

# Задача о качении тяжелого диска по горизонтальной плоскости

*В. А. Цаплин*

*Институт проблем машиноведения РАН, С.-Петербург, Большой пр. В.О.,61*

## 1 Введение

В работе рассматривается задача динамики движения абсолютно твердого тела, – диск, катящийся по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести. Между диском и плоскостью нет проскальзывания.

Иллюстрируется применение фундаментальных законов механики в векторной форме для получения системы уравнений движения. Рассматриваемая задача относится к задачам с неголономными связями. Проводится исследование устойчивости, ставятся условия непроскальзывания.

Имеется две постановки. Первая – задача с идеальными связями. Описывается режим прямого качения (п.3), стационарного движения по окружности с постоянным углом наклона (п.4). Вторая постановка – задача с учетом диссипативного момента в точке касания диска, для его описания используется простейшая зависимость от вектора угловой скорости. Исследуется асимптотика завершения движения с двумя малыми параметрами – коэффициентом диссипации и углом наклона диска к опорной плоскости.

Исходные уравнения записаны в терминах аппарата прямого тензорного исчисления, то есть величины, входящие в эти выражения не зависят от выбора базиса трёхмерного пространства.

## 2 Уравнения движения. Общие соотношения

Диск представляет собой твердое тело с трансверсально изотропным тензором инерции относительно центра масс  $C$

$$\underline{I} = I' (\underline{E} - \underline{e}_3 \underline{e}_3) + I \underline{e}_3 \underline{e}_3,$$

и это твердое тело касается горизонтальной опорной плоскости какой-либо точкой  $A$ , принадлежащей окружности, которую назовем окружностью касания (ребром диска). Окружность касания лежит в плоскости трансверсальной изотропии, и ее центр совпадает с центром масс. Между диском и плоскостью нет проскальзывания, то есть скорость материальной точки  $A$  ( $\underline{V}_A$ ) равна нулю. Обозначим  $\underline{R} = \overline{CA}$  вектор, соединяющий точки  $C$  и  $A$ .

Запишем уравнения динамики

$$m \underline{g} + \underline{F} = m \underline{W}$$

$$\frac{d(\underline{I} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \underline{R} \times \underline{F}$$

Первое из этих уравнений представляет собой закон баланса количества движения, второе – закон баланса момента количества движения. Здесь  $\underline{\omega}$  – угловая скорость диска,  $m$  – масса диска,  $\underline{g}$  – вектор ускорения свободного падения,  $\underline{F}$  – сила со стороны плоскости на диск,  $\underline{W}$  – ускорение центра масс,  $\underline{W} = d\underline{V}_C/dt$ ,  $\underline{V}_C$  – скорость материальной точки  $C$ .

Исключая  $\underline{F}$ , запишем полную систему уравнений

$$\frac{d(\underline{I} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \underline{R} \times (m\underline{W} - m\underline{g}), \quad \underline{V}_A = 0 \quad (1)$$

Чтобы перейти к координатной форме уравнений, введем ортонормированный базис. Орт  $\underline{e}_3$  определяется выражением для тензора  $\underline{I}$  (в начальный момент - двузначно, далее - по непрерывности). Пусть

$$\underline{e}_2^* = \underline{k} - \underline{k} \cdot \underline{e}_3 \underline{e}_3, \quad \underline{e}_2 = \frac{\underline{e}_2^*}{|\underline{e}_2^*|}, \quad \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \times \underline{e}_3.$$

где  $\underline{k} = -\underline{g}/g$ , ускорение свободного падения  $g = |\underline{g}|$ . Вектор  $\underline{e}_2^*$  - это проекция орта вертикали  $\underline{k}$  на плоскость диска. Значит, орт  $\underline{e}_2$  направлен от точки касания  $A$  к центру диска  $C$ .

$$\overline{AC} = r \underline{e}_2 \quad (1a)$$

где  $r$  - радиус окружности диска. Заметим, что  $\underline{e}_1 \cdot \underline{k} = 0$ , то есть орт  $\underline{e}_1$  лежит в горизонтальной плоскости. В то же время  $\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_3 = 0$ , то есть орт  $\underline{e}_1$  лежит в плоскости диска. Поэтому орт  $\underline{e}_1$  принадлежит линии пересечения этих плоскостей.

Координаты всех векторов с индексами 1,2,3 будем записывать в базисе  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ . Пусть векторы  $\underline{E}_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) это векторы  $\underline{e}_i$  в отсчетной конфигурации, когда  $\underline{e}_2 = \underline{k}$  (диск стоит на ребре). Тензор ориентации диска можно представить в виде композиции двух поворотов:

$$\underline{P} = \underline{Q}(\varphi \underline{e}_3) \cdot \underline{D} = \underline{D} \cdot \underline{Q}(\varphi \underline{E}_3),$$

где  $\underline{D}$  - тензор поворота от тройки векторов  $\underline{E}_i$  к векторам  $\underline{e}_i$ :

$$\underline{D} = \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \underline{E}_i.$$

