Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Теоретическая механика»

Графовая модель оптимального маршрута судна в дрейфующих льдах

Выполнил:
студент группы
3640103/80401
Звягина Т. Л.

Руководитель:
Доцент ВШТМ,
к.ф.-м.н., доцент
Суслова И. Б.

Консультант:
Заведующий лабораторией
«ФОЛИ», к.т.н., доцент
Звягин П. Н.

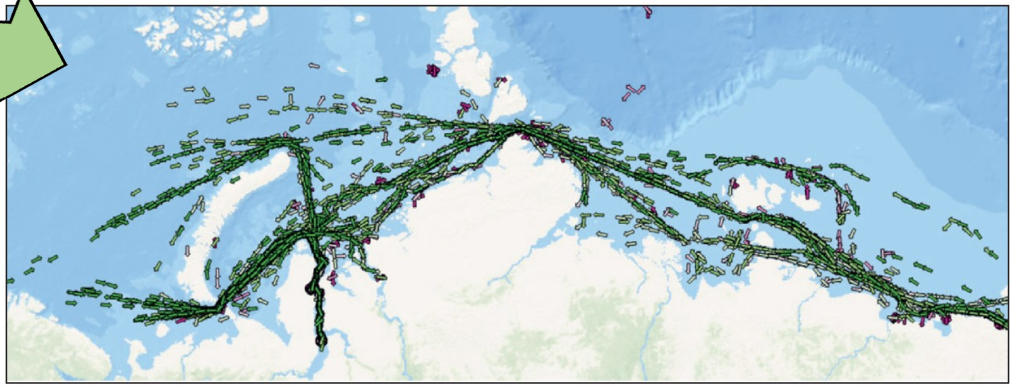
Консультант:
Начальник 54 лаборатории
«КГНЦ», д.т.н., с.н.с.
Сазонов К. Е.

Санкт-Петербург
2020

Цель работы: Разработать математическую модель, которая позволит получить множество маршрутов, обладающих свойствами оптимальности к ряду заданных целевых функций.

Актуальность:

экономия транспортных издержек и снижение рисков



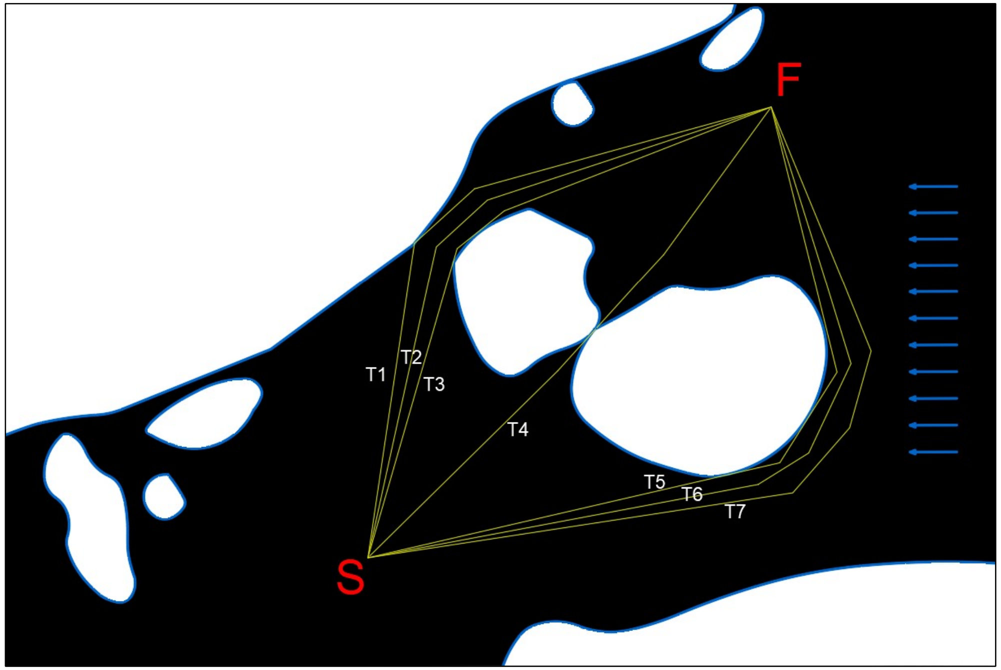
Навигация вдоль Северного морского пути

1. Решение задачи в статической постановке

2. Решение задачи в динамической постановке

3. Изучение свойств созданной математической модели

Множество допустимых решений:
$\mathcal{K} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7\}$



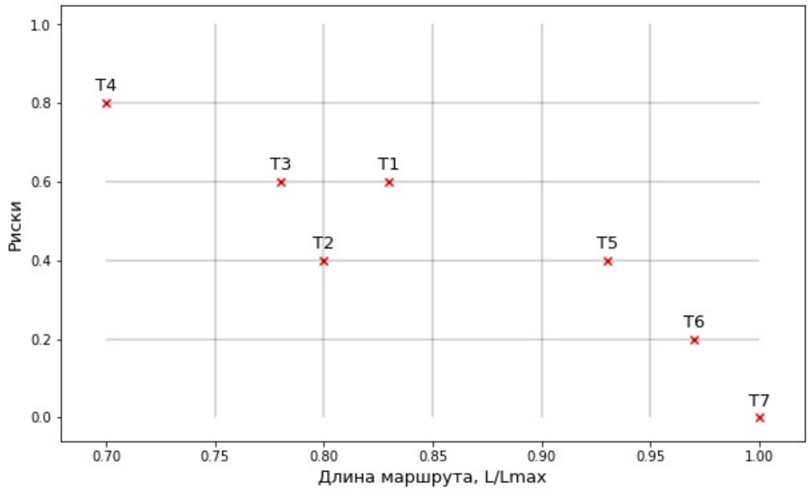
Множество Парето-оптимальных решений:
$\mathcal{T} = \{T_2, T_3, T_4, T_6, T_7\}$

Целевая функция f_1: длина маршрута

Целевая функция f_2: риски

Цель оптимизации:

$$\min_{x \in \mathcal{K}} \left(f_1(x), f_2(x)\right)$$



Непрерывная модель ✗

Переход к конечному множеству маршрутов

Решение за конечное число шагов

Универсальность алгоритмов

Дискретная графовая модель ✓

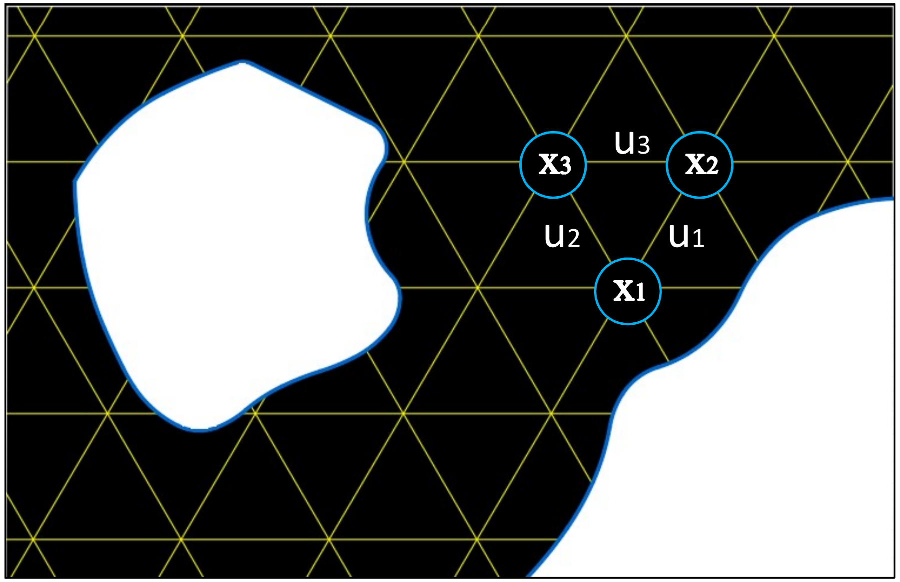
Граф $G\,(\mathcal{X},\mathcal{U})$:

$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

множество вершин

$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$

множество ребер (дуг).



l – длина ребра сетки графа G

$\omega(x_j)$ – весовая функция риска для каждого узла графа G:

ω, балл	Расстояние до кромки льда
0	$(2l;\ \infty)$
0.25	$(1.5l;\ 2l]$
0.5	$(l;\ 1.5l]$
0.75	$(0.5l;\ l]$
1	$(0;\ 0.5l]$

f_1 – суммарная длина маршрута

$f_{2.1}$ – суммарный риск маршрута

$f_{2.2}$ – максимальный балл риска на маршруте

$$T_1^* = \underset{T_i \in \mathcal{K}}{lex\min}\left(f_1(T_i), f_{2.1}(T_{SF})\right)$$

$$f_{2.1}(T_{SF}) = \sum_{k=1}^{M+1} \omega(x_k)$$

$$f_1(T_i) = \sum_{k=1}^{M_i} l(u_k) = l \cdot M_i$$

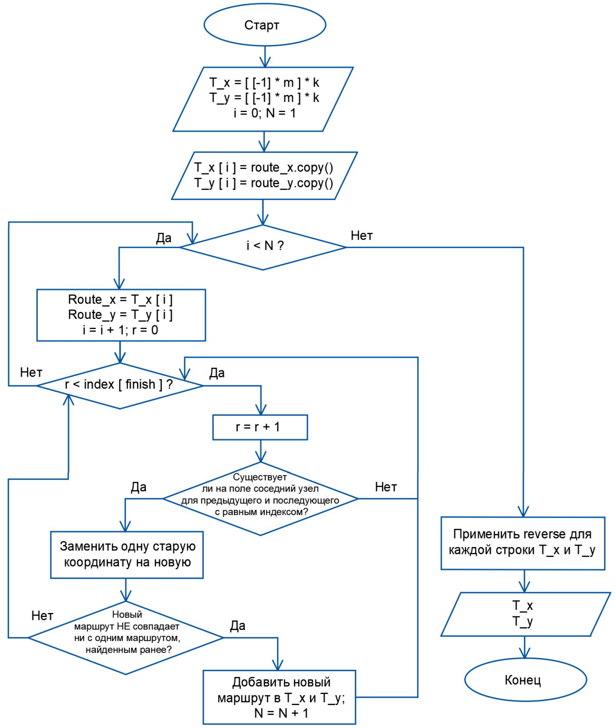
$$\min_{T_i \in \mathcal{K}, T_{SF} \in \mathcal{L}} \left(f_1(T_i), f_2(T_{SF})\right)$$

– множество Парето-оптимальных решений

$$f_{2.2}(T_{SF}) = \max_{x_i \in T_{SF}} \omega(x_i)$$

$$T_5^* = \underset{T_i \in \mathcal{K}}{lex\min}\left(f_{2.2}(T_{SF}), f_1(T_i)\right)$$

Алгоритм решения задачи двухкритериальной оптимизации



Блок-схема модификации метода Йена

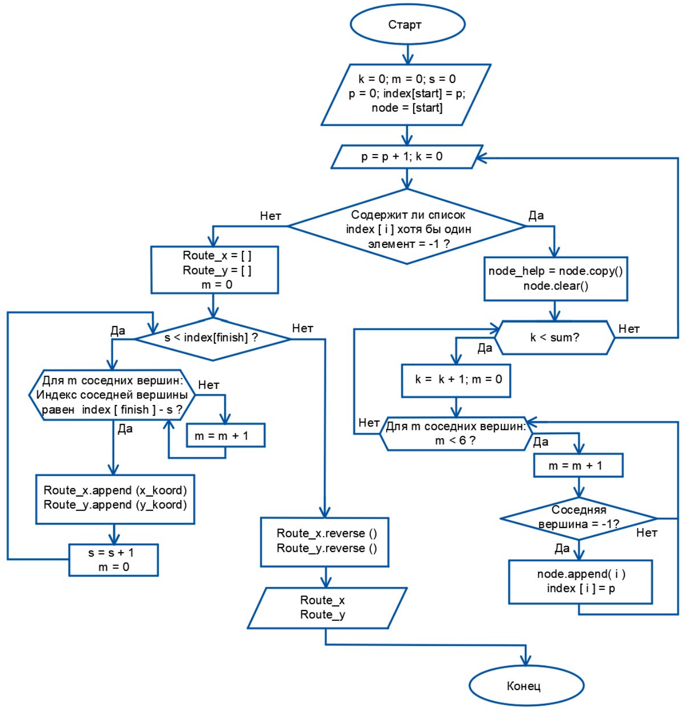
$\omega = 1$
$\omega = 0.75$
$\omega = 0.5$
$\omega = 0.25$
$\omega = 0$

На L применить: $\min(f_{2.1})$: выбрать маршрут с минимальным суммарным риском

Применить волновой алгоритм: найти один оптимальный по длине маршрут

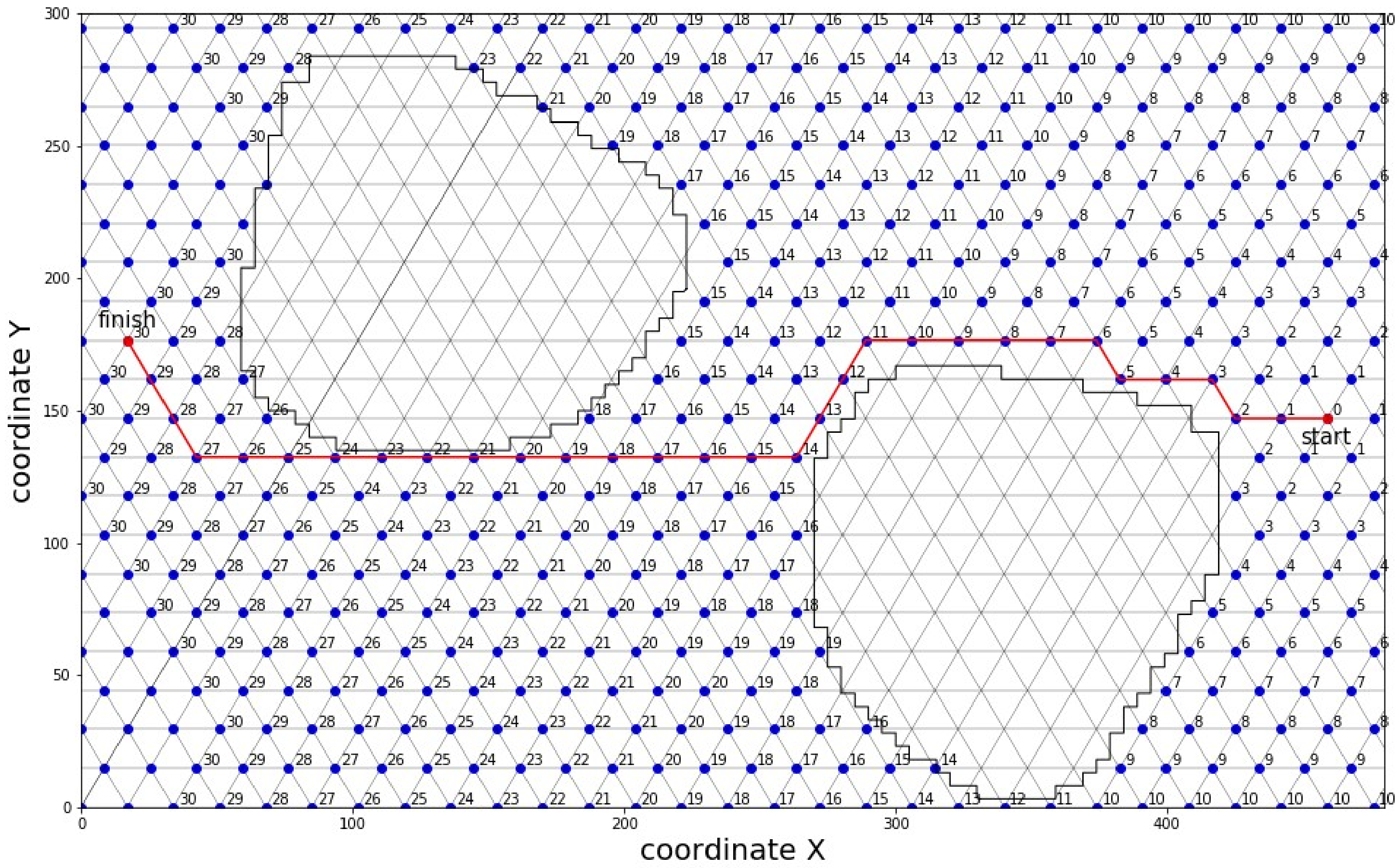
Применить модификацию метода Йена: найти всё множество L оптимальных по длине маршрутов

