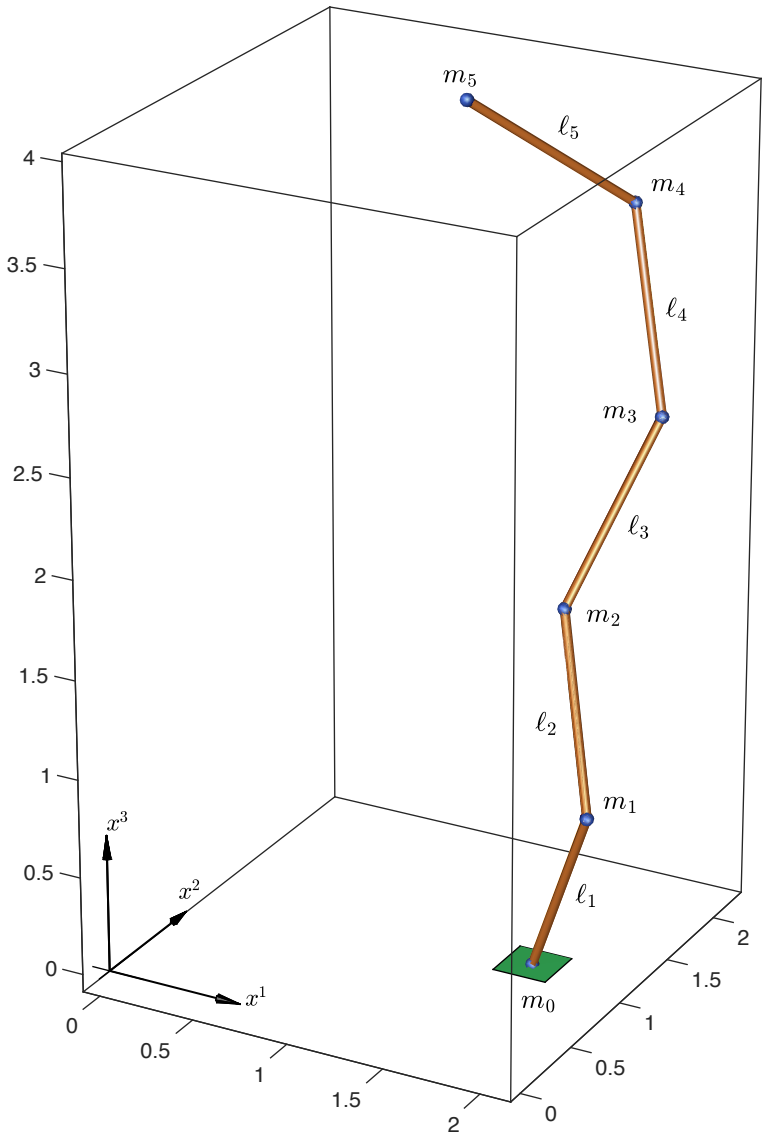
# Стабилизация многозвенного сферического маятника в положении неустойчивого равновесия

Выполнил студент группы 5030103/80301 К. В. Стамлер
Руководитель доцент ВШМиПУ, к. т. н. А. А. Суханов

# Объект исследования




Рассматривается многозвенный ($N$-звенный) сферический маятник на тележке.

## Параметры

Масса тележки $m_0$, масса $k$-го звена $m_k$, длина $\ell_k$.

В простейшей модели считаем, что вся масса сосредаточена в конце звена.

# Объект исследования

Для плоского случая удалось получить общий вид системы уравнений движения для произвольного $N$. Причём система имеет весьма простую структуру, позволяющую легко перейти к линеаризованной форме.

## Важное обозначение

$$\mu_k := \sum_{i=k}^{N} m_i, \quad \mu_0 := m_0 + \mu_1, \quad \mu_{ij} := \mu_{\max(i,j)}.$$

Данное обозначение позволит перейти к простым по виду уравнениям.

