождество $\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{P}^T(t) = \mathbf{E}$, учитывая, что $\mathbf{E}$ — постоянный тензор:

$$\dot{\mathbf{P}}(t)\cdot\mathbf{P}^T(t) + \mathbf{P}(t)\cdot\left(\mathbf{P}^T(t)\right)^{\cdot} = \mathbf{0}. \tag{2.3}$$

Поскольку

$$\mathbf{P}(t)\cdot\left(\mathbf{P}^T(t)\right)^{\cdot}=\mathbf{P}(t)\cdot\dot{\mathbf{P}}^T(t)=\left(\dot{\mathbf{P}}(t)\cdot\mathbf{P}^T(t)\right)^T,$$

то из формулы (2.3) следует, что $\mathbf{S}(t)=\dot{\mathbf{P}}(t)\cdot\mathbf{P}^T(t)$ — антисимметричный тензор. Тензор $\mathbf{S}$ часто называют левым тензором спи́на или просто тензором спи́на. Как всякий антисимметричный тензор, тензор спи́на определяется через сопутствующий вектор

$$\mathbf{S}(t)=\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{E}. \tag{2.4}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, называется *вектором угловой скорости*, соответствующим тензору поворота $\mathbf{P}(t)$.

Заметим, что, представив единичный тензор в виде $\mathbf{E}=\mathbf{P}^T(t)\cdot\mathbf{P}(t)$, мы получили бы другой антисимметричный тензор

$$\mathbf{S}_r(t)=\mathbf{P}^T(t)\cdot\dot{\mathbf{P}}(t)=\boldsymbol{\Omega}(t)\times\mathbf{E}=\mathbf{E}\times\boldsymbol{\Omega}(t),$$

который называется правым тензором спи́на, а сопутствующий ему вектор $\boldsymbol{\Omega}(t)$ — правой угловой скоростью. Найдем связь между тензорами $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}_r$. Для выявления данной связи умножим скалярно выражение для тензора спи́на на $\mathbf{E}=\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{P}^T(t)$ слева и справа:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(t)&=\left(\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{P}^T(t)\right)\cdot\dot{\mathbf{P}}(t)\cdot\mathbf{P}^T(t)\cdot\left(\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{P}^T(t)\right)=\\&=\mathbf{P}(t)\cdot\left(\mathbf{P}^T(t)\cdot\dot{\mathbf{P}}(t)\right)\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{P}^T(t)=\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{S}_r(t)\cdot\mathbf{P}^T(t).\end{aligned}$$

Таким образом, левый и правый тензоры спи́на отличаются только поворотом. Такая же простая связь существует между угловыми скоростями. Из соотношения между тензорами спи́на следует, что

$$\boldsymbol{\omega}(t)\times\mathbf{P}=\mathbf{P}(t)\cdot(\boldsymbol{\Omega}(t)\times\mathbf{P})\cdot\mathbf{P}^T(t).$$

С учетом тождества, справедливого для любого ортогонального тензора,

$$\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{Q}^T=\det\mathbf{Q}(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{E},$$

получаем, что

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t).$$

Умножив (2.4) скалярно на $\mathbf{P}$ справа, получим выражение, связывающее изменение тензора поворота с угловой скоростью и с самим тензором поворота:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t).$$

Это соотношение носит название уравнение Пуассона.

Представление (2.4) также позволяет определить угловую скорость по известному тензору поворота. Подставим в (2.4) явное выражение для тензора спи́на и вычислим векторный инвариант от обеих частей равенства:

$$\left(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t)\right)_\times = \left(\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t)\right)_\times = -2\boldsymbol{\omega}.$$

Таким образом, угловая скорость определяется соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t)\right)_\times.$$

Аналогично для правой угловой скорости:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t); \qquad \boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t)\right)_\times.$$

Вспомнив представление тензора поворота через исходный (отсчетный) и повернутый (актуальный) базисы $\mathbf{P} = \mathbf{e}'_k\mathbf{e}_k$, видим, что $\boldsymbol{\Omega}(t)$ записана в отсчетной конфигурации, а $\boldsymbol{\omega}(t)$ – в актуальной.

2.3.2. Дифференцирование скалярно-значной функции

Принятое в анализе определение производной как предела отношения приращения функции к приращению аргумента необобщаемо на функцию тензорного аргумента. Поэтому при определении производной функции по тензору исходят из определения производной как линейной составляющей ее полного приращения. Скалярно-значная функция

тензорного аргумента $f(\mathbf{X})$ является функцией девяти координат тензора $\mathbf{X}$. По определению производной функции нескольких переменных запишем дифференциал функции

$$df(X_{mn}) = \frac{\partial f}{\partial X_{mn}} dX_{mn} = \frac{\partial f}{\partial X_{ks}} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s \cdot\cdot\, \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m dX_{mn} =$$
$$= \mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \odot d\mathbf{X}.$$

Считая $d\mathbf{X}$ приращением тензорного аргумента, назовем линейную часть дифференциала

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial X_{ks}} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_s \tag{2.5}$$

производной скаляра по тензорному аргументу.

Отметим, что представление (2.5) справедливо только в том случае, если координаты тензора X_{mn} независимы. Например, если $\mathbf{X}$ — симметричный тензор второго ранга, то функция f зависит уже не от девяти, а только от шести независимых аргументов. В этом случае представим координаты функции в виде $f(X_{mn}) = f\left(1/2\left(X_{mn} + X_{nm}\right)\right)$ и после дифференцирования по каждой из девяти компонент учтем, что $X_{mn} = X_{nm}$. В результате получим

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial X_{mn}} (\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m),$$

следовательно, производная функции по симметричному тензору — симметричный тензор.

Выражение (2.5) представляет производную по тензорному аргументу в ортогональном базисе. Для инвариантного представления производной введем дифференциал Гато (или слабый дифференциал):

$$df = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X}) \bigg|_{\varepsilon \to 0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X}) - f(\mathbf{X})}{\varepsilon} = \tag{2.6}$$
$$= \mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \odot d\mathbf{X}.$$

О п р е д е л е н и е. Если существует такой тензор второго ранга $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}}$, что соотношение (2.6) выполняется для любого (не обязательно бесконечно малого) тензора $d\mathbf{X}$, то этот тензор $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}}$ называется *производной скалярной функции по тензорному аргументу.*

Если тензор $\mathbf{X}$ является симметричным тензором, то нужно модифицировать данное определение: производной скалярной функции по тензорному аргументу называется *симметричный* тензор второго ранга, удовлетворяющий (2.6). Требование симметричности производной необходимо, так как в противном случае $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}}$ будет неоднозначно определена. Действительно, если $\mathbf{X}$ симметричен, то $d\mathbf{X}$ также должен быть симметричным тензором второго ранга. Поскольку скалярное произведение симметричного и антисимметричного тензора равно нулю, то соотношение (2.6) будет выполняться при добавлении к $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}}$ любого антисимметричного тензора.

Рассмотрим, например, линейную функцию $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{X}^T$. По определению $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \mathbf{C} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T$ можно было бы предположить, что производная $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}}$ должна равняться $\mathbf{C}$. Но в случае симметричного тензора $\mathbf{X}$ требование симметрии производной означает, что

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T\right).$$

Рассмотрим теперь немного более сложный пример. Пусть $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{X}$. Тогда дифференциал

$$\begin{aligned} df = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left((\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X}) \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, (\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X})\right)\Big|_{\varepsilon \to 0} = \\ = \mathbf{X} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{X} = \\ = \left(\mathbf{X} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C}\right)^T \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T + \left({}^4\mathbf{C} \cdot\cdot\, \mathbf{X}\right)^T \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{C}^T_{(3,4)} + {}^4\mathbf{C}^T_{(1,2)} \cdot\cdot\, \mathbf{X}$.

Если $\mathbf{X}^T = \mathbf{X}$, то

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{X} \cdot\cdot\, \left({}^4\mathbf{C}^T_{(3,4)} + {}^4\mathbf{C}\right) + \left({}^4\mathbf{C}^T_{(1,2)} + {}^4\mathbf{C}\right) \cdot\cdot\, \mathbf{X}\right).$$

Отметим также, что, заменив в исходном определении $\mathbf{X}$ на $\mathbf{X}^T$, можем записать

$$df = \mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \mathbf{f}'_{\mathbf{X}^T} \cdot\cdot\, d\mathbf{X} = \left(\mathbf{f}'_{\mathbf{X}^T}\right)^T \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T.$$

Исходя из этого $\left(\mathbf{f}'_{\mathbf{X}^T}\right)^T = \mathbf{f}'_{\mathbf{X}}$. Если $\mathbf{X}$ — симметричный, то отсюда также следует симметричность производной функции по симметричному аргументу.

В качестве примера рассмотрим нахождение производной функции $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X}$ двумя способами.

1. Координатное представление: $\mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X} = X_{km}X_{mk}$,

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = \frac{\partial X_{km}X_{mk}}{\partial X_{ij}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \left(X_{mk}\delta_{ki}\delta_{mj} + X_{km}\delta_{mi}\delta_{kj}\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 2X_{km}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k = 2\mathbf{X}^T.$$

2. Инвариантное представление:

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \left.\frac{\partial(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X}) \cdot\cdot\, (\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X})}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} =$$
$$= \mathbf{X} \cdot\cdot\, d\mathbf{X} + d\mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X} = 2\mathbf{X} \cdot\cdot\, d\mathbf{X} = 2\mathbf{X}^T \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T,$$

следовательно

$$\frac{d(\mathbf{X} \cdot\cdot\, \mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = 2\mathbf{X}^T. \tag{2.7}$$

Для скалярно-значной функции тензорного аргумента справедливы формальные правила дифференцирования суммы и произведения:

$$\frac{d(\phi + \varphi)}{d\mathbf{X}} = \frac{d\phi}{d\mathbf{X}} + \frac{\partial\varphi}{d\mathbf{X}}; \qquad \frac{d(\phi\varphi)}{d\mathbf{X}} = \varphi\frac{d\phi}{d\mathbf{X}} + \phi\frac{d\varphi}{d\mathbf{X}}. \tag{2.8}$$

Дифференцирование главных инвариантов тензора второго ранга.

Найдем производные от главных инвариантов тензора второго ранга, пользуясь инвариантным представлением и учитывая соотношения (2.8) и (2.7).

1. Первый инвариант $f(\mathbf{X}) = \mathbf{E} \cdot\cdot\, \mathbf{X}$;

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \left.\frac{\partial\mathbf{E} \cdot\cdot\, (\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X})}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon\to 0} = \mathbf{E} \cdot\cdot\, d\mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T;$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{E}.$$

2. Второй инвариант $f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2\mathbf{X} - \operatorname{tr}\mathbf{X}^2\right)$;

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\left(2\operatorname{tr}\mathbf{X}\,(\operatorname{tr}\mathbf{X})'_{\mathbf{X}} - (\mathbf{X}\cdot\cdot\,\mathbf{X})'_{\mathbf{X}}\right) = \operatorname{tr}\mathbf{X}\,\mathbf{E} - \mathbf{X}^T.$$

3. Третий инвариант $f(\mathbf{X}) = \frac{1}{3}\left(\operatorname{tr}\mathbf{X}^3 - I_1\operatorname{tr}\mathbf{X}^2 + I_2\operatorname{tr}\mathbf{X}\right)$;

Аналогично выражению (2.7), найдем

$$\left(\operatorname{tr}\mathbf{X}^3\right)'_{\mathbf{X}} = \left(\mathbf{E}\cdot\cdot\,\mathbf{X}^3\right)'_{\mathbf{X}} = 3\left(\mathbf{X}^2\right)^T;$$

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = \frac{1}{3}\left(3\,\left(\mathbf{X}^2\right)^T - 2I_1\mathbf{X}^T - \operatorname{tr}\mathbf{X}^2\mathbf{E} + I_2\mathbf{E} + \operatorname{tr}\mathbf{X}\left(\operatorname{tr}\mathbf{X}\mathbf{E} - \mathbf{X}^T\right)\right) =$$
$$= \left(\mathbf{X}^2 - I_1\mathbf{X} + I_2\mathbf{E}\right)^T.$$

Используя теорему Кэли–Гамильтона, окончательно получим

$$\frac{dI_3}{d\mathbf{X}} = I_3\mathbf{X}^{-T}.$$

Как уже говорилось, любая скалярно-значная изотропная функция симметричного тензорного аргумента является функцией главных инвариантов своего аргумента $f(\mathbf{X}) = f(I_1, I_2, I_3)$. Таким образом, производная изотропной функции f по $\mathbf{X}$ записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{X}} = \frac{\partial f}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial\mathbf{X}} + \frac{\partial f}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\mathbf{X}} =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + I_1\frac{\partial f}{\partial I_2}\right)\mathbf{E} - \frac{\partial f}{\partial I_2}\mathbf{X} + I_3\frac{\partial f}{\partial I_3}\mathbf{X}^{-1}.$$

Производная $f(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T)$.