Блок-схема волнового алгоритма



ω = 1
ω = 0.75
ω = 0.5
ω = 0.25
ω = 0

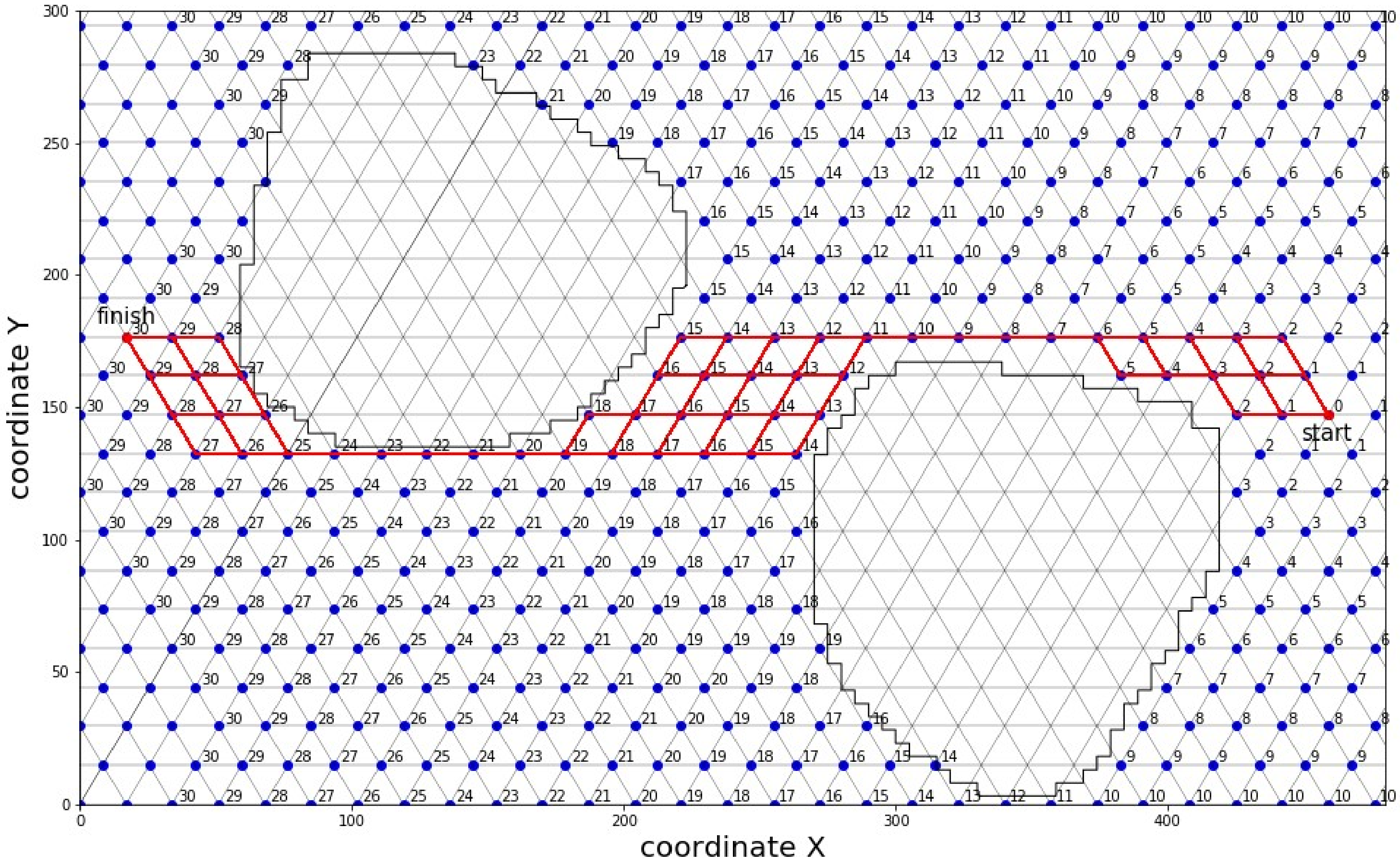
Найти один оптимальный по длине маршрут



Решение задачи оптимизации в статической постановке

Найти один оптимальный по длине маршрут

Найти всё множество оптимальных по длине маршрутов