Это означает, что  $\underline{e}_i = \underline{D} \cdot \underline{E}_i$ . Тензор поворота  $\underline{Q}(\alpha \underline{n})$  осуществляет, вообще, поворот на угол  $\alpha$  вокруг орта  $\underline{n}$ , согласно теореме Эйлера:

$$\underline{Q}(\alpha \underline{n}) = \underline{n} \underline{n} + (\underline{E} - \underline{n} \underline{n}) \cos \alpha + \underline{n} \times \underline{E} \sin \alpha.$$

Пусть  $\underline{\tilde{\omega}}$  - угловая скорость, соответствующая повороту  $\underline{D}$ :

$$\underline{\tilde{\omega}} = -\frac{1}{2} (\underline{\dot{D}} \cdot \underline{D}^T)_{\times} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \underline{e}_i \times \frac{d\underline{e}_i}{dt}.$$

Соответственно, в силу того, что  $\underline{\dot{D}} = \underline{\tilde{\omega}} \times \underline{D}$ , скорости изменения векторов  $\underline{e}_i$ , вращающихся с угловой скоростью  $\underline{\tilde{\omega}}$  равны

$$\frac{d\underline{e}_i}{dt} = \frac{d(\underline{D} \cdot \underline{E}_i)}{dt} = \underline{\dot{D}} \cdot \underline{E}_i = \underline{\tilde{\omega}} \times \underline{D} \cdot \underline{E}_i = \underline{\tilde{\omega}} \times \underline{e}_i. \quad (2)$$

Для композиции поворотов  $\underline{P} = \underline{D} \cdot \underline{Q}(\varphi \underline{E}_3)$  угловая скорость диска  $\underline{\omega}$  равна

$$\underline{\omega} = \underline{\tilde{\omega}} + \underline{D} \cdot (\varphi \underline{E}_3) = \underline{\tilde{\omega}} + \varphi \underline{e}_3, \quad (3)$$

поскольку  $\varphi \underline{E}_3$  это угловая скорость, соответствующая повороту  $\underline{Q}(\varphi \underline{E}_3)$  вокруг неподвижной оси с ортом  $\underline{E}_3$ .

Тензор поворота  $\underline{D}$  можно представить в виде композиции

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{Q}}(\vartheta \underline{e}_1) \cdot \underline{\underline{Q}}(\psi \underline{k}) = \underline{\underline{Q}}(\psi \underline{k}) \cdot \underline{\underline{Q}}(\vartheta \underline{E}_1).$$

Тогда

$$\underline{\underline{\omega}} = \psi \underline{k} + \underline{\underline{Q}}(\psi \underline{k}) \cdot (\dot{\vartheta} \underline{E}_1) = \psi \underline{k} + \dot{\vartheta} \underline{e}_1, \quad (3a)$$

поскольку  $\dot{\vartheta} \underline{e}_1$  это угловая скорость, соответствующая повороту  $\underline{\underline{Q}}(\vartheta \underline{E}_1)$  вокруг неподвижной оси с ортом  $\underline{E}_3$ , а  $\psi \underline{k}$  это угловая скорость, соответствующая повороту  $\underline{\underline{Q}}(\psi \underline{k})$  вокруг неподвижной оси с ортом  $\underline{k}$ . В результате, согласно (3), (3a),

$$\underline{\omega} = \dot{\vartheta} \underline{e}_1 + \psi \underline{k} + \dot{\varphi} \underline{e}_3.$$

Орт  $\underline{k}$  представим в координатах базиса  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ :

$$\underline{k} = \underline{E}_2 = \underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{e}_2 = \underline{e}_2 \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{e}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}(\vartheta \underline{e}_1) \cdot \underline{\underline{Q}}(\psi \underline{k}).$$

Умножая справа скалярно это равенство на  $\underline{\underline{Q}}(-\psi \underline{k})$ , получим

$$\underline{k} \cdot \underline{\underline{Q}}(-\psi \underline{k}) = \underline{e}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}(\vartheta \underline{e}_1).$$

Или,

$$\underline{k} = \underline{e}_2 \cdot \underline{\underline{Q}}(\vartheta \underline{e}_1) = \underline{e}_2 \cos \vartheta - \underline{e}_3 \sin \vartheta$$

Тогда угловая скорость  $\underline{\omega}$  в координатах базиса  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  ( $\underline{\omega} = \omega_1 \underline{e}_1 + \omega_2 \underline{e}_2 + \omega_3 \underline{e}_3$ ):

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\vartheta} \\ \omega_2 = \dot{\psi} \cos \vartheta \\ \omega_3 = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \vartheta \end{cases} \quad (4)$$

Углы  $\pi/2 - \vartheta, \psi, \varphi$  есть углы Эйлера (для них отсчетное положение - лежащий диск). Угол  $\vartheta$  есть отклонение диска от вертикали,  $\psi$  - угол поворота (от отсчетного положения) прямой, образованной пересечением плоскости окружности касания диска с опорной плоскостью (орт этой прямой  $\underline{e}_1$ ).