Введем обозначение $\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T = \mathbf{Y}$. Поскольку $\mathbf{Y}$ — симметричный тензор, то $d\mathbf{Y}$ и $\mathbf{f}'_{\mathbf{Y}}$ также симметричны: $d\mathbf{Y} = d\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T + \mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}^T$. Рассматривая теперь $f(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T)$ как функцию симметричного тензора $\mathbf{Y}$, можем записать

$$df(\mathbf{Y}) = \mathbf{f}'_{\mathbf{Y}}\cdot\cdot\,\mathbf{Y}^T = \mathbf{f}'_{\mathbf{Y}}\cdot\cdot\,\left(d\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T\right) + \mathbf{f}'_{\mathbf{Y}}\cdot\cdot\,\left(\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}^T\right) =$$
$$= (\mathbf{f}'_{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{X})\cdot\cdot\,d\mathbf{X}^T + (\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{f}'_{\mathbf{Y}})\cdot\cdot\,d\mathbf{X} =$$
$$= (\mathbf{f}'_{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{X})\cdot\cdot\,d\mathbf{X}^T + ((\mathbf{f}'_{\mathbf{Y}})^T\cdot\mathbf{X})\cdot\cdot\,d\mathbf{X}^T = 2(\mathbf{f}'_{\mathbf{Y}}\cdot\mathbf{X})\cdot\cdot\,d\mathbf{X}^T.$$

Следовательно, $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = 2\,\mathbf{f}'_{\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T} \cdot \mathbf{X}$.

Например, производная функции $f(\mathbf{X}) = I_1(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T)$ равняется:

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = 2\frac{dI_1(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T)}{d(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^T)} \cdot \mathbf{X} = 2\mathbf{E}\cdot\mathbf{X} = 2\mathbf{X}.$$

Формула связи производной по обратному тензору $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}^{-1}}$ *с* $\mathbf{f}'_{\mathbf{X}}$.

Из определения обратного тензора $\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{E}$ следует, что

$$d\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^{-1} + \mathbf{X}\cdot d(\mathbf{X}^{-1}) = \mathbf{0}.$$

Откуда

$$d(\mathbf{X}^{-1}) = -\mathbf{X}^{-1}\cdot d\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^{-1} \quad \to \quad (d(\mathbf{X}^{-1}))^T = -\mathbf{X}^{-T}\cdot d\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}^{-T}.$$

Тогда

$$df = \mathbf{f}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, \mathbf{X}^T = \mathbf{f}'_{\mathbf{X}^{-1}} \cdot\cdot\, \left(d\mathbf{X}^{-1}\right)^T =$$
$$= -\mathbf{f}'_{\mathbf{X}^{-1}} \cdot\cdot\, \left(\mathbf{X}^{-T}\cdot d\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}^{-T}\right) = -\mathbf{X}^{-T}\cdot\mathbf{f}'_{\mathbf{X}^{-1}}\cdot\mathbf{X}^{-T} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T.$$

Таким образом,

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = -\mathbf{X}^{-T}\cdot\mathbf{f}'_{\mathbf{X}^{-1}}\cdot\mathbf{X}^{-T}$$

и, следовательно

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}^{-1}} = -\mathbf{X}^{T}\cdot\mathbf{f}'_{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{X}^{T}.$$

Например, рассмотрим функцию $f(\mathbf{X}) = I_1(\mathbf{X}^2)$. Тогда

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}} = \left(I_1(\mathbf{X}^2)\right)_{\mathbf{X}} = (\mathbf{X}\cdot\cdot\,\mathbf{X})_{\mathbf{X}} = 2\mathbf{X}^T.$$

Следовательно,

$$\mathbf{f}'_{\mathbf{X}^{-1}} = -\mathbf{X}^T\cdot 2\mathbf{X}^T\cdot\mathbf{X}^T = -2\left(\mathbf{X}^T\right)^3.$$

Частная производная скалярной функции нескольких тензорных аргументов.

Пусть аргументами функции являются n тензоров второго ранга $\mathbf{X}_i$ $i = 1, \ldots, n$. Частная производная функции f по аргументу $\mathbf{X}_i$ обозначается $\partial f / \partial \mathbf{X}_i$ и определяется соотношением

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}_i} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\mathbf{X}_i, \ldots, \mathbf{X}_i + \varepsilon d\mathbf{X}, \ldots, \mathbf{X}_n)\Big|_{\varepsilon \to 0}$$

для любого тензора второго ранга $d\mathbf{X}$.

2.3.3. Дифференцирование тензорных функций по тензорному аргументу

Аналогично производной скалярно-значной функции для функции ${}^p\mathbf{Y} = \mathbf{F}({}^k\mathbf{X})$, действующей из $\mathcal{T}_k$ в $\mathcal{T}_p$, определим производную ${}^{p+k}\mathbf{F}'_{\mathbf{X}}$ как специальный случай производной Гато:

$$\begin{aligned} {}^{p+k}\mathbf{F}'_{\mathbf{X}} \bar{\odot}\, {}^k d\mathbf{X} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{F}({}^k\mathbf{X} + \varepsilon\, {}^k d\mathbf{X})\Big|_{\varepsilon \to 0} = \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{F}({}^k\mathbf{X} + \varepsilon\, {}^k d\mathbf{X}) - \mathbf{F}({}^k\mathbf{X})}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.9}$$

для любого ${}^k d\mathbf{X}$.

Зафиксировав некоторый ортонормированный базис e_k, можем записать координатное представление функции и ее аргумента:

$${}^k\mathbf{X} = X_{n_1 n_2 \ldots n_k} \mathbf{e}_{n_1} \mathbf{e}_{n_2} \ldots \mathbf{e}_{n_k}; \quad {}^p\mathbf{Y} = Y_{m_1 m_2 \ldots m_p} \mathbf{e}_{m_1} \mathbf{e}_{m_2} \ldots \mathbf{e}_{m_p},$$

где координаты тензора ${}^p\mathbf{Y}$ являются функциями координат ${}^p\mathbf{X}$:

$$Y_{m_1 m_2 \ldots m_p} = F_{m_1 m_2 \ldots m_p}(X_{n_1 n_2 \ldots n_k}).$$

Подставив координатное представление функции в правую часть выражения (2.9), получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_{m_1 m_2 \ldots m_p}(X_{n_1 n_2 \ldots n_k} + \varepsilon\, dX_{n_1 n_2 \ldots n_k}) \mathbf{e}_{m_1} \mathbf{e}_{m_2} \ldots \mathbf{e}_{m_p}\Big|_{\varepsilon \to 0} = \\ &= \frac{\partial F_{m_1 m_2 \ldots m_p}}{\partial X_{n_1 n_2 \ldots n_k}} \mathbf{e}_{m_1} \mathbf{e}_{m_2} \ldots \mathbf{e}_{m_p}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что тензор ${}^{p+k}\mathbf{F}'_{\mathbf{X}}$ имеет вид

$$ {}^{p+k}\mathbf{F}'_{\mathbf{X}} = \frac{\partial F_{m_1 m_2 \ldots m_p}}{\partial X_{n_1 n_2 \ldots n_k}} \underbrace{\mathbf{e}_{m_1}\mathbf{e}_{m_2}\ldots\mathbf{e}_{m_p}\mathbf{e}_{n_1}\mathbf{e}_{n_2}\ldots\mathbf{e}_{n_k}}_{p+k}. $$

В частности, для тензоров второго ранга

$$ \mathbf{F}'_{\mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial F_{ks}}{\partial X_{mn}}\,\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n. $$

В случае симметричного аргумента производная определяется с точностью до произвольной антисимметричной составляющей. Поэтому для определенности полагаем эту антисимметричную часть нулевой. В частности, для тензоров второго ранга:

$$ \mathbf{F}'_{\mathbf{X}} = \frac{1}{2}\frac{\partial F_{ks}}{\partial X_{mn}}\,\mathbf{e}_k\mathbf{e}_s(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n\mathbf{e}_m). $$

Рассмотрим несколько примеров:

1. $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$,

$$ \mathbf{F}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\mathbf{X} + \varepsilon d\mathbf{X})\Big|_{\varepsilon\to 0} = d\mathbf{X} = {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T, $$

следовательно,

$$ \frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}} = {}^4\mathbf{I}_3; $$

2. $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T = X_{mn}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m$,

$$ \mathbf{F}'_{\mathbf{X}} = \frac{\partial X_{mn}}{\partial X_{ij}}\,\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{mi}\delta_{nj}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = {}^4\mathbf{I}_2. $$

3. $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$, где $\mathbf{X}$ — симметричный тензор.

$$ \mathbf{F}'_{\mathbf{X}} = \left({}^4\mathbf{I}_3\right)^s_{(3,4)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n\mathbf{e}_m\right) = \frac{1}{2}\left({}^4\mathbf{I}_3 + {}^4\mathbf{I}_2\right). $$

Производная произведения скаляра на тензор

Найдем дифференциал $f(\mathbf{X})\mathbf{F}(\mathbf{X})$:

$$d(f\mathbf{F}) = \mathbf{F}df + fd\mathbf{F} = (\mathbf{F}f'_{\mathbf{X}} + f\mathbf{F}'_{\mathbf{X}}) \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T.$$

Следовательно,

$$(f\mathbf{F})'_{\mathbf{X}} = \mathbf{F}f'_{\mathbf{X}} + f\mathbf{F}'_{\mathbf{X}}.$$

Например,

$$\frac{dI_1(\mathbf{X})\mathbf{X}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{X}\frac{dI_1(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} + I_1(\mathbf{X})\frac{d\mathbf{X}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{X}\mathbf{E} + I_1(\mathbf{X})\,{}^4\mathbf{I}_3.$$

Производная произведения тензоров

$$d(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = d\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{F}_2 = \left(\mathbf{F}'_{1\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T\right) \cdot \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \cdot \left(\mathbf{F}'_{2\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T\right).$$

С помощью формулы (1.46) представим $d\mathbf{X}^T$ в виде

$$d\mathbf{X}^T = {}^4\mathbf{I}_2 \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T,$$

что позволит перенести $d\mathbf{X}^T$ в первом слагаемом вправо:

$$\left(\mathbf{F}'_{1\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T\right) \cdot \mathbf{F}_2 = (\mathbf{F}'_{1\mathbf{X}} \cdot\cdot\, \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T).$$

Окончательно найдем

$$\frac{d(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2)}{d\mathbf{X}} = (\mathbf{F}'_{1\mathbf{X}} \cdot\cdot\, \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{F}_2\, \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k + \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}'_{2\mathbf{X}}.$$

Например:

1) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X})'_{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \cdot {}^4\mathbf{I}_3; \qquad (\mathbf{X} \cdot \mathbf{A})'_{\mathbf{X}} = \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k;$

2) $(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X})'_{\mathbf{X}} = {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{X}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k + \mathbf{X} \cdot {}^4\mathbf{I}_3 =$
$= \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{X}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k + \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k)\, \mathbf{e}_m\mathbf{e}_k.$

Производная от обратного тензора

Имеем цепочку формул:

$$\mathbf{E}'_{\mathbf{X}} = \mathbf{0} = \left(\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}^{-1}\right)'_{\mathbf{X}} = {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{e}_k\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{X}^{-1}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k + \mathbf{X}\cdot\left(\mathbf{X}^{-1}\right)'_{\mathbf{X}};$$

откуда находим

$$\left(\mathbf{X}^{-1}\right)'_{\mathbf{X}} = -\mathbf{X}^{-1}\cdot\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{X}^{-1}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_k$$

Замена переменной

Пусть тензор $\mathbf{Z}$ зависит от тензора $\mathbf{Y}$, который, в свою очередь, зависит от тензора $\mathbf{X}$. Тогда дифференциал $\mathbf{Z}$ может быть записан через приращения тензоров $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{X}$:

$$d\mathbf{Z} = \mathbf{Z}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T = \mathbf{Z}'_{\mathbf{Y}} \cdot\cdot\, d\mathbf{Y}^T. \tag{2.10}$$

В свою очередь, дифференциал $\mathbf{Y}$ может быть записан как

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T; \qquad d\mathbf{Y}^T = {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, d\mathbf{Y} = {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} \cdot\cdot\, d\mathbf{X}^T.$$

Подставив $d\mathbf{Y}^T$ в (2.10) и приравняв множители при $d\mathbf{X}^T$, найдем

$$\mathbf{Z}'_{\mathbf{X}} = \mathbf{Z}'_{\mathbf{Y}} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} = \left(\mathbf{Z}'_{\mathbf{Y}}\right)^T_{(34)} \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} = \mathbf{Z}'_{\mathbf{Y}} \cdot\cdot\, \left(\mathbf{Y}'_{\mathbf{X}}\right)^T_{(12)}.$$

Напомним, что $\left({}^4\mathbf{A}\right)^T_{mn}$ обозначает перестановку векторов, стоящих в тензором произведении на позициях m и n.

