МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

Работа допущена к защите

Зав. кафедрой, д.ф.-м.н., проф.

_____А. М. Кривцов

«____»_____2016 г.

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание академической степени

МАГИСТРА

Тема: ВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ СКЛЕРАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ГЛАЗА

Направление: 01.04.03 – Механика и математическое моделирование

Выполнила студентка гр. 63604/1 _____ К. П. Фролова

Руководитель, к.ф.-м.н., доцент _____ Е. Н. Вильчевская

Консультант по вопросам охраны труда: _____

Санкт-Петербург
2016

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ 3

Глава 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 5

Глава 2 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ 6

2.1 Математическая модель 6

2.2. Метод преобразования Лапласа 14

2.3. Обратное преобразование Лапласа. Численные алгоритмы обратного преобразования 15

Глава 3 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ 18

3.1 Задача Ламе для упругого изотропного и трансверсально – изотропного сферического слоя 18

3.2 Задача Ламе для вязкоупругого изотропного сферического слоя 20

Глава 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ 22

ВЫВОДЫ 34

Приложение 1 БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ 36

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 43

ВВЕДЕНИЕ

Глаз человека имеет сложную биомеханическую структуру (см. рис. 1). При построении простейших моделей глаза можно считать, что он имеет шаровидную форму. Глаз заполнен прозрачной гелеобразной субстанцией, называемой стекловидным телом. Во внешней фиброзной оболочке глаза можно выделить наружную фиброзную, среднюю сосудистую и внутреннюю сетчатую оболочки [1]. Наружная фиброзная оболочка (она же корнеосклеральная оболочка) выполняет защитную функцию и обуславливает форму глаза. Она состоит из передней прозрачной части - роговицы, - и задней непрозрачной части – склеры, обладающих различными радиусами кривизны и биомеханическими характеристиками.

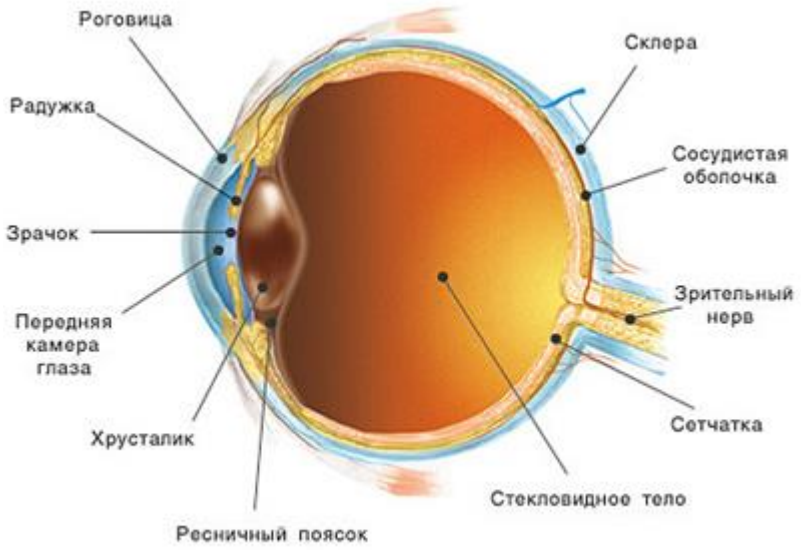

Рисунок 1. Сечение глазного яблока.

Склера занимает 93% внешней фиброзной оболочки глаза человека, поэтому в задачах, связанных с определением формы и изменением объема глазного яблока под действием внутриглазного давления (ВГД), биомеханические свойства склеры играют решающую роль [2]. Таким образом, моделирование поведения глазного яблока после интравитреальной инъекции – инъекции внутрь стекловидного тела, - можно свести к моделированию поведения только склеральной оболочки глаза.

На экспериментальных кривых, соответствующих изменению ВГД в течение нескольких минут после введения интравитреальной инъекции, наблюдается его резкий скачок непосредственно после инъекции, вызванный увеличением объема, а затем спад до некоторого постоянного значения. В большинстве существующих источников литературы данный спад объясняется наличием оттока внутриглазной жидкости из нагруженного глаза. В связи с уменьшением объема происходит уменьшение ВГД. Однако известно, что склере

присуща вязкоупругая реакция на приложенную нагрузку [3]. Непосредственное измерение вязкости склеры вызывает технические сложности и, в связи с этим, в литературе отсутствуют сведения о соответствующих параметрах вязкости. Это приводит к тому, что в большинстве существующих моделей вязкие свойства склеры игнорируются, а поведение склеры при нагрузках предполагается чисто упругим. Основная цель данной работы - объяснить релаксацию напряжений (спад ВГД) в глазу после введения интравитреальной инъекции наличием вязких свойств склеральной оболочки глаза. В рамках данной работы будет предложен метод определения коэффициента сдвиговой вязкости склеры, основанный на сравнении результатов математического моделирования и экспериментальных данных, приведенных в [4] и базирующихся на дискретном измерении ВГД в течение нескольких минут после интравитреальной инъекции. Будут рассмотрены различные варианты постановки граничных условий. В первом случае будет предполагаться, что введенный при инъекции дополнительный объем жидкости сохраняется в стекловидном теле на протяжении времени проведения эксперимента, релаксация напряжений будет объясняться только наличием вязких свойств склеры. Во втором случае будет учитываться отток внутриглазной жидкости, релаксация напряжений будет объясняться наличием обоих факторов: и наличием вязких свойств склеры, и наличием оттока внутриглазной жидкости из нагруженного глаза. Будет определяться значение коэффициента сдвиговой вязкости, при котором отклонение теоретических данных от экспериментальных минимально, а также обозначен диапазон значений данного параметра, который можно будет использовать при моделировании поведения склеры не только после интравитреальной инъекции, но и под действием различных нагрузок.

Решение поставленной задачи будет осуществляться с помощью метода преобразования Лапласа. Для нахождения функций перемещений и напряжений склеры необходимо будет воспользоваться обратным преобразованием Лапласа. Как выяснится, в связи со сложным видом зависимостей данных функций от набора аргументов, необходимо будет использовать численные методы. В данной работе будет рассмотрено несколько численных алгоритмов обратного преобразования Лапласа, а именно: один из наиболее широко известных алгоритмов – алгоритм Закиана, а также два алгоритма, предложенных Джеффресоном и Чоу и базирующихся на двух различных наборах весов и узлов в квадратурной формуле, задающей численное преобразование Лапласа. В рамках данной работы будет проведено сравнение указанных численных алгоритмов на примере определения зависимости функции ВГД от времени.

Глава 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В рамках данной работы необходимо смоделировать вязкоупругое поведение склеральной оболочки глаза после введения интравитреальной инъекции. На основании сравнения результатов математического моделирования и существующих экспериментальных данных нужно определить значения коэффициента сдвиговой вязкости склеры.

Моделируемый в рамках данной работы эксперимент основан на дискретном измерении ВГД в течение нескольких минут после введения интравитреальной инъекции в объеме 0,05 мл. Экспериментальная кривая, построенная в [4] и характеризующая изменение ВГД с течением времени, представлена на рис. 2. Точки на графике соответствуют средним значениям ВГД для 34 пациентов. Для контроля состояния пациентов ВГД измерялось также и на парном не вакцинированном глазу.

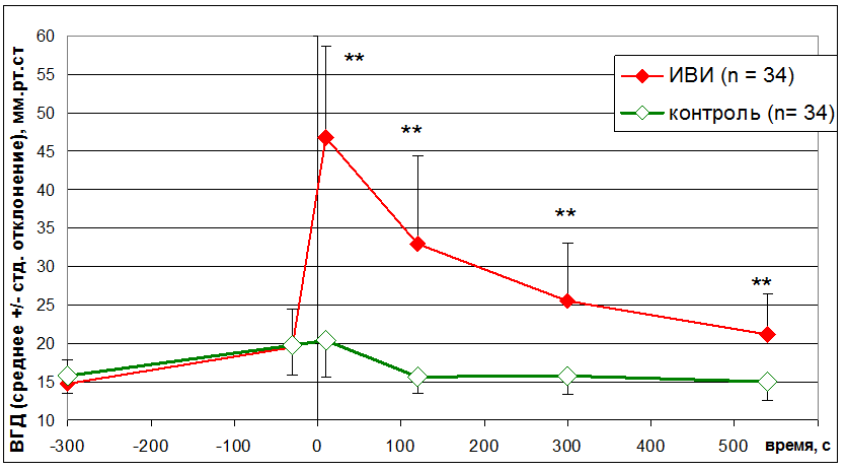

Рисунок 2. Экспериментальная кривая: изменение ВГД с течением времени. Красная линия соответствует вакцинированному глазу, зеленая линия соответствует парному не вакцинированному глазу, n – количество испытуемых.

Задача моделируется вязкоупругим сферическим слоем с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 при центральносимметричной нагрузке: внешнее давление отсутствует, на внутреннем радиусе заданы перемещения, учитывающие величину дополнительного объема жидкости, введенного при инъекции. Задание нулевого давления на внешнем радиусе объясняется тем, что по определению ВГД есть разница между атмосферным давлением и давлением в глазу. Материал склеры предполагается линейным трансверсально – изотропным. Задача решается в рамках трехмерной теории линейной вязкоупругости.

Глава 2 МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

2.1 Математическая модель

Из соображений симметрии задачи положим, что в сферической системе координат (r,θ,φ) справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&u_\varphi = u_\theta = 0, u_r = u_r\left(r,t\right)\\
&\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = \sigma_{\varphi r} = 0, \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi}\left(r,t\right) = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}\left(r,t\right), \sigma_{rr} = \sigma_{rr}\left(r,t\right)\\
&\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = 0, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}\left(r,t\right) = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}\left(r,t\right), \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}\left(r,t\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{u}$ - вектор перемещений, $\boldsymbol{\sigma}$ - тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ - тензор деформаций, t - время.

Рассматриваемая задача является квазистатической, следовательно, уравнение движения сферического слоя сводится к уравнению равновесия:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0\,. \tag{2}$$

В силу симметрии задачи уравнение (2) в координатном виде сводится к единственному уравнению (3):

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0\,. \tag{3}$$

Для получения определяющих соотношений воспользуемся реологической моделью Кельвина – Фойгта, достаточно хорошо описывающей поведение вязкоупругих твердых тел. Данная модель предполагает суммирование упругих и вязких напряжений и равенство упругих и вязких деформаций в теле. При этом для получения единственного решения задачи нам необходимо включать в уравнения лишь один неизвестный параметр вязкости. Итак, определяющие соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + 2\eta\dot{\mathbf{e}}\,, \tag{4}$$

где ${}^4\mathbf{C}$ - тензор жесткости четвертого ранга, η - коэффициент сдвиговой вязкости, $\mathbf{e}$ - девиавтор тензора деформаций.

Трансверсальная изотропия материала предполагает сохранение его свойств при повороте на произвольный угол вокруг оси симметрии. Плоскость, перпендикулярная данной оси, называется плоскостью изотропии. Матрица жесткости для трансверсально - изотропного материала включает в себя пять независимых констант, определяющих пять независимых свойств среды [5]:

$$
{}^{4}\mathbf{C} \sim \begin{pmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{r\theta} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\theta} & C_{\theta\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\varphi} & C_{\theta\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{C_{\theta\theta} - C_{\theta\varphi}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\zeta\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}, \tag{5}
$$

где r - ось симметрии, (θ, φ) - плоскость изотропии. Сведение набора из четырех индексов к набору из двух индексов осуществляется по следующим правилам: $rrrr \to rr, \theta\theta\theta\theta \to \theta\theta, rr\theta\theta \to r\theta, \theta\theta\varphi\varphi \to \theta\varphi, r\theta r\theta \to \zeta\zeta$.

Экспериментальное определение данных констант матрицы жесткости сопряжено со значительными трудностями, поэтому на практике чаще пользуются упругими модулями. Выбор модулей определяется исключительно удобством их использования в рамках поставленной задачи. Так, в [6] приведены следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
C_{rr} &= E_{rr} + 4\nu_{r\theta}^2 K_{\theta\varphi} \\
C_{r\theta} &= 2\nu_{r\theta} K_{\theta\varphi} \\
C_{\theta\theta} &= \mu_{\theta\varphi} + K_{\theta\varphi} \\
C_{\theta\varphi} &= -\mu_{\theta\varphi} + K_{\theta\varphi} \\
C_{\zeta\zeta} &= \mu_{r\theta},
\end{aligned} \tag{6}
$$

где E_{rr} - модуль Юнга в направлении оси симметрии, $\nu_{r\theta}$ - коэффициент Пуассона (первый индекс соответствует оси продольного растяжения, второй индекс соответствует оси поперечного сжатия), $K_{\theta\varphi}$ - объемный модуль упругости при плоском деформированном состоянии, $\mu_{\theta\varphi}$ - модуль сдвига для поверхности (θ, φ), $\mu_{r\theta}$ - модуль сдвига для поверхностей $(r, \theta), (r, \varphi)$.

В [6] указаны следующие соотношения между упругими модулями:

$$
\begin{aligned}
E_{\theta\theta} &= \frac{4\mu_{\theta\varphi} K_{\theta\varphi}}{K_{\theta\varphi} + \mu_{\theta\varphi} + 4\nu_{r\theta}^2 \mu_{\theta\varphi} K_{\theta\varphi} / E_{rr}} \\
\nu_{\theta\varphi} &= \frac{K_{\theta\varphi} - \mu_{\theta\varphi} - 4\nu_{r\theta}^2 \mu_{\theta\varphi} K_{\theta\varphi} / E_{rr}}{K_{\theta\varphi} + \mu_{\theta\varphi} + 4\nu_{r\theta}^2 \mu_{\theta\varphi} K_{\theta\varphi} / E_{rr}},
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $E_{\theta\theta}$ - модуль Юнга в плоскости изотропии, $\nu_{\theta\varphi}$ - коэффициент Пуассона.