Найдём скорость геометрической точки касания  $\underline{V}_{A'}$ . Пусть  $\underline{R}_C$  - радиус-вектор точки  $C$ ,

$$\underline{V}_{A'} = \frac{d(\underline{R}_C + \overline{CA})}{dt} = \underline{V}_C + \frac{d\overline{CA}}{dt}, \quad \underline{V}_C = \frac{d\underline{R}_C}{dt}.$$

Так как  $\underline{V}_A = 0$ , то  $\underline{V}_C = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \overline{AC} = \underline{\omega} \times \overline{AC}$ . Вектор  $\overline{AC} = r \underline{e}_2$ , согласно (1a). В результате,

$$\underline{V}_{A'} = \underline{V}_C - r \frac{d\underline{e}_2}{dt} = \underline{\omega} \times (r \underline{e}_2) - r \frac{d\underline{e}_2}{dt}.$$

Повороту вектора  $\underline{e}_2$  соответствует угловая скорость  $\underline{\tilde{\omega}}$ , поэтому, используя (2) и (3), получаем

$$\frac{d\underline{e}_2}{dt} = \underline{\tilde{\omega}} \times \underline{e}_2 \Rightarrow \underline{V}_{A'} = \underline{\omega} \times (r \underline{e}_2) - r \underline{\tilde{\omega}} \times \underline{e}_2 = r(\underline{\omega} - \underline{\tilde{\omega}}) \times \underline{e}_2 = r \dot{\varphi} \underline{e}_3 \times \underline{e}_2 = -r \dot{\varphi} \underline{e}_1. \quad (5)$$

Следовательно, упомянутая прямая с ортом  $\underline{e}_1$  является касательной к траектории точки касания диска ( $\psi$  - угол курса).  $\varphi$  - угол поворота к реальному положению от воображаемого положения диска, в котором он имеет ту же окружность касания, но скользит по плоскости одной и той же материальной точкой.

Запишем систему (1) в координатной форме. Поскольку  $\underline{R} = \overline{CA} = -r\underline{e}_2$ ,  $m\underline{g} = -mg\underline{k} = mg(-\underline{e}_2 \cos \vartheta + \underline{e}_3 \sin \vartheta)$ , первое уравнение системы (1) запишется

$$\frac{d(I'\omega_1\underline{e}_1 + I'\omega_2\underline{e}_2 + I\omega_3\underline{e}_3)}{dt} = -r\underline{e}_2 \times (m\underline{W} - mg(-\underline{e}_2 \cos \vartheta + \underline{e}_3 \sin \vartheta))$$

Используя выражения (2), чтобы продифференцировать элементы базиса  $\underline{e}_i$  по времени, получим ( $\underline{W} = W_1\underline{e}_1 + W_2\underline{e}_2 + W_3\underline{e}_3$ )

$$\begin{cases} I'\dot{\omega}_1 + I\omega_2\omega_3 - I'\omega_2\tilde{\omega}_3 = -mr(W_3 - g \sin \vartheta) \\ I'\dot{\omega}_2 - I\omega_1\omega_3 + I'\omega_1\tilde{\omega}_3 = 0 \\ I\dot{\omega}_3 = mrW_1 \end{cases} \quad (6)$$

Здесь использовано, что в соответствии с (3)  $\omega_1 = \tilde{\omega}_1$ ,  $\omega_2 = \tilde{\omega}_2$  и очевидные соотношения для правого ортонормированного базиса  $\underline{e}_1 = \underline{e}_2 \times \underline{e}_3$ ;  $\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1$ ;  $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2$ .

Из (3), (4) следует, что

$$\tilde{\omega}_3 = \omega_3 - \dot{\varphi} = -\omega_2 \tan \vartheta \quad (7)$$

Координаты  $W_1$  и  $W_3$  найдем из второго равенства системы (1)  $\underline{V}_A = 0$ :

$$\begin{aligned} \underline{V}_C = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times \overline{AC} &= \underline{\omega} \times (r\underline{e}_2) = -\omega_3 r \underline{e}_1 + \omega_1 r \underline{e}_3 \quad \Rightarrow \\ \underline{W} = \frac{d\underline{V}_C}{dt} &= r \left( -\dot{\omega}_3 r \underline{e}_1 - \omega_3 r \frac{d\underline{e}_1}{dt} + \dot{\omega}_1 r \underline{e}_3 + \omega_1 r \frac{d\underline{e}_3}{dt} \right) \end{aligned}$$

Используя (3), (7), получим

$$\begin{cases} W_1 = (-\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2)r \\ W_2 = (-\omega_1^2 + \omega_2\omega_3 \tan \vartheta)r \\ W_3 = (\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3)r \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя в (6), получим систему дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно величин  $\vartheta$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ .

$$\begin{cases} B'\dot{\omega}_1 + (B\omega_3 + I'\omega_2 \tan \vartheta) \omega_2 - mgr \sin \vartheta = 0 \\ I'\dot{\omega}_2 - (I\omega_3 + I'\omega_2 \tan \vartheta) \omega_1 = 0 \\ B\dot{\omega}_3 - mr^2 \omega_1 \omega_2 = 0 \\ \dot{\vartheta} = \omega_1 \end{cases} \quad (9)$$

где  $B = I + mr^2 > 0$ ,  $B' = I' + mr^2 > 0$ . Или, в углах  $\vartheta$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ :

$$\begin{cases} B'\ddot{\vartheta} + (B\dot{\varphi} - A\dot{\psi} \sin \vartheta) \cos \vartheta - mgr \sin \vartheta = 0 \\ I' \frac{d(\dot{\psi} \cos \vartheta)}{dt} + (-I\dot{\varphi} + (I - I') \dot{\psi} \sin \vartheta) \dot{\vartheta} = 0 \\ B \frac{d(\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \vartheta)}{dt} - mr^2 \dot{\vartheta} \dot{\psi} \cos \vartheta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

где  $A = I - I' + mr^2 > 0$ .