Для скалярно-значной функции $f(\mathbf{Y}(\mathbf{X}))$:

$$f'_{\mathbf{X}} = f'_{\mathbf{Y}} \cdot\cdot\, {}^4\mathbf{I}_3 \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}} = \left(f'_{\mathbf{Y}}\right)^T \cdot\cdot\, \mathbf{Y}'_{\mathbf{X}}.$$

3. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

3.1. Криволинейные ортогональные координаты

В трехмерном евклидовом пространстве положение точки M задается радиус-вектором $\mathbf{r}$. *Тензорным полем* называется отображение, ставящее в соответствие каждой точке пространства $M(\mathbf{r})$ и каждому моменту времени определенный тензор произвольного ранга ${}^p\mathbf{F} = {}^p\mathbf{F}(\mathbf{r},\, t)$. Примерами тензорных полей могут служить поле температур (скалярное поле), поле скоростей (векторное поле), поле напряжений (тензорное поле) и т. п. Тензорное поле называется непрерывным (или дифференцируемым), если координаты ${}^p\mathbf{F} = {}^p\mathbf{F}(\mathbf{r},\, t)$ являются непрерывными (или дифференцируемыми) функциями радиус-вектора и времени. Если тензор зависит только от $\mathbf{r}$, то данное поле называется *стационарным*.

В выбранной системе координат радиус-вектор определяется тремя числами, называемыми координатами точки. Наиболее часто используются прямоугольная (декартова), цилиндрическая и сферическая системы координат. Важным отличием декартовой системы координат от других является то, что ее базисные векторы одинаковы для всех точек пространства, в то время как в криволинейных системах координат базисные векторы меняются от точки к точке. Чтобы выделить декартову систему координат из всех остальных, обозначим ее базисные векторы через $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$. Соответственно, радиус вектор в прямоугольной ортогональной системе координат задается разложением $\mathbf{r} = x_k\mathbf{i}_k$.

Связь декартовых координат с криволинейными задается тремя соотношениями

$$x_i = x_i(q_1,\, q_2,\, q_3); \qquad i = 1,\, 2,\, 3. \tag{3.1}$$

Будем далее предполагать, что эти функции непрерывны, однозначны и имеют непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Тогда радиус-вектор точки M может быть представлен как функция криволинейных координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3). \tag{3.2}$$

Для однозначности представления (3.2), необходимо, чтобы криволинейные координаты q_k определялись из соотношения (3.1) единственным образом. Условием разрешимости системы (3.1) является невырожденность преобразования, что равносильно требованию необращения в нуль якобиана

$$J = \left| \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right| \neq 0.$$

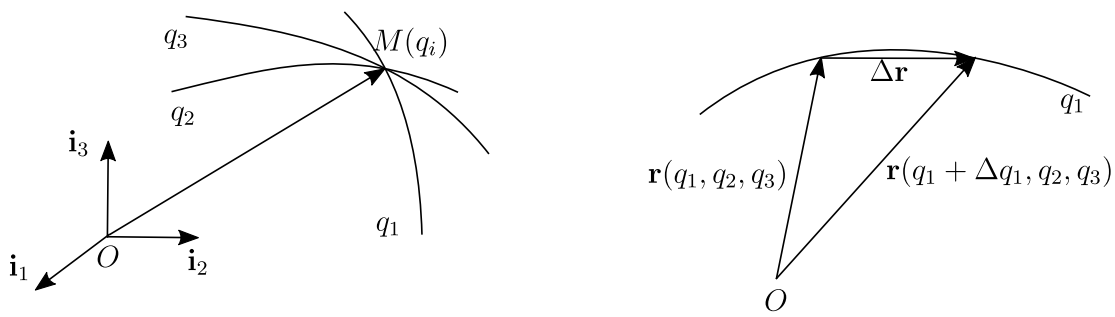

Рис. 6. Криволинейные координаты

Если зафиксировать какие-нибудь две криволинейные координаты, то конец радиус-вектора (3.2) будет описывать в пространстве кривую, соответствующую изменяющейся координате q_k (рис. 6). Перемещению точки M из положения $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ по координатной линии, например q_1, соответствует приращение радиус-вектора

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) - \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3),$$

которое направлено по хорде (рис. 6). Чем меньше приращение координаты, тем ближе $\Delta\mathbf{r}$ к касательной к координатной линии. Таким образом, векторы, касательные к координатным линиям, находятся как предел отношения $\Delta\mathbf{r}/\Delta q_k$ при $\Delta q_k \to 0$:

$$\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}, \qquad |\mathbf{r}_k| = H_k = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_k}\right)^2}. \qquad (3.3)$$

Длины этих векторов H_k называются коэффициентами Ламе.

Триэдр единичных векторов

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{H_k}\mathbf{r}_k, \tag{3.4}$$

касательных к координатным линиям и направленных в сторону возрастания q_k, представляет собой векторный базис в принятой системе криволинейных координат (в данном выражении отсутствует суммирование по k). Для ортогональной криволинейной системы координат выполняются условия $\mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{sk}$. Именно такие координатные системы будут рассмотрены в данном разделе. Отметим, что в отличие от декартовых координат, ортонормированный базис $\mathbf{e}_k$ для криволинейных координат q_k не является постоянным, а меняется от точки к точке.

Для определения геометрического смысла коэффициентов Ламе введем в рассмотрение вектор $d\mathbf{r}$, определяющий переход из данной точки в бесконечно близкую к ней:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} dq_k = \mathbf{r}_k\, dq_k = \sum_{k=1}^{3} H_k \mathbf{e}_k dq_k. \tag{3.5}$$

Квадрат длины этого вектора

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_n} dq_n \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_m} dq_m = dq_m\, dq_n \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_m = (dq_n)^2\, H_n^2.$$

Таким образом, коэффициент Ламе — это коэффициент пропорциональности между приращением координаты и приращением длины дуги линии, соответствующей этой координате.

Элемент объема в ортогональных криволинейных координатах определяется выражением

$$\begin{aligned} dV = dx_1 dx_2 dx_3 = \mathbf{r}_1 dq_1 \cdot (\mathbf{r}_2 dq_2 \times \mathbf{r}_3 dq_3) = \\ = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 = J dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \tag{3.6}$$

В декартовой системе координат координатные линии параллельны координатным осям. Касательные к ним векторы определяются по формуле (3.3): $\mathbf{r}_k = \partial \mathbf{r}/\partial x_k = \mathbf{i}_k$. Откуда, с учетом формулы (3.4), находим коэффициенты Ламе и базисные орты: $H_k = 1,\ \mathbf{e}_k = \mathbf{i}_k$.

3.2. Набла-оператор Гамильтона

Учитывая, что $\mathbf{e}_k$ — ортонормированный базис, из соотношения (3.3) можно получить выражение для приращения координаты dq_k (не суммировать по k)

$$dq_k = \frac{1}{H_k}\mathbf{e}_k \cdot d\mathbf{r}.$$

Рассмотрим теперь скалярное поле $f(\mathbf{r}) = f(q_1,\, q_2,\, q_3)$ как функцию криволинейных координат и запишем ее дифференциал:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_k}\, dq_k = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{H_k}\mathbf{e}_k \frac{\partial f}{\partial q_k} \cdot d\mathbf{r}. \tag{3.7}$$

Введя в рассмотрение символический вектор

$$\nabla = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k\, \frac{1}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{r}_k}{H_k^2}\, \frac{\partial}{\partial q_k}, \tag{3.8}$$

называемый набла-оператором Гамильтона, можно переписать (3.7) в виде

$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}, \tag{3.9}$$

где вектор $\nabla f = \operatorname{grad} f$ (градиент f). Соотношение (3.9) означает, что через градиент выражается линейная часть приращения поля при перемещении из одной точки в соседнюю с ней.

В декартовой системе координат набла-оператор имеет наиболее простой вид

$$\nabla = \mathbf{i}_k\, \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Сказанное можно использовать в применении к вектору:

$$d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_k}\, dq_k = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_k}\frac{1}{H_k}\mathbf{e}_k \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{f}\nabla \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \mathbf{f})^T \cdot d\mathbf{r}.$$

Тензор второго ранга $\nabla\mathbf{f}$ — градиент вектора. Следует иметь в виду, что в зарубежной литературе, например в [22], градиентом называется $(\nabla\mathbf{f})^T$. $(\nabla\mathbf{f})^T$ также называют производной вектора $\mathbf{f}$ по направлению $\mathbf{r}$:

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{r}} = (\nabla\mathbf{f})^T.$$

Результатом применения операции градиента к тензорному полю ${}^p\mathbf{F}$ является тензор, ранг которого на единицу больше ранга исходного тензора.

Важно отметить, что применение набла-оператора к тензорному полю, заданному в криволинейных координатах, усложняется необходимостью учета изменения базисных векторов, направление которых меняется от точки к точке. Таким образом, операция градиента тензорного поля ${}^p\mathbf{F}$ в криволинейной системе координат записывается как

$$\nabla\, {}^p\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_k}{H_k} \frac{\partial F_{n_1 \ldots n_p} \mathbf{e}_{n_1} \ldots \mathbf{e}_{n_p}}{\partial q_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_k}{H_k} \left(\frac{\partial F_{n_1 \ldots n_p}}{\partial q_k} \mathbf{e}_{n_1} \ldots \mathbf{e}_{n_p} + F_{n_1 \ldots n_p} \frac{\partial \mathbf{e}_{n_1}}{\partial q_k} \mathbf{e}_{n_2} \ldots \mathbf{e}_{n_p} + \right.$$

$$\left. + \cdots + F_{n_1 \ldots n_p} \mathbf{e}_{n_1} \ldots \mathbf{e}_{n_{p-1}} \frac{\partial \mathbf{e}_{n_p}}{\partial q_k} \right).$$

Здесь появились производные ортов $\mathbf{e}_s$ по q_k, определяемые деривационными формулами. Их значения можно найти прямым вычислением или с помощью кинематической интерпретации, известной под названием «метод подвижного триедра» [11].

Аналогично тому, как диаде $\mathbf{ab}$ можно сопоставить скаляр $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, тензор $\nabla \mathbf{f}$ определяет скаляр

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k \cdot \frac{1}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} (f_m \mathbf{e}_m) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{H_k} \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_k} + f_m \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_m}{\partial q_k} \right) = \operatorname{div} \mathbf{f},$$

называемый дивергенцией вектора, и вектор

$$\nabla \times \mathbf{f} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{H_k} \mathbf{e}_k \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{H_k^2} \mathbf{r}_k \times \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_k} = \operatorname{rot} \mathbf{f},$$

называемый ротором вектора.

В декартовой системе координат дивергенция и ротор вектора имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}; \qquad \operatorname{rot} \mathbf{f} = \mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_k. \tag{3.10}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{f}$ называют *вектором вихря* $\mathbf{f}$. Векторное поле, ротор которого равен нулю, называется *безвихревым* или *потенциальным*; векторное поле, дивергенция которого равна нулю — *соленоидальным.*

Вектор вихря — вектор, сопутствующий антисимметричному тензору

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n \times \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{H_k^2}\,\mathbf{r}_k \times \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q_k}\right) = \tag{3.11}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{H_k^2}\mathbf{e}_n\left(\left(\mathbf{e}_n\cdot\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q_k}\right)\mathbf{r}_k - (\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{r}_k)\,\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q_k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{H_k^2}\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q_k}\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q_k}\right) = \frac{1}{2}\left((\nabla\mathbf{f})^T - \nabla\mathbf{f}\right) = -(\nabla\mathbf{f})^A,$$

также называемому *тензором спи́на.* Отметим, что в механических приложениях соотношение (3.11), записанное для поля скоростей, и тензор спи́на, связанный с тензором поворота и определенный выражением (2.4), соответствуют описанию разных процессов. Например, при описании движения земли, тензор спи́на (2.4) характеризует вращение земли вокруг своей оси, в то время как антисимметричная часть градиента скорости связана с вращением земли вокруг солнца.

Схожим образом дивергенцией тензорного поля ${}^p\mathbf{F}$ называется результат скалярного произведения набла-оператора и тензорного поля

$$\nabla\cdot\,{}^p\mathbf{F} = \mathbf{e}_k\cdot\frac{1}{H_k}\frac{\partial\,{}^p\mathbf{F}}{\partial q_k}.$$

Операция дивергенции понижает ранг тензорного поля на единицу.

Векторное умножение набла-оператора слева на ${}^p\mathbf{F}$ приводит к тензору того же ранга — ротору тензорного поля

$$\nabla\times\,{}^p\mathbf{F} = \mathbf{e}_k\times\frac{1}{H_k}\frac{\partial\,{}^p\mathbf{F}}{\partial q_k}.$$

Поскольку любой антисимметричный тензор $\mathbf{A}^A$ выражается через сопутствующий вектор $\mathbf{A}^A = \mathbf{E}\times\boldsymbol{\omega}$, то справедливы следующие соот-

ношения:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^A = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{e}_s \frac{1}{H_k} \frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} = \mathbf{e}_k \times \frac{1}{H_k} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_k} = \nabla \times \boldsymbol{\omega};$$

$$\nabla \times \mathbf{A}^A = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}) = \mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_m \frac{1}{H_k} \frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} =$$

$$= (\mathbf{e}_s \delta_{km} - \mathbf{e}_m \delta_{ks})\mathbf{e}_m \frac{1}{H_k} \frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} = \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k \frac{1}{H_k} \frac{\partial \omega_s}{\partial q_k} - \mathbf{E} \frac{1}{H_k} \frac{\partial \omega_k}{\partial q_k} = \boldsymbol{\omega} \nabla - \mathbf{E}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Из этого следует, что

$$I_1(\nabla \times \mathbf{A}^A) = -2\nabla \cdot \boldsymbol{\omega};\ I_1(\nabla \times \mathbf{A}^s) = 0.$$

В качестве примеров рассмотрим применение введенных операций к радиус-вектору и его модулю.