В рамках данной работы нам удобнее всего оперировать двумя модулями Юнга и двумя коэффициентами Пуассона, т.к. значения данных констант имеются в литературе. В качестве пятой константы выберем модуль сдвига в плоскости $(r, \theta), (r, \varphi)$. Данный модуль не будет

входить в уравнение равновесия и в выражение для радиальной компоненты тензора напряжений, которую мы будем определять. Итак, закон Гука для упругих напряжений $\boldsymbol{\sigma}^{el}$ трансверсально – изотропного материала:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{el} &= \frac{E_{rr}E_{\theta\theta}}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}\left[\frac{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}{E_{\theta\theta}}\varepsilon_{rr}+\nu_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta}+\nu_{r\theta}\varepsilon_{\varphi\varphi}\right] \\
\sigma_{\theta\theta}^{el} &= \frac{E_{rr}E_{\theta\theta}}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}\left[\nu_{r\theta}\varepsilon_{rr}+\frac{1}{\left(1+\nu_{\theta\varphi}\right)}\left(\left(1-\frac{E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}{E_{rr}}\right)\varepsilon_{\theta\theta}+\left(1+\frac{E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}{E_{rr}}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)\right] \\
\sigma_{\varphi\varphi}^{el} &= \frac{E_{rr}E_{\theta\theta}}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}\left[\nu_{r\theta}\varepsilon_{rr}+\frac{1}{\left(1+\nu_{\theta\varphi}\right)}\left(\left(1+\frac{E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}{E_{rr}}\right)\varepsilon_{\theta\theta}+\left(1-\frac{E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}{E_{rr}}\right)\varepsilon_{\varphi\varphi}\right)\right] \\
\sigma_{\theta\varphi}^{el} &= \frac{E_{rr}}{2\left(1+\nu_{\theta\varphi}\right)}\varepsilon_{\theta\varphi}, \sigma_{r\theta}^{el}=\mu_{r\theta}\varepsilon_{r\theta}, \sigma_{\varphi r}^{el}=\mu_{r\theta}\varepsilon_{\varphi r}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Ненулевые компоненты тензора деформаций в рассматриваемом нами сферическом слое связаны с перемещениями следующим образом:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{du_r}{dr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}=\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u_r}{r} \tag{9}$$

Будем решать задачу в безразмерной постановке. Введем следующие безразмерные параметры: безразмерную координату по радиусу $\beta=R_1/R_2\le x=r/R_2\le 1$, безразмерное перемещение $u=u_r/R_2$, безразмерную компоненту тензора напряжений $\sigma_{ij\,\mathrm{dim}}=\sigma_{ij}/E_{\theta\theta}$, безразмерный модуль Юнга $\xi=E_{rr}/E_{\theta\theta}$ и безразмерное время $\tau=E_{\theta\theta}t/\eta$. Уравнение равновесия в перемещениях можно получить путем подстановки уравнений (4), (9) в уравнение (3). Тогда уравнение равновесия в перемещениях в безразмерном виде примет следующий вид:

$$\frac{\xi^2\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2\left(1-\nu_{r\theta}\right)}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}\frac{u}{x^2}\right]+\frac{4}{3}\left[\frac{\partial^2\dot{u}}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}-2\frac{\dot{u}}{x^2}\right]=0. \tag{10}$$

ВГД может быть определено как радиальное напряжение на внутренней границе сферического слоя, взятое с обратным знаком, поскольку внешняя нормаль к внутренней границе тела направлена вовнутрь, а ВГД стремится увеличить объем тела. Итак, безразмерное ВГД определяется следующей формулой: $IOP_{\mathrm{dim}}\left(\tau\right)=-\sigma_{xx}\left(\tau\right)\big|_{x=\beta}$. Применяя уравнения (4), (9), определяем безразмерное радиальное напряжение как функцию перемещений:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{rr\,\mathrm{dim}}=\frac{\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)\xi^2}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2\nu_{r\theta}\xi}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}\frac{u}{x}+\frac{4}{3}\left[\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}-\frac{\dot{u}}{x}\right]. \tag{11}$$

В рамках данной работы используются два типа граничного условия на внутреннем радиусе. В первом случае предполагается, что объем глазного яблока, включающий в себя дополнительный объем жидкости ΔV, введенный при инъекции внутрь стекловидного тела ($r < R_1$), и объем глазного яблока до нагружения V_0^{eye}, сохраняется на протяжении времени проведения эксперимента. При этом напоминаем, что моделирование глазного яблока сводится к моделированию склеральной оболочки глаза. Граничные условия задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}(\tau)\big|_{x=1} = \sigma_{rr\dim}(\tau)\big|_{x=1} = 0 \\ &u(\tau)\big|_{x=\beta} = u_0 H(\tau), \end{aligned} \tag{12}$$

где u_0 - постоянное по величине перемещение, $H(\tau)$ - единичная степенная функция Хевисайда.

Для учета дополнительного объема жидкости, введенного при инъекции, свяжем величину ΔV с величиной перемещений внутренней границы сферического слоя следующим образом: $\Delta V = 4/3\pi\left(R_1 + u_{r0}(R_1)\right)^3 - 4/3\pi(R_1)^3 \approx 4\pi R_1^2 u_{r0}$. Тогда $u_{r0} \approx \Delta V / 4\pi R_1^2$ и, следовательно, $u_0 \approx \Delta V / 4\pi R_2 R_1^2$.

Во втором типе граничного условия на внутреннем радиусе учитывается гидродинамика внутриглазной жидкости, в частности, более интенсивный отток внутриглазной жидкости из нагруженного глаза. Для определения величины изменения объема глазного яблока, обусловленного притоком и оттоком внутриглазной жидкости, обратимся к методу тонографии [7], [8], который опишем ниже. Данный метод оперирует скоростью изменения объема глазного яблока. Текущий объем глаза определяется следующим образом:

$$V(\tilde{t}) = V_0 + \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \dot{V}(\tilde{t})\,d\tilde{t} = V_0^{eye} + \Delta V + \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \dot{V}(\tilde{t})\,d\tilde{t}\,. \tag{13}$$

Изменение объема глаза, вызванное гидродинамикой внутриглазной жидкости: $V(t) - V(0) = V(t) - V_0^{eye} - \Delta V = 4\pi R_{inj}^2 u_r(t)\big|_{x=\beta}$, где $R_{inj} \approx \sqrt[3]{R_1^3 + 3\Delta V/(4\pi)}$. Граничные условия задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx}(t)\big|_{x=1} = \sigma_{rr\dim}(t)\big|_{x=1} = 0 \\ &u(t)\big|_{x=\beta} = \frac{u_r(t)\big|_{x=\beta}}{R_2} + u_0 = u_0 + \frac{\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \dot{V}(\tilde{t})\,d\tilde{t}}{4\pi R_2 R_{inj}^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Дальнейшее использование безразмерного времени затруднительно, поскольку в граничном условии на внутреннем радиусе присутствует интеграл по времени.

Для определения величины $\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \dot{V}(\tilde{t})\,d\tilde{t}$ воспользуемся данными тонографии - метода измерения и регистрации ВГД, позволяющего определить интенсивность оттока внутриглазной жидкости. Опишем данный метод, основываясь на работах [7], [8]. В рамках данного метода предполагается, что скорость изменения объема глазного яблока зависит от скоростей притока и оттока внутриглазной жидкости. Метод заключается в экспериментальном определении ВГД при нагружении роговицы глаза грузом с известной массой и последующей аппроксимации тонографической кривой (зависимости ВГД от времени) некоторой функцией, содержащей искомый параметр, характеризующий легкость оттока внутриглазной жидкости. Для обработки данных тонографического исследования используется простейшая биомеханическая модель глазного яблока, в которой оно представляется в виде упругой оболочки объема V, заполненной несжимаемой жидкостью при давлении P и связанной с внешними системами притока и оттока (см. рис. 3).

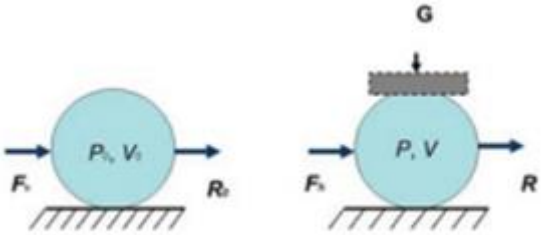

Рисунок 3. Схема модели глазного яблока для метода тонографии.

Уравнение, описывающее скорость изменения объема глаза, имеет следующий вид: $dV/dt = F - R$, где F - скорость притока внутриглазной жидкости, R - скорость оттока внутриглазной жидкости. В стационарном состоянии (до нагружения роговицы глаза некоторым грузом) данные скорости равны, т.е. $F = R$. Величина оттока жидкости определяется следующим гидравлическим соотношением: $R = C(P - P_e)$, где C - коэффициент легкости оттока внутриглазной жидкости, P - теоретическое внутриглазное давление, P_e - давление в эписклеральных венах. Основная задача тонографии состоит в том, чтобы, используя принятую модель глаза и данные измерения, оценить величину коэффициента легкости оттока. Измеряемой величиной является, вообще говоря, не само значение ВГД, а некоторая геометрическая функция $b = b(t)$, характеризующая деформацию роговицы при нагружении. В качестве геометрического параметра b допускается рассматривать величину погружения плунжера малого диаметра в роговицу или площадь контакта с поверхностью роговицы плоского штампа большого диаметра. В отечественной

медицинской практике для тонографии широко используется тонограф *GlauTest-60*, в программное обеспечение которого заложены некоторые эмпирические формулы, связывающие измеряемую величину с ВГД и давление сразу после нагружения с давлением до нагружения. Принимая эти формулы, авторы [7], [8] считают, что с помощью тонографии могут быть определены величина ВГД до нагружения глаза P_0 и теоретическая функция $P = P(t)$, определяющая изменение ВГД во время тонографии и называемая тонограммой. На протяжении тонографического опыта поведение оболочки глаза считается линейно упругим. Для определения зависимости величины объема глаза от величины ВГД используется следующая эмпирическая формула: $dV = \alpha dP$, где $\alpha = 1/(P_0 E_i \ln 10)$ - коэффициент объемной жесткости корнеосклеральной оболочки глаза, E_i - средний коэффициент ригидности корнеосклеральной оболочки. Итак, функция $P = P(t)$, аппроксимирующая тонограмму, является решением следующего уравнения:

$$\alpha \frac{dP}{dt} = F - C(P - P_e). \tag{15}$$

При стандартной обработке данных тонографии величина C оценивается на основе представления тонограммы линейной функцией, причем для обработки используются только начальная и конечная точки тонограммы. В работе [8] предложен модифицированный алгоритм обработки данных тонографического исследования, предусматривающий оценку тонографической кривой, основанную на использовании не только начального и конечного значений ВГД, но и его промежуточных значений. Различные способы аппроксимации тонографической кривой представлены на рис. 4.

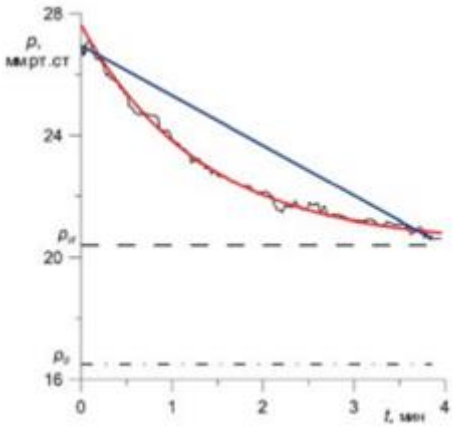

Рисунок 4. Различные способы аппроксимации тонограммы.

Авторы [8] рассматривают несколько схем обработки данных тонографии в рамках предложенного ими модифицированного алгоритма. В первом случае они делают такие же предположения, как и при стандартном методе обработки данных:

1. Нагружение глаза приводит к изменению давления в эписклеральных венах на некоторую постоянную величину, небольшую в сравнении со стационарным значением: $P_e - P_{e0} = 1.25$ мм.рт.ст.;
2. Коэффициент легкости оттока внутриглазной жидкости C не зависит от ВГД и величины нагрузки на глаз;
3. Величина скорости притока жидкости F не зависит от ВГД и величины нагрузки на глаз.

При данных предположениях функция $P = P(t)$, являющаяся решением уравнения (15), выражается следующим образом:

$$P(t) = P_{st} + \left[P(0) - P_{st}\right]\exp\left(-t/\tilde{\tau}\right), \tag{16}$$

где $P_{st} = P_0 + P_e - P_{e0}$ - давление, которое установилось бы в глазу при бесконечном времени нагружения, $\tilde{\tau} = \alpha/C$ - характерное время изменения давления. Как отмечают авторы [8], обработка данных приводит к важному физическому выводу: как правило, $P_\infty \neq P_0$, т.е. в стационарном состоянии, которое установится в глазу под грузом, внутриглазное давление P_∞ существенно отличается от давления P_0 в ненагруженном глазу. Так, все три предположения, заложенные в первой схеме обработки данных, не могут удовлетворяться одновременно, т.е. параметры, характеризующие глазное яблоко и процессы притока и оттока жидкости (все или частично) могут зависеть от величины приложенной нагрузки и от ВГД, которое изменяется под воздействием груза. Авторы [8] предлагают еще одну модификацию стандартного метода тонографии, заключающуюся в том, что сразу после стандартной тонографии выполняется дискретное измерение ВГД (тонометрия) в течение достаточно большого промежутка времени. В результате такой тонометрии регистрируется изменение ВГД в процессе восстановления стационарного состояния глаза после тонографии ($P \to P_0$, см. рис. 5).