# Плоский маятник

## Кинетическая и потенциальная энергия

$$T = \frac{1}{2}\mu_0\dot{x}_0^2 + \dot{x}_0\sum_{i=1}^{N}\mu_i\ell_i\cos\theta_i\,\dot{\theta}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{ij}\ell_i\ell_j\cos(\theta_i-\theta_j)\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j,$$

$$U = g\sum_{i=1}^{N}\mu_i\ell_i\cos\theta_i.$$

Уравнения Эйлера–Лагранжа ($\alpha = 1,\ldots,N$):

$$\begin{cases} \mu_0\ddot{x}_0 + \sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i\ell_i\cos\theta_i\,\ddot{\theta}_i - \sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i\ell_i\sin\theta_i\,\dot{\theta}_i^2 = 0, \\ \mu_\alpha\ell_\alpha\cos\theta_\alpha\ddot{x}_0 + \sum\limits_{i=1}^{N}\mu_{i\alpha}\ell_i\ell_\alpha\cos(\theta_i-\theta_\alpha)\ddot{\theta}_i - \\ \qquad - \sum\limits_{i=1}^{N}\mu_{i\alpha}\ell_i\ell_\alpha\sin(\theta_i-\theta_\alpha)\dot{\theta}_i^2 - g\mu_\alpha\ell_\alpha\sin\theta_\alpha = 0. \end{cases} \tag{1}$$

# Матрица инерции $\mathbf{\Lambda}$

Систему уравнений (1) можно переписать в матричной форме.

## Важное обозначение

Введём матрицу $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_{ij})$, $i, j = 0, \ldots, N$:

$$\Lambda_{00} = \mu_0, \quad \Lambda_{0k} = \Lambda_{k0} = \mu_k \ell_k,$$
$$\Lambda_{ij} = \mu_{ij} \ell_i \ell_j, \quad i, j, k = 1, \ldots, N.$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \cdots & \Lambda_{0N} \\ \Lambda_{10} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \cdots & \Lambda_{1N} \\ \Lambda_{20} & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N0} & \Lambda_{N1} & \Lambda_{N2} & \cdots & \Lambda_{NN} \end{pmatrix}.$$

Матрицу $\mathbf{\Lambda}$ будем называть *матрицей инерции* многозвенного маятника. Отметим, что через $\mathbf{\Lambda}$ записывается как система плоского маятника, так и система сферического маятника.

# Система уравнений движения плоского маятника в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{01}C_{01} & \Lambda_{02}C_{02} & \cdots & \Lambda_{0N}C_{0N} \\ \Lambda_{10}C_{10} & \Lambda_{11} & \Lambda_{21}C_{21} & \cdots & \Lambda_{N1}C_{N1} \\ \Lambda_{20}C_{20} & \Lambda_{12}C_{12} & \Lambda_{22} & \cdots & \Lambda_{N2}C_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N0}C_{N0} & \Lambda_{N1}C_{N1} & \Lambda_{N2}C_{N2} & \cdots & \Lambda_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_N \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{01}S_{01} & \Lambda_{02}S_{02} & \cdots & \Lambda_{0N}S_{0N} \\ 0 & 0 & \Lambda_{21}S_{21} & \cdots & \Lambda_{N1}S_{N1} \\ 0 & \Lambda_{12}S_{12} & 0 & \cdots & \Lambda_{N2}S_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \Lambda_{N1}S_{N1} & \Lambda_{N2}S_{N2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N^2 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_{10}S_{10} \\ \Lambda_{20}S_{20} \\ \vdots \\ \Lambda_{N0}S_{N0} \end{pmatrix}.$$

Здесь $C_{ij} = \cos(\theta_i - \theta_j)$, $C_{0k} = C_{k0} = \cos\theta_k$, $S_{k0} = S_{0k} = \sin\theta_k$, $S_{ij} = \sin(\theta_i - \theta_j)$.

# Состояния равновесия

Маятник с $N$ звеньями будет иметь $2^N$ положений равновесия. Конец звена может быть направлен либо вверх (против силы тяжести), либо вниз.

Определим направление $\sigma_i$ $i$-го звена в состоянии равновесия

## Важное обозначение

$$\sigma_i = \begin{cases} +1, & \text{звено направлено вверх,} \\ -1, & \text{звено направлено вниз.} \end{cases}$$

Вектор $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ определяет одно из $2^N$ положений равновесия $N$-звенного маятника.