1. Градиент радиус-вектора:

$$\nabla \mathbf{r} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{H_k} \mathbf{e}_k \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{H_k} \mathbf{e}_k \mathbf{r}_k = \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = \mathbf{E}.$$

2. Дивергенция радиус-вектора:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k = 3.$$

3. Ротор радиус-вектора:

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k = 0.$$

4. Градиент модуля радиус-вектора:

$$\nabla |\mathbf{r}| = \nabla |\mathbf{r}| = \mathbf{e}_k \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_k} = \mathbf{e}_k \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Важно отметить, что хотя эта формула получена в декартовой системе координат, она верна в любом базисе, поскольку результат вычислений представлен в инвариантной форме.

5. Градиент сложной функции:

$$\nabla \left(|\mathbf{r}|^n\right) = n|\mathbf{r}|^{n-1} \nabla |\mathbf{r}| = n|\mathbf{r}|^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = n|\mathbf{r}|^{n-2}\mathbf{r}.$$

6. Дивергенция диады радиус-векторов:

$$\nabla \cdot (\mathbf{rr}) = (\nabla \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{r}) = 3\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 4\mathbf{r}.$$

7. Дивергенция «n» радиус-векторов:

$$\nabla \cdot (\underbrace{\mathbf{rr}\ldots\mathbf{r}}_{n}) = (\nabla \cdot \mathbf{r})\underbrace{\mathbf{rr}\ldots\mathbf{r}}_{n-1} + \mathbf{r}(\mathbf{r}\nabla) \cdot \underbrace{\mathbf{rr}\ldots\mathbf{r}}_{n-2} + \cdots + \underbrace{\mathbf{rr}\ldots\mathbf{r}}_{n-2}(\mathbf{r}\nabla) \cdot \mathbf{r} =$$
$$= 3\underbrace{\mathbf{rr}\ldots\mathbf{r}}_{n} + (n-1)\underbrace{\mathbf{rr}\ldots\mathbf{r}}_{n} = (n+2)\underbrace{\mathbf{rr}\ldots\mathbf{r}}_{n}.$$

3.3. Дифференциальные операции над произведением

Известное правило дифференцирования произведения напрямую распространяется на градиент скалярных величин:

$$\nabla(\varphi\phi) = \phi\nabla\varphi + \varphi\nabla\phi.$$

Градиенты произведения скаляра на вектор и тензор вычисляются аналогично:

$$\nabla(\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi)\mathbf{f} + \varphi(\nabla\mathbf{f}); \qquad \nabla(\varphi\mathbf{F}) = (\nabla\varphi)\mathbf{F} + \varphi(\nabla\mathbf{F}).$$

Градиент скалярного произведения векторов:

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = (\nabla\mathbf{f}) \cdot \mathbf{g} + (\nabla\mathbf{g}) \cdot \mathbf{f}.$$

Дивергенция произведения скаляра на вектор:

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{f} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{f}).$$

Ротор произведения скаляра на вектор:

$$\nabla \times (\varphi\mathbf{f}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{f} + \varphi(\nabla \times \mathbf{f}).$$

Дивергенция векторного произведения векторов:

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}).$$

Ротор векторного произведения векторов:

$$\nabla \times (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = (\mathbf{f}\nabla) \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - (\mathbf{g}\nabla) \cdot \mathbf{f}.$$

Следует обратить внимание, что сначала выполняется операция дифференцирования в скобках и только потом — скалярное умножение на соответствующий вектор.

Дивергенция диады:

$$\nabla \cdot (\mathbf{f}\mathbf{g}) = (\nabla \cdot \mathbf{f})\mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot (\mathbf{g}\nabla).$$

Ротор диады:

$$\nabla \times (\mathbf{f}\mathbf{g}) = (\nabla \times \mathbf{f})\mathbf{g} - \mathbf{f} \times (\nabla \mathbf{g}).$$

Градиент скалярного умножения тензора на вектор:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \mathbf{F}) \cdot \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f}) \cdot \mathbf{F}^T.$$

Дивергенция скалярного умножения тензора на вектор:

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{f}) = (\nabla \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{f} + \mathbf{F} \cdot\cdot (\mathbf{f}\nabla) = (\nabla \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{f} + \mathbf{F} \odot (\nabla \mathbf{f}).$$

Дивергенция векторного произведения тензора на радиус-вектор:

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = -\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}); \qquad \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = (\nabla \cdot \mathbf{F}) \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — сопутствующий вектор антисимметричной части тензора $\mathbf{F}$.

Ротор векторного произведения тензора на радиус-вектор:

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{r} + \mathbf{F}^T - \operatorname{tr} \mathbf{F}\, \mathbf{E}.$$

Дивергенция скалярного умножения тензоров:

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\Phi}) = (\nabla \cdot \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{F}^T \cdot\cdot (\nabla \boldsymbol{\Phi}) = (\nabla \cdot \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{F} \odot (\nabla \boldsymbol{\Phi}).$$

Подчеркнем, что поскольку все формулы в этом разделе представлены в инвариантной форме, они верны в любой системе координат, а не только в ортогональной.

3.4. Двухкратное дифференцирование

Повторное дифференцирование вектора ∇f приводит к симметричному тензору второго ранга

$$\nabla\nabla f = \sum_{m,n=1}^{3} \frac{1}{H_m H_n} \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n \frac{\partial^2 f}{\partial q_m \partial q_n}. \tag{3.12}$$

След этого тензора называется *лапласианом* скаляра, а скалярное произведение набла операторов $\nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \Delta$ — *оператором Лапласа.*

В декартовой системе координат оператор Лапласа имеет наиболее простой вид

$$\nabla^2 = \left(\mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \cdot \left(\mathbf{i}_s \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Очевидно, что векторный инвариант от $\nabla\nabla f$ равен нулю

$$\nabla \times \nabla f = \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0,$$

из этого следует, что любое безвихревое или потенциальное векторное поле может быть представлено как градиент некоторой скалярной функции.

Отметим, что лапласиан не является линейной операцией. В частности, лапласиан произведения скаляра на вектор вычисляется как

$$\begin{aligned}\nabla^2(\varphi\mathbf{f}) = \nabla\cdot\nabla(\varphi\mathbf{f}) = \nabla\cdot((\nabla\varphi)\mathbf{f} + \varphi(\nabla\mathbf{f})) = \\ = \varphi\nabla^2\mathbf{f} + \mathbf{f}\nabla^2\varphi + 2(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\mathbf{f}).\end{aligned}$$

Тензор третьего ранга $\nabla\nabla\mathbf{f}$ допускает следующие свертывания.

1. Лапласиан вектора:

$$\nabla\cdot\nabla\mathbf{f} = \nabla^2\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial x_k^2}.$$

2. Градиент дивергенции:

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f}) = \mathbf{i}_m \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_m \partial x_n}.$$

3. Ротор ротора:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}.$$

4. Ротор градиента:

$$\nabla \times (\nabla \mathbf{f}) = \mathbf{0}.$$

5. Градиенту ротора:

$$\nabla(\nabla \times \mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n \times \frac{\partial f_k \mathbf{e}_k}{\partial x_n} = \varepsilon_{nks}\, \mathbf{i}_m \mathbf{i}_s \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_m \partial x_n}.$$

Отметим, что след этого тензора $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0$, т. е. он является антисимметричным тензором. Отсюда также следует, что если векторное поле является вихрем некоторого поля, то это поле соленоидальное.

Наконец, для тензора четвертого ранга $\nabla\nabla\mathbf{F}$ возможны, в частности, следующие свертки:

1. $\operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{i}_k \cdot (\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}_m)\, \mathbf{i}_n \dfrac{\partial^2 F_{mn}}{\partial x_k \partial x_s} = \dfrac{\partial^2 F_{mn}}{\partial x_n \partial x_m}$;
2. $\nabla \cdot \nabla\mathbf{F} = \nabla^2\mathbf{F} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x_k^2}$;
3. $\nabla \times (\nabla\mathbf{F}) = \mathbf{0}$;
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$;
5. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \cdot (\nabla\mathbf{F})$.

3.5. Ортогональные системы координат

3.5.1. Цилиндрическая система координат

В качестве криволинейных координат берутся радиус, азимутальный угол и высота (рис. 7):

$$q_1 = \rho;\ q_2 = \varphi;\ q_3 = z;\ 0 < \rho < \infty;\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ -\infty < z < \infty.$$

Координатными линиями служат радиально направленные лучи, окружности и прямые параллельные оси $\mathbf{i}_3$.

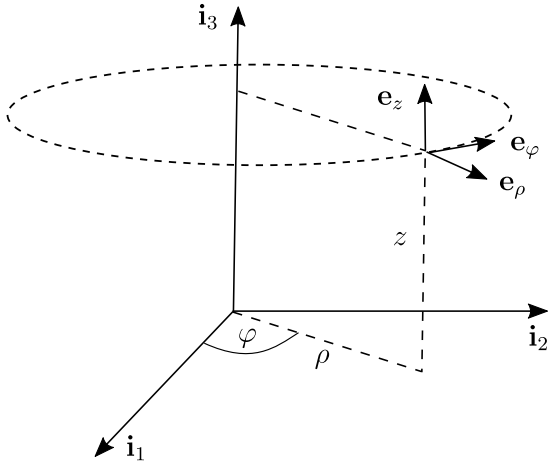

Рис. 7. Цилиндрическая система координат

Радиус вектор точки представляется выражением

$$\mathbf{r} = \rho\cos\varphi\mathbf{i}_1 + \rho\sin\varphi\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3.$$

Из этого следует, что касательные векторы и коэффициенты Ламе имеют вид

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_\rho; \quad H_1 = |\mathbf{r}_1| = 1;$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \rho\cos\varphi\,\mathbf{i}_2 = \rho\mathbf{e}_\varphi; \quad H_2 = |\mathbf{r}_2| = \rho;$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_z; \qquad H_3 = |\mathbf{r}_3| = 1.$$

Легко проверяется, что векторы $\mathbf{r}_k$ взаимно ортогональны.

Базисные векторы $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{z}$ имеют направления радиусов окружностей, касательных к окружностям и оси концентрических цилиндров (см. рис. 7).

Якобиан преобразования координат

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial\rho} & \dfrac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Радиус-вектор в цилиндрической системе координат записывается в форме $\mathbf{r} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$.

Набла-оператор Гамильтона в цилиндрической системе координат

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Деривационные формулы.

Поскольку $\mathbf{e}_z$ — постоянный вектор, то все производные этого вектора будут равны нулю. Кроме того, векторы $\mathbf{e}_\rho$ и $\mathbf{e}_\varphi$ не зависят от ρ и z, следовательно эти производные также обратятся в ноль. Равенство нулю производных от всех базисных векторов по ρ и z отражает тот факт, что триэдр базисных векторов не меняется при движении вдоль соответствующих координатных линий.

Оставшиеся деривационные формулы получаются простым вычислением

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\rho}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{i}_2 = \mathbf{e}_\varphi;$$
$$\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 - \sin\varphi\,\mathbf{i}_2 = -\mathbf{e}_\rho.$$

Воспользовавшись полученными деривационными формулами вычислим лапласиан в цилиндрических координатах. Напомним важное

правило работы с набла-оператором: вначале нужно производить дифференцирование базисных векторов, а лишь затем их умножение

$$\nabla^2 = \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi \cdot \left(\mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\rho} - \mathbf{e}_\rho \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для примера вычислим градиент, дивергенцию и ротор от следующей функции:

$$\mathbf{f} = h(\rho)\mathbf{e}_\rho + g(\varphi)\mathbf{e}_\varphi + f(\rho,\, z)\mathbf{e}_z;$$

1) $\nabla\mathbf{f} = h'_\rho \mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\rho + f'_\rho \mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_z + \dfrac{1}{\rho}\left((h + g'_\varphi)\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi - g\mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\rho\right) + f'_z\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z;$

2) $\nabla\cdot\mathbf{f} = h'_\rho + \dfrac{1}{\rho}(h + g'_\varphi) + f'_z;$ 3) $\nabla\times\mathbf{f} = -f'_\rho\mathbf{e}_\varphi + \dfrac{g}{\rho}\mathbf{e}_z.$

3.5.2. Сферическая система координат

В качестве криволинейных координат берутся радиус сферы, зенитный и азимутальный углы (рис. 8):

$$q_1 = R;\ q_2 = \theta;\ q_3 = \varphi;\ 0 < R < \infty;\ 0 < \theta < \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

а координатными линиями являются: радиусы (линия R), меридианы (линии θ) и параллели (линия φ).

Формулы преобразования координат: $x = R\sin\theta\cos\varphi$; $y = R\sin\theta\sin\varphi$; $z = R\cos\theta$ и Якобиан для сферической системы координат $J = R^2\sin\theta$.