Найдем кривизну траектории точки касания. Пусть  $\dot{s} = \dot{\varphi}r$ . В силу (5)  $|\dot{s}| = |\underline{V}_A'|$ . Следовательно  $s$  - дуговая координата длины.

Вычислим  $d\underline{e}_1/dt$ . Согласно (2), (3а):

$$\frac{d\underline{e}_1}{dt} = \underline{\tilde{\omega}} \times \underline{e}_1 = (\dot{\psi}\underline{k} + \dot{\vartheta}\underline{e}_1) \times \underline{e}_1 = \dot{\psi}\underline{n}$$

Здесь орт  $\underline{n} = \underline{k} \times \underline{e}_1$  коллинеарен вектору кривизны, направленному к центру кривизны, и равному, согласно (5),

$$\frac{d^2\underline{R}_A}{ds^2} = -\frac{d\underline{e}_1}{ds}, \quad \left( \frac{d\underline{R}_A}{dt} = \underline{V}_A' \right)$$

где  $\underline{R}_A$  – радиус-вектор точки касания  $A$ . Пусть кривизна  $\varkappa = \underline{n} \cdot d\underline{e}_1/ds$ , тогда

$$\varkappa = \underline{n} \cdot \frac{d\underline{e}_1}{dt} \frac{1}{\dot{s}} = \underline{n} \cdot \frac{\dot{\psi}\underline{n}}{\dot{\varphi}r} = \frac{1}{r} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \quad (11)$$

### 3 Прямое качение

Рассмотрим частное решение систем (9), (10):

$$\omega_1 = \omega_2 = \dot{\psi} = 0, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} = \Omega = \text{const}, \quad \vartheta = 0$$

Найдём вариацию системы (9) для этого движения. Пусть  $\vartheta$ ,  $\omega_2$ ,  $\hat{\omega}_3$  – вариации величин  $\vartheta$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$

$$\begin{cases} B'\ddot{\vartheta} + B\Omega\omega_2 - mgr\vartheta = 0 \\ I'\dot{\omega}_2 - I\Omega\dot{\vartheta} = 0 \\ B\frac{d\hat{\omega}_3}{dt} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Решение линейной системы ищем в виде  $\text{const} \cdot e^{\lambda\vartheta}$ . Характеристическое уравнение для системы первых двух уравнений:  $[(B'\lambda^2 - mgr)I' + BI\Omega^2]\lambda = 0$

Ненулевое решение:

$$\lambda^2 = \frac{I'mgr - BI\Omega^2}{B'I'}$$

Устойчивость будет наблюдаться при  $\lambda^2 < 0$ , то есть при достаточно большой скорости качения:

$$\Omega^2 > \Omega_{\min}^2 = \frac{mgrI'}{BI} \quad (13)$$

Введем  $k^2 = -\lambda^2$  – квадрат частоты свободных колебаний.

$$k^2 = \frac{BI}{B'I'}\Omega^2 - \frac{mgr}{B'}$$

Общее решение системы (12) имеет вид:

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 \sin(kt + \gamma) \\ \omega_2 = a_0 + a_1 \sin(kt + \gamma) \\ \hat{\omega}_3 = b \end{cases} \quad (14)$$

причем константы  $\vartheta_0$ ,  $a_0$ ,  $\vartheta_1$ ,  $a_1$  связаны так:

$$\begin{cases} B\Omega a_0 = mgr\vartheta_0 \\ I'a_1 = I\Omega\vartheta_1 \end{cases} \quad (15)$$

Соотношения между углами и координатами угловой скорости (4) примут вид:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\vartheta} \\ \omega_2 = \dot{\psi} \\ \hat{\omega}_3 = \frac{d\hat{\varphi}}{dt} \end{cases}$$

где  $\psi$ ,  $\hat{\varphi}$  – вариации величин  $\psi$ ,  $\varphi$ .

Тогда для угла курса  $\psi$  решение будет, согласно (14):

$$\psi = \psi_0 + a_0 t - \frac{a_1}{k} \cos(kt + \gamma)$$

Ненулевое значение  $a_0$  соответствует движению по окружности радиуса  $r\Omega/a_0$ , согласно (11). Ненулевое значение  $a_1$  соответствует движению по волнистой линии. Если за  $x$  обозначить отклонение влево от линии, описываемой уравнением  $\psi = \psi_0 + a_0 t$ , то, так как  $a_1$  мало,

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{a_1}{k} \cos(kt + \gamma), \quad \frac{dx}{ds} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}} = \frac{\dot{x}}{\Omega r}$$

$$x = x_0 - a_1 \frac{\Omega r}{k^2} \sin(kt + \gamma) \quad (16)$$

Выясним теперь, при какой форме колеса движение будет более устойчивым. Зафиксируем параметры колеса  $m, r, I$  и будем искать минимум  $\Omega_{\min}^2$  в зависимости от параметра  $I'$ . Из (13) следует, что чем меньше  $I'$ , тем меньше  $\Omega_{\min}^2$ . Есть ограничение:  $2I' \geq I$ , в соответствии с неравенством треугольника для моментов инерции. Следовательно, колесо наиболее устойчиво, если  $2I' = I$ , то есть когда вся масса сосредоточена в плоскости окружности касания диска. Считая, что  $I = 2I'$ , найдем теперь минимум  $\Omega_{\min}^2$  в зависимости от параметра  $I$ :

$$\Omega_{\min}^2 = \frac{mgr}{2(I + mr^2)}$$

Есть ограничение  $I \leq mr^2$ , иначе масса располагалась бы дальше от оси вращения диска, чем радиус окружности касания диска, что невозможно в силу непроницаемости опорной плоскости. Значит, наиболее устойчивый диск - это кольцо ( $I = mr^2$ ).