# Линеаризованная система плоского маятника

В окрестности положения равновесия с точностью до бесконечно малых второго порядка имеем

$$\cos\theta_i = \sigma_i, \quad \sin\theta_i = \sigma_i\theta_i + \rho_i\pi, \quad \rho_i = (1-\sigma_i)/2, \quad \sigma_{ij} = \sigma_i\sigma_j.$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00} & \sigma_1\Lambda_{01} & \sigma_2\Lambda_{02} & \cdots & \sigma_{0N}\Lambda_{0N} \\ \sigma_1\Lambda_{10} & \sigma_{11}\Lambda_{11} & \sigma_{12}\Lambda_{12} & \cdots & \sigma_{1N}\Lambda_{1N} \\ \sigma_2\Lambda_{20} & \sigma_{21}\Lambda_{21} & \sigma_{22}\Lambda_{22} & \cdots & \sigma_{2N}\Lambda_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N0}\Lambda_{N0} & \sigma_{N1}\Lambda_{N1} & \sigma_{N2}\Lambda_{N2} & \cdots & \sigma_{NN}\Lambda_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \cdots \\ \ddot{\theta}_N \end{pmatrix} =$$

$$= g \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_{10}(\sigma_1\theta_1 + \rho_1\pi) \\ \Lambda_{20}(\sigma_2\theta_2 + \rho_2\pi) \\ \cdots \\ \Lambda_{N0}(\sigma_N\theta_N + \rho_N\pi) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

При $\boldsymbol{\sigma} = (+1, +1, +1, \cdots, +1)$ «все звенья вверх» матрица системы есть $\boldsymbol{\Lambda}$.

# Энергия сферического маятника

Обозначим $\boldsymbol{r}_0 = (x_0^1, x_0^2)$ — координаты тележки, а $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_k(t)$ — единичный вектор направления $k$-го звена.

## Кинетическая и потенциальная энергия

$$T = \frac{1}{2}\Lambda_{00}\dot{\boldsymbol{r}}_0^2 + \sum_{k=1}^{N}\Lambda_{0k}\langle\dot{\boldsymbol{r}}_0, \dot{\boldsymbol{v}}_k\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\Lambda_{ij}\langle\dot{\boldsymbol{v}}_i, \dot{\boldsymbol{v}}_j\rangle,$$

$$U = g\sum_{k=1}^{N}\Lambda_{0k}\langle\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{e}_3\rangle.$$

Лагранжиан $\mathscr{L} = T - U$ сферического $N$-звенного маятника.

# Вывод уравнений движения сферического маятника

Принцип Гамильтона:

$$S[\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_k] = \int_0^T \mathscr{L}\big(\boldsymbol{r}_0(t), \boldsymbol{v}_k(t), \dot{\boldsymbol{r}}_0(t), \dot{\boldsymbol{v}}_k(t)\big)\, dt \;\to\; \min\,.$$

Необходимое условие — обращение в ноль вариации

$$\delta S = \int_0^T \Big[\Big\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{r}_0}, \delta \boldsymbol{r}_0 \Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_0}, \delta \dot{\boldsymbol{r}}_0 \Big\rangle + \\ + \sum_{k=1}^{N} \Big( \Big\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{v}_k}, \delta \boldsymbol{v}_k \Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{v}}_k}, \delta \dot{\boldsymbol{v}}_k \Big\rangle \Big) \Big]\, dt = 0.$$

Здесь $\delta \boldsymbol{r}_0(t)$, $\delta \boldsymbol{v}_k(t)$ — вариации вектор-функций $\boldsymbol{r}_0(t)$, $\boldsymbol{v}_k(t)$.

## Важное обозначение

$$\Big\langle \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b} \Big\rangle = \frac{\partial F}{\partial a^1} b^1 + \frac{\partial F}{\partial a^2} b^2 + \frac{\partial F}{\partial a^3} b^3.$$

# Уравнения Эйлера–Лагранжа

В векторной форме уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{r}_0} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_0} = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{v}_k \times \left(\boldsymbol{v}_k \times \left(\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{v}_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{v}}_k}\right)\right) = \mathbf{0}, \quad k = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

## Важное обозначение

$$\widehat{\boldsymbol{v}} := \begin{pmatrix} 0 & -v^3 & v^2 \\ v^3 & 0 & -v^1 \\ -v^2 & v^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{b} = \widehat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{b} \ \ \forall\, \boldsymbol{b}.$$