Векторы касательные к координатным линиям:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial R} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 + \cos\theta\,\mathbf{i}_3;$$
$$\mathbf{r}_2 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = R\cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + R\cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 - R\sin\theta\,\mathbf{i}_3;$$
$$\mathbf{r}_3 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = -R\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + R\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_2.$$

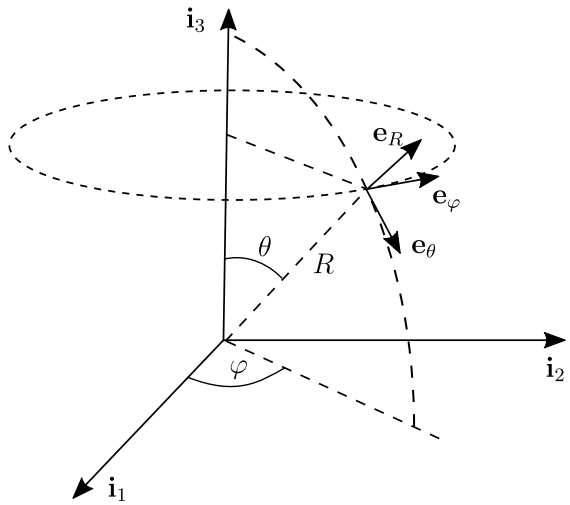

Рис. 8. Сферическая система координат

Коэффициенты Ламе равны

$$H_1 = H_R = 1; \qquad H_2 = H_\theta = R; \qquad H_3 = H_\varphi = R\sin\theta.$$

Следовательно, набла-оператор Гамильтона в сферической системе координат имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_R\,\frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta\,\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi\,\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

где базисные векторы определяются соотношениями:

$$\mathbf{e}_R = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 + \cos\theta\,\mathbf{i}_3;$$
$$\mathbf{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 - \sin\theta\,\mathbf{i}_3;$$
$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{i}_2.$$

Деривационные формулы.

В первую очередь заметим, что все базисные векторы не зависят от R, т. е. все производные по радиусу равны нулю. Поскольку $\mathbf{e}_\varphi$ зависит только от φ, то $\partial\mathbf{e}_\varphi/\partial\theta = 0$.

Для нахождения деривационных соотношений для $\mathbf{e}_R$ воспользуемся тем, что радиус-вектор в сферической системе координат имеет крайне

простую форму $\mathbf{r} = R\,\mathbf{e}_R$, и используем тождество $\nabla\mathbf{r} = \mathbf{E}$. Получим

$$\mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi\mathbf{e}_\varphi = \left(\mathbf{e}_R\,\frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta\,\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi\,\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)(R\,\mathbf{e}_R) =$$
$$= \mathbf{e}_R\mathbf{e}_R + R\,\mathbf{e}_R\,\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta\,\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi\,\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\varphi}.$$

Откуда, сравнивая левую и правую части равенства, находим:

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\theta} = \mathbf{e}_\theta; \quad \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Продифференцируем теперь $\mathbf{e}_\theta$ по θ и φ:

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 - \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 - \cos\theta\,\mathbf{i}_3 = -\mathbf{e}_R,$$
$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi} = -\cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_2 = \cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Осталось найти $\partial\mathbf{e}_\varphi/\partial\varphi$. Заметим, что простое дифференцирование $\partial\mathbf{e}_\varphi/\partial\varphi = -\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 - \sin\varphi\,\mathbf{i}_2$ не приводит к желаемому результату, поскольку этот вектор записан в разложении по базису декартовой системы координат. Рассмотрим плоскость $\varphi = \mathrm{const}$ и изобразим на ней базисные векторы сферической и цилиндрической систем координат (рис. 9).

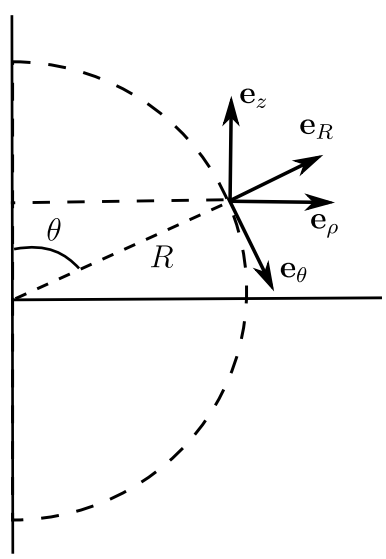

Рис. 9. Сферическая и цилиндрическая системы координат

Вектор $\mathbf{e}_\varphi$ совпадает в обеих системах координат и направлен от нас перпендикулярно рассматриваемой плоскости. Вспомним, что для цилиндрической системы координат $\partial\mathbf{e}_\varphi/\partial\varphi = -\mathbf{e}_\rho$. Разложив $\mathbf{e}_\rho$ по базисным векторам сферической системы координат, получим

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_R - \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\theta} = \mathbf{e}_\theta; \qquad \frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\mathbf{e}_\varphi;$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\mathbf{e}_R; \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\varphi} = \cos\theta\,\mathbf{e}_\varphi;$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial R} = 0; \quad \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\theta} = 0; \qquad \frac{\partial\mathbf{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\sin\theta\,\mathbf{e}_R - \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta.$$

Лапласиан в сферических координатах записывается в следующем виде:

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right).$$

В заключение приведем общий вид выражений дивергенции и ротора векторного поля $\mathbf{f} = f_R\,\mathbf{e}_r + f_\theta\,\mathbf{e}_\theta + f_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$ в сферических координатах [25].

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2 f_R\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, f_\theta\right) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi}{\partial\varphi};$$

$$\nabla\times\mathbf{f} = \frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta f_\varphi\right) - \frac{\partial f_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_R +$$
$$+\frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial f_R}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial(Rf_\varphi)}{\partial R}\right)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial(Rf_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial f_R}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi.$$

3.6. Интегральные формулы

Пусть имеется непрерывная скалярная функция декартовых координат $f(x_1,\, x_2,\, x_3)$, заданная в некотором объеме V. Рассмотрим интеграл функции по объему. При переходе к криволинейным координатам, учитывая соотношение для изменения объема (3.6), интеграл функции по объему записывается в виде

$$\int_V f(x_1,\, x_2\, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_V f(q_1,\, q_2\, q_3) J\, dq_1\, dq_2\, dq_3,$$

где J — якобиан преобразования координат.

3.6.1. Преобразование объемного интеграла в поверхностный

Для двух непрерывно дифференцируемые функций $f(x_1,\, x_2,\, x_3)$ и $g(x_1,\, x_2,\, x_3)$, заданных в объеме V, ограниченном поверхностью S с внешней нормалью $\mathbf{n}$, существует хорошо известная формула Гаусса–Остроградского интегрирования по частям:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_k} g\, dx_1,\, dx_2\, dx_3 = -\int_V \frac{\partial g}{\partial x_k} f\, dx_1,\, dx_2\, dx_3 + \int_S f g n_k\, dS,$$

где dS — элемент поверхности S, $n_k = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_k$ — проекция нормали на соответствующую ось. В частном случае $g = 1$, получаем формулу, преобразующую объемный интеграл в поверхностный:

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dV = \int_S f n_k\, dS.$$

С помощью этого соотношения получим часто используемые в механических приложениях аналогичные формулы с набла-оператором.

Рассмотрим вначале интеграл по объему от градиента скалярной функции

$$\int_V \nabla f\, dV = \int_V \mathbf{i}_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \int_S \mathbf{i}_k f n_k\, dS = \int_S f \mathbf{n}\, dS.$$

Поскольку левая и правая части этой формулы записаны в инвариантой форме, то данная формула применима в любой системе координат с учетом того, что $dV = J\,dq_1\,dq_2\,dq_3$.

Для тензорной функции ${}^p\mathbf{F}$

$$\int_V \nabla\,{}^p\mathbf{F}\,dV = \mathbf{i}_k \int_V \frac{\partial F_{n_1\ldots n_p}}{\partial x_k}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,\mathbf{e}_{n_1}\ldots\mathbf{e}_{n_p} =$$
$$= \mathbf{i}_k \int_S F_{n_1\ldots n_p} n_k\,dS\,\mathbf{e}_{n_1}\ldots\mathbf{e}_{n_p} = \int_S \mathbf{n}\,{}^p\mathbf{F}\,dS.$$

Делая свертку по первым двум индексам $\mathrm{tr}_{(1,2)}$ получаем *теорему о дивергенции*

$$\int_V \nabla\cdot\,{}^p\mathbf{F}\,dV = \int_S \mathbf{n}\cdot\,{}^p\mathbf{F}\,dS.$$

Аналогично для векторного умножения

$$\int_V \nabla\times\,{}^p\mathbf{F}\,dV = \int_S \mathbf{n}\times\,{}^p\mathbf{F}\,dS.$$

Структура приведенных формул очевидна — набла-оператор Гамильтона в объемном интеграле заменяется на вектор нормали в поверхностном.

3.6.2. Теорема Стокса

Пусть в некоторой области пространства задана векторная функция $\mathbf{f}$. Линейный интеграл вектора по кривой L

$$\int_L \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r}$$

называется *циркуляцией вектора* по этой кривой. В общем случае этот интеграл зависит от пути, соединяющего крайние точки кривой M_0 и M_1. Однако в случае потенциального векторного поля $\mathbf{f} = \nabla\varphi$ циркуляция вектора не зависит от выбора L и равна разности значений функции φ в крайних точках. Действительно,

$$\int_L \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^{M_1} \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^{M_1} d\varphi = \varphi(M_1) - \varphi(M_0).$$

Аналогичным образом показывается, что условием независимости от пути интеграла

$$\int_L d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \int_L \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{r}$$

являются равенства

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0; \qquad \mathbf{F} = \nabla \mathbf{f}.$$

Таким образом, условием интегрируемости является потенциальность поля.

По теореме Стокса циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через произвольную поверхность, целиком лежащую в области определения вектора и опирающуюся на этот контур:

$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{f})\, dS, \tag{3.13}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S.

Для обобщения формулы Стокса на тензорное поле перепишем (3.13) в виде

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{f}\, dS,$$

тогда

$$\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \left(\oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}_k \right) \mathbf{i}_k = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{f}_k\, dS\, \mathbf{i}_k = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{F}\, dS,$$

или

$$\oint \mathbf{F}^T \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{F}^T\, dS.$$

При выводе формулы учитывается, что векторы $\mathbf{i}_k$ постоянны и, следовательно, они могут быть вынесены или внесены из под знака интеграла.

4. НЕОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

4.1. Основной и взаимный базисы

Понятие базиса было введено в разделе 1.1.5, где в качестве базиса рассматривались три единичных взаимно ортогональных вектора. Теперь мы выберем в качестве базиса три произвольных (не обязательно единичных) некомпланарных вектора $\mathbf{e}_n$. Некомпланарность означает, что объем параллелепипеда, построенного на этих векторах не равен нулю: $V = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0$. Здесь нумерация векторов выбрана таким образом, чтобы они образовывали правую тройку $V > 0$. Эти три вектора образуют *основной базис*.

Любой вектор $\mathbf{a}$ может быть представлен его разложением в основном базисе. В ортонормированном базисе координаты вектора находятся скалярным умножением вектора на соответствующий базисный орт. При неортогональном базисе этот метод не работает, поскольку скалярное произведение различных базисных векторов не равно нулю. Поэтому в рассмотрение вводится *взаимный базис* $\mathbf{e}^m$ по правилу:

$$\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_n = \delta_n^m = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \tag{4.1}$$

Для построения взаимного базиса по основному учтем, что каждый из векторов взаимного базиса ортогонален векторам основного базиса с отличными от него индексами. Например, $\mathbf{e}^1$ ортогонален $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Значит он может быть представлен в виде векторного произведения этих векторов $\mathbf{e}^1 = \alpha(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$. Для нахождения коэффициента пропорциональности α воспользуемся условием нормировки

$$1 = \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = \alpha(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3 = \alpha V \quad \to \quad \alpha = \frac{1}{V}.$$

Аналогично

$$\mathbf{e}^2 = \frac{1}{V}\,\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1; \qquad \mathbf{e}^3 = \frac{1}{V}\,\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2.$$

При построении взаимного базиса к $\mathbf{e}^k$ мы возвращаемся к исходному базису

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{v}\,\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3; \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{v}\,\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1; \qquad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{v}\,\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2,$$

где v — объем параллелепипеда, построенного на векторах взаимного базиса.

Запишем следующую цепочку равенств:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{v}\,\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3 = \frac{1}{vV}\,\mathbf{e}^2 \times (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \frac{1}{vV}\,\big(\mathbf{e}_1(\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}^2(\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1)\big) = \frac{1}{vV}\mathbf{e}_1.$$

Из этого следует, что объемы параллелепипедов, построенных на векторах основного и взаимного базиса, взаимно обратны.

Разложение вектора $\mathbf{a}$ в основном и взаимном базисе может быть записано, как

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3,$$

или в сокращенной форме:

$$\mathbf{a} = a^k\mathbf{e}_k = a_k\mathbf{e}^k, \tag{4.2}$$

где k — немой индекс. Отметим, что в ранее принятых обозначениях при использовании ортонормированного базиса не было нужды в различении верхних и нижних индексов, и суммирование производилось по любому повторяющемуся индексу. В неортогональном базисе это правило должно быть модифицировано: суммирование производится по немым разновысоким индексам, а свободные индексы имеют одинаковое расположение в левой и правой частях формулы. По повторяющемуся дважды снизу или сверху индексу суммирование не ведется.