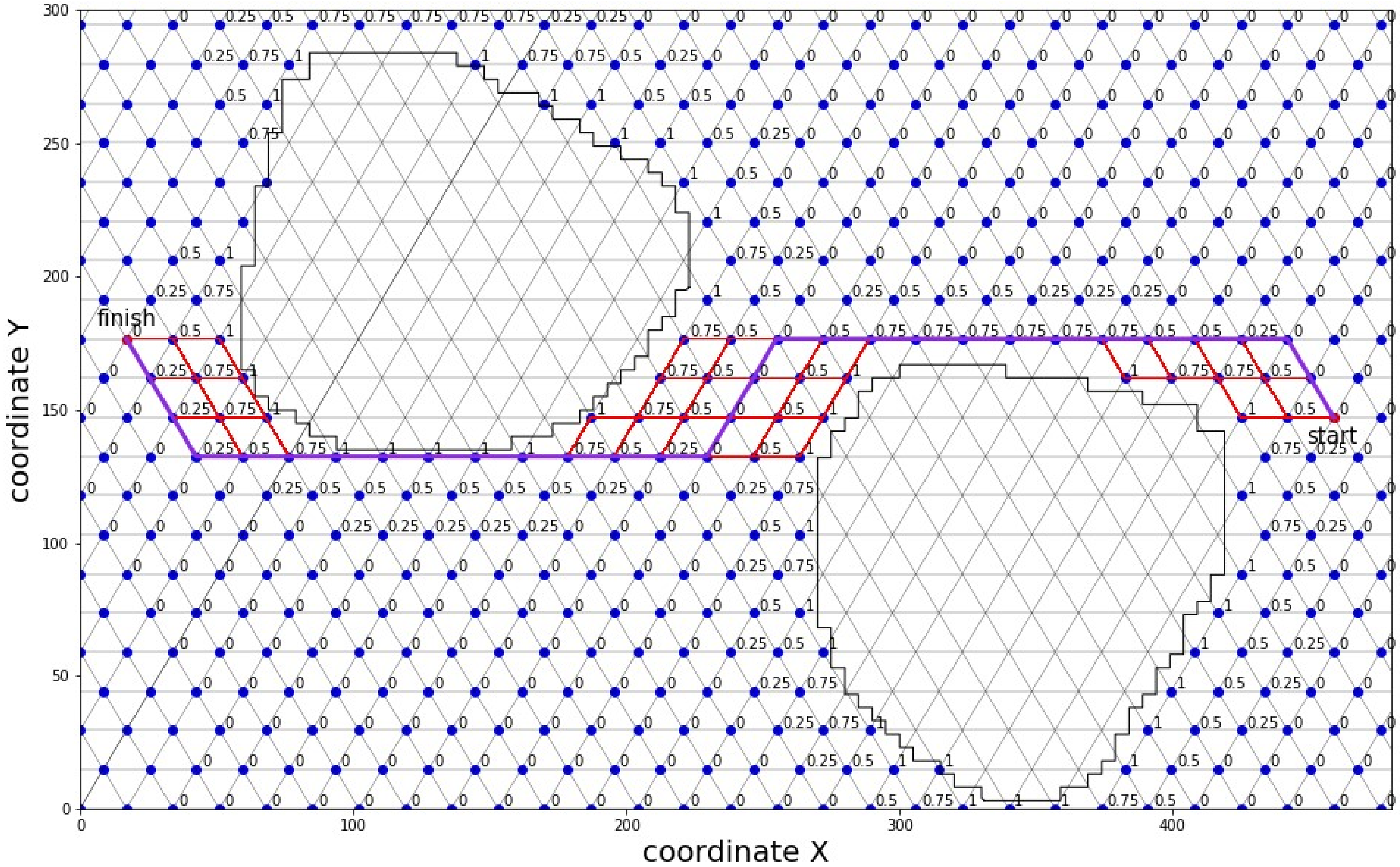


$|\mathbb{L}| = 5861$

Решение задачи оптимизации в статической постановке

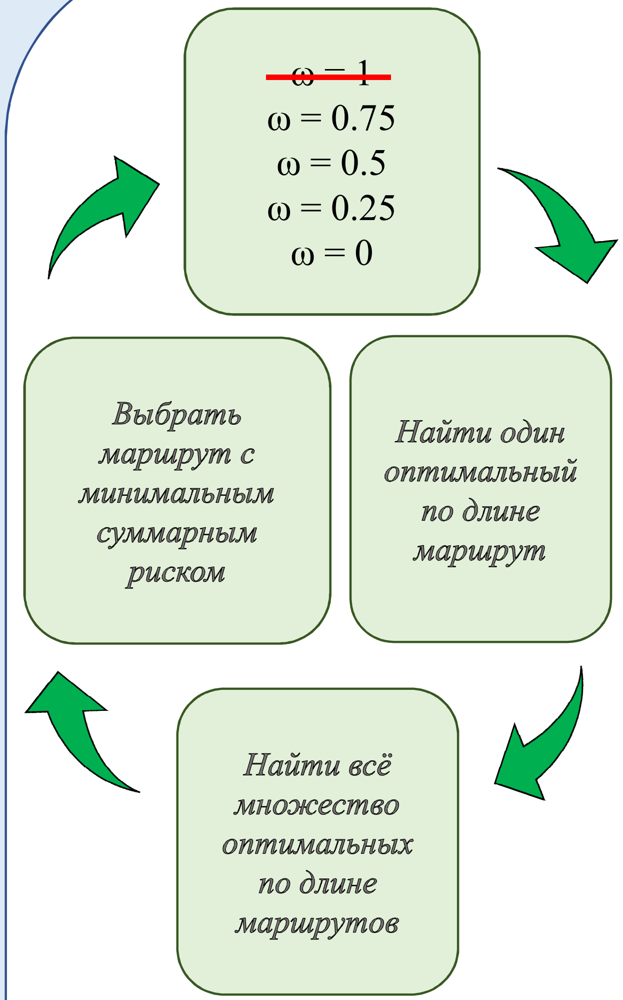
Выбрать маршрут с минимальным суммарным риском

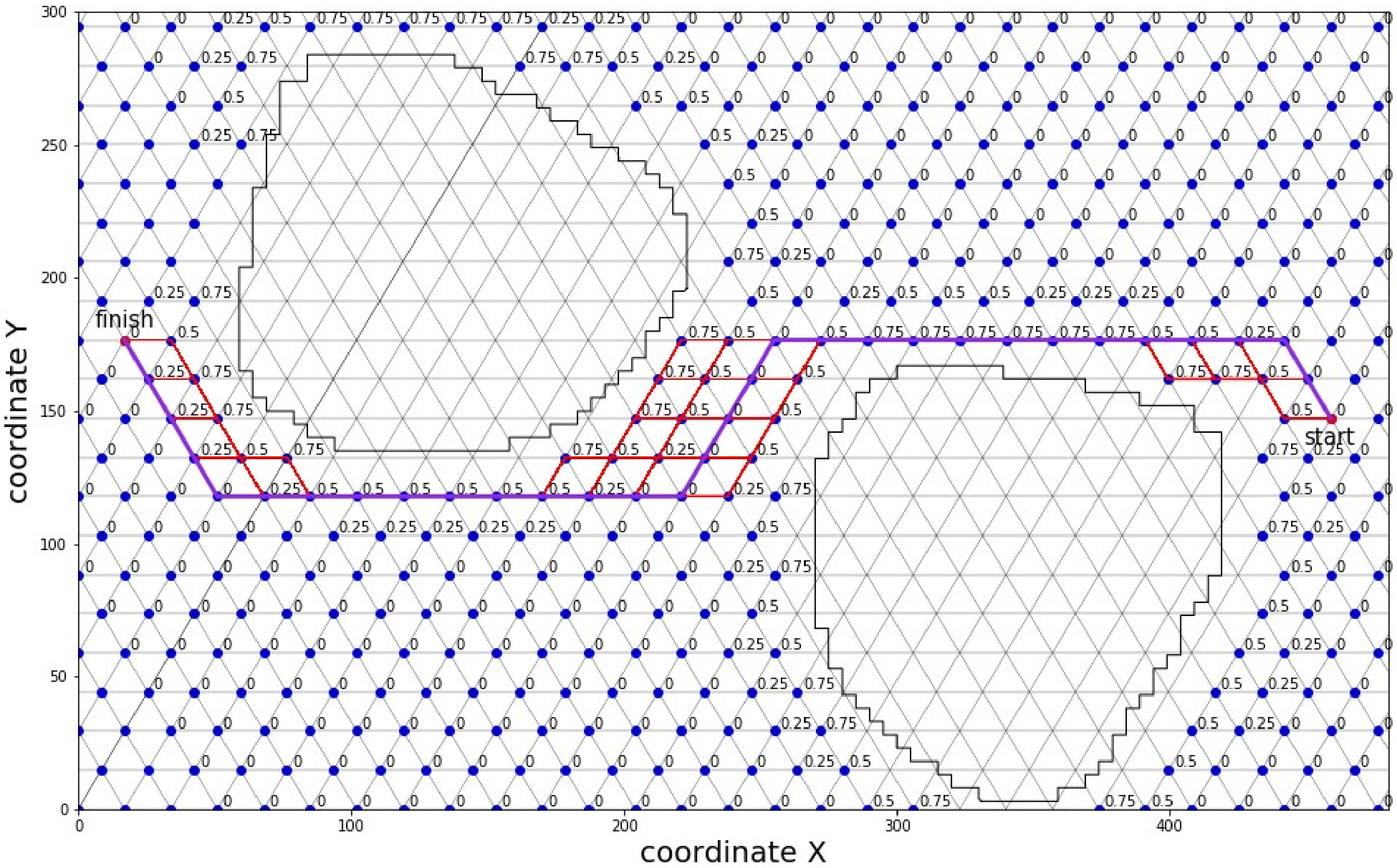
Найти всё множество оптимальных по длине маршрутов