# Векторно-матричная форма

$$
\begin{pmatrix}
\Lambda_{00}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{01}\boldsymbol{E}_{2\times3} & \Lambda_{02}\boldsymbol{E}_{2\times3} & \cdots & \Lambda_{0N}\boldsymbol{E}_{2\times3} \\
-\Lambda_{10}\widehat{\boldsymbol{v}}_1^2\boldsymbol{E}_{3\times2} & \Lambda_{11}\boldsymbol{E}_3 & -\Lambda_{12}\widehat{\boldsymbol{v}}_1^2 & \cdots & -\Lambda_{1N}\widehat{\boldsymbol{v}}_1^2 \\
-\Lambda_{20}\widehat{\boldsymbol{v}}_2^2\boldsymbol{E}_{3\times2} & -\Lambda_{21}\widehat{\boldsymbol{v}}_2^2 & \Lambda_{22}\boldsymbol{E}_3 & \cdots & -\Lambda_{2N}\widehat{\boldsymbol{v}}_2^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-\Lambda_{N0}\widehat{\boldsymbol{v}}_N^2\boldsymbol{E}_{3\times2} & -\Lambda_{N1}\widehat{\boldsymbol{v}}_N^2 & -\Lambda_{N2}\widehat{\boldsymbol{v}}_N^2 & \cdots & \Lambda_{NN}\boldsymbol{E}_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\ddot{\boldsymbol{r}}_0 \\ \ddot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{v}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{v}}_N
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\mathbf{0}_2 \\
-\Lambda_{11}|\dot{\boldsymbol{v}}_1|^2\boldsymbol{v}_1 + g\Lambda_{10}\widehat{\boldsymbol{v}}_1^2\boldsymbol{e}_3 \\
-\Lambda_{22}|\dot{\boldsymbol{v}}_2|^2\boldsymbol{v}_2 + g\Lambda_{20}\widehat{\boldsymbol{v}}_2^2\boldsymbol{e}_3 \\
\vdots \\
-\Lambda_{NN}|\dot{\boldsymbol{v}}_N|^2\boldsymbol{v}_N + g\Lambda_{N0}\widehat{\boldsymbol{v}}_N^2\boldsymbol{e}_3
\end{pmatrix},
$$

где $\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_3$ единичные матрицы $2\times2$ и $3\times3$.

# Линеаризованнная система в окрестности положения равновесия $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{00}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{01}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{02}\boldsymbol{E}_2 & \cdots & \Lambda_{0N}\boldsymbol{E}_2 \\ \Lambda_{10}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{11}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{12}\boldsymbol{E}_2 & \cdots & \Lambda_{1N}\boldsymbol{E}_2 \\ \Lambda_{20}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{21}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{22}\boldsymbol{E}_2 & \cdots & \Lambda_{2N}\boldsymbol{E}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{N0}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{N1}\boldsymbol{E}_2 & \Lambda_{N2}\boldsymbol{E}_2 & \cdots & \Lambda_{NN}\boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\boldsymbol{r}}_0 \\ \ddot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{v}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{v}}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_2 \\ g\Lambda_{10}\sigma_1\boldsymbol{v}_1 \\ g\Lambda_{20}\sigma_2\boldsymbol{v}_2 \\ \vdots \\ g\Lambda_{N0}\sigma_N\boldsymbol{v}_N \end{pmatrix}.$$

Или в матричном виде

$$(\boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{E}_2)\ddot{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{E}_2)\boldsymbol{y}, \tag{3}$$