Рассмотрим реакцию диска на толчок сбоку. Запишем уравнения динамики, учитывая внешнюю силу  $f(t)$ , приложенную к верхней точке колеса и направленную перпендикулярно плоскости диска, вдоль орта  $\underline{e}_3$ :

$$\begin{cases} \frac{d(\underline{I} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \underline{R} \times \underline{F} + r \underline{e}_2 \times (f(t) \underline{e}_3) \\ m \underline{g} + \underline{F} + f(t) \underline{e}_3 = m \underline{W} \end{cases}$$

Или,

$$\frac{d(\underline{I} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \underline{R} \times \underline{F} + 2rf(t) \underline{e}_1$$

То есть, в правой части первого уравнения системы (9) появится слагаемое  $2rf(t)$ . Пусть при  $t < 0$   $f(t) = 0$  и реализуется прямое качение. Выберем  $f(t)$  так:

$$2rf(t) = M\delta(t),$$

где  $M$  - константа,  $\delta(t)$  - дельта-функция. Уравнения в вариациях, аналогичные системе (12) примут вид:

$$\begin{cases} B' \dot{\vartheta} + B\Omega \omega_2 - mgr\vartheta = M\delta(t) \\ I' \dot{\omega}_2 - I\Omega \dot{\vartheta} = 0 \\ B \frac{d\hat{\omega}_3}{dt} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Пусть при  $t < 0$  решение:  $\omega_1 = \omega_2 = \hat{\omega}_3 = 0$ ,  $\vartheta = 0$ ; или  $a_0 = a_1 = 0$  и  $\vartheta_0 = \vartheta_1 = 0$  в решении (14). При  $t > 0$ , и решение следует искать в виде (14). В общем, решение ищем в виде

$$\begin{cases} \vartheta = [\vartheta_0 + \vartheta_1 \sin(kt + \gamma)] H(t) \\ \omega_2 = [a_0 + a_1 \sin(kt + \gamma)] H(t) \\ \hat{\omega}_3 = b H(t) \end{cases}$$

где

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Подставим составное решение в систему (17). Из теории обобщенных функций известно, что производная от функции  $h(t)$ , имеющей скачок в нуле, как от обобщенной функции, равна

$$\dot{h}(t) + h(t)|_{t \rightarrow -0}^{t \rightarrow +0} \delta(t),$$

где  $\dot{h}(t)$  – производная обычной функции; определена при  $t < 0$ ,  $t > 0$ . Последнее уравнение системы (17) даёт  $Bb\delta(t) = 0$ , то есть  $b = 0$  и  $\hat{\omega}_3 = 0$  все время. Первые же два уравнения дают:

$$\begin{aligned} & B'[(\vartheta_0 + \vartheta_1 \sin \gamma) \dot{\delta}(t) - \vartheta_1 k^2 \sin(kt + \gamma) H(t) + \vartheta_1 k \cos \gamma \delta(t)] + \\ & + B\Omega[a_0 + a_1 \sin(kt + \gamma)] H(t) - mgr[\vartheta_0 + \vartheta_1 \sin(kt + \gamma)] H(t) = M\delta(t) \\ & I'[a_0 \delta(t) + a_1 k \cos(kt + \gamma) H(t) + a_1 \sin \gamma \delta(t)] - \\ & - I\Omega[\vartheta_0 \delta(t) + \vartheta_1 k \cos(kt + \gamma) H(t) + \delta_1 \sin \gamma \delta(t)] = 0 \end{aligned}$$

Используя линейную независимость функций  $H(t)$ ,  $\sin(kt + \gamma) H(t)$ ,  $\cos(kt + \gamma) H(t)$ ,  $\delta(t)$ ,  $\dot{\delta}(t)$ , кроме соотношений (15), получим:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 + \vartheta_1 \sin \gamma &= 0 \\ B'\vartheta_1 k \cos \gamma &= M \\ I'a_0 - I\Omega\vartheta_0 &= 0 \end{aligned}$$

откуда и из соотношений (15), следует:  $\vartheta_0 = 0$ ,  $a_0 = 0$ ,  $\sin \gamma = 0$ ,  $B'\vartheta_1 k = \pm M$ . Следовательно,  $\gamma = \pi n$ , где  $n$  – целое число. От выбора  $n$  решение не зависит. Можно выбрать  $\gamma = 0$ . Тогда  $B'\vartheta_1 k = M$ .