Множество Парето-оптимальных решений: $\mathcal{T} = \{T_1^*\}$

Решение задачи оптимизации в статической постановке





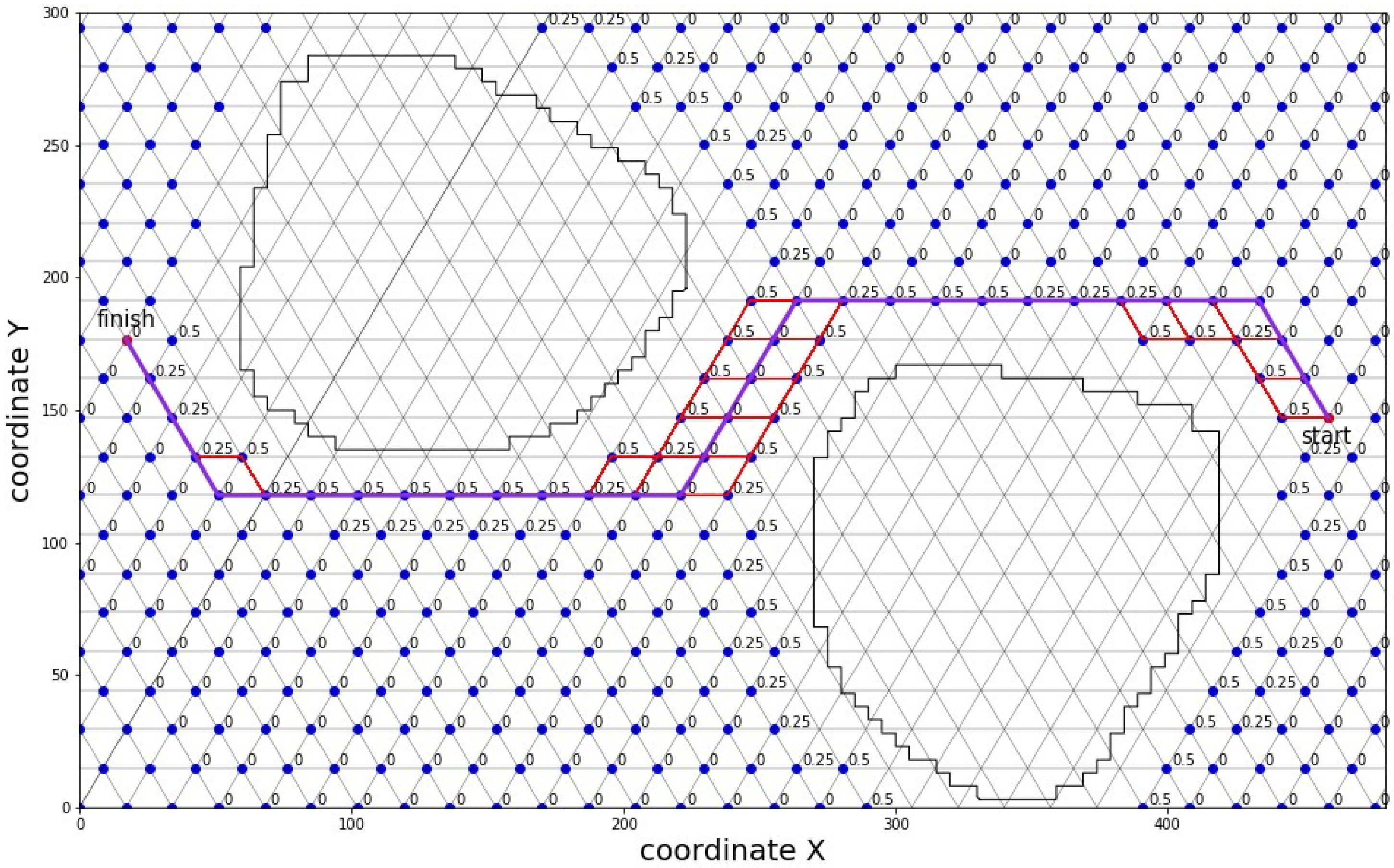
Множество Парето-оптимальных решений: $\mathcal{T} = \{T_1^*, T_2^*\}$

~~ω = 1~~
~~ω = 0.75~~
ω = 0.5
ω = 0.25
ω = 0

Найти один оптимальный по длине маршрут

Найти всё множество оптимальных по длине маршрутов

Выбрать маршрут с минимальным суммарным риском



Множество Парето-оптимальных решений: $\mathcal{T} = \{T_1^*, T_2^*, T_3^*\}$

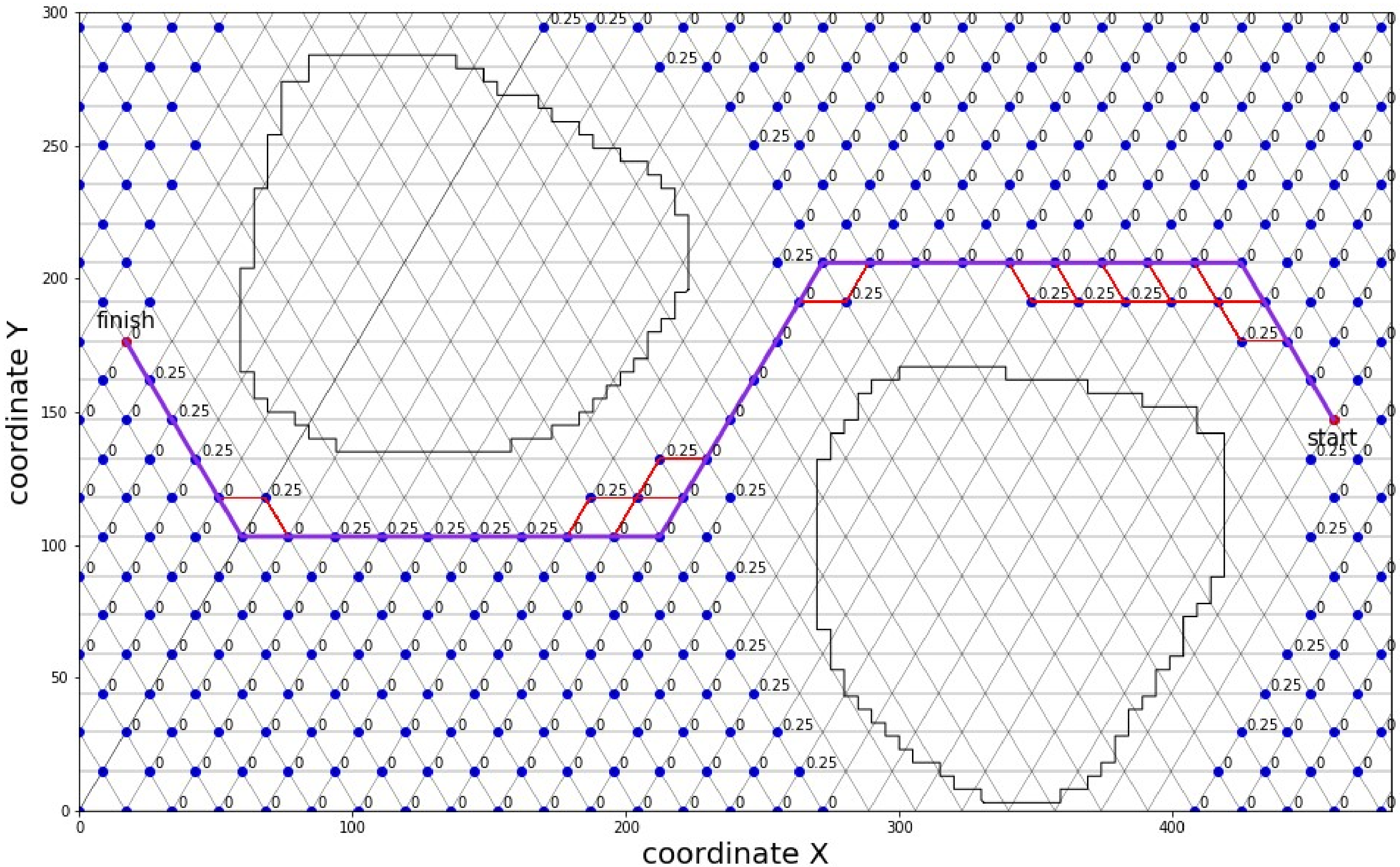
Решение задачи оптимизации в статической постановке