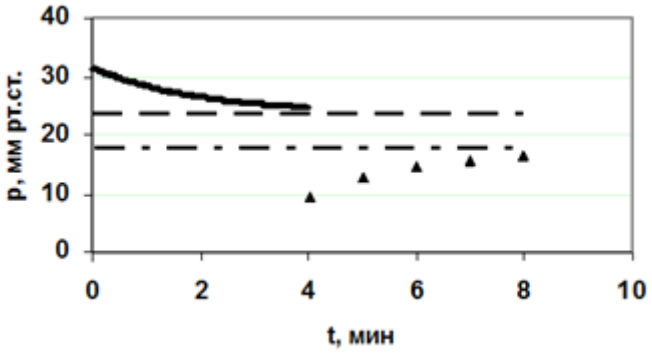

Рисунок 5. Схема модифицированного тонографического исследования, учитывающего изменение ВГД после снятия нагрузки.

Далее авторами [8] использовалось две модифицированные схемы обработки данных. При использовании первой из них предполагалось, что давление в эписклеральных венах практически не меняется при нагружении, как и при стандартной схеме обработки данных: $P_e - P_{e0} = 1.25$ мм.рт.ст., - но при этом $F = R_{st} \neq F_0$. Как заметили авторы [8], при описываемой обработке данных модифицированной тонографии средние величины коэффициента легкости оттока C и притока внутриглазной жидкости F при нагружении глаза возрастают, причем величина притока очень сильно. С другой стороны, отмечают авторы [8], величины притока и оттока в стационарном режиме существенно зависят от величины давления в эписклеральных венах, которая считалась практически не зависящей от нагружения глаза. При использовании второй модифицированной схемы предполагалось равенство притоков внутриглазной жидкости в нагруженном и ненагруженном глазу: $F = R_{st} = F_0$, - при этом авторы [8] отказываются от предположения о том, что давление в эпсклеральных венах практически не меняется при нагружении. При описываемой обработке данных авторы [8] отметили, что величина P_∞ оказывается тесно связанной с величиной изменения давления в эписклеральных венах при нагружении, но неизвестно, какие физические механизмы ответственны за эту связь, каким образом нагружение глаза влияет на давление в эписклеральных венах, как быстро происходит изменение этого давления.

В рамках данной работы мы рассмотрим все три схемы, предложенные в [8] для обработки модифицированного метода тонографии, для получения интеграла по времени, присутствующего в граничном условии на внутреннем радиусе (14). Общая формула для определения данного интеграла:

$$\int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \dot{V}(\tilde{t})\,d\tilde{t} = \int_{\tilde{t}=0}^{\tilde{t}=t} \left(F(\tilde{t}) - R(\tilde{t})\right) d\tilde{t}\,. \qquad (17)$$

2.2. Метод преобразования Лапласа

Для получения решения для перемещений и радиальных напряжений воспользуемся методом преобразования Лапласа, связывающим функцию $f(x,\tau)$ действительного переменного τ (оригинал), с функцией $\overline{f}(x,s)$ комплексного переменного s (изображением). Оригинал по Лапласу должен удовлетворять следующим условиям [9]:

1. Функция $f(x,\tau)$ интегрируема на любом конечном интервале оси τ;
2. $f(x,\tau)\big|_{\tau<0} \equiv 0$;
3. $\exists M>0, s_0 \geq 0 : \left| f(x,\tau) \right| \leq M e^{s_0 \tau}$.

Изображение функции - оригинала по Лапласу определяется следующим выражением:

$$\overline{f}(x,s) = \exp(-s\tau)\, f(x,\tau)\, d\tau, \tag{18}$$

где $s = c + i\omega, c > s_0$ - комплексная переменная.

Преимуществом использования метода Лапласа в рамках данной работы является замена оператора дифференцирования по времени оператором умножения на комплексную переменную:

$$\dot{f}(x,\tau) \to \int_0^\infty \exp(-s\tau)\dot{f}(x,\tau)\, d\tau = s\overline{f}(x,s) - f(x,0). \tag{19}$$

Постановка начального условия задачи затруднительна в силу сложности экспериментального определения перемещений в склере в начальный момент времени. В рамках данной работы мы будем предполагать, что в начальный момент времени перемещения зависят от радиальной координаты линейно. Тогда слагаемые в преобразованных по методу Лапласа выражениях (10), (11), содержащие величину $u(x,0)$, сократятся. Итак, дифференциальные уравнения в частных производных (10), (11) сводятся в пространстве Лапласа к дифференциальным уравнениям, содержащим только производные по координате:

$$\left[\frac{\xi^2\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}+\frac{4}{3}s\right]\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}-2\frac{\overline{u}}{x^2}\right)-\frac{2\xi[1-\nu_{r\theta}-\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)]}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}\frac{\overline{u}}{x^2}=0 \tag{20}$$

$$\overline{\sigma_{xx}} = \overline{\sigma_{rr\dim}} = \left[\frac{2\nu_{r\theta}\xi}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}-\frac{4}{3}s\right]\frac{\overline{u}}{x}+\left[\frac{\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)\xi^2}{\xi\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)-2\nu_{r\theta}^2}+\frac{4}{3}s\right]\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}. \tag{21}$$

Для решения уравнений (20), (21) необходимо воспользоваться граничными условиями, преобразованными по правилам Лапласа. Решение для изображений функций перемещений

и радиальных напряжений ищется в пакете символьной математики *WolframMathematica* с помощью команд *Solve* и *DSolve.*

2.3. Обратное преобразование Лапласа. Численные алгоритмы обратного преобразования

Для определения оригиналов функций перемещений и радиальных напряжений необходимо воспользоваться формулой обращения (интегралом Бромвича) – формулой обратного преобразования Лапласа [10]. Она имеет следующий вид:

$$f\left(x,\tau\right)=\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\overline{f}\left(x,s\right)\exp(s\tau)ds\,. \tag{22}$$

Пределы интегрирования в формуле (22) означают, что интегрирование идет по бесконечной прямой, параллельной оси $\operatorname{Im}s$ и пересекающей ось $\operatorname{Re}s$ в точке $c>s_0$. Применим данное обращение к найденным изображениям функций перемещений $\overline{u}\left(x,s\right)$ и напряжений $\overline{\sigma_{xx}}\left(s\right)$. Аналитическое решение для изотропного случая может быть найдено в пакете символьной математики *WolframMathematica* с помощью команды *LaplaceTransform.* Для трансверсально – изотропного случая найденные функции $\overline{u}\left(x,s\right)$, $\overline{\sigma_{xx}}\left(s\right)$ имеют сложную зависимость от набора параметров и, в связи с этим, получение аналитического решения на основе уравнения (22) не представляется возможным. Обратимся к численным методам обратного преобразования Лапласа. При решении задачи в рамках данного численного подхода применяется квадратурная формула типа Гаусса [11]:

$$f\left(x,\tau\right)\approx f_n\left(x,\tau\right)\equiv f_{n,a,K}\left(x,\tau\right)=\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{n}K_j\,\overline{f}\left(x,\frac{a_j}{\tau}\right), \tag{23}$$

где $\mathbf{K},\mathbf{a}$ - векторы, называемые весами и узлами соответственно.

Выражение (23) можно получить из (22) путем разложения экспоненциальной функции $\exp(z), z=s\tau$ в ряд Маклорена и дальнейшего применения аппроксимации Паде к полученной таким образом степенной функции [12].

Закиан получил формулу (23) не зависимо от приведенных выше рассуждений [13]. Он аппроксимировал дельта – функцию конечным набором экспоненциальных функций и показал, что коэффициенты K_j, a_j должны быть определены таким образом, что уравнение (24) является достаточно хорошей аппроксимацией нормированной дельта – функции Дирака $\delta\left(\tilde{\tau}-1\right),\tilde{\tau}\in\left[0,\infty\right)$:

$$\delta\left(\tilde{\tau}-1\right)=\sum_{j=1}^{n}K_j\exp\left(-a_j\tilde{\tau}\right), \tag{24}$$

где K_j, a_j, являющиеся компонентами векторов $\mathbf{K}, \mathbf{a}$, - комплексные числа. Как Закиан показал в [14], возможность подобной аппроксимации обосновывается, если применить преобразование Лапласа к данной нормированной дельта – функции Дирака. Веса и узлы, полученные Закианом, представлены в таблице 1. Он также показал, что, применяя данные наборы весов и узлов, необходимо пользоваться следующей формулой вместо формулы (23): $f_{n,a,K}^{Zakian}(x,\tau) = 2 f_{n,a,K}(x,\tau)$.

Таблица 1. Набор весов и узлов, предложенный Закианом.

a_j	K_j
1.283767675E + 01 + 1.666063445iE + 00	−3.690208210E + 04 + 1.969904257E + 05i
1.222613209E + 01 + 5.012718792iE + 00	6.127702524E + 04 − 9.540862551E + 04i
1.093430308E + 01 + 8.409673116iE + 00	−2.891656288E + 04 + 1.816918531E + 01i
8.776434715E + 00 + 1.192185389iE + 01	4.655361138E + 03 − 1.901528642E + 00i
5.225453361E + 00 + 1.572952905iE + 01	−1.187414011E + 02 − 1.413036911E + 02i

Джеффресон и Чоу предложили альтернативные наборы весов и узлов для формулы (23) [15], полученные с помощью применения метода, предложенного в [16] и основанного на аппроксимации экспоненциальных функций методом наименьших квадратов. Они использовали данный метод, чтобы аппроксимировать нормированную дельта – функцию Дирака $\delta(\tilde{\tau}-1)$ набором функций $\delta_n(\tilde{\tau}-1)$. Для получения набора коэффициентов K_j, a_j Джеффресон и Чоу и минимизировали следующую функцию:

$$E(a,A) = \int_0^\infty \left[f(\tilde{\tau}) - \sum_{j=1}^{n} A_j \exp(-a_j \tilde{\tau}) \right]^2, \tag{25}$$

где $A_j = K_j / a_j$. В качестве функции $f(\tilde{\tau})$ авторы [15] рассматривали квадратный импульс, приводящий конечному интегралу в выражении (25):

$$f(\tilde{\tau}) = m(\tilde{\tau}-1) = 1 - \int_0^{\tilde{\tau}} \delta(\theta-1) d\theta = \begin{cases} 1, \tilde{\tau} \in [0,1] \\ 0, \tilde{\tau} \in (1,\infty) \end{cases}. \tag{26}$$

Веса и узлы, полученные Джеффресоном и Чоу для 10 и 15 членов разложения ряда в (23), представлены в таблице 2.

Таблица 2. Наборы весов и узлов, предложенные Джеффресоном и Чоу.

a_j	K_j	*
n=10		
1.1230093058E + 01 − 2.352672861E + 01i	4.860502512E − 01 + 2.422640698E + 00i	(2)
1.948441344E + 00 − 1.838606040E + 01i	5.552772067E + 00 + 2.015535066E + 00i	(2)
2.486321472E + 00 − 1.294069981E + 01i	9.328911705E + 00 − 4.782670037E + 00i	(2)
3.049851019E + 00 − 7.477695691E + 00i	4.688193150E + 00 − 1.756397771E + 01i	(2)
3.662673996E + 00 − 2.340402588E + 00i	−2.290775011E + 01 − 1.934430556E + 01i	(2)
n=15		
1.20190013E + 001 − 3.839128154E + 01i	+1.454512148E + 00 − 1.896165496E + 00i	(2)
1.862570769E + 00 − 3.320749609E + 01i	−1.715333565E + 00 − 5.172539073E + 00i	(2)
2.292993575E + 00 − 2.766209815E + 01i	−7.541523912E + 00 − 4.523961971E + 00i	(2)
2.661840425E + 00 − 2.198372929E + 01i	−1.295649648E + 01 + 7.506458220E − 01i	(2)
3.035577722E + 00 − 1.625582381E + 01i	−1.547416249E + 01 + 1.099375660E + 01i	(2)
3.470465540E + 00 − 1.055035834E + 01i	−1.018991823E + 01 + 2.717989379E + 01i	(2)
4.014204990E + 00 − 5.028754130E + 00i	+1.938392606E + 01 + 4.294784889E + 01i	(2)
4.382910986E + 00	6.166590165E + 01	(1)

(*) = (2) означает, что коэффициентом также является и комплексно – сопряженное число;

(*) = (1) означает, что комплексно – сопряженное число отсутствует.

В связи с тем, что перемещения и радиальные напряжения являются вещественными функциями, при численной аппроксимации необходимо рассматривать только вещественную часть выражения (23). Применяя описанный в данном разделе подход, мы сможем определить реальные функции перемещений и радиальных напряжений, зависящие от времени.

Глава 3 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

3.1 Задача Ламе для упругого изотропного и трансверсально – изотропного сферического слоя

Решение задачи Ламе для вязкоупругого материала должно сходиться при стремлении времени к бесконечности к решению, полученному для чисто упругого материала при тех же граничных условиях. При использовании граничного условия, предполагающего постоянство объема глаза и не учитывающего отток внутриглазной жидкости, перемещения на внутреннем радиусе равны постоянной величине $u_{r0} \approx \Delta V \big/ \left(4\pi R_1^2\right)$ на протяжении всего времени проведения эксперимента. Так, мы можем рассмотреть задачу Ламе в размерной постановке для упругого сферического слоя при следующих стационарных граничных условиях:

$$\begin{aligned} u_r \big|_{r=R_1} &= u_{r0} \\ \sigma_{rr} \big|_{r=R_2} &= 0, - \end{aligned} \tag{27}$$

и убедиться в дальнейшем в правильности решения, получаемого для вязкоупругого материала.