Из соотношений (4.2) и (4.1) следуют правила вычисления координат вектора в разных базисах:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m = a^k\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^m = a^k\delta_k^m = a^m;$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m = a_k\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_m = a_k\delta_m^k = a_m.$$

т. е. координаты вектора в основном базисе вычисляются умножением вектора скалярно на векторы взаимного базиса, а координаты во взаимном базисе — скалярным умножением на векторы основного базиса.

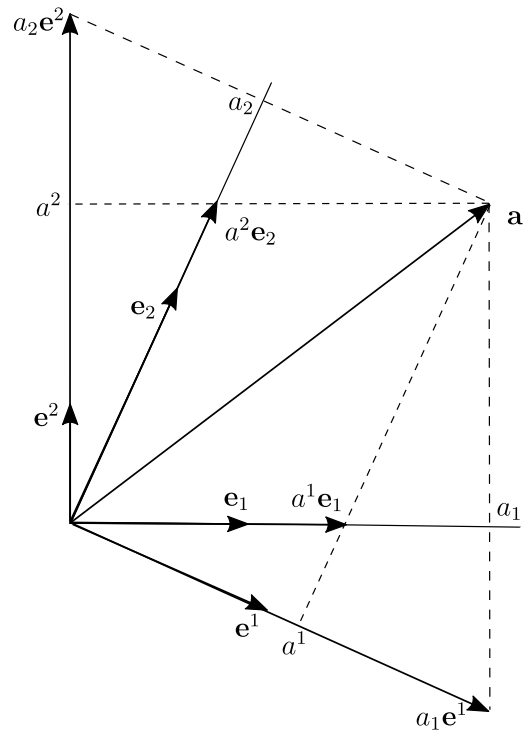

Рис. 10. Разложение вектора по основному и взаимному базису

Пример основного и взаимного базисов и соответствующих координат показан на рис. 10. Предполагается, что вектор $\mathbf{e}_3$ ортогонален приведенной на рисунке плоскости.

4.1.1. Преобразование базиса

Наряду с основным базисом $\mathbf{e}_n$, введем новый базис $\mathbf{e}_{m'}$, связанный с векторами исходного базиса линейными соотношениями

$$\mathbf{e}_{m'} = A^n_{m'}\,\mathbf{e}_n; \qquad A^n_{m'} = \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}^n. \tag{4.3}$$

Обратный переход записывается в виде $\mathbf{e}_n = A^{m'}_n\,\mathbf{e}_{m'}$; $A^{m'}_n = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^{m'}$. Причем $\mathbf{e}_n = A^{m'}_n\,\mathbf{e}_{m'} = A^{m'}_n A^k_{m'}\,\mathbf{e}_k$; $A^{m'}_n A^k_{m'} = \delta^k_n$.

Рассмотрим как меняются координаты вектора при замене базиса. Разложим вектор по взаимным базисам:

$$\mathbf{a} = a_n \mathbf{e}^n = a_{m'} \mathbf{e}^{m'}; \quad a_{m'} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{m'} = a_n \mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_{m'} = A^n_{m'}\, a_n.$$

Сравнение с формулой (4.3) показывает, что координаты вектора во взаимном базисе преобразуются по тому же правилу, что и базисные векторы, поэтому они называются *ковариантные координаты.*

Разложим теперь вектор по основным базисам

$$\mathbf{a} = a^n \mathbf{e}_n = a^{m'} \mathbf{e}_{m'}; \quad a^{m'} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{m'} = a^n \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^{m'} = A^{m'}_n\, a^n,$$

т. е. при замене базиса координаты вектора в основном базисе меняются по правилу, противоположному правилу преобразования базиса. Поэтому они называются *контрвариантные координаты.*

4.1.2. Фундаментальная матрица

Введем в рассмотрение скалярные произведения векторов основного и взаимного базисов:

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = g_{mn}, \ \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^n = g^{mn}$$

и выпишем различные представления скалярного произведения векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a^m \mathbf{e}_m \cdot b^n \mathbf{e}_n = a^m b^n g_{mn}; \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_m \mathbf{e}^m \cdot b_n \mathbf{e}^n = a_m b_n g^{mn}; \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a^m \mathbf{e}_m \cdot b_n \mathbf{e}^n = a^m b^n \delta^n_m = a^m b_n. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Матрица g_{mn}, позволяющая вычислять скалярные произведения векторов по их координатам в заданном базисе и, следовательно, длины векторов и углы между ними, называется *метрической или фундаментальной матрицей.*

Рассмотрим теперь разложение векторов основного базиса по взаимному базису

$$\mathbf{e}_n = e_{nm}\mathbf{e}^m = (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m)\mathbf{e}^m = g_{nm}\mathbf{e}^m, \qquad n = 1,\, 2,\, 3. \tag{4.5}$$

Таким образом, элементы фундаментальной матрицы g_{mn} — это коэффициенты разложения векторов основного базиса по векторам взаимного. Элементы g^{mn} — коэффициенты разложения векторов взаимного базиса по исходному:

$$\mathbf{e}^n = e^{nm}\mathbf{e}_m = (\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}^m)\mathbf{e}_m = g^{nm}\mathbf{e}_m, \qquad n = 1,\, 2,\, 3. \tag{4.6}$$

Легко показать, что матрицы g_{mn} и g^{mn} взаимно обратны. В самом деле

$$\delta^n_m = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^n = g_{mk}\mathbf{e}^k \cdot g^{ns}\mathbf{e}_s = g_{mk}g^{ns}\delta^k_s = g_{mk}g^{nk}.$$

Воспользовавшись известным представлением смешанного произведения через определитель матрицы, можно записать:

$$[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\,[\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \tag{4.7}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{w} \\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{w} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, квадрат объема параллелепипеда, построенного на векторах исходного базиса равняется определителю фундаментальной матрицы q_{mn}:

$$V^2 = (\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3))^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 \end{vmatrix} = |g_{mn}| = g.$$

Аналогично для взаимного базиса

$$|g^{mn}| = \left(\mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3)\right)^2 = v^2 = \frac{1}{V^2} = \frac{1}{g}.$$

Отметим, что определитель фундаментальной матрицы зависит от выбора базиса и, следовательно, не является скаляром.

Матрицы g_{mn} и g^{mn} широко используются для поднятия и опускания индексов. Запишем разложение вектора по основному и взаимному базису и воспользуемся выражениями (4.5) и (4.6):

$$\mathbf{a} = a^n \mathbf{e}_n = a^n g_{mn} \mathbf{e}^m = a_m \mathbf{e}^m; \qquad a_m = a^n g_{mn};$$
$$\mathbf{a} = a_n \mathbf{e}^n = a_n g^{mn} \mathbf{e}_m = a^m \mathbf{e}_m; \qquad a^m = a_n g^{mn}.$$

Рассмотрим теперь представление тензора второго ранга в разных базисах. Пользуясь различными представлениями входящих в диаду векторов, можно записать:

$$\mathbf{A} = A^{mn}\, \mathbf{e}_m \mathbf{e}_n; \qquad A^{mn} = a^m b^n = \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n;$$
$$\mathbf{A} = A_{mn}\, \mathbf{e}^m \mathbf{e}^n; \qquad A_{mn} = a_m b_n = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n;$$
$$\mathbf{A} = A^m_{\cdot n}\, \mathbf{e}_m \mathbf{e}^n; \qquad A^m_{\cdot n} = a^m b_n = \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n;$$
$$\mathbf{A} = A^{\cdot n}_m\, \mathbf{e}^m \mathbf{e}_n; \qquad A^{\cdot n}_m = a_m b^n = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n.$$

Координаты A^{mn} и A_{mn} называются соответственно контрвариантными и ковариантными координатами тензора, $A^m_{\cdot n}$ и $A^{\cdot n}_m$ — смешанными координатами. Порядок следования индексов у координат соответствует порядку следования векторов в диаде, поэтому у смешанных координат для прояснения порядка следования индексов перед вторым индексом ставится точка.

Легко устанавливаются связи между различными координатами

$$A^{mn} = g^{nk} A^m_{\cdot k} = g^{mk} A^{\cdot n}_k = g^{mk} g^{ns} A_{ks};$$
$$A_{mn} = g_{nk} A^{\cdot k}_m = g_{mk} A^k_{\cdot n} = g_{mk} g_{ns} A^{ks},$$

соответствующие правилам подъема и опускания индексов.

Для введения единичного тензора подставим в разложения вектора $\mathbf{a}$ в основном и взаимном базисах представления его координат

$$\mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m \mathbf{e}_m; \qquad \mathbf{a} = a_m \mathbf{e}^m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m \mathbf{e}^m.$$

Таким образом, единичный тензор может быть записан в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}^m \mathbf{e}_m \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_m \mathbf{e}^m.$$

Покажем, что эти представления эквивалентны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_m \mathbf{e}^m = g_{mk} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m = g_{mk} \mathbf{e}^k g^{mn} \mathbf{e}_n = \delta_k^n \, \mathbf{e}^k \mathbf{e}_n = \mathbf{e}^n \mathbf{e}_n.$$

Из соотношений

$$\mathbf{E} = g_{mk} \mathbf{e}^k \mathbf{e}^m = g^{mk} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_m$$

следует, что g_{mn} — являются ковариантными, а g^{mn} контрвариантными координатами единичного тензора. В отличие от случая ортогонального базиса числа g_{mn} и g^{mn} при $m \neq n$ не всегда равны нулю и характеризуют угол между базисными векторами $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{e}_n$, а при $m = n$ равняются квадрату длины соответствующего базисного вектора. Что наряду с соотношениями (4.1.2.) позволяет назвать единичный тензор *метрическим тензором.*

Отметим также, что в смешанном базисе координаты единичного тензора совпадают с координатами единичного тензора в ортонормированном базисе:

$$g_{\cdot n}^{m} = g_{n}^{\cdot m} = \delta_n^m.$$

4.2. Векторное произведение. Определитель тензора

Разложим в векторном произведении $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ векторы $\mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m$ и $\mathbf{b} = b^n \mathbf{e}_n$ по основному базису, а $\mathbf{c}$ — по взаимному:

$$\mathbf{c} = c_k \mathbf{e}^k = a^m b^n (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n).$$

Отсюда следует, что ковариантные координаты вектора $\mathbf{c}$ выражаются следующим образом: $c_k = a^m b^n (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_k$.

Введем в рассмотрение символы[3]

$$e_{mnk} = (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} +V, & (m,\, n,\, k) \text{— четная перестановка } (1,\, 2,\, 3); \\ -V, & (m,\, n,\, k) \text{— нечетная перестановка } (1,\, 2,\, 3); \\ 0, & \text{два или более символа совпадают,} \end{cases}$$

или $e_{mnk} = \sqrt{g}\, \varepsilon_{mnk}$.

Аналогично для взаимного базиса:

$$e^{mnk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \varepsilon^{mnk}.$$

Таким образом, векторное произведение базисных векторов может быть записано в виде

$$\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n = e^{mnk} \mathbf{e}_k, \;\; \mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n = e_{mnk} \mathbf{e}^k.$$

Соотношение (4.7) позволяет представить $e_{mnk} e^{pst}$ в виде

$$e_{mnk} e^{pst} = \left[\mathbf{e}_m \cdot (\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_k)\right] \left[\mathbf{e}^p \cdot (\mathbf{e}^s \times \mathbf{e}^t)\right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^p & \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^s & \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^t \\ \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^p & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^s & \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^t \\ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^p & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^s & \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^p_m & \delta^s_m & \delta^t_m \\ \delta^p_n & \delta^s_n & \delta^t_n \\ \delta^p_k & \delta^s_k & \delta^t_k \end{vmatrix}.$$

Таким образом

$$e_{mnk} e^{psk} = \begin{vmatrix} \delta^p_m & \delta^s_m & 0 \\ \delta^p_n & \delta^s_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \delta^p_m \delta^s_n - \delta^p_n \delta^s_m;$$

$$e_{mnk} e^{mns} = 2\delta^s_k; \qquad e_{mnk} e^{mnk} = 6.$$

Поскольку определитель тензора является инвариантной характеристикой, то он должен быть независим от выбора базиса. В неортогональном базисе определителем тензора называют определитель матрицы

[3] Часто их называют символами Леви–Чивиты.

его смешанных компонент. Чтобы убедиться в независимости $|A^m_{\cdot n}|$ от базисных векторов, вычислим определитель по формуле (1.16). Поскольку скалярное произведение тензора на вектор определяется как

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{a} = A^{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\cdot a_s\mathbf{e}^s = A^{mn}a_n\mathbf{e}^m,$$

то

$$\begin{gathered}(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}')\cdot\mathbf{c}' = A^{mn}A^{ks}A^{pt}a_nb_sc_t(\mathbf{e}_m\times\mathbf{e}_k)\cdot\mathbf{e}_p = \sqrt{g}A^{mn}A^{ks}A^{pt}\varepsilon_{mkp}a_nb_sc_t = \\ = \det(A^{lr})\sqrt{g}\varepsilon^{nst}a_nb_sc_t = \det(A^{lr})g(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \\ = \det(A^{lr}g_{rs})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \det(A^l_{\cdot s})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}.\end{gathered}$$

Здесь использована формула

$$A^{nm}A^{ks}A^{pt}\,\varepsilon_{nkp} = \det(A^{lr})\,\varepsilon^{mst}$$

и правило умножения определителей.