~~ω = 1~~
~~ω = 0.75~~
~~ω = 0.5~~
ω = 0.25
ω = 0

Найти один оптимальный по длине маршрут

Найти всё множество оптимальных по длине маршрутов

Выбрать маршрут с минимальным суммарным риском



Множество Парето-оптимальных решений: $\mathcal{T} = \{T_1^*, T_2^*, T_3^*, T_4^*\}$

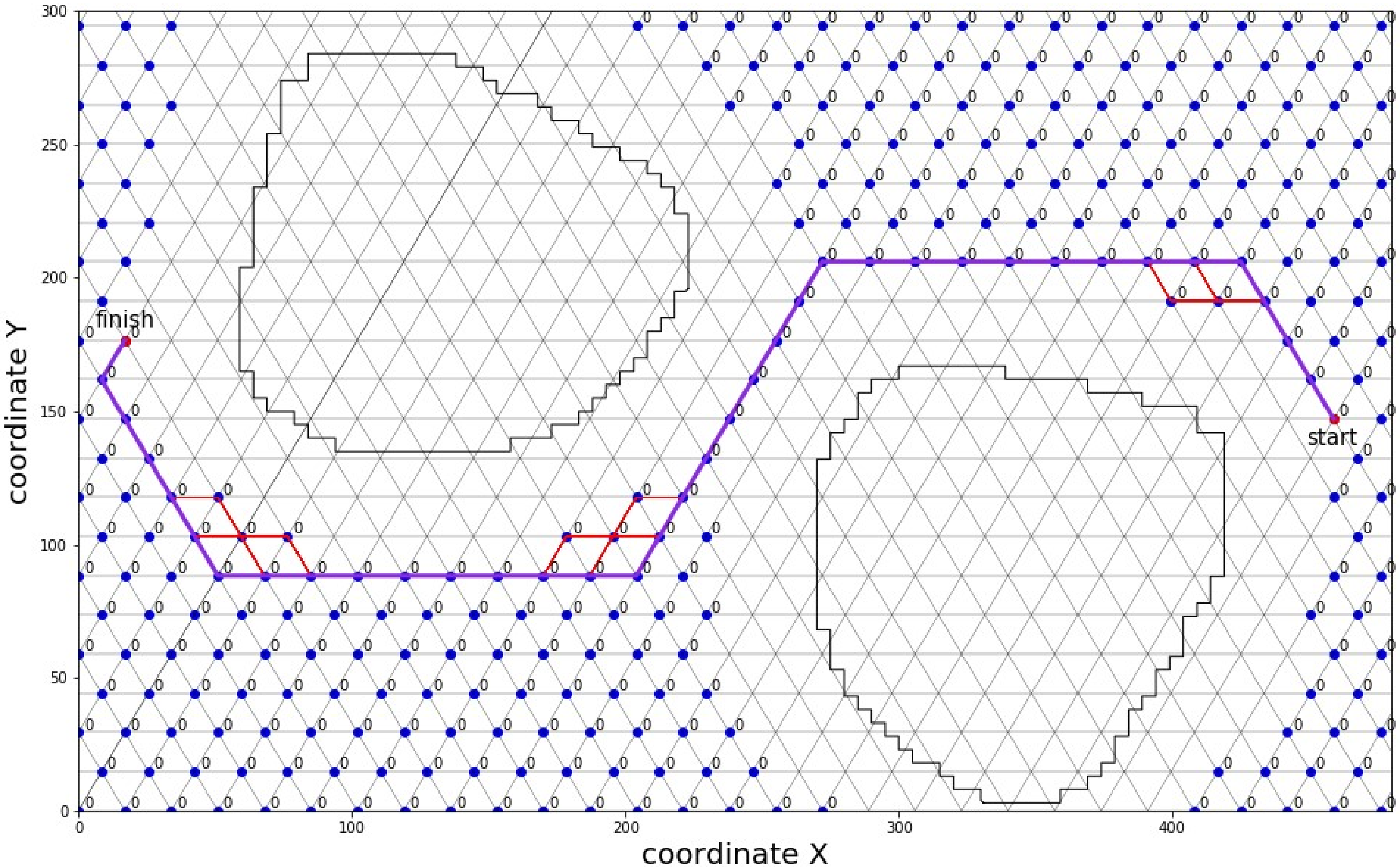
Решение задачи оптимизации в статической постановке

~~ω = 1~~
~~ω = 0.75~~
~~ω = 0.5~~
~~ω = 0.25~~
ω = 0

Найти один оптимальный по длине маршрут

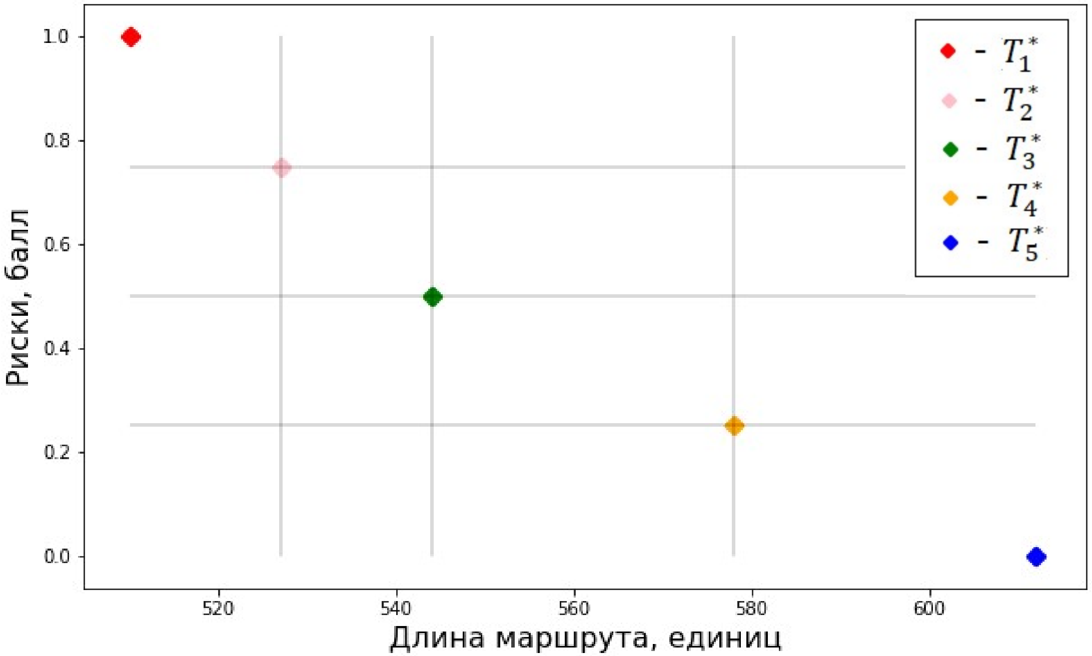
Найти всё множество оптимальных по длине маршрутов