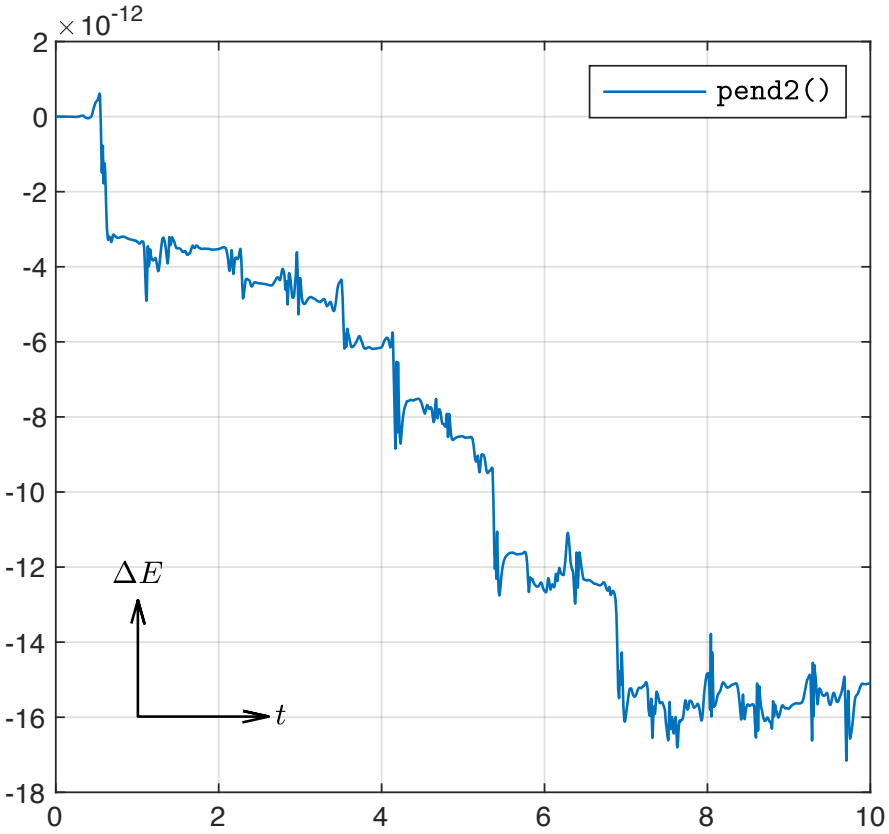
где матрица $\boldsymbol{G}$ диагональная

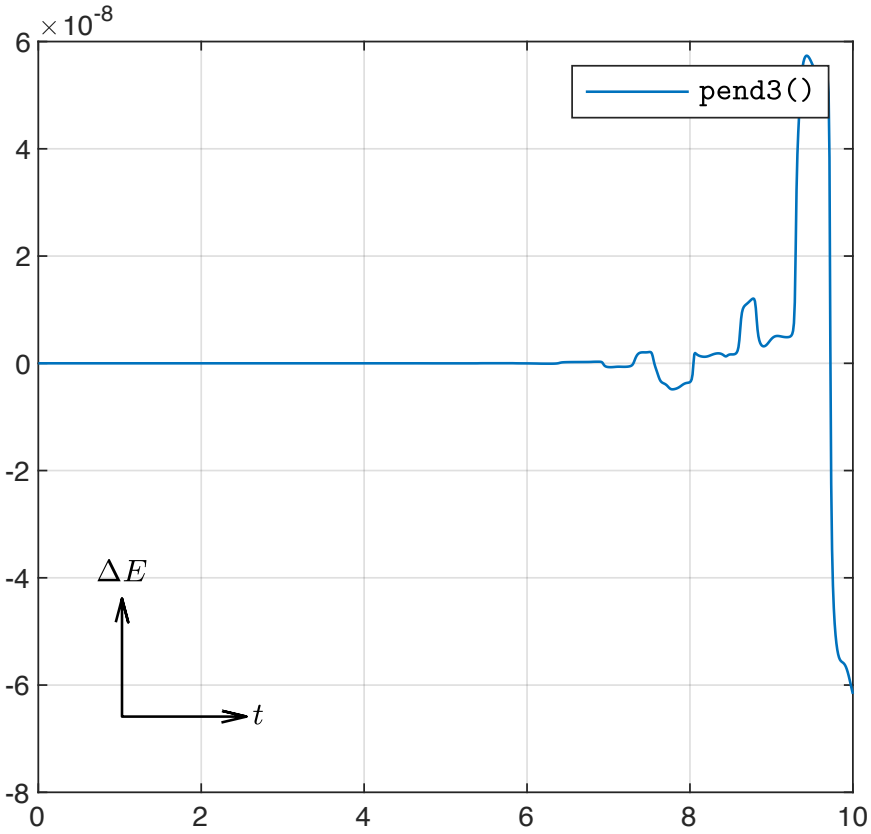
$$\boldsymbol{G} = \operatorname{diag}\big[0, g\Lambda_{10}\sigma_1, g\Lambda_{20}\sigma_2, \ldots, g\Lambda_{k0}\sigma_k\big].$$

# Погрешность выполнения закона сохранения энергии для трехзвенного маятника

В системе MATLAB были написаны две программы:

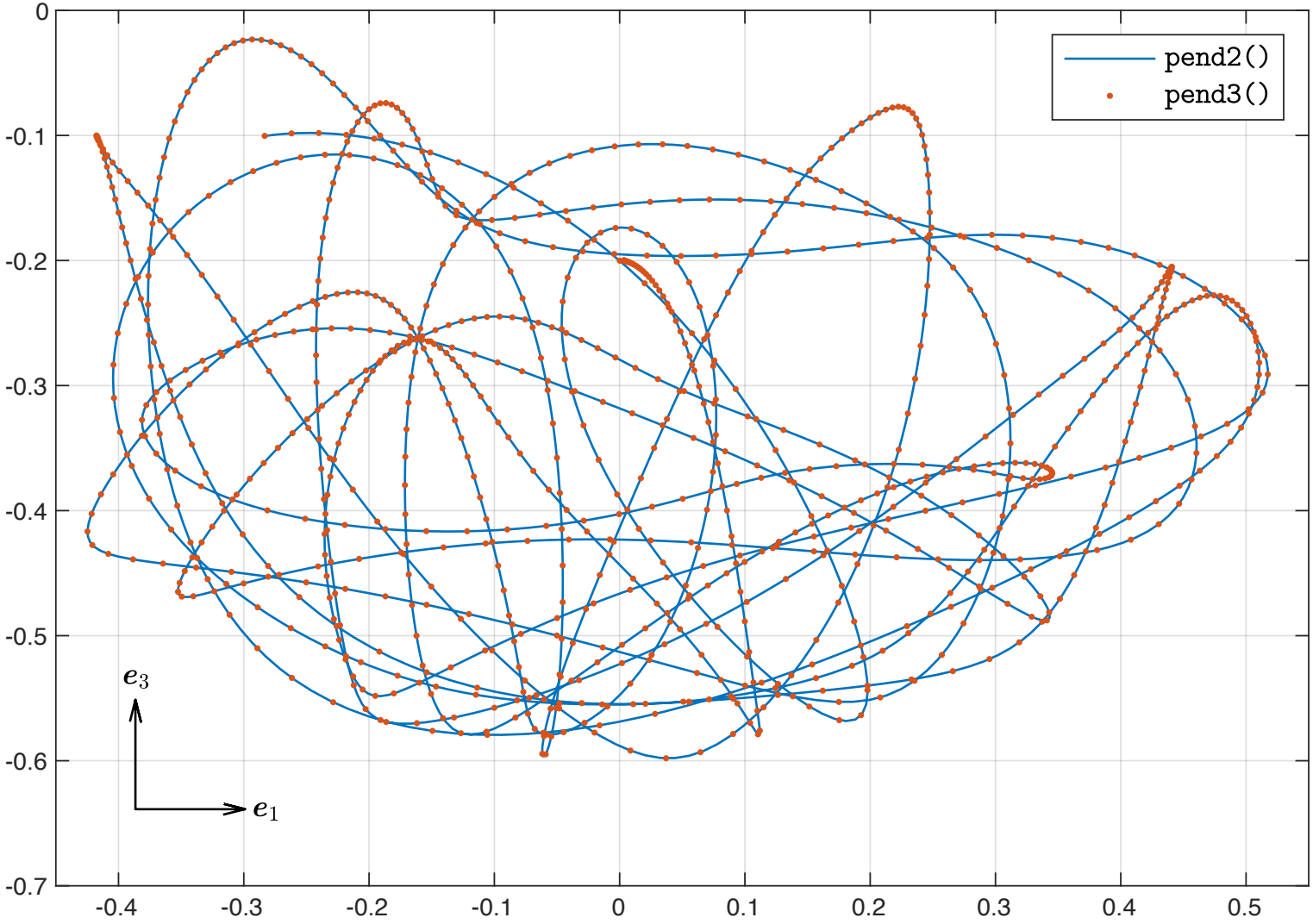
- `pend2()` для интегрирования системы, описывающей плоское движение многозвенного маятника.
- `pend3()` для интегрирования системы, описывающей пространственное движение многозвенного маятника.



# Свободное движение, проверка программ

Траектория движения конца трехзвенного маятника относительно тележки.



# Видео

Свободное плоское движение трехзвенного маятника.

Свободное пространственное движение пятизвенного маятника.

Свободное плоское движение одиннадцатизвенного маятника.

# Задача управления

Рассмотрим задачу удержания маятника в положении неустойчивого равновесия при помощи линейного управления (обратной связи)

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}, \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Матрица $\boldsymbol{K}$ называется *матрицей управления*, а её элементы — *параметрами управления*.