Таким образом, после толчка начнутся синусоидальные колебания величин  $\vartheta$  и  $\omega_2$ . Учитывая, что  $\omega_2 = \dot{\psi}$ , получим:

$$\psi = \psi_0 + \frac{a_1}{k}(1 - \cos(kt)), \quad t \geq 0$$

где  $\psi_0$  – угол курса при  $t \leq 0$ ,  $a_1 = I\Omega\vartheta_1/I' = I\Omega M/(I'B'k)$ .

То есть, изменится среднее значение угла курса (с  $\psi_0$  до  $\psi_0 + a_1/k$ ) и добавятся колебательные движения.

Как видно, нет перехода к движению вдоль окружности ( $a_0 = 0$ ), но обнаружится, если толчок будет конечной длительности.

## 4 Стационарное движение. Качение по окружности

Рассмотрим частное решение системы (9):

$$\begin{cases} \vartheta = \text{const} \\ \omega_2 = \text{const} \\ \omega_3 = \text{const} \end{cases}$$

При этом  $\dot{\psi} = \text{const}$ ,  $\dot{\phi} = \text{const}$ . Первое из уравнений (9) даёт связь между константами

$$B\omega_2\omega_3 + I'\omega_2^2 \tan \vartheta - mgr \sin \vartheta = 0 \quad (18)$$

Для такого решения  $\mathfrak{x} = \text{const}$ , то есть качение происходит по окружности. Заметим, что уравнение (18) удовлетворяется при замене знака одновременно у любых двух величин из тройки  $\vartheta$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ . Поэтому будем рассматривать только случаи, когда

$$0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \omega_2 < \infty, \quad -\infty < \omega_3 < \infty$$

Этим случаям соответствуют знаки величин  $\dot{\phi} > 0$  и  $\dot{\psi} > 0$ . Для движения в общем случае, вид системы уравнений (9) или системы уравнений (10) не изменится, если изменить знаки любых двух координат (умножить на  $-1$  любые две координаты) вектора угловой скорости из трёх ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ). При этом в

соответствии с выражением (4) следует изменить знаки углов  $\vartheta, \varphi, \psi$ . Таким образом, имеется два независимых преобразования симметрии системы уравнений, поскольку третье является композицией первых двух. Одно из них связано с двойственностью выбора направления орта  $\underline{e}_3$  оси вращения диска. Второе, по-видимому, связано с зеркальной относительно вертикально расположенной плоскости симметрией решений двух постановок задач, если такая симметрия наблюдается в начальных условиях этих двух постановок. Эти симметрии будут сохраняться и в постановке задачи с диссипативным моментом.

Рассмотрим эти решения в плоскости параметров  $\vartheta, \omega_2$ . Построим семейство линий, каждая из которых соответствует какому-либо значению величины  $\omega_3$  (на рисунке 1 – сплошные линии).

Поясним геометрию движения для трех случаев:  $\omega_3 = 0, \omega_3 > 0, \omega_3 < 0$ .

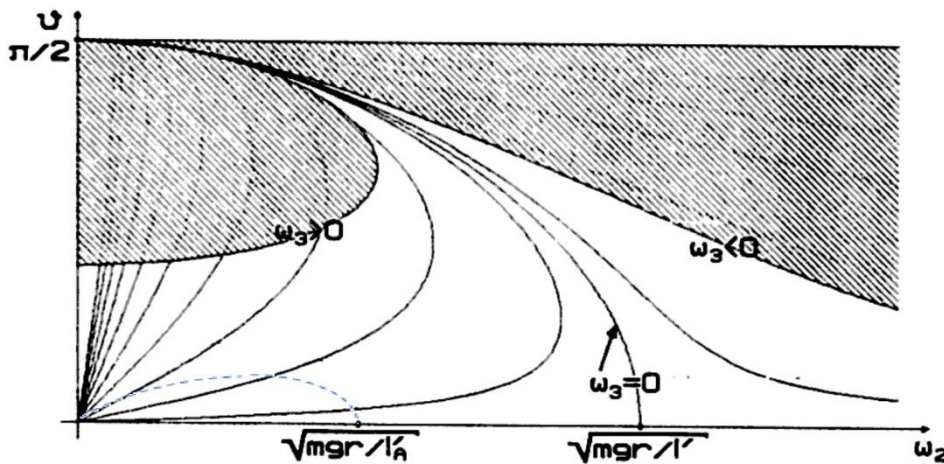


Рис. 1. Плоскость параметров

1.  $\omega_3 = 0$ . Следовательно,  $\underline{\omega} = \omega_2 \underline{e}_2$ ;  $\underline{V}_C = \underline{\omega} \times (r \underline{e}_2) = 0$ . Центр колеса не движется. Такое движение представляет собой обкатывание воображаемого конуса, стоящего на опорной плоскости, вершина которого совпадает с центром колеса, а основание ограничено окружностью, по которой катится колесо. Длина образующей конуса равна радиусу диска.

2.  $\omega_3 > 0$ ;  $\underline{V}_C = -\omega_3 r \underline{e}_1$ ;  $\underline{V}_{A'} = -\dot{\varphi} r \underline{e}_1 = -(\omega_3 + \omega_2 \tan \vartheta) r \underline{e}_1$ . Вектор  $\underline{V}_C$  сонаправлен с вектором  $\underline{V}_{A'}$  ( $\dot{\varphi} > 0$  всегда). Такое движение представляет скольжение диска своим диаметром по конусу с образующей, большей радиуса диска. Диск катится по границе основания конуса, но вершина конуса выше центра диска.