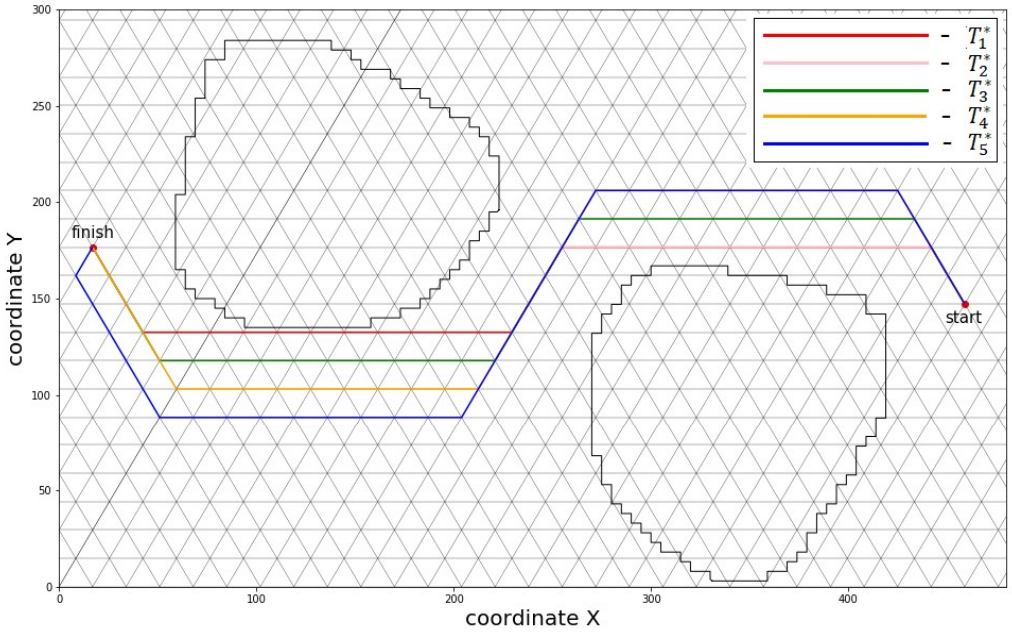
Выбрать маршрут с минимальным суммарным риском



Множество Парето-оптимальных решений: $\mathcal{T} = \{T_1^*, T_2^*, T_3^*, T_4^*, T_5^*\}$

Решение задачи оптимизации в статической постановке





Множество Парето – оптимальных решений

задачи двухкритериальной оптимизации

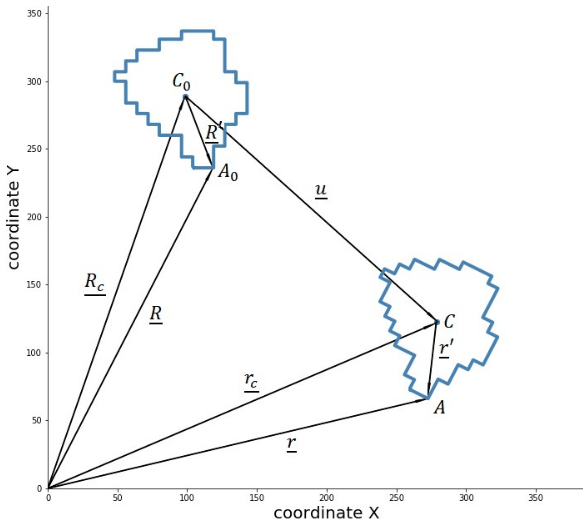
$$\mathcal{T} = \{T_1^*, T_2^*, T_3^*, T_4^*, T_5^*\}$$

Закон движения льдины под влиянием ветра и течения

$$\underline{r} = \underline{\underline{Q}} \cdot \left(\underline{R} - \underline{R_C}\right) + \underline{R_C} + \underline{u}$$

$$x_i = X_C + \cos(\widetilde{\omega}\Delta t) \cdot (X_i - X_C) - \sin(\widetilde{\omega}\Delta t) \cdot (Y_i - Y_C) + \Delta u_x$$

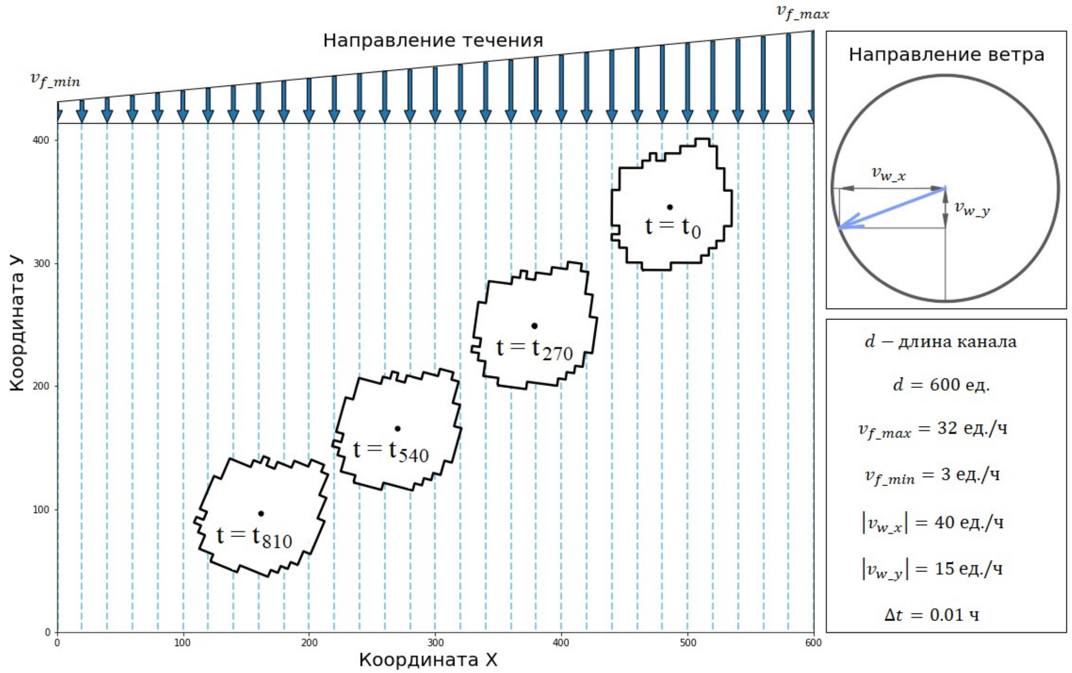
$$y_i = Y_C + \cos(\widetilde{\omega}\Delta t) \cdot (Y_i - Y_C) + \sin(\widetilde{\omega}\Delta t) \cdot (X_i - X_C) + \Delta u_y$$



Δu_x – ?

Δu_y – ?

$\widetilde{\omega}$ – ?