Таким образом, получаем

$$\det\mathbf{A} = \det(A^m_{\cdot n}) = g\det A^{mn} = \det(A_{sn}g^{sm}) = \frac{1}{g}\det A_{sn}.$$

4.3. Ковариантное дифференцирование

4.3.1. Набла-оператор в неортогональном базисе

Рассмотрим радиус-вектор, как функцию неортогональных координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1,\, q^2,\, q^3)$. Основной локальный векторный базис определяется тройкой векторов

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i}, \qquad i = 1,\, 2,\, 3,$$

через который можно выразить бесконечно малый вектор $d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i}dq^i = \mathbf{r}_i\,dq^i.$$

Заметим, что индекс «i» в знаменателе располагается в нижней позиции, т. е. по «i» проводится суммирование от 1 до 3.

Введя взаимный базис $\mathbf{r}^i$ для каждой точки пространства, как решение девяти уравнений

$$\mathbf{r}^m \cdot \mathbf{r}_n = \delta_n^m = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

имеем

$$dq^i = \mathbf{r}^i \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^i.$$

Таким образом, дифференциал скалярной функции $f(q^1,\, q^2,\, q^3)$ представим в виде:

$$df(q^1,\, q^2,\, q^3) = \frac{\partial f(q^1,\, q^2,\, q^3)}{\partial q^i} dq^i = \mathbf{r}^i \frac{\partial f(q^1,\, q^2,\, q^3)}{\partial q^i} \cdot d\mathbf{r} = \nabla f \cdot d\mathbf{r},$$

где символический вектор ∇ разложен по взаимному базису

$$\nabla = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} = \nabla_i \mathbf{r}^i. \tag{4.8}$$

4.3.2. Производные базисных векторов. Символы Кристоффеля

Рассмотрим производную векторной функции $\mathbf{f}(q^1,\, q^2,\, q^3)$ по криволинейным координатам:

$$\nabla_j \mathbf{f}(q^1,\, q^2,\, q^3) = \frac{\partial f^i(q^1,\, q^2,\, q^3)\mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial f^i(q^1,\, q^2,\, q^3)}{\partial q^j}\mathbf{r}_i + f^i(q^1,\, q^2,\, q^3)\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j}.$$

Первое слагаемое аналогично производной в декартовой системе координат, где базисные векторы постоянны и дифференцировать нужно только координаты функции. Второе слагаемое отражает тот факт, что базисные вектора неортогонального базиса изменяются от точки к точке, являясь функциями криволинейных координат. Таким образом, осуществление дифференциальных операций в криволинейных координатах требует нахождения производных базисных векторов по этим координатам.

Введем обозначение

$$\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^j \partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q^i} = \mathbf{r}_{ji}. \tag{4.9}$$

Векторы $\mathbf{r}_{ij}$ могут быть представлены их разложением по базисным векторам

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} = \Gamma^k_{ij}\,\mathbf{r}_k, \tag{4.10}$$

где коэффициенты разложения Γ^k_{ij} называются *символами Кристоффеля второго рода.* Другое часто используемое обозначение символов Кристоффеля:

$$\Gamma^k_{ij} = \left\{ \begin{array}{c} k \\ ij \end{array} \right\}.$$

Из соотношений (4.9) следует, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, так что общее количество символов равно 18.

Домножив скалярно (4.10) на соответствующий вектор взаимного базиса, найдем

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{r}^k.$$

Подставив выражение производной базисных векторов через символы Кристоффеля, окончательно получим, что ковариантная производная векторной функции представима в виде

$$\nabla_j \mathbf{f} = \frac{\partial f^i}{\partial q^j}\mathbf{r}_i + f^i \Gamma^k_{ij}\,\mathbf{r}_k = \left(\frac{\partial f^i}{\partial q^j} + f^k \Gamma^i_{kj}\right)\mathbf{r}_i. \tag{4.11}$$

Выражение в скобках называется *ковариантной производной контрвариантной координаты* и обозначается $\nabla_j f^i$. Ковариантное (или абсолютное) дифференцирование учитывает изменение как самих величин, так и координатного базиса, к которому они относятся.

При ковариантном дифференцировании сохраняются формальные правила дифференцирования суммы и произведения:

$$\nabla_j(a_m + b_n) = \nabla_j a_m + \nabla_j b_m; \qquad \nabla_j(a_m b_n) = (\nabla_j a_m) b_n + a_m(\nabla_j b_n).$$

По определению набла-оператора (4.8) имеем

$$\nabla \mathbf{f} = \mathbf{r}^j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q^j} = \mathbf{r}^j \mathbf{r}_i \nabla_j f^i,$$

т. е. $\nabla_j f^i$ — смешанные координаты градиента вектора.

Для вычисления символов Кристоффеля второго рода найдем их связь с фундаментальной матрицей. Имеем

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_m = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{r}_m = \Gamma^k_{ij} \mathbf{r}_m \cdot \mathbf{r}_m = \Gamma^k_{ij} g_{km}.$$

Левая часть этого выражения может быть представлена через производные элементов фундаментальной матрицы. Действительно,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{im}}{\partial q^j} &= \frac{\partial}{\partial q^j} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_m) = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_m + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{im}; \\
\frac{\partial g_{jm}}{\partial q^i} &= \frac{\partial}{\partial q^i} (\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_m) = \mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_m + \mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_{im}; \\
\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} &= \frac{\partial}{\partial q^m} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}_{im} \cdot \mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{jm}.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^m} \right) = \Gamma_{ijm}.$$

Величины Γ_{ijm} называются символами Кристоффеля первого рода и часто обозначаются как $\Gamma_{ijm} = [ij, m]$. Из симметрии символов Кристоффеля второго рода следует, что $\Gamma_{ijm} = \Gamma_{jim}$.

Таким образом,

$$\Gamma^k_{ij} g_{km} = \Gamma_{ijm},$$

откуда следует, что

$$\Gamma_{ijm} g^{mn} = \Gamma^k_{ij} g_{km} g^{mn} = \Gamma^k_{ij} \delta^n_k = \Gamma^n_{ij}.$$

В качестве примера найдем градиент векторной функции в цилиндрической системе координат. Начнем с нахождения символов Кристоффеля.

В разделе 3.5.1 было получено, что базисные векторы в цилиндрической системе координат имеют вид

$$\mathbf{r}_1 = \cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{i}_2; \quad \mathbf{r}_2 = -\rho\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \rho\cos\varphi\,\mathbf{i}_2; \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{i}_3;$$
$$V = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}_3 = \rho.$$

Строим взаимный базис:

$$\mathbf{r}^1 = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = \cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{i}_2 = \mathbf{r}_1;$$
$$\mathbf{r}^2 = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 = \frac{1}{\rho}\left(-\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{i}_2\right) = \frac{1}{\rho}\mathbf{r}_2;$$
$$\mathbf{r}^3 = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\mathbf{i}_3 = \mathbf{r}_3$$

и соответствующие фундаментальные матрицы

$$g_{km} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad g^{km} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Единственной отличной от нуля производной элементов g_{km} по криволинейным координатам является

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial \rho} = 2\rho.$$

Таким образом, ненулевые символы Кристоффера первого рода записываются следующим образом:

$$\Gamma_{221} = -\rho; \qquad \Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \rho.$$

Следовательно, отличными от нуля символами Кристоффера второго рода будут:

$$\Gamma^k_{22} = \Gamma_{221} g^{1k} \quad \to \quad \Gamma^1_{22} = \Gamma_{221} g^{11} = -\rho; \quad \Gamma^2_{22} = \Gamma^3_{22} = 0;$$
$$\Gamma^k_{12} = \Gamma_{122} g^{2k} \quad \to \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{12} = 0; \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma_{212} g^{22} = \frac{1}{\rho}.$$

Таким образом, ковариантные производные контрвариантных координат в цилиндрической системе координат

$$\nabla_1 f^1 = \frac{\partial f^1}{\partial \rho}; \quad \nabla_1 f^2 = \frac{\partial f^2}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} f^2; \quad \nabla_1 f^3 = \frac{\partial f^3}{\partial \rho};$$
$$\nabla_2 f^1 = \frac{\partial f^1}{\partial \varphi} - \rho f^2; \quad \nabla_2 f^2 = \frac{\partial f^2}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} f^1; \quad \nabla_2 f^3 = \frac{\partial f^3}{\partial \varphi};$$
$$\nabla_3 f^1 = \frac{\partial f^1}{\partial z}; \quad \nabla_3 f^2 = \frac{\partial f^2}{\partial z}; \quad \nabla_3 f^3 = \frac{\partial f^3}{\partial z}.$$

Найдем, к примеру, градиент функции $\mathbf{f} = \rho^2 \mathbf{r}_1 + \cos\varphi \mathbf{r}_2 + \rho z \mathbf{r}_3$. Ковариантные производные равны:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho} = 2\rho \mathbf{r}_1 + z\mathbf{r}_3 + f^2 \Gamma^2_{12} \mathbf{r}_2 = 2\rho \mathbf{r}_1 + z\mathbf{r}_3 + \frac{1}{\rho}\cos\varphi \mathbf{r}_2;$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi \mathbf{r}_2 + f^2 \Gamma^1_{22} \mathbf{r}_1 + f^1 \Gamma^2_{21} \mathbf{r}_2 = -\sin\varphi \mathbf{r}_2 - \frac{\cos\varphi}{\rho} \mathbf{r}_1 + \rho \mathbf{r}_2;$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = \rho \mathbf{r}_3.$$

Окончательно получим

$$\nabla \mathbf{f} = 2\rho \mathbf{r}^1 \mathbf{r}_1 + z\mathbf{r}^1 \mathbf{r}_3 + \frac{1}{\rho}\cos\varphi \mathbf{r}^1 \mathbf{r}_2 + (\rho - \sin\varphi)\mathbf{r}^2 \mathbf{r}_2 - \frac{\cos\varphi}{\rho}\mathbf{r}^2 \mathbf{r}_1 + \rho \mathbf{r}^3 \mathbf{r}_3 =$$
$$= 2\rho \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1 + z\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_3 + \frac{1}{\rho}\cos\varphi \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 + (1 - \frac{\sin\varphi}{\rho})\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2 - \frac{\cos\varphi}{\rho^2}\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_1 + \rho \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3.$$

Вычислим теперь производные векторов взаимного базиса. Исходим из соотношения

$$0 = \frac{\partial}{\partial q^j}\delta^i_m = \frac{\partial}{\partial q^j}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_m) = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{r}_m + \mathbf{r}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial q^j} = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{r}_m + \mathbf{r}^i \cdot \Gamma^k_{mj} \mathbf{r}_k.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^j} \cdot \mathbf{r}_m = -\Gamma^k_{mj}\delta^i_k = -\Gamma^i_{mj},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial q^j} = -\Gamma^i_{mj}\mathbf{r}^m.$$

Таким образом, разложение функции во взаимном базисе приводит к соотношению

$$\nabla_j(f_i\mathbf{r}^i) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial q^j} - f_k\Gamma^k_{ij}\right)\mathbf{r}^i.$$

Выражение в скобках — *ковариантная производная ковариантной координаты.*

Градиент вектора может быть также записан в виде

$$\nabla\mathbf{f} = \mathbf{r}^j\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q^j} = \mathbf{r}^j\mathbf{r}^i\nabla_j f_i,$$

где $\nabla_j f^i$ — ковариантные компоненты $\nabla\mathbf{f}$.

4.3.3. Преобразование символов Кристоффеля

Рассмотрим как меняются символы Кристоффеля при замене системы координат. Введем новую систему криволинейных координат $\tilde{q}^k$, связанную со старой матрицей перехода

$$\tilde{q}^k = A^k_n q^n; \qquad q^n = \tilde{A}^n_i\tilde{q}^i.$$

Базисные векторы преобразуются по аналогичному закону:

$$\tilde{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tilde{q}^i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^n}\frac{\partial q^n}{\partial\tilde{q}^i} = \tilde{A}^n_i\mathbf{r}_n; \qquad \tilde{A}^n_i = \tilde{\mathbf{r}}_i\cdot\mathbf{r}^n;$$
$$\mathbf{r}_n = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\tilde{q}^m}\frac{\partial\tilde{q}^m}{\partial q^i} = A^m_n\tilde{\mathbf{r}}_m; \qquad A^m_n = \mathbf{r}_n\cdot\tilde{\mathbf{r}}^m.$$

Запишем соотношение (4.10) в новой системе координат.

$$\tilde{\Gamma}^m_{ij}\tilde{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{r}}_i}{\partial\tilde{q}^j} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{r}}_i}{\partial q^k}\frac{\partial q^k}{\partial\tilde{q}^j} = \tilde{A}^k_j\frac{\partial}{\partial q^k}(\tilde{A}^n_i\mathbf{r}_n) =$$
$$= \tilde{A}^k_j\left(\frac{\partial\tilde{A}^n_i}{\partial q^k}\mathbf{r}_n + \tilde{A}^n_i\frac{\partial\mathbf{r}_n}{\partial q^k}\right) = \tilde{A}^k_j\frac{\partial\tilde{A}^n_i}{\partial q^k}\mathbf{r}_n + \tilde{A}^k_j\tilde{A}^n_i\Gamma^s_{nk}\mathbf{r}_s =$$
$$= \tilde{A}^k_j\frac{\partial\tilde{A}^n_i}{\partial q^k}A^m_i\tilde{\mathbf{r}}_m + \tilde{A}^k_j\tilde{A}^n_i A^m_s\Gamma^s_{nk}\tilde{\mathbf{r}}_m.$$

Окончательно получаем

$$\tilde{\Gamma}^m_{ij} = \tilde{A}^k_j \frac{\partial \tilde{A}^n_i}{\partial q^k} A^m_i + \tilde{A}^k_j \tilde{A}^n_i A^m_s \Gamma^s_{nk}.$$

Второе слагаемое соответствует преобразованию координат тензора третьего ранга при замене базиса. Наличие дополнительного первого слагаемого означает, что символы Кристоффеля, несмотря на наличие в обозначениях трех индексов, не являются координатами тензора третьего ранга. Это отражает тот факт, что символы Кристоффеля зависят не только от базисных векторов, но также от скорости их изменения при переходе от точки к точке.