# Устойчивость для линейных систем

**Опр.** Система *устойчива*, если при любых начальных условиях её решение стремится к нулевому при $t \to \infty$.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

Известно, что система является устойчивой, если спектр матрицы $\boldsymbol{A}$ целиком лежит в левой комплексной полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. Введём в систему (4) линейное управление $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^p$, $p \leq n$ (обратную связь):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

## Теорема

Пусть пара $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ управляема, тогда матрица замкнутой системы $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})$ за счет выбора $\boldsymbol{K}$ может приобрести произвольное расположение собственных значений, то есть может быть сделана устойчивой.

# Управляемость для линейных систем

Проверка управляемости системы разрешается следующим образом.

## Критерий Калмана

Система $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ *вполне управляема*, если матрица управляемости $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times np}$ имеет полный ранг:

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{P} = \operatorname{rank}\left[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ \ldots\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right] = n.$$

$n$ — размерность вектора состояния,
$p$ — размерность вектора внешних возмущений (воздействий).

# Стабилизируемость

Условие управляемости можно заменить на более слабое условие *стабилизируемости*, если требуется лишь добиться устойчивости системы, а не заданного расположения ее собственных значений в левой полуплоскости. Пусть известен спектр $\{\lambda_i\}$ матрицы $\boldsymbol{A}$.

## Лемма Хаутуса

Система $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ *стабилизируема* тогда и только тогда, когда матрицы $\boldsymbol{H}_i$ имеют полный ранг:

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{H}_i = \operatorname{rank}\big[\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{E} \;\; \boldsymbol{B}\big] = n$$

для всех неустойчивых собственных значений $\lambda_i$ матрицы $\boldsymbol{A}$.

Таким образом, управляемость влечет стабилизируемость, но не наоборот. В дальнейшем мы будем требовать выполнения именно *стабилизируемости*.

# Нормальная форма линеаризованной системы многозвенного маятника

Ранее мы получили линеаризованная форму уравнений движения маятника в окрестности произвольного положения равновесия $\boldsymbol{\sigma}$. Следовательно, система под действием силового воздействия $\boldsymbol{u}(t) = (u^1(t), u^2(t))$ будет иметь вид

$$(\boldsymbol{\Lambda} \otimes \boldsymbol{E}_2)\ddot{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{G} \otimes \boldsymbol{E}_2)\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{E}_2)\boldsymbol{u}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Запишем ее в нормальной форме

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \text{ где } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}_m \\ (\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{G}) \otimes \boldsymbol{E}_2 & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{C}) \otimes \boldsymbol{E}_2 \end{pmatrix}.$$

# Задача синтеза

Необходимо найти закон управления линейной системой, который бы минимизировал функционал качества

$$J = \int_0^\infty \left(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}\right) \, dt \to \min,$$