3.  $\omega_3 < 0$ . Вектор  $\underline{V}_C$  направлен против вектора  $\underline{V}_{A'}$ . Это скольжение диска по конусу с образующей, меньшей радиуса диска.

Учтем ограничение, накладываемое неравенством, обеспечивающим сцепление без проскальзывания диска и плоскости:

$$\tau \leq \nu N \quad (19)$$

где  $\tau$  – величина касательной реакции плоскости ( $\underline{F}$ ), а  $N$  – нормальная реакция:

$$\tau = |\underline{F} - k \underline{k} \cdot \underline{F}|, \quad N = \underline{F} \cdot (-\underline{k}),$$

$\nu$  – коэффициент трения скольжения. В силу уравнения  $m \underline{g} + \underline{F} = m \underline{W}$  и соотношений (8),

$$N = mg + mr(\dot{\omega}_1 \sin \vartheta + \omega_1^2 \cos \vartheta) \quad (20)$$

Для рассматриваемых движений  $N = mg$ ,  $\tau = mr \omega_2 |\omega_3| / \cos \vartheta$ . Видно, что для случая обкатывания конуса  $\tau = 0$ .



Неравенство (19) запишется:

$$\omega_2 |\omega_3| \leq \frac{vg}{r} \cos \vartheta \quad (21)$$

Граница этой области на плоскости параметров  $\vartheta, \omega_2$ , согласно (18), описывается уравнением

$$I' \tan \vartheta \omega_2^2 = mgr \left( \sin \vartheta \pm v \frac{B}{mr^2} \cos \vartheta \right) \quad (22)$$

На рисунке 1 область, где движение невозможно, так как условие непроскальзывания нарушается, заштрихована.

Исследуем устойчивость рассматриваемых решений. Найдём вариацию системы (9) для них. Получим линейную систему для вариаций величин  $\vartheta, \omega_2, \omega_3$ , характеристическое уравнение для которой имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} B'\lambda^2 + I'\omega_2^2(1 + \tan^2 \vartheta) - mgr \cos \vartheta & B\omega_3 + 2I'\omega_2 \tan \vartheta & B\omega_2 \\ -(I\omega_3 + I'\omega_2 \tan \vartheta)\lambda & I'\lambda & 0 \\ -mr^2\omega_2\lambda & 0 & B\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Или,

$$\begin{cases} \lambda^2 = 0 \\ I'B'\lambda^2 + I'(I'\omega_2^2(1 + \tan^2 \vartheta) - mgr \cos \vartheta) + I'mr^2\omega_2^2 + \\ + (I\omega_3 + I'\omega_2 \tan \vartheta)(B\omega_3 + 2I'\omega_2 \tan \vartheta) = 0 \end{cases}$$

Для устойчивости должно выполняться неравенство

$$I'(I'\omega_2^2(1 + \tan^2 \vartheta) - mgr \cos \vartheta) + I'mr^2\omega_2^2 + (I\omega_3 + I'\omega_2 \tan \vartheta)(B\omega_3 + 2I'\omega_2 \tan \vartheta) > 0$$

Исключая  $\omega_3$  с помощью (18), получим неравенство для области устойчивости в плоскости параметров  $\vartheta, \omega_2$  (помимо рассмотренного устойчивого решения  $\vartheta = 0, \omega_2 = 0$ )<sup>1</sup>

$$\left[ 1 + \frac{I'}{mr^2} \left( 1 + \left( 1 + \frac{mr^2}{B} \right) \tan^2 \vartheta \right) \right] \omega_2^4 - \frac{g \cos(2\vartheta)}{r \cos \vartheta} \omega_2^2 + \frac{mg^2 I}{I'B} \sin^2 \vartheta > 0, \quad \omega_2 \neq 0$$

На рисунке 1 граница области неустойчивости изображена пунктирной линией. При  $\vartheta = 0$ , кроме решения, описанного в предыдущем пункте, имеем устойчивое решение при  $B'\omega_2^2 > mgr$ . Это верчение колеса вокруг своего вертикального диаметра. Прямое качение на рисунке 1 представляет собой точку  $\vartheta = 0, \omega_2 = 0$ , где сходятся все кривые, соответствующие разным  $\omega_3$ . Движения, близкие к прямому качению, то есть качение с малым углом  $\vartheta$  по кругу большого радиуса ( $\omega_2$  мало) и движения, близкие к верчению ( $\vartheta$  и  $\omega_3$  малы,  $\omega_2 > \sqrt{mgr/B'}$ ), разделены на рисунке 1 областью неустойчивости. При достаточно большом угле наклона все движения устойчивы. При угле наклона, близком к  $\pi/2$ , движение, удовлетворяющее условию непроскальзывания (19), происходит с малыми угловыми скоростями  $\omega_2, \omega_3$  ( $\omega_1 = 0$ ). Из (22) следует асимптотическое равенство при  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ :

$$I' \left( \frac{\omega_2}{\cos \vartheta} \right)^2 = \frac{mgr}{\cos \vartheta}$$

Согласно (4), это означает

$$\dot{\varphi} \approx \dot{\psi} = \frac{\omega_2}{\cos \vartheta} = \sqrt{\frac{mgr}{I' \cos \vartheta}}$$

Скорость точки касания диска неограниченно возрастает при всё большем наклоне диска к плоскости.