Уравнение равновесия и связь деформаций с перемещениями определяются уравнениями (3), (9) соответственно. Для построения определяющих соотношений используем закон Гука: $\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$. Рассмотрим сначала задачу для изотропного материала, характеризующегося двумя независимыми константами. Закон Гука, записанный в координатной форме, в таком случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu\left[\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}\right)\right] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu\left[\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}\right)\right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu\left[\varepsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}\right)\right] \\ \sigma_{r\theta} &= \mu\varepsilon_{r\theta}, \sigma_{\theta\varphi} = \mu\varepsilon_{\theta\varphi}, \sigma_{\varphi r} = \mu\varepsilon_{\varphi r} \end{aligned} \tag{28}$$

где $\mu = E \big/ \left(2\left(1+\nu\right)\right)$ - модуль сдвига, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Уравнение равновесия в перемещениях определяется следующим выражением:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} - 2\frac{u_r}{r^2} = 0 \tag{29}$$

Радиальное напряжение, выраженное через перемещения:

$$\sigma_{rr} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{du_r}{dr} + \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{u_r}{r} \tag{30}$$

Решая уравнение (29) при учете граничных условий (27), получаем следующее выражение для перемещений:

$$u_r = \frac{u_{r0}R_1^2\left(4\nu r^3 - 2r^3 - R_2^3 - \nu R_2^3\right)}{r^2\left(4\nu R_1^3 - 2R_1^3 - R_2^3 - \nu R_2^3\right)} \tag{31}$$

Найдем решение для радиальной компоненты тензора напряжений путем подстановки уравнения (31) в уравнение (30):

$$\sigma_{rr} = \frac{2Eu_{r0}R_1^2\left(R_2^3 - r^3\right)}{\left(4\nu R_1^3 - 2R_1^3 - R_2^3 - \nu R_2^3\right)r^3} \tag{32}$$

Перейдем к рассмотрению трансверсально – изотропного материала. Закон Гука в данном случае записывается в виде (8), где тензор упругих напряжений совпадает с полным тензором напряжений, поскольку рассматриваемый в рамках данного раздела материал предполагается чисто упругим. Уравнение равновесия в перемещениях определяется следующим выражением:

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{2E_{\theta\theta}\left(1-\nu_{r\theta}\right)}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}\frac{u_r}{r^2} = 0 \tag{33}$$

Радиальное напряжение, выраженное через перемещения:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_{rr}^2\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right)}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right) - 2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}\frac{du_r}{dr} + \frac{2E_{rr}E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}}{E_{rr}\left(1-\nu_{\theta\varphi}\right) - 2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2}\frac{u_r}{r} \tag{34}$$

В работе [17] получено общее решение уравнения (33):

$$u_r = C_1 r^m + \frac{C_2}{r^{m+1}}, \tag{35}$$

где

$$m = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2E_{\theta\theta}\left(\nu_{r\theta} - 1\right)}{E_{rr}(1-\nu_{\theta\varphi})}} \tag{36}$$

Используя граничные условия (27), находим неизвестные константы в уравнении (35):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{R_1^{1+m}u_{r0}\left[2E_{22}\nu_{12} - E_{11}(1+m)\left(1-\nu_{23}\right)\right]}{R_1^{1+2m}\left[2\nu_{12}E_{22} - E_{11}(1+m)\left(1-\nu_{23}\right)\right] - R_2^{1+2m}\left[2\nu_{12}E_{22} + mE_{11}\left(1-\nu_{23}\right)\right]} \\ C_2 &= \frac{R_1^{1+m}R_2^{1+2m}u_{r0}\left[-mE_{11}\left(1-\nu_{23}\right) - 2\nu_{12}E_{22}\right]}{R_1^{1+2m}\left[2\nu_{12}E_{22} - E_{11}(1+m)\left(1-\nu_{23}\right)\right] - R_2^{1+2m}\left[2\nu_{12}E_{22} + mE_{11}\left(1-\nu_{23}\right)\right]} \end{aligned} \tag{37}$$

Решение для радиальной компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{rr}=\frac{r^{-2-m}E_{rr}R_1^{1+m}\left(r^{1+2m}-R_2^{1+2m}\right)u_{r0}\left(-4E_{\theta\theta}^2\nu_{r\theta}^2-2E_{rr}E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}\left(-1+\nu_{\theta\varphi}\right)+m(1+m)E_{rr}^2\left(-1+\nu_{\theta\varphi}\right)^2\right)}{\left(2E_{\theta\theta}\nu_{r\theta}^2+E_{rr}\left(-1+\nu_{\theta\varphi}\right)\right)\left(2E_{\theta\theta}\left(R_1^{1+2m}-R_2^{1+2m}\right)\nu_{r\theta}+E_{rr}\left((1+m)R_1^{1+2m}+mR_2^{1+2m}\right)\left(-1+\nu_{\theta\varphi}\right)\right)} \quad (38)$$

Убедимся, что в предположении одинаковости свойств в плоскости изотропии и в направлении оси симметрии решение для трансверсально – изотропного материала сводится к решению для изотропного материала. Действительно, в изотропном случае $m=1$, $E_{rr}=E_{\theta\theta}$, $\nu_{r\theta}=\nu_{\theta\varphi}$. Тогда при данных предположениях уравнение (38) сводится к уравнению (32).

3.2 Задача Ламе для вязкоупругого изотропного сферического слоя

Рассмотрим задачу Ламе для вязкоупругого изотропного материала. Введем следующие безразмерные величины: безразмерную координату по радиусу $\beta=R_1/R_2\le x=r/R_2\le 1$, безразмерное перемещение $u=u_r/R_2$, безразмерную компоненту тензора напряжений $\sigma_{ij\dim}=\sigma_{ij}/E$ и безразмерное время $\tau=Et/\eta$. Уравнение движения в перемещениях в данном случае имеет следующий вид:

$$\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{u}{x^2}\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}-\frac{2}{x^2}\dot{u}\right)=0\,. \quad (39)$$

Применим к уравнению движения, записанному в перемещениях, преобразование Лапласа и предположим, что в начальный момент времени перемещения линейно зависят от радиальной координаты. Тогда решение уравнения (39) сведется к решению следующего уравнения движения в пространстве Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}-\frac{2}{x^2}\bar{u}=0\,, \quad (40)$$

где $\bar{u}=\bar{u}(x,s)$.

Безразмерное радиальное напряжение, выраженное через перемещения:

$$\bar{\sigma}_{xx}=\bar{\sigma}_{rr\dim}=\left[\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}+\frac{4}{3}s\right]\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\left[\frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}-\frac{4}{3}s\right]\frac{\bar{u}}{x}\,. \quad (41)$$

Рассмотрим данную задачу при граничном условии на внутреннем радиусе сферического слоя, предполагающем отсутствие оттока внутриглазной жидкости на протяжении времени проведения эксперимента. Тогда граничные условия будут преобразованы следующим образом:

$$\begin{aligned} &u(\tau)\big|_{x=\beta}=u_0H(\tau)\to\bar{u}(s)\big|_{x=\beta}=u_0\overline{H(\tau)}\\ &\sigma_{xx}(\tau)\big|_{x=1}=\sigma_{rr\dim}(\tau)\big|_{x=1}=0\to\overline{\sigma_{xx}}(s)\big|_{x=1}=0, \end{aligned} \quad (42)$$

где $u_0 \approx \Delta V \big/ \left(4\pi R_2 R_1^2\right)$.

При использовании данных граничных условий находим решение уравнения (40):

$$u\left(x,\tau\right)=\frac{\left[\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\left(1+\nu+2\beta^3-4\nu\beta^3\right)}{\left(1-2\nu\right)\left(1+\nu\right)\beta^3}\tau\right)\left(x^2+x\beta+\beta^2\right)\left(\beta-x\right)\left(1+\nu\right)+\beta^3\left(-2x^3+4x^3\nu-1-\nu\right)\right]u_0}{\left(-1-\nu-2\beta^3+4\nu\beta^3\right)\beta x^2}. \quad (43)$$

Убедимся, что при $\tau\to\infty$ решение (43) сходится к решению для упругого изотропного материала (31) при приведении последнего к безразмерному виду. Действительно:

$$\lim_{\tau\to\infty}u(x,\tau)=\frac{\beta^2 u_0\left(-2x^3+4x^3\nu-1-\nu\right)}{\left(4\nu\beta^3-2\beta^3-\nu-1\right)x^2}=u_{el}(x), \quad (44)$$

где $u_{el}(x)$ - безразмерное перемещение, полученное при решении упругой задачи.

Решение для радиальных напряжений:

$$\sigma_{xx}\left(x,\tau\right)=\frac{u_0\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)\left[2\beta^3\left(2\nu-1\right)+\left(1+\nu\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\left(1+\nu+2\beta^3-4\nu\beta^3\right)}{\left(2\nu-1\right)\left(1+\nu\right)\beta^3}\tau\right)\right]}{\left(1+\nu+2\beta^3-4\nu\beta^3\right)\beta x^3\left(2\nu-1\right)}. \quad (45)$$

Убедимся, что при $\tau\to\infty$ решение (45) сходится к решению для упругого изотропного материала (32) при приведении последнего к безразмерному виду. Действительно:

$$\lim_{\tau\to\infty}\sigma_{xx}(x,\tau)=\frac{2\beta^2 u_0\left(1-x^3\right)}{\left(4\nu\beta^3-2\beta^3-\nu-1\right)x^3}=\sigma_{xx,el}(x), \quad (46)$$

где $\sigma_{xx,el}(x)$ - безразмерное радиальное напряжение, полученное при решении упругой задачи.

Глава 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Мы получили реальные функции перемещений и радиальных напряжений, зависящие от времени, путем применения численного обратного преобразования Лапласа к полученным нами ранее функциям изображений для перемещений и радиальных напряжений. Мы исследовали результаты, полученные на основе применения трех перечисленных в данной работе численных алгоритмов, а именно: алгоритма Закиана [13], алгоритма Джеффресона и Чоу для 10-ти и 15-ти членов разложения ряда в квадратурной формуле (23) [15]. Коэффициент сдвиговой вязкости склеры был определен при двух типах граничного условия на внутреннем радиусе: в первом случае предполагалось, что объем глаза не меняется в течение времени проведения эксперимента, во втором учитывался отток внутриглазной жидкости. Зависимость скорости изменения объема внутриглазной жидкости от времени определялась на основании нескольких схем обработки данных тонографического исследования, предложенных в [8]. При численном решении задачи мы использовали следующие значения параметров: $E_{\theta\theta} = 14.3$ МПа, $E_{rr} = 0.01E_{\theta\theta}$ МПа, $\nu_{r\theta} = 0.01$, $\nu_{\theta\varphi} = 0.45$, $R_1 = 11.75$ мм, $R_2 = 12.25$ мм., указанные в [17].

Обсудим результаты, полученные в предположении, что объем глаза не меняется на протяжении времени проведения эксперимента. При этом будем пользоваться стандартной схемой обработки данных тонографического исследования. В данном случае мы используем все безразмерные величины, перечисленные ранее в настоящей работе. Как уже пояснялось, ВГД связано с радиальным напряжением следующей формулой: $IOP_{\dim}(\tau) = -\sigma_{xx}(\tau)\big|_{x=\beta}$. Отметим, что в данном случае безразмерное радиальное напряжение не зависит от коэффициента сдвиговой вязкости в явном виде. Данный коэффициент не входит в уравнение равновесия и в выражение для радиальной компоненты тензора напряжений и не задается в качестве известного параметра задачи. Безразмерное радиальное напряжение является функцией безразмерного времени, которое, в свою очередь, связано с коэффициентом сдвиговой вязкости через размерное время. Так, коэффициент сдвиговой вязкости может быть определен по следующей формуле:

$$\eta = \frac{E_{\theta\theta} t}{\tau} \tag{47}$$

Рассмотрим экспериментальные данные, полученные независимо в работах [4] и [18]. Экспериментальные данные, полученные в [4] и представленные на рис. 2: ВГД=6266 Па ($\text{ВГД}_{\text{безр}} \cdot 10^{-6}$=438.2), t=10 с; ВГД=4533 Па ($\text{ВГД}_{\text{безр}} \cdot 10^{-6}$=317.0), t=120 с; ВГД=3466 Па ($\text{ВГД}_{\text{безр}} \cdot 10^{-6}$=242.4), t=300 с; ВГД=2800 Па ($\text{ВГД}_{\text{безр}} \cdot 10^{-6}$=195.8), t=500 с.

Экспериментальные данные, полученные в [18]: ВГД=8733 Па ($ВГД_{безр} \cdot 10^{-6}$=610.7), t=0 с; ВГД=6853 Па ($ВГД_{безр} \cdot 10^{-6}$=479.2), t=60 с; ВГД=4800 Па ($ВГД_{безр} \cdot 10^{-6}$=335.6), t=180 с; ВГД=2800 Па ($ВГД_{безр} \cdot 10^{-6}$ = 195.8), t=300 с. Определяем, при каком значении координаты по безразмерному времени τ полученная нами функция $\sigma_{xx}(\tau)$ равна по модулю перечисленным экспериментальным значениям ВГД. Оказывается, что диапазон значений ВГД, получаемый теоретически, значительно меньше диапазона экспериментальных значений. Так, диапазон, полученный теоретически: $IOP_{\dim} \cdot 10^{-6} \in [195.8, 438.2]$, - тогда, как диапазон экспериментальных значений: $IOP_{\dim} \cdot 10^{-6} \in [195.8, 438.2]$ для данных, полученных в [4] и $IOP_{\dim} \cdot 10^{-6} \in [195.8, 610.7]$ для данных, полученных в [18]. Таким образом, мы можем использовать только данные для второй точки эксперимента, рассмотренного в [4] (ВГД=4533 Па, t=120 с), и данные для третьей точки эксперимента, рассмотренного в [18] (ВГД=4800 Па, t=180 с), для определения координаты по τ. Значения коэффициента сдвиговой вязкости склеры, вычисленные по формуле (47) для двух указанных экспериментальных точек при применении численного алгоритма Закиана и численных алгоритмов Джеффресона и Чоу для 10-ти и 15-ти членов разложения ряда в квадратурной формуле (23), задающей численное обратное преобразование Лапласа, представлены в таблице 3.