4.3.4. Ковариантное дифференцирование тензора второго ранга

Дифференцирование векторной функции, введенное в разделе 4.11, легко обобщается на тензоры любого ранга. В частности, ковариантные производные тензора второго ранга в основном базисе записываются в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^k} = \frac{\partial (F^{ij}\,\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j)}{\partial q^k} = \frac{\partial F^{ij}}{\partial q^k}\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j + F^{ij}\left(\Gamma^m_{ik}\,\mathbf{r}_m\mathbf{r}_j + \Gamma^m_{jk}\,\mathbf{r}_i\mathbf{r}_m\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial F^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma^i_{mk}\,F^{mj} + \Gamma^j_{mk}\,F^{im}\right)\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j.$$

Аналогично, во взаимном и смешанных базисах:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^k} = \frac{\partial (F_{ij}\,\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j)}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma^m_{ik}\,F_{mj} - \Gamma^m_{jk}\,F_{im}\right)\mathbf{r}^i\mathbf{r}^j;$$
$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^k} = \frac{\partial (F^i_{\cdot j}\,\mathbf{r}_i\mathbf{r}^j)}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial F^i_{\cdot j}}{\partial q^k} + \Gamma^i_{mk}\,F^m_{\cdot j} - \Gamma^m_{jk}\,F^i_{\cdot m}\right)\mathbf{r}_i\mathbf{r}^j;$$
$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^k} = \frac{\partial (F_i^{\cdot j}\,\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j)}{\partial q^k} = \left(\frac{\partial F_i^{\cdot j}}{\partial q^k} - \Gamma^m_{ik}\,F_m^{\cdot j} + \Gamma^j_{mk}\,F_i^{\cdot m}\right)\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j.$$

Заметим, что ковариантная производная координат метрического тензора равна нулю. Действительно,

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q^j} = \frac{\partial(\mathbf{r}^i \mathbf{r}_i)}{\partial q^j} = -\Gamma^i_{jk}\mathbf{r}^k\mathbf{r}_i + \Gamma^k_{ij}\mathbf{r}^i\mathbf{r}_k = -\Gamma^i_{jk}\mathbf{r}^k\mathbf{r}_i + \Gamma^i_{jk}\mathbf{r}^k\mathbf{r}_i = 0,$$

что естественно, поскольку метрический тензор в неортогональном базисе выполняет роль единичного тензора, производная которого равна нулю: $\nabla\mathbf{E} = 0$. Таким образом, при ковариантном дифференцировании компоненты метрического тензора играют роль постоянных, т. е. их можно вносить и выносить за знак символа ∇_j:

$$\nabla_j g^{mn} a_n = g^{mn}\nabla_j a_n; \qquad \nabla_j g_{mn} a^n = g_{mn}\nabla_j a^n.$$

4.3.5. Дифференциальные операции в криволинейных координатах

Рассмотрим различные дифференциальные операции над векторными и тензорными полями.

1. Дивергенция вектора:

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \mathbf{r}^i\cdot\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^i\cdot\mathbf{r}^j\nabla_i f_j = g^{ij}\nabla_i f_j =$$

$$= \nabla_i g^{ij} f_i = \nabla_i f^i = \frac{\partial f^i}{\partial q^i} + \Gamma^i_{in} f^n.$$

Для упрощения этого выражения получим соотношение для Γ^i_{in}. Начнем с дифференцирования $\sqrt{g}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^n} = \frac{\partial}{\partial q^n}\left[\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)\right] =$$

$$= \frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial q^n}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_1\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}_2}{\partial q^n}\times\mathbf{r}_3\right) + \mathbf{r}_1\cdot\left(\mathbf{r}_2\times\frac{\partial\mathbf{r}_3}{\partial q^n}\right) =$$

$$= \frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial q^n}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3) + \frac{\partial\mathbf{r}_2}{\partial q^n}\cdot(\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1) + \frac{\partial\mathbf{r}_3}{\partial q^n}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) =$$

$$= \mathbf{r}_{1n}\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_{2j}\cdot(\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_{3n}\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) =$$

$$= \Gamma^i_{1n}\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3) + \Gamma^i_{2n}\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1) + \Gamma^i_{3n}\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2) =$$

$$= \left(\Gamma^i_{1n} + \Gamma^i_{2n} + \Gamma^i_{3n}\right)\sqrt{g} = \sqrt{g}\,\Gamma^i_{in}.$$

Следовательно,

$$\Gamma^i_{in} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^n}.$$

Окончательно получим

$$\nabla\cdot\mathbf{f} = \frac{\partial f^i}{\partial q^i} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^n}f^n = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^n}(\sqrt{g}f^n).$$

В декартовой системе координат $\sqrt{g}=1$ и выражение для дивергенции вектора переходит в (3.10).

2. Ротор вектора:

$$\nabla\times\mathbf{f} = \mathbf{r}^j\times\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial q^j} = \mathbf{r}^j\times\mathbf{r}^i\nabla_j f_i = e^{jik}\mathbf{r}_k\nabla_j f_i = e^{jik}\mathbf{r}_k\left(\frac{\partial f_i}{\partial q^j} - \Gamma^n_{ji}f_n\right).$$

Учитывая симметрию символов Кристоффеля по нижним индексам, и, сделав замену немого индекса, можно записать

$$e^{ijk}\Gamma^n_{ji} = e^{ijk}\Gamma^n_{ij} = e^{jik}\Gamma^n_{ij} = -e^{ijk}\Gamma^n_{ij} \quad\to\quad e^{ijk}\Gamma^n_{ji} = 0.$$

Следовательно,

$$\nabla\times\mathbf{f} = e^{jik}\frac{\partial f_i}{\partial q^j}\mathbf{r}_k.$$

3. Дивергенция тензора второго ранга:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \mathbf{r}^i\cdot\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^i\cdot\mathbf{r}_k\mathbf{r}_j\nabla_i F^{kj} = \mathbf{r}_j\nabla_j F^{ij} =$$
$$= \mathbf{r}_j\left(\frac{\partial F^{ij}}{\partial q^i} + \Gamma^i_{ik}F^{kj} + \Gamma^j_{ik}F^{ik}\right).$$

Учитывая, что

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^k}; \qquad \mathbf{r}_j\Gamma^j_{ik} = \frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial q^i},$$

выражение для дивергенции упростится:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \mathbf{r}_j\frac{\partial F^{ij}}{\partial q^i} + \mathbf{r}_j\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^k} + \frac{\partial\mathbf{r}_k}{\partial q^i}F^{ik} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial q^i}(F^{ij}\mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^k} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^k}(\sqrt{g}F^{ij}\mathbf{r}_j).$$

4. Ротор тензора второго ранга:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{r}^i \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial q^i} = \mathbf{r}^i \times \mathbf{r}^k \mathbf{r}^j \nabla_i F_{kj} = e^{ikn} \mathbf{r}_n \mathbf{r}^j \nabla_i F_{kj} =$$
$$= e^{ikn} \mathbf{r}_n \mathbf{r}^j \left(\frac{\partial F_{kj}}{\partial q^i} - \Gamma^m_{ik} F_{mj} - \Gamma^m_{ij} F_{im} \right).$$

Поскольку

$$e^{ikn} \Gamma^m_{ik} = 0, \qquad -\mathbf{r}^j \, \Gamma^m_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}^m}{\partial q^i},$$

то

$$\nabla \times \mathbf{F} = e^{ikn} \mathbf{r}_n \left(\mathbf{r}^j \frac{\partial F_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial \mathbf{r}^m}{\partial q^i} F_{im} \right) = e^{ikn} \mathbf{r}_n \frac{\partial}{\partial q^i} \left(F_{kj} \mathbf{r}^j \right).$$

5. Лапласиан.

Вычислим вначале $\nabla\nabla f$:

$$\nabla\nabla = \mathbf{r}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \left(\mathbf{r}^j \frac{\partial f}{\partial q^j} \right) = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial q^k} \right).$$

Откуда следует, что

$$\nabla^2 = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial q^k} \right) = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial q^k} \right).$$

Выражения дифференциальных операций второго порядка над векторами и тензорами весьма громоздки и здесь не приводятся.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Векуа И. Н.** Основы тензорного анализа и теории ковариантов / И. Н. Векуа. — М. : Наука, 1978. — 296 с.

2. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Наука, 1988. — 560 с.

3. **Димитриенко Ю. И.** Тензорное исчисление / Ю .И. Димитриенко.— М. : Высшая школа, 2001. — 575 с.

4. **Жилин П. А.** Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П. А. Жилин. — СПб. : Нестор, 2001. — 276 с.

5. **Жилин П. А.** Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие / П. А. Жилин. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 584 с.

6. **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории оболочек / П. А. Жилин // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ № 386. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 1982. — С. 29 – 46.

7. **Зубов Л. М.**. Тензорное исчисление / Л. М. Зубов, М. И. Карякин. — М. : Вузовская книга, 2006. — 120 с.

8. **Канаун С. К.**. Метод эффективного поля в механике композитных материалов / С. К. Канаун, В. М. Левин. — Петрозаводск : Изд-во Петрозаводского гос. ун-та, 1993. — 600 с.

9. **Коренев Г. В**. Тензорное исчисление / Г. В. Коренев. — М. : Изд-во МФТИ, 1995. — 240 с.

10. **Кочин Н. Е.** Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. — М. : Наука, 1965. — 424 с.

11. **Лурье А. И.** Теория упругости / А. И. Лурье. — М. : Наука, 1970. — 940 с.

12. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. — М. : Наука, 1980. — 512 с.

13. **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел. — М. : Физматгиз, 1963. — 411 с.

14. **Мейз Дж.** Теория и задачи механики сплошных сред /Дж. Мейз. — М. : Мир, 1974. — 319 с.

15. **Никабадзе М. У.** Некоторые вопросы тензорного исчисления. Часть II / М. У. Никабадзе. — М .: ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова. 2007. — 93 с.

16. **Пальмов В. А.** Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа: учебное пособие / В. А. Пальмов. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 108 с.

17. **Пальмов В. А.** Фундаментальные законы природы в нелинейной термомеханике деформируемых тел: учеб. пособие / В. А. Пальмов. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 142 с.

18. **Победря Б. Е.** Лекции по тензорному анализу / Б. Е. Победря. — М. : Изд-во МГУ, 1986. — 264 с.

19. **Рашевский П. К.** Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. — М. : Наука, 1964. — 664 с.

20. **Речкалов В. Г.** Векторная и тензорная алгебра для будущих физиков и техников: учеб. пособие / В. Г. Речкалов. — Челябинск : ИИУМЦ «Образование», 2008. — 140 с.

21. **Сокольников И. С.** Тензорный анализ /И. С. Сокольников. — М. : Наука, 1971. — 376 с.

22. **Трусделл К.** Первоначалльный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. — М. : Наука, 1975. — 592 с.

23. **Eringen A. C.** Mechanics of Continua / A. C. Eringen. — Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York. — 1980. — 608 p.

24. **Jeffreys H.** Cartesian Tensors / H. Jeffreys. — Cambridge University Press, Cambridge, UK. — 1931.— 92 p.

25. **Lebedev L., Cloud M., Eremeyev V.** Tensor Analysis with Applications in Mechanics// World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. — 2010. — 363 p.

26. **Eremeyev V., Cloud M., Lebedev L.** Applications of Tensor Analysis in Continuum Mechanics // World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. — 2018. — 415 p.

27. **Ogden R. W.** Non-linear Elastic Deformations // Dover, New York. — 1997. — 532 p.

28. **Kachanov M. Sevostianov I.** Micromechanics of Materials, with Applications // Springer International Publishing AG. — 2018. — 711 p.

29. **Truesdell C., Noll W.** The Nonlinear Field Theories of Mechanics. 3rd ed // Springer, Berlin. — 2004. — 602 p.

Вильчевская Елена Никитична

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Редактор *Т. Б. Цыганова*
Оригинал-макет подготовлен автором

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 14.10.2019. Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 8,25. Тираж 100. Заказ

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре
Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел. (812) 552-77-17; 550-40-14.