<sup>1</sup> Ограничение  $\omega_2 \neq 0$  связано с тем, что, согласно (18), при  $\vartheta > 0, \omega_2 = 0$  решений не существует.

Рассмотренные движения, при которых кривизна траектории и угол наклона не меняются со временем, не наблюдаются на опыте, так как реально присутствует диссипативный момент в точке касания диска.

## 5 Движение с диссипативным моментом

Введем в систему диссипативный момент, зависящий от вектора угловой скорости. Предлагается следующая формула для описания сухого трения:

$$\underline{M} = -\mu N \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|} \quad (23)$$

Теперь уравнения движения имеют вид:

$$m\underline{g} + \underline{F} = m\underline{W}$$

$$\frac{d(\underline{I} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \underline{R} \times \underline{F} + \underline{M}$$

Или,

$$\frac{d(\underline{I} \cdot \underline{\omega})}{dt} = \underline{R} \times (m\underline{W} - m\underline{g}) + \underline{M}, \quad \underline{V}_A = 0$$

Аналогично, система (9) запишется в виде:

$$\begin{cases} B'\dot{\omega}_1 + (B\omega_3 + I'\omega_2 \tan \vartheta) \omega_2 - mgr \sin \vartheta = -\mu N \omega_1 / \omega \\ I'\dot{\omega}_2 - (I\omega_3 + I'\omega_2 \tan \vartheta) \omega_1 = -\mu N \omega_2 / \omega \\ B\dot{\omega}_3 - mr^2 \omega_1 \omega_2 = -\mu N \omega_3 / \omega \\ \dot{\vartheta} = \omega_1 \end{cases} \quad (24)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ ,  $N$  определяется выражением (20). Будем считать, что коэффициент трения  $\mu$  – малый параметр. Тогда можно ожидать, что все переменные в (24) – медленно меняющиеся величины, и между ними приближенно выполняется связь (18), если между ними выполняются неравенства устойчивости и непроскальзывания стационарного качения (21).

Рассмотрим движения с углом наклона  $\vartheta$ , близком к  $\pi/2$ , предшествующие завершению движения вследствие трения. Таким образом, система приобретает ещё одну малую величину, по которой можно линеаризовать зависимости:  $\tilde{\vartheta} = \pi/2 - \vartheta$ . При устремлении угла наклона к  $\pi/2$  компоненты угловой скорости стремятся к нулю. При перечисленных предположениях система уравнений (24) принимает вид:

$$\begin{cases} mgr \tilde{\vartheta} = I' \omega_2^2 \\ I' \dot{\omega}_2 - I' \omega_1 \omega_2 / \tilde{\vartheta} = -\mu mg \omega_2 / \omega \\ B \dot{\omega}_3 - mr^2 \omega_1 \omega_2 = -\mu mg \omega_3 / \omega \\ d\tilde{\vartheta}/dt = -\omega_1 \end{cases} \quad (25)$$

где  $\omega \approx \omega_2$ . В этих уравнениях оставлены только существенные для асимптоты слагаемые при  $\mu \rightarrow 0$ . Выбор переменной времени осуществим следующим образом: пусть в решении  $t < 0$ , завершение движения происходит при  $t = 0$ . Асимптотическое решение имеет вид:

$$\omega_1 = \mu^2 \frac{2mg}{9I'r} |t|$$

$$\omega_2 = \mu \frac{mg}{3I'} |t|$$

$$\omega_3 = -\mu^3 \frac{2m^3 g^2 r}{81A(I')^2} |t|^3 + C |t|^{3I'/B}$$

$$\tilde{\vartheta} = \mu^2 \frac{mg}{9I'r} |t|^2,$$

где  $C$  – произвольная константа. Связь с переменными углами  $\varphi$  и  $\psi$ , определяемая уравнениями (4), в асимптоте имеет вид:

$$\omega_2 = \dot{\psi} \tilde{\vartheta}, \quad \dot{\psi} = \dot{\varphi}$$

В результате, выражение для асимптот  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\psi = \varphi = 3 \frac{r}{\mu} \left| \ln(\sqrt{g/r} |t|) \right| + \text{const}$$

Условие устойчивости выполняется, поскольку угол наклона большой. Условие непроскальзывания (21) выполнялось бы, если константа  $C$  равнялась нулю. Для однородного диска момент инерции  $I' = mr^2/4$ , коэффициент  $B = mr^2 + I' = 3mr^2/2$ . Поэтому показатель степени во втором слагаемом координаты угловой скорости  $\omega_3$  равен  $1/2$ . Это нарушает условие (21), которое можно переписать при  $\tilde{\vartheta} \rightarrow 0$  как

$$|\omega_3| \leq v \frac{I'}{mr^2} \omega_2,$$

что приводит к необходимости учёта скольжения.

Конечно, возникновение колебаний с бесконечной частотой  $\dot{\psi} = \dot{\varphi} \propto 1/|t|$  при  $C = 0$  возможно вследствие упрощения действительности как предположения абсолютной жёсткости диска и опорной плоскости.