Таблица 3. Значения коэффициентов сдвиговой вязкости, полученные в предположении отсутствия оттока внутриглазной жидкости на протяжении времени проведения эксперимента.

Экспериментальная точка	Алгоритм Закиана	Алгоритм Д&Ч, n=10	Алгоритм Д&Ч, n=15
ВГД=4533 Па, t=120 с	η=12.8 МПа · с	η=12.8 МПа · с	η=12.9 МПа · с
ВГД=4800 Па, t=180 с	η=27.8 МПа · с	η=27.7 МПа · с	η=27.8 МПа · с

Функции зависимости ВГД от времени представлены на рис. 6. Кривые релаксации напряжений, построенные при использовании трех различных численных методов, совпадают при указанном на рис. 6 масштабе. При построении графиков мы использовали метод Закиана и соответствующие ему значения коэффициента сдвиговой вязкости, приведенные в таблице 3. Мы убедились в том, что асимптота, к которой стремятся кривые при бесконечно больших временах, совпадает с численным значением для напряжений,

возникающих при тех же граничных условиях в чисто упругом трансверсально – изотропном сферическом слое (38). Действительно, оказалось, что:

$$\lim_{\tau\to\infty} IOP_{\dim}(\tau) = IOP\big|_{\eta=0} \approx 285e-6 \approx IOP_{el} = 291e-6\,. \tag{48}$$

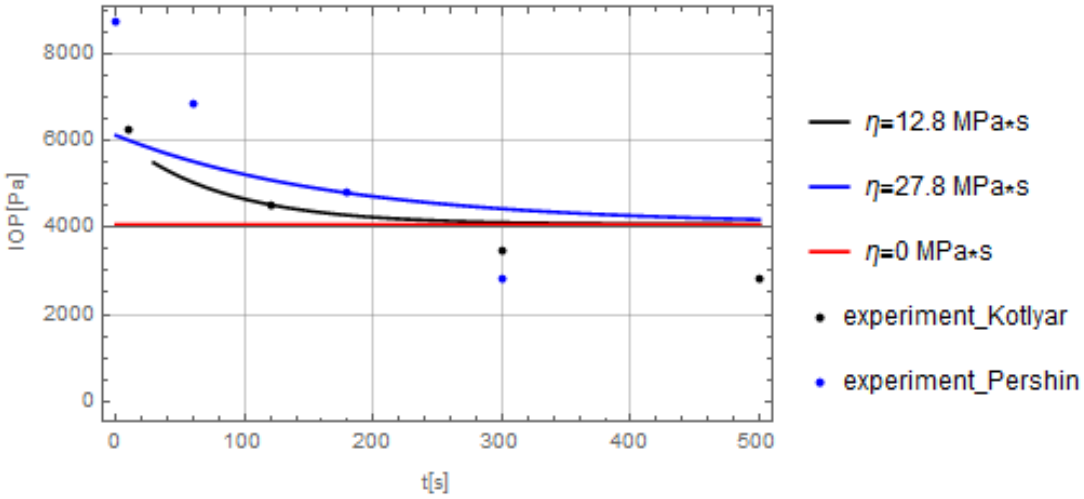

Рисунок 6. Зависимость ВГД от времени при отсутствии оттока внутриглазной жидкости.

Графическое сравнение численных алгоритмов представлено на рис. 7. Как видно, расхождение методов мало и наблюдается во второй половине эксперимента. При этом мы не можем сделать вывод о том, какой из численных алгоритмов дает наилучший результат, поскольку экспериментальные точки на данном временном участке расположены ниже асимптоты. Стоит отметить, что выполнение алгоритма Закиана является наименее трудоемким в силу использования наименьшего числа коэффициентов ряда разложения в квадратурной формуле, задающей численное обратное преобразование Лапласа.

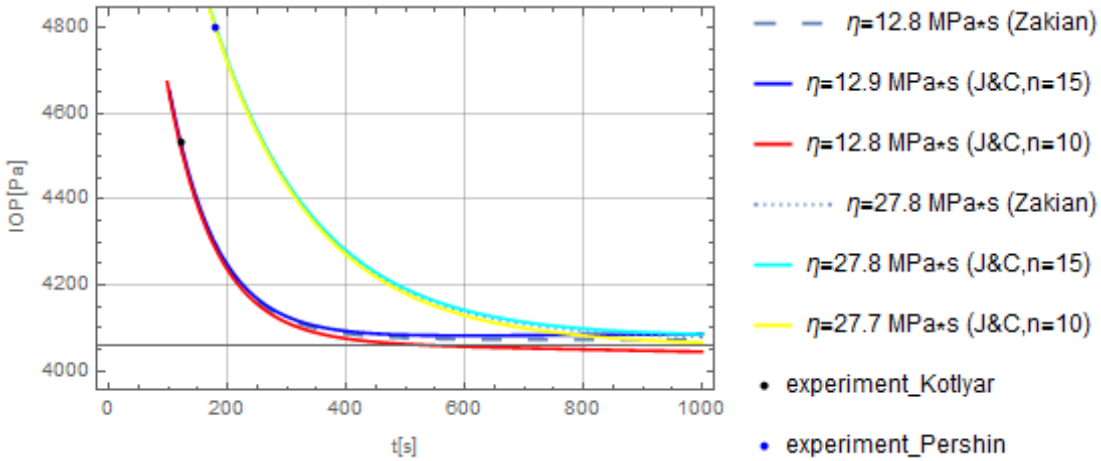

Рисунок 7. Графическое сравнение численных методов на примере определения ВГД при отсутствии оттока внутриглазной жидкости.

Основной вывод, который мы можем сделать, анализируя график, изображенный на рис. 6, заключается в том, что при использовании предположения о постоянстве объема глаза на протяжении времени проведения эксперимента построенная нами теория не достаточно

хорошо описывает экспериментальные данные как количественно, так и качественно. Теоретические кривые обладают менее резким спадом, чем экспериментальные кривые. Так, релаксация напряжений не может быть объяснена только наличием вязкости.

Перейдем к обсуждению результатов, полученных при учете гидродинамики внутриглазной жидкости. В данном случае мы используем размерное время (в секундах) при построении уравнения равновесия и выражения для радиальной компоненты тензора напряжений в связи с тем, что в граничном условии для перемещений (14) присутствует интеграл по времени. Коэффициент сдвиговой вязкости склеры в данном случае входит в перечисленные уравнения в явном виде, а его величину необходимо задавать в качестве известного параметра при численных вычислениях. Для определения оптимального значения коэффициента сдвиговой вязкости воспользуемся методом бисекции, основанном на первой теореме Больцано – Коши [19]: $\Phi(\eta)\in C[\eta_a,\eta_b],\Phi(\eta_a)\cdot\Phi(\eta_b)<0\Rightarrow\exists\eta_c\in[\eta_a,\eta_b]:\Phi(\eta_c)=0$. В качестве функции $\Phi(\eta)$ будем рассматривать:

$$\Phi(\eta)=\left(IOP_{\exp eriment(\dim)}-\left(-\sigma_{xx}\big|_{x=\beta}\right)\right)\Big|_{t=t_{\text{experiment}}}\ . \qquad (49).$$

Метод бисекции позволяет нам найти корни уравнения $\Phi(\eta)=0$ для всех экспериментальных точек, полученных в [4] и представленных на рис. 2, кроме первой точки, характеризующей скачок ВГД непосредственно после инъекции. При рассмотрении экспериментальных значений ВГД, представленных в [18], корней уравнения $\Phi(\eta)=0$ не существует. Далее мы будем оперировать только экспериментальными данными, приведенными в [4]. В качестве начального промежутка $[\eta_a,\eta_b]$ мы взяли достаточно широкий диапазон значений коэффициента сдвиговой вязкости склеры: $\eta\in[0,200]$. При проверке оказалось, что функция $\Phi(\eta)$ действительно принимает разные знаки на концах данного отрезка, т.е. мы можем далее использовать алгоритм метода бисекции. Значения коэффициента сдвиговой вязкости склеры, полученные итерационным методом для трех экспериментальных точек, представленных в [4], при использовании численного алгоритма Закиана и численных алгоритмов Джеффресона и Чоу для 10-ти и 15-ти членов разложения ряда в квадратурной формуле, задающей численное обратное преобразование Лапласа, представлены в таблице 4. Значения определены с точностью до второго знака после запятой.

Таблица 4. Значения коэффициентов сдвиговой вязкости склеры при учете гидродинамики внутриглазной жидкости.

Экспериментальная точка	Алгоритм Закиана	Алгоритм Д&Ч, n=10	Алгоритм Д&Ч, n=15
ВГД=4533 Па, t=120 с	η=57.1 МПа·с	η=57.1 МПа·с	η=57.1 МПа·с
ВГД=3466 Па, t=300 с	η=58.6 МПа·с	η=59.1 МПа·с	η=58.3 МПа·с
ВГД=2800 Па, t=500 с	η=33.8 МПа·с	η=35.3 МПа·с	η=33.0 МПа·с

Функции зависимости ВГД от времени представлены на рис. 8. Кривые релаксации напряжений, построенные при использовании трех различных численных методов, совпадают при указанном на рис. 8 масштабе. Несущественное расхождение можно наблюдать при обработке данных, полученных для последней точки в связи с тем, что разница в полученных значениях коэффициента сдвиговой вязкости чуть больше, чем разница между значениями, полученными для второй и третьей экспериментальных точек. При построении графиков мы использовали метод Закиана и соответствующие ему значения коэффициента сдвиговой вязкости. При этом стоит отметить, что в связи с небольшой разницей между значением, полученным для второй точки, и значением, полученным для третьей точки, мы использовали среднюю величину коэффициента сдвиговой вязкости, вычисленную для двух данных точек.

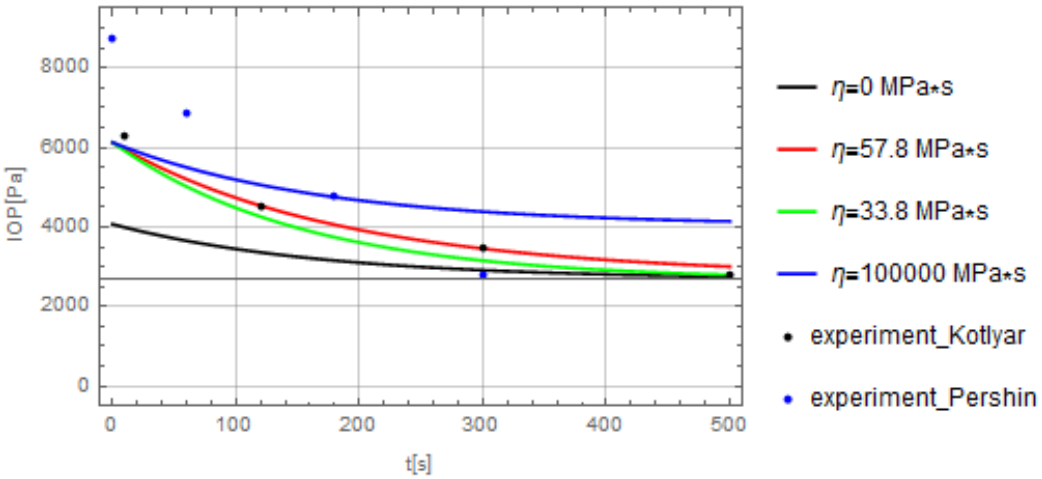

Рисунок 8. Зависимость ВГД от времени при учете гидродинамики внутриглазной жидкости.

Как видно из рис. 8, значение коэффициента сдвиговой вязкости склеры влияет на характер спада кривой, соответствующей релаксации напряжений. При большем коэффициенте сдвиговой вязкости наблюдается более продолжительная релаксация напряжений. Точка,

соответствующая значению ВГД непосредственно после инъекции, не зависит от значения коэффициента сдвиговой вязкости. В случае, когда коэффициент сдвиговой вязкости равен нулю, что соответствует отсутствию вязкостных свойств склеры в рамках принятой модели, теория не достаточно удовлетворительно описывает эксперимент. Это означает, что релаксацию напряжений после введения интравитреальной инъекции нельзя объяснить только наличием оттока внутриглазной жидкости.

Сравнивая результаты, полученные при двух типах граничного условия для перемещений на внутреннем радиусе, мы можем отметить, что значение коэффициента сдвиговой вязкости склеры меньше в случае, когда объем глаза предполагается фиксированным на протяжении времени проведения эксперимента. Подобный результат может объясняться тем, что при данной постановке задачи теория не может учесть все экспериментальные точки. Иными словами, теоретические вычисления не могут привести к такому значению коэффициента сдвиговой вязкости склеры, при котором спад ВГД будет качественно соответствовать экспериментальному. Как мы можем убедиться, сравнивая рис. 6 и 8, необходимо принимать во внимание оба фактора: и наличие вязкости склеры, и учет оттока внутриглазной жидкости из нагруженного глаза, - для лучшего удовлетворения теорией экспериментальных данных.

Для сравнения результатов, полученных на основе применения различных численных алгоритмов, обсуждаемых в данной работе, мы использовали средние значения коэффициента сдвиговой вязкости для двух и для трех последних экспериментальных точек, приведенных в [4] и изображенных на рис. 2. Применяя метод Закиана, метод Джеффресона и Чоу для 10-ти и 15-ти членов разложения ряда в квадратурной формуле, задающей численное обратное преобразование Лапласа, мы получили следующие средние значения коэффициента сдвиговой вязкости для двух средних экспериментальных точек: η=57.8 МПа·с, η=58.1 МПа·с, η=57.7 МПа·с соответственно. Средние значения коэффициента сдвиговой вязкости для трех последних экспериментальных точек: η=49.8 МПа·с, η=50.5 МПа·с, η=49.5 МПа·с соответственно перечисленным алгоритмам. Построим зависимости ВГД от времени, соответствующие перечисленным значениям коэффициента сдвиговой вязкости склеры и сравним результаты для двух средних и последней экспериментальной точек, приведенных в [4]. Графическое сравнение функций ВГД, зависящих от времени, полученных при использовании средних значений коэффициента сдвиговой вязкости для двух средних экспериментальных точек представлено на рис.9.