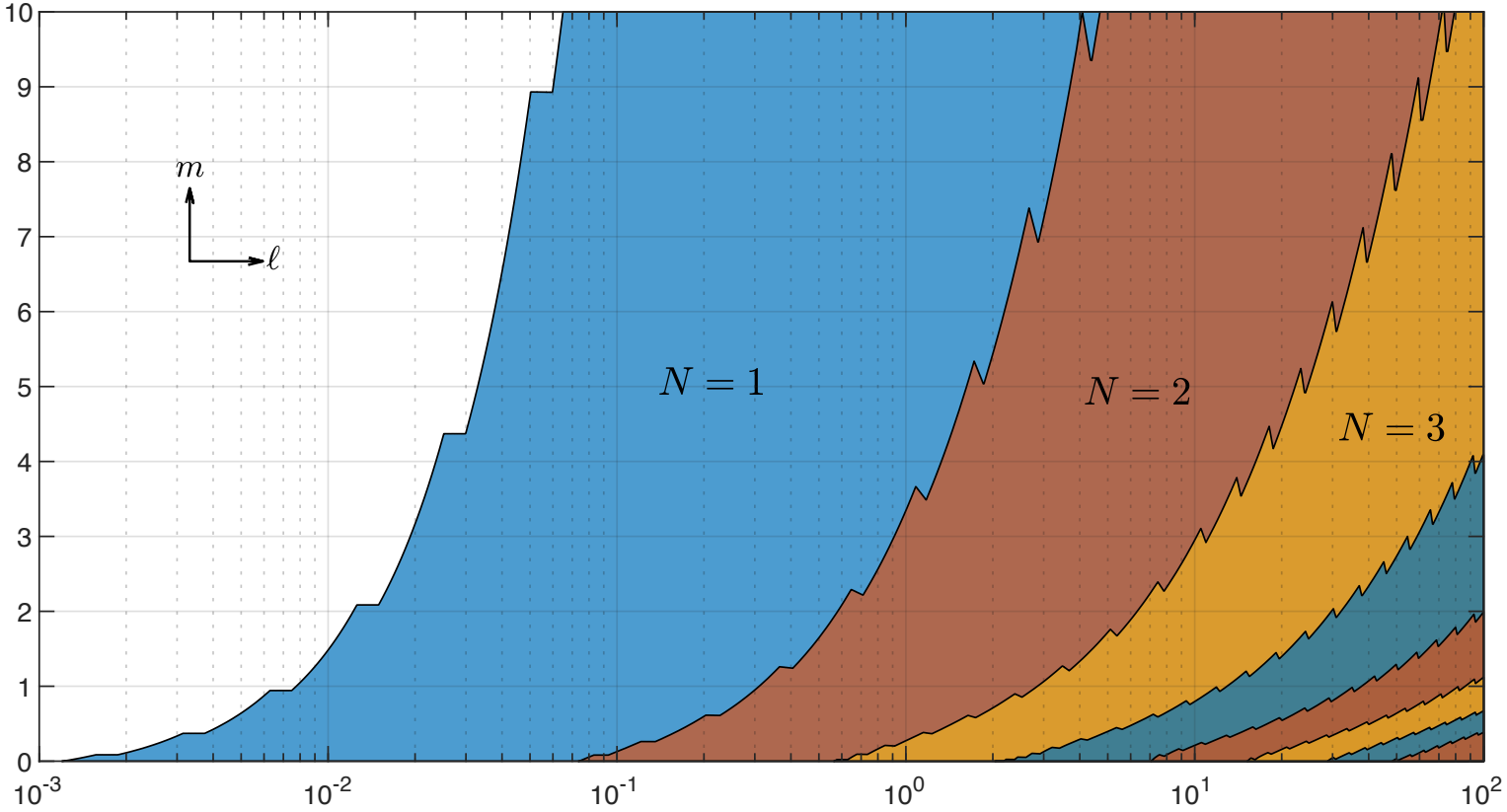
где $\boldsymbol{Q}$ — симметричная положительно определенная матрица $(4N+4) \times (4N+4)$, $\boldsymbol{R}$ — положительно определенная матрица $2 \times 2$.
Закон управления по отрицательной обратной связи имеет вид

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}, \text{ где } \boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}.$$

$\boldsymbol{P}$ находится из решения уравнения Риккати.

Задача нахождения линейно-квадратичного управления маятником будет выполнятся, если система являяется *стабилизируемой* (Лемма Хаутуса).

# Исследование управляемости по критерию Калмана




Зоны управляемости на плоскости $(\ell, m)$ для равнозвенных маятников при $N = 1, \ldots, 8$.
Стоит отметить, что Лемма Хаутуса выполняется для всех N-звенных маятников во всей области изменения параметров.

# Эксперименты

Представленнные выше рассуждения касались линеаризованной системы. Поэтому для нелинейной системы управление будет работать только в небольшой окрестности положения равновесия, где осмыслена линеаризация системы.

Интуитивно понятно, что с увеличением числа звеньев $N$ рабочая окрестность управления будет убывать стремительно. Продемонстрируем это наблюдение.

1. `Управление трехзвенного маятника.`
2. `Управление трехзвенного маятника (вид сверху).`
3. `Управление четырехзвенным маятником.`
4. `Управление четырехзвенным маятником (слож.).`
5. `Управление семизвенным маятником.`
6. `Управление шестизвенным маятником (слож.).`

# Заключение

1. В векторной форме получена система уравнений движения сферического маятника с произвольным числом звеньев и произвольными динамическими характеристиками звеньев.
2. Для линеаризованной формы уравнений движения исследована управляемость на основе критерия Калмана.
3. По результатам расчетов как свободного, так и управляемого движения маятников выполнена трёхмерная визуализация их динамики.

## Спасибо за внимание!