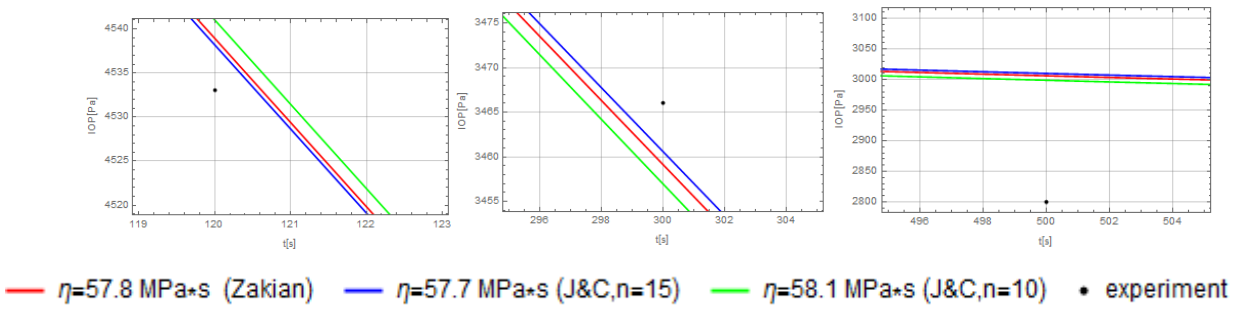

Рисунок 9. Графическое сравнение функций ВГД от времени, полученных при использовании различных численных методов, при учете гидродинамики внутриглазной жидкости (при рассмотрении средних значений коэффициента сдвиговой вязкости склеры для двух средних экспериментальных точек).

Графическое сравнение при использовании средних значений коэффициента сдвиговой вязкости для трех последних экспериментальных точек представлено на рис. 10.

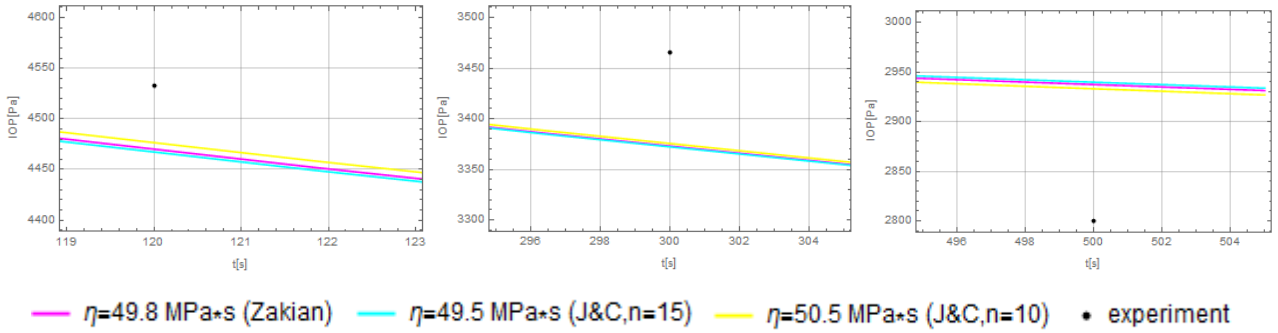

Рисунок 10. Графическое сравнение функций ВГД от времени, полученных при использовании различных численных методов, при учете гидродинамики внутриглазной жидкости (при рассмотрении средних значений коэффициента сдвиговой вязкости для трех последних экспериментальных точек).

Анализируя данные, приведенные на рис. 9, можно сделать вывод о том, что алгоритм Джеффресона и Чоу для 15-ти членов разложения ряда в квадратурной формуле, задающей численное обратное преобразование Лапласа, описывает экспериментальные данные наилучшим образом. При этом стоит обратить внимание на тот факт, что два других численных алгоритма дают результаты, достаточно хорошо удовлетворяющие экспериментальным данным. Более того, они мало отличаются от результатов, полученных при использовании n=15. Можно отметить, что результаты, полученные при использовании алгоритма Джеффресона и Чоу для n=15, больше соответствуют результатам, полученным при использовании алгоритма Закиана, чем для n=10, но при рассмотрении задачи, поставленной в данной работе, это не играет существенной роли. Из рис. 10 можно сделать вывод о том, что разница в результатах, получаемых при использовании разных численных алгоритмов, мала. Анализируя картину в целом, мы можем утверждать, что в рамках данной работы все три перечисленных численных алгоритма обратного преобразования Лапласа дают практически одинаковый прогноз для функции релаксации напряжений, и применение любого из них правомерно.

Обсудим результаты, полученные при использовании модифицированных схем обработки данных тонографического исследования. Как мы уже показали, численные алгоритмы обратного преобразования Лапласа, рассматриваемые в рамках данной работы, дают практически одинаковые результаты. В связи с этим далее мы будем использовать только алгоритм Закиана для получения оригиналов функций перемещений и радиальных напряжений, зависящих от времени. Рассмотрим результаты, полученные в предположении зависимости величины скорости притока внутриглазной жидкости от приложенной нагрузки, в то время как давление в эписклеральных венах предполагается практически не зависимым от нагружения. Значение коэффициента сдвиговой вязкости, полученное методом бисекции: η=17.8 МПа·с. Данное значение больше получаемого в предположении постоянства величины объема глаза на протяжении времени проведения эксперимента и меньше значения, получаемого при стандартной обработке данных тонографического исследования при учете оттока внутриглазной жидкости. Функция зависимости ВГД от времени представлена на рис. 11.

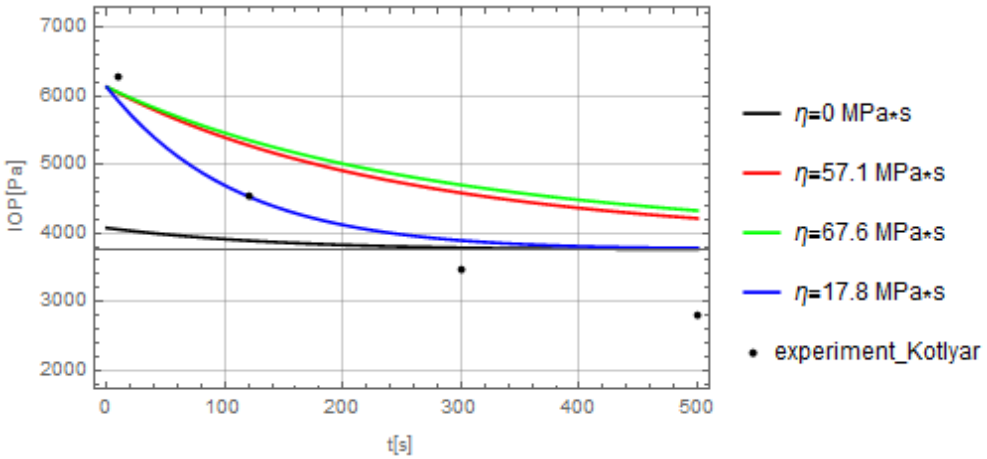

Рисунок 11. Зависимость ВГД от времени при использовании модифицированной схемы обработки данных тонографического исследования, предполагающей зависимость величины скорости притока внутриглазной жидкости от приложенной нагрузки, в то время как давление в эписклеральных венах предполагается практически не зависимым от нагружения.

Из рис. 11 видно, что кривые, характеризующие изменение ВГД с течением времени, стремятся к асимптоте, проходящей выше двух последних экспериментальных точек. Следовательно, применение обсуждаемой схемы обработки данных тонографического исследования приводит к результатам, хуже согласующимся с экспериментальными данными, чем результаты, полученные путем применения стандартной схемы.

Рассмотрим результаты, полученные в предположении равенства притоков внутриглазной жидкости в нагруженном и ненагруженном глазу, в то время как давление в эписклеральных венах не фиксируется с помощью заданного соотношения $P_e - P_{e0} = 1.25$ мм.рт.ст. Значение коэффициента сдвиговой вязкости, полученное методом бисекции: η=67.6

МПа·с. Данное значение больше получаемого в предположении постоянства величины объема глаза на протяжении времени проведения эксперимента, а также значений, полученных при других схемах обработки данных тонографического исследования при учете оттока внутриглазной жидкости. Функция зависимости ВГД от времени представлена на рис. 12.

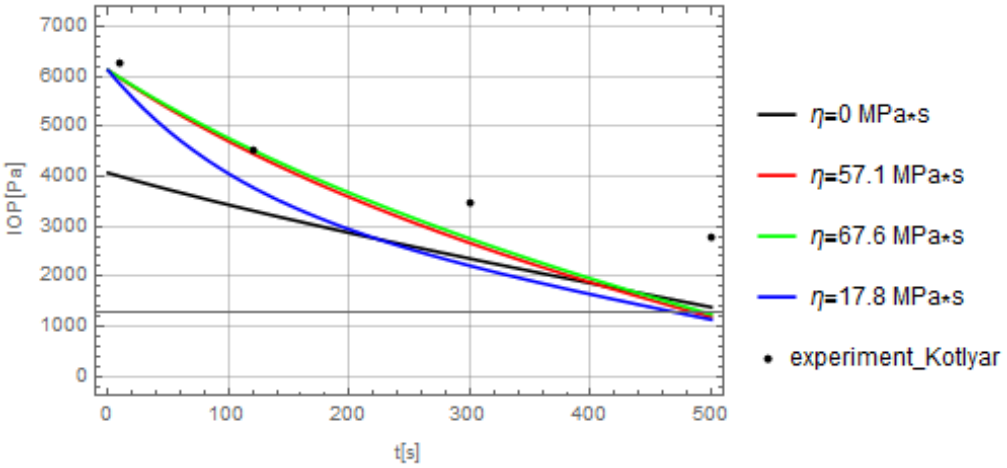

Рисунок 12. Зависимость ВГД от времени при использовании модифицированной схемы обработки данных тонографического исследования, предполагающей равенство притоков внутриглазной жидкости в нагруженном и ненагруженном глазу, в то время как давление в эписклеральных венах не фиксируется с помощью заданного предположения $P_e - P_{e0} = 1.25$ мм.рт.ст.

Из рис. 12 видно, что полученные теоретически кривые, характеризующие изменение ВГД с течением времени, имеют более резкий спад, чем экспериментальная зависимость. При этом не наблюдается значение ВГД, к которому стремились бы теоретические кривые, что не соответствует действительности, поскольку интенсивный отток должен происходить только из нагруженного глаза, т.е. до того момента, пока дополнительный объем жидкости, введенный при инъекции, не вытечет. После этого ВГД должно прийти в норму, а не свестись к нулю. Следовательно, применение обсуждаемой схемы обработки данных тонографического исследования приводит к результатам, хуже согласующимся с экспериментальными данными, чем результаты, полученные путем применения стандартной схемы.

Исследуем влияние модулей упругости материала склеры на значение коэффициента сдвиговой вязкости. Данное исследование актуально в силу того, что в разных источниках литературы приводятся разные значения модулей Юнга в направлении оси симметрии и в плоскости изотропии [20]. Рассмотрим комбинацию модулей Юнга, приведенную в [20] и близкую к рассматриваемой нами в рамках данной работы: $E_{\theta\theta} = 17.4$ МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta} = 0.01$. Применяя метод бисекции, можно получить значения коэффициента сдвиговой вязкости склеры для второй экспериментальной точки, приведенной в [4] (ВГД=4533 Па, t=120 с) и для третьей экспериментальной точки, приведенной в [18] (ВГД=4800 Па, t=180 с): η=17.6

МПа·с, η=57.2 МПа·с соответственно. Как видно, значение коэффициента сдвиговой вязкости в данном случае меньше получаемого при значениях модулей Юнга $E_{\theta\theta} = 14.3$ МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta} = 0.01$ при стандартной схеме обработки данных тонографического исследования. Функция зависимости ВГД от времени представлена на рис. 13.

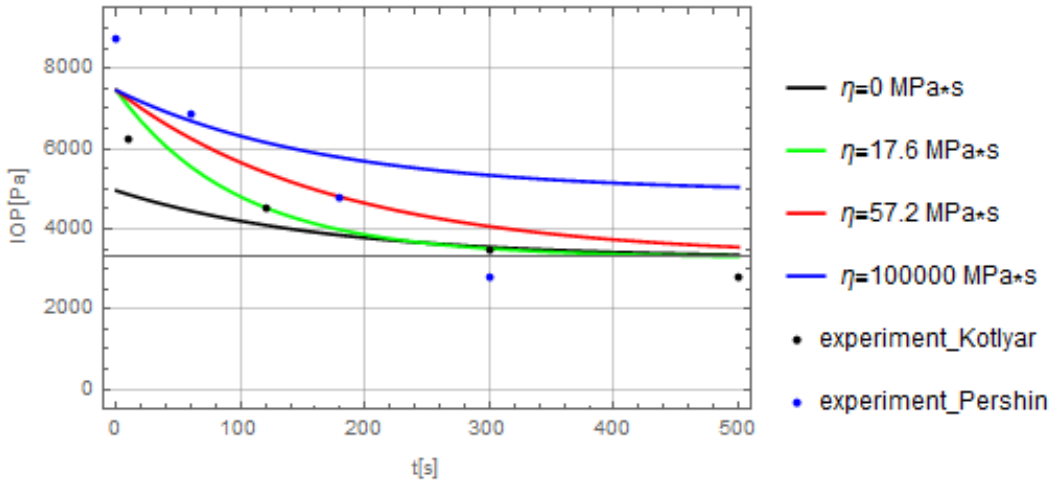

Рисунок 13. Зависимость ВГД от времени при использовании значений модулей Юнга $E_{\theta\theta} = 17.4$ МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta} = 0.01$.

Сравнивая рис. 8 и 13, можно сделать вывод о том, что коэффициент сдвиговой вязкости склеры зависит от значений модулей Юнга, при этом чем больше значения модулей Юнга, тем меньше значение сдвиговой вязкости. Функции зависимости ВГД от времени при некоторых других комбинациях модулей Юнга, приведенных в [16], представлены на рис. 14.

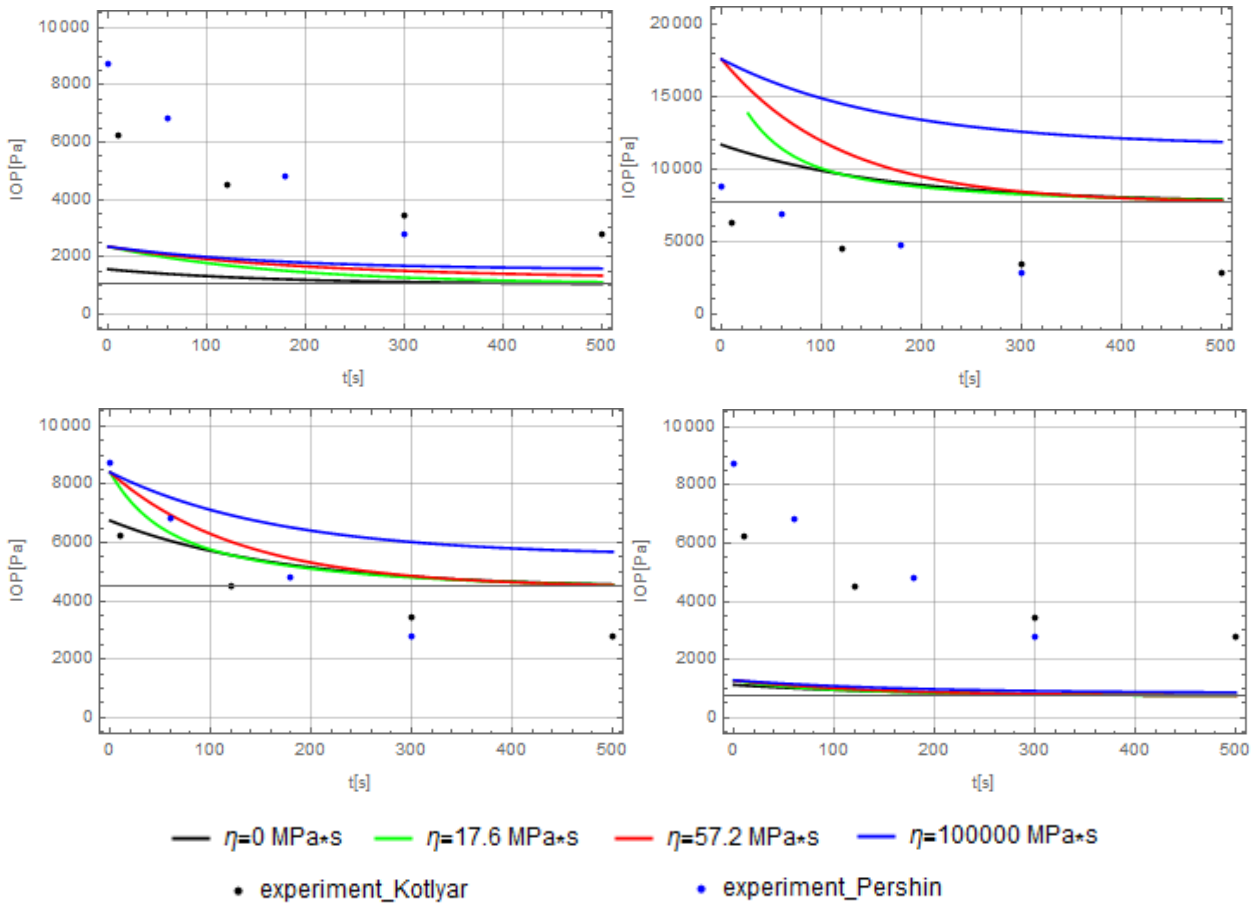

Рисунок 14. Зависимость ВГД от времени при использовании значений модулей Юнга: а) $E_{\theta\theta} = 5.5$ МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta} = 0.01$; б) $E_{\theta\theta} = 41.0$ МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta} = 0.01$; в) $E_{\theta\theta} = 20.0$ МПа, $E_{rr} = 0.5$ МПа; с) $E_{\theta\theta} = 3.0$ МПа, $E_{rr} = 0.5$ МПа.

Анализируя рис. 13, 14 и сравнивая их с рис. 8, можно заключить, что использование комбинации модулей Юнга $E_{\theta\theta} = 14.3$ МПа, $E_{rr}/E_{\theta\theta} = 0.01$, предлагаемой в ряде работ, в. т.ч. в [17], оптимально, т.к. в данном случае теория лучше всего согласуется с экспериментальными данными, приведенными в [4]. При этом стоит отметить, что варьирование значений модулей Юнга не привело к результатам, удовлетворительно описывающим эксперимент, приведенный в [18].

Итак, в рамках данной магистерской работы получены следующие результаты:

1. Для описания поведения склеры после интравитреальной инъекции (инъекции внутрь стекловидного тела) решена задача для вязкоупругого линейного трансверсально-изотропного сферического слоя при центральносимметричной нагрузке: внешнее давление отсутствует, на внутреннем радиусе заданы перемещения, учитывающие величину дополнительного объема жидкости, введенного при инъекции.
2. Показано, что численное решение для вязкоупругой задачи сходится к решению для упругой задачи при устремлении времени к бесконечности.
3. Определены значения коэффициента сдвиговой вязкости склеры при:

a. Условии сохранения дополнительного объема жидкости, введенного при инъекции;
b. Учете гидродинамики внутриглазной жидкости, а именно: наличии интенсивного оттока внутриглазной жидкости из нагруженного глаза. Использовалось три схемы обработки данных тонографического исследования, основанных на разных предположениях о механизмах процессов, протекающих в глазу;
c. Трех численных алгоритмах для обратного преобразования Лапласа, а именно: алгоритме Закиана, алгоритме Джефрессона и Чоу для 10-ти и 150ти членов разложения ряда в квадратурной формуле, задающей численное обратное преобразование Лапласа;
d. Некоторых известных из литературы комбинациях модулей Юнга.

ВЫВОДЫ

Перечислим основные выводы проделанной работы, подробно описанные в предыдущей главе. При учете обоих факторов: наличия вязкости склеральной оболочки глаза и интенсивного оттока внутриглазной жидкости из нагруженного глаза, - теория лучше согласуется с экспериментом, чем при учете одного из них. Таким образом, релаксацию напряжений невозможно описать качественно наличием только лишь вязкоупругого поведения склеры при нагружении или наличием гидродинамики внутриглазной жидкости. При этом оказалось, что значение коэффициента сдвиговой вязкости склеры меньше в случае предположения постоянства объема глаза на протяжении времени проведения эксперимента. Величина коэффициента сдвиговой вязкости влияет на характер релаксации напряжений: чем больше коэффициент сдвиговой вязкости, тем более продолжительна релаксация напряжений. Выбор численного алгоритма обратного преобразования Лапласа при рассмотрении алгоритма Закиана, а также алгоритмов Джеффресона и Чоу для 10-ти и 15-ти членов разложения ряда в квадратурной формуле, задающей численное обратное преобразование Лапласа, не оказывает значительного влияния на результат. При этом стоит отметить, что использование алгоритма Закиана наименее трудоемко с вычислительной точки зрения в силу использования наименьшего числа членов разложения ряда в квадратурной формуле. Традиционные предположения тонографии приводят к результатам, лучше согласующимся с экспериментальными данными, чем предположения модифицированных схем обработки данных тонографического исследования. Такой вывод может объясняться тем, что при попытке описать одни физические механизмы работы гидродинамической системы глаза необходимо параллельно учитывать ряд других процессов и факторов. Так, если принимать, что часть параметров, характеризующих состояние глаза, изменяется при нагружении глаза, вполне вероятно, что нужно учитывать сам характер нагружения и величину прикладываемой нагрузки. В рамках же рассматриваемой модели в [8] принято, что ряд параметров меняется при нагружении, но при этом не зависит явно от величины ВГД и приложенной нагрузки, т.е. меняется скачкообразно и затем сохраняется на протяжении времени проведения эксперимента. При этом предположение о том, что скорость притока внутриглазной жидкости меняется при нагружении, а давление в эписклеральных венах остается практически неизменным, приводит к меньшему значению коэффициента сдвиговой вязкости склеры и наблюдению меньшего спада ВГД с течением времени. Предположение о том, что приток жидкости не зависит от ВГД и величины нагрузки, тогда как давление в эписклеральных венах предполагается заметно отличным от соответствующего значения в ненагруженном глазу, приводит к наблюдению резкого спада

ВГД с течением времении, что качественно не согласуется с экспериментальными данными. Найденные значения коэффициента сдвиговой вязкости в этом случае больше. Коэффициент сдвиговой вязкости склеры зависит от значений модулей Юнга в направлении оси симметрии и плоскости изотропии в трансверсально – изотропном материале. При допустимом варьировании значений модулей оказывается, что коэффициент сдвиговой вязкости тем больше, чем меньше модули Юнга. При этом использование комбинации модулей Юнга, предложенной в [17], является наиболее удовлетворительной при сопоставлении теоретических данных с экспериментальными.

Приложение 1 БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Общие положения

Организация трудового процесса осуществляется в определенных условиях производственной среды, которые характеризуются совокупностью элементов и факторов данной среды. На рабочем месте должны быть предусмотрены меры защиты от возможного воздействия опасных и вредных факторов производства. Уровни этих факторов не должны превышать предельных значений, оговоренных правовыми, техническими и санитарно-техническими нормами. Эти нормативные документы обязывают к созданию на рабочем месте условий труда, при которых влияние опасных и вредных факторов на работников либо устранено совсем, либо находится в допустимых пределах.

При выполнении данной работы использовался персональный компьютер, натурные эксперименты отсутствовали. В соответствии с ГОСТ 12.0.003-74 ССБТ. «Опасные и вредные производственные факторы. Классификация» все производственные факторы делятся на опасные и вредные. Опасный производственный фактор – фактор, воздействие которого может привести к травме или другому резкому внезапному ухудшению здоровья. Вредный производственный фактор – фактор, воздействие которого на работника может привести к снижению работоспособности человека или заболеванию. Опасные и вредные производственные факторы в свою очередь делятся на:

1. Физические;
2. Химические;
3. Биологические;
4. Психофизиологические факторы.

При работе за персональным компьютером следует обратить внимание на следующие основные факторы, которые могут негативно воздействовать на пользователя:

1. Нерациональная организация рабочего места;
2. Длительные статические нагрузки.
3. Нерациональная организация освещения рабочего места;
4. Напряжение зрения;
5. Повышенные уровни запыленности воздуха рабочего помещения;
6. Повышенный уровень шума;
7. Повышенный уровень электромагнитного излучения;
8. Повышенный уровень статического электричества;
9. Пониженная или повышенная влажность воздуха;
10. Интеллектуальные и психо-эмоциональные нагрузки;

11. Ненормативный рабочий день

Требования к персональным электронно-вычислительным машинам

Для создания нормативных условий труда за компьютером необходимо, чтобы он соответствовал требованиям, перечисленным в СанПиН 2.2.2.543-96 «Гигиенические требования к видеодисплейным терминалам, персональным электронно-вычислительным машинам и организации работы». Визуальные эргономические параметры видеодисплейных терминалов (ВДТ) являются параметрами безопасности, их неправильный выбор может привести к ухудшению здоровья пользователей. Основными визуальными эргономическими параметрами являются:

1. Яркость знака (яркость фона);
2. Внешняя освещенность экрана;
3. Угловой размер знака.

Обязательные требования к основным эргономическим параметрам ВДТ приведены в Таблице 5.

Таблица 5. Визуальные эргономические параметры ВДТ и пределы их изменений.

Наименование параметра	Пределы значений параметров	
	Мин. (не менее)	Макс. (не более)
Яркость знака (яркость фона), кд/кв. м (измеренная в темноте)	35	120
Внешняя освещенность экрана, лк	100	250
Угловой размер знака, угл. мин.	16	60

Эргономические требования

Для организации офисной работы с использованием ВДТ необходимо следовать установленным правилам, указанным в ГОСТ Р ИСО 9241-5-2009 «Эргономические требования к проведению офисных работ с использованием видеодисплейных терминалов (VDT)» и в ГОСТ 12.2.032-78 «ССБТ. Рабочее место при выполнении работ сидя. Общие эргономические требования». Рабочее место - это звено производственного процесса, обслуживаемое одним или несколькими исполнителями, предназначенное для выполнения одной или нескольких производственных или обслуживающих операций, оснащённое соответствующим оборудованием и технологической оснасткой. Рабочее место должно быть приспособлено для конкретного вида труда и для работников определенной квалификации с учетом их физических и психических возможностей и особенностей. При разработке

конструкции и выборе рабочих мест для выполнения офисных задач с использованием ВДТ необходимо применять следующие взаимосвязанные принципы:

1. Универсальность и гибкость: рабочие станции должны давать возможность предполагаемым пользователям выполнять поставленные задачи эффективно и с комфортом. Кроме того, при разработке конструкции рабочей станции должны быть учтены особенности пользователей;
2. Пригодность: при выборе и конструировании офисной мебели и оборудования необходимо обеспечение соответствия между набором офисных задач и потребностями пользователей;
3. Возможность изменения рабочей позы: организация рабочего места, производственные задания и офисная мебель должны обеспечивать возможность изменения рабочей позы;
4. Наличие информации для пользователя: пользователи должны быть проинформированы о необходимости регулировки офисной мебели и других устройств;
5. Ремонтопригодность и адаптируемость: Проектировщики рабочей станции должны обеспечивать легкий доступ к оборудованию при выполнении технического обслуживания и минимальные нарушения в текущей работе при выполнении технического обслуживания. Конструкция рабочей станции должна также облегчать адаптацию оборудования к изменяющимся требованиям и обстоятельствам.

Конструкция рабочего стола должна обеспечивать оптимальное размещение на рабочей поверхности используемого оборудования с учетом его количества и конструктивных особенностей, а также характера выполняемой работы. Высота рабочей поверхности стола для взрослых пользователей должна регулироваться в пределах 680-800 мм. При отсутствии такой возможности высота рабочей поверхности стола должна составлять 725 мм. Ширина рабочего стола – не менее 500 мм, глубина на уровне коле – не менее 450 мм, на уровне вытянутых ног – не менее 650 мм. Рабочий стул (кресло) должен быть подъемно-поворотным, регулируемым по высоте и углам наклона и по расстоянию спинки от переднего края сиденья. Регулировка высоты поверхности сиденья должна находиться в пределах 400-450 мм, углы наклона вперед 15° и назад 5°, пределы угла наклона спинки в вертикальной плоскости 0±30°. Ширина и глубина поверхности сиденья должны быть не менее 400 мм, высота опорной поверхности спинки 300±20 мм, ширина опорной поверхности спинки не менее 380 мм, радиус кривизны горизонтальной плоскости – 400 мм. Конструкция рабочего стула (кресла) должна обеспечивать подержание рациональной рабочей позы, позволять изменять позу с целью снижения статического

напряжения мышц шейно-плечевой области и спины для предупреждения развития утомления. Тип рабочего стула (кресла) должен выбираться в зависимости от характера и продолжительности работы с учетом роста пользователя, Поверхность сиденья, спинки и других элементов стула (кресла) должна быть полумягкой, с нескользящим, неэлектризующимея и воздухонепроницаемым покрытием, обеспечивающим легкую очистку от загрязнений. Расположение монитора в месте рабочей зоны должно обеспечивать удобство зрительного наблюдения в вертикальной плоскости под углом от нормальной линии взгляда оператора. Монитор должен иметь возможность поворачиваться вокруг горизонтальной и вертикальной осей.

Требования к естественному и искусственному освещению

Освещение – это есть отношение светового потока к освещаемой им площади. Нормальная освещенность имеет большое значение для предупреждения зрительного и общего утомления. Недостаточность освещения приводит к напряжению зрения, ослабляет внимание, приводит к наступлению преждевременной утомленности. Для поддержания нормального освещения необходимо руководствовать правилами, перечисленными в СНиП 23-05-95 «Естественное и искусственное освещение». Согласно этим нормам, освещение в помещениях с ПК должно быть смешанным: естественным и искусственным. Естественное освещение — освещение помещений дневным светом, проникающим через световые проемы в наружных ограждающих конструкциях помещений. Естественное освещение характеризуется тем, что меняется в широких пределах в зависимости от времени дня, времени года, характера области и ряда других факторов. Искусственное освещение применяется при работе в темное время суток и днем, когда не удается обеспечить нормированные значения коэффициента естественного освещения (пасмурная погода, короткий световой день). Освещение, при котором недостаточное по нормам естественное освещение дополняется искусственным, называется смешанным освещением. Искусственное освещение подразделяется на рабочее, аварийное, эвакуационное, охранное. Рабочее освещение, в свою очередь, может быть общим или комбинированным. Общее — освещение, при котором светильники размещаются в верхней зоне помещения равномерно или применительно к расположению оборудования. Комбинированное — освещение, при котором к общему добавляется местное освещение. При устройстве местного освещения рекомендуется применять поворачивающиеся передвижные лампы. Свет должен падать слева. Рекомендуемая мощность ламп 50-70 Вт. Освещенность на поверхности стола в зоне размещения рабочего документа должна быть 300-500 лк. Рекомендуется, чтобы стены, оборудование и мебель имели матовое покрытие с коэффициентом отражения 0,7-0,8.

Достигается это окраской потолка в белый цвет, а стен – в светло-желтые и оранжево-желтые цвета. Необходимо также выполнять следующие нормы: отношение яркости между рабочими поверхностями не должно превышать 3:1-5:1, а между рабочими поверхностями и поверхностями стен и оборудования 10:1.

Требования к микроклимату рабочей зоны

Для поддержания микроклимата в производственных помещениях необходимо руководствоваться правилами, перечисленными в ГОСТ 12.1.005-88 «Общие санитарно-гигиенические требования к воздуху рабочей зоны» и в СанПиН 2.2.4.548-96 «Гигиенические требования к микроклимату производственных помещений». Санитарные правила устанавливают гигиенические требования к показателям микроклимата рабочих мест производственных помещений с учетом интенсивности энерготрат работающих, времени выполнения работы, периодов года и содержат требования к методам измерения и контроля микроклиматических условий. Оптимальные параметры микроклимата в производственных помещениях обеспечиваются системами кондиционирования воздуха, а допустимые параметры — обычными системами вентиляции и отопления. Для создания и автоматического поддержания в лаборатории независимо от наружных условий оптимальных значений температуры, влажности, чистоты и скорости движения воздуха в холодное время года используется водяное отопление, в теплое время года применяется кондиционирование воздуха. Кондиционер представляет собой вентиляционную установку, которая с помощью приборов автоматического регулирования поддерживает в помещении заданные параметры воздушной среды. Одежда персонала должна соответствовать температурному режиму в помещении. В холодные периоды года температура воздуха, скорость его движения и относительная влажность воздуха должны составлять: 22 -24°С; 0.1м/с; 40-60% соответственно. В теплые периоды года: 23 — 25°С; 0.1-0.2 м/с; 40-60%. Воздух, поступающий в помещения с ЭВМ, должен быть отчищен от загрязнений, в том числе от пыли и микроорганизмов.

Требования к уровням шума

Нормирование уровня шума в помещениях с вычислительной техникой должно осуществляется в соответствии с СН 2.2.4/2.1.8.562-96 «Шум на рабочих местах, в помещениях жилых, общественных зданий и на территории жилой застройки». Шум — это беспорядочные колебания различной физической природы, отличающиеся сложностью временной и спектральной структуры. Длительное воздействие шумов отрицательно сказывается на эмоциональном состоянии персонала. Шум ухудшает условия труда, оказывая вредное действие на организм человека. Люди, работающие в условиях

длительного шумового воздействия, испытывают раздражительность, головные боли, головокружение, снижение памяти, повышенную утомляемость и т.д. Длительное воздействие интенсивного шума (выше 80 дБА) на слух человека приводит к его частичной или полной потере. Основным источником шума в помещениях, оборудованных вычислительной техникой, являются печатающие устройства (принтеры), оборудование для кондиционирования воздуха, в самой вычислительной технике – вентиляторы систем охлаждения и трансформаторы. Предельно допустимый уровень (ПДУ) шума — это уровень, который при ежедневной (кроме выходных дней) работе, но не более 40 часов в неделю в течение всего рабочего стажа, не должен вызывать заболеваний или отклонений в состоянии здоровья. Нормируемые уровни шума обеспечиваются путем использования малошумного оборудования, применения звукопоглощающих материалов для внутренней облицовки помещений, а также различных звукопоглощающих устройств (перегородки, кожухи, прокладки и т. д.). Находящееся рядом с рабочим местом постороннее оборудование, являющееся источником шума, должно быть перенесено в другое помещение.

Требования к электробезопасности

Для обеспечения электробезопасности электроустановок различного назначения необходимо руководствоваться правилами, перечисленными в ГОСТ Р 12.1.019-2009 «ССБТ. Электробезопасность. Общие требования и номенклатура видов защиты». Для питания ЭВМ служит трехфазная электросеть с напряжением 380/220В и частотой 50Гц. Помещение, в котором проводились вычислительные работы, относится к помещениям без повышенной опасности, поэтому защитное заземление не применялось. Допуск к работе может быть разрешен только после инструктажа по технике безопасности. Для защиты от поражения электрическим током служат следующие меры:

1. Защитные оболочки;
2. Защитные ограждения;
3. Безопасное расположение токоведущих частей и их изоляция;
4. Изоляция рабочего места;
5. Использование малых напряжений;
6. Защитное отключение электроустановки;
7. Предупредительная сигнализация
8. Блокировка системы в случае неисправности.

Пожарная безопасность при работе с вычислительной техникой

Пожарная безопасность должна регулироваться согласно правилам, перечисленным в ГОСТ 12.1.004-91 «Пожарная безопасность. Общие требования». К опасным факторам, которые могут стать причиной возгорания, можно отнести следующие: искры, открытое пламя, повышенная температура окружающей среды, токсичные продукты горения и термического разложения, пониженная концентрация кислорода. Противопожарная защита обеспечивается следующими мерами:

1. Применение средств пожаротушения;
2. Установка сигнализации и устройств тушения, ограничивающих распространение пожара;
3. Мероприятия по эвакуации людей;
4. Наличие средств индивидуальной защиты и средств противодымной защиты;
5. Наличие противопожарных перегородок и отсеков, устройств автоматического отключения систем;
6. Планировка эвакуационных путей и выходов;
7. Оповещение людей;
8. Технические средства для эвакуации и спасения людей;
9. Наличие огнетушащих веществ.

В помещениях вычислительного центра должны быть предусмотрены возможные пути эвакуации персонала. Требования к количеству, размерам и размещению эвакуационных выходов, лестниц и лестничных клеток установлены СНиП 2.01.02-85 «Противопожарные нормы. Огнестойкость зданий, сооружений и пожарных отсеков».

Организация трудового процесса

Основная цель рациональной организации трудового процесса – поддержание работоспособности на оптимальном уровне. Необходимость чередования труда и отдыха обусловлена физиологическими закономерностями и играет большую роль в поддержании трудового ритма. Основные фазы работоспособности: вырабатывание и нарастающая работоспособность; устойчивая работоспособность; падение работоспособности в результате развивающегося утомления. Тяжесть трудового процесса в ходе данной научно – исследовательской работы можно отнести к легкой физической нагрузке. Наибольшая работоспособность инженерно-технических работников наблюдается с 10 до 12 и с 16 до 18 часов. Рекомендуется делать перерывы по 8-10 минут каждые 2 часа в первой половине дня и 5-8 минут через каждый час во второй половине дня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Ljubimova. Biomechanics of the Human Eye and Intraocular Pressure Measurements // Ph.D. thesis - Royal Institute of Technology - 2009.
2. Л.А. Карамшина. Модели многослойных оболочек в задачах офтальмологии // Дисс. – Санкт-Петербургский государственный университет - 2011.
3. С.А. Регирер. Лекции по биологической механике – Изд. Московского университета – 1980 – 144 с.
4. К. Котляр, С. Бауэр, Н. Планге. Клинические и биомеханические аспекты изменения внутриглазного давления после интравитреальных инъекций // Российский общенациональный офтальмологический форум - 2013.
5. В. Новацкий. Теория упругости // Пер. с польского – М.: Мир - 1975 - 872 с.
6. Р. Кристенсен. Введение в механику композитов // Пер. с англ. – М.: Мир - 1982 – 334 с.
7. Е.Н. Иомдина, С.М. Бауэр, К.Е. Котляр. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения // М.: Реал Тайм – 2015 – 208 с.
8. Г.А. Любимов, И.Н. Моисеева, А.А. Штейн, Е.Н. Иомдина, Л.А. Назаренко. Об оценке величины оттока жидкости из глаза с помощью модифицированного метода тонографии // Российский журнал биомеханики – 2012 – Т.16 - №2 – сс. 8–20.
9. Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, А.А. Белов. Численное обращение преобразования Лапласа: Учебно – методическое пособие // Изд. Нижегородского университета – 2010 – 34 с.
10. G. Doetsch. Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation // Springer – 1974 - 327 p.
11. J. Abate, W. Whitt. A Unified Framework for Numerically Inverting Laplace Transforms// INFORMS Journal on Computing – 2006 - V.18 - No.4 - pp.408-421.
12. G. A. Baker, P. Graves-Morris. Pad´e Approximants, 2nd ed. // Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications – 1996 - Vol.59 – 764 p.
13. V. Zakian. Numerical inversion of Laplace transform // Elec. Lett. – 1969 - No.5 - pp.120-121.
14. V. Zakian. Optimisation of numerical inversion of Laplace transforms // Elec. Lett. – 1970 - No.6 - pp.677-679.
15. C.P. Jeffreson, E.-P. Chow. Least squares coefficients for a quadrature formula for Laplace transform inversion // Journal of Computational and Applied Mathematics – 1978 – V.4 - №1 - pp. 53-58.
16. G. Miller. Least squares approximation of functions using exponentials // Ph.D. thesis - John Hopkins Univ. - 1969.

17. С.М. Бауэр, Л.А. Замураев, К.Е. Котляр. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики – 2010 – Т.10 - №2 – сс.43–49.
18. Б.С. Першин. Гидродинамический баланс глазного яблока при интравитреальном введении дополнительного объема жидкости // Дисс. – ФГБУ Научно-исследовательский институт глазных болезней РАМН - 2012.
19. C.H. Morales. A Bolzano's theorem in the new millennium // Nonlinear Analysis – 2002 - No. 51 - pp. 679-691.
20. Е.Н. Иомдина. Механические свойства тканей человека // Изд. МГУ: Современные проблемы биомеханики – 2006 – Вып.11 – сс.183-200.