$$\Delta u_x = \pm v_{w_x} \cdot \Delta t$$

$$\Delta u_y = \left(\pm v_{w_y} \pm v_{f_y}\right) \cdot \Delta t$$

$$|\widetilde{\omega}| = \frac{v_{f_{max}} - v_{f_{min}}}{h}$$

Решение динамической задачи на трехмерном графе

$q = 0;\ t_q = 0$

$\mathcal{X}_D = \left\{x_{start}^{(0)}\right\}$

$\mathcal{U}_D = \{\emptyset\}$

$q = q + 1$

$t_q = t_{q-1} + \Delta t$

Если $t_q > t^*$ –

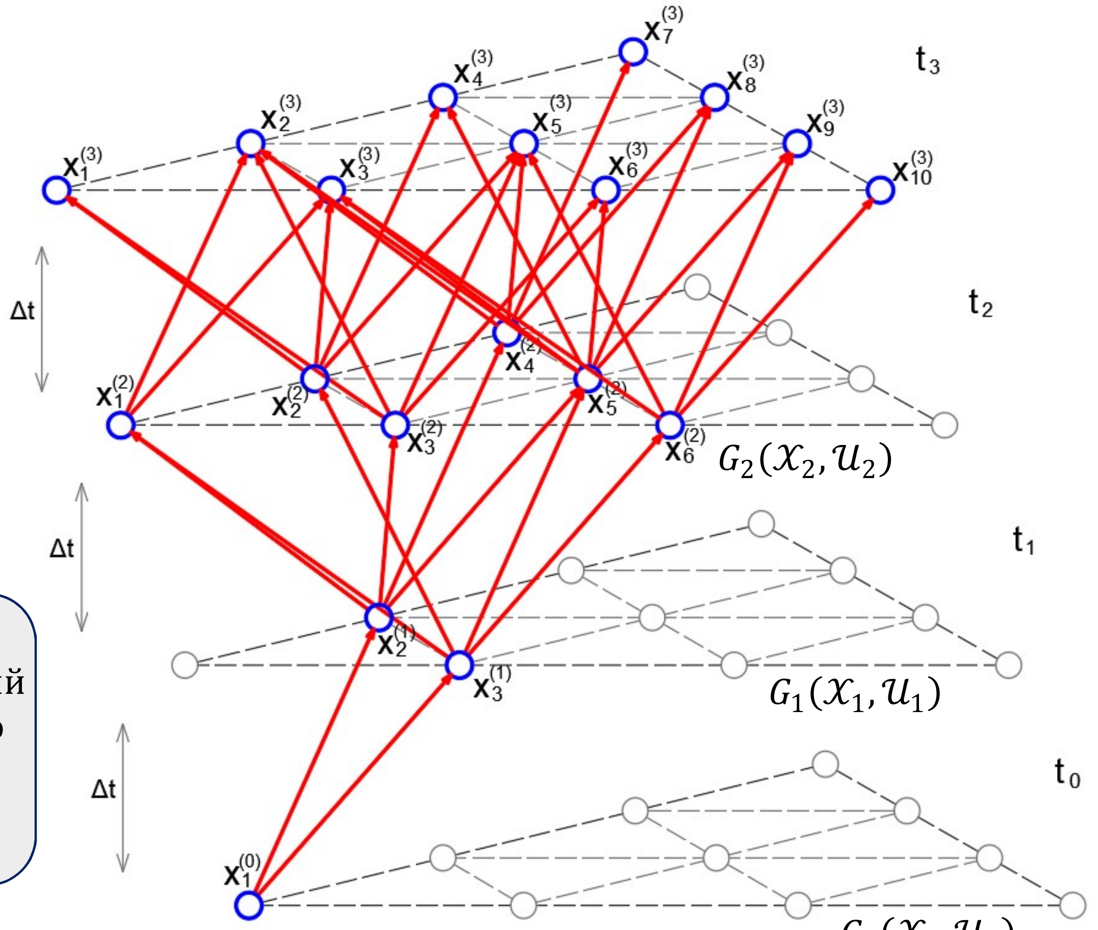
<u>остановить алгоритм</u>

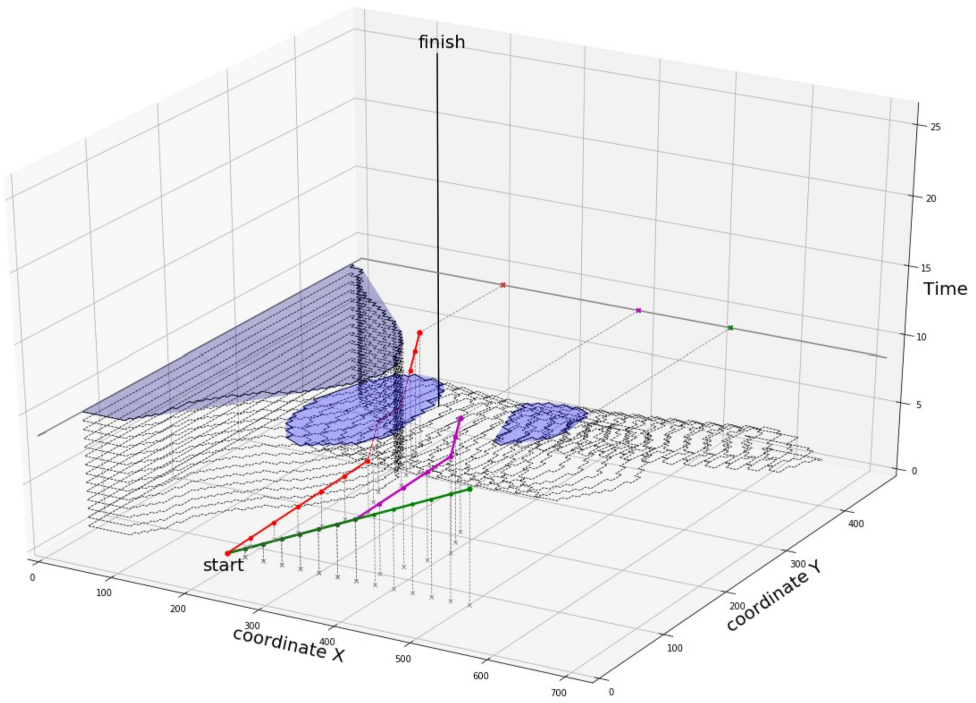
<u>Иначе:</u>
сформировать двухмерный граф $G_q(\mathcal{X}_q, \mathcal{U}_q)$согласно новому положению ледовых объектов.

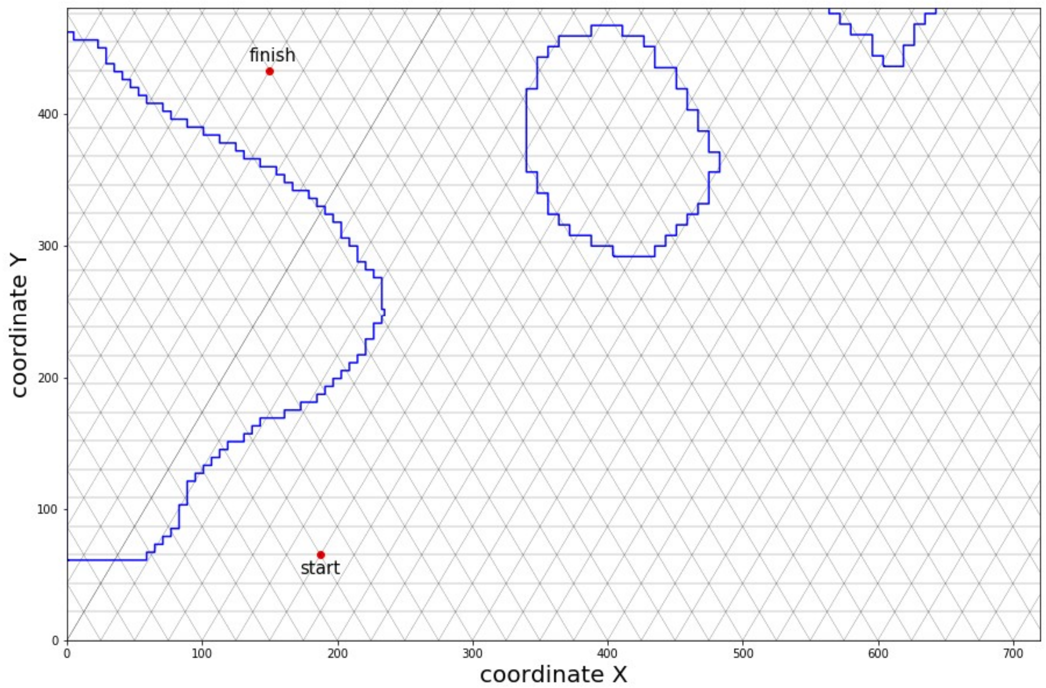
Для вершин, добавленных на предыдущем шаге:

1. Найти проекции этих вершин на граф G_q
2. Пополнить множества $\mathcal{X}_D$ и $\mathcal{U}_D$

Алгоритм построения трехмерного графа $D(\mathcal{X}_D(t), \mathcal{U}_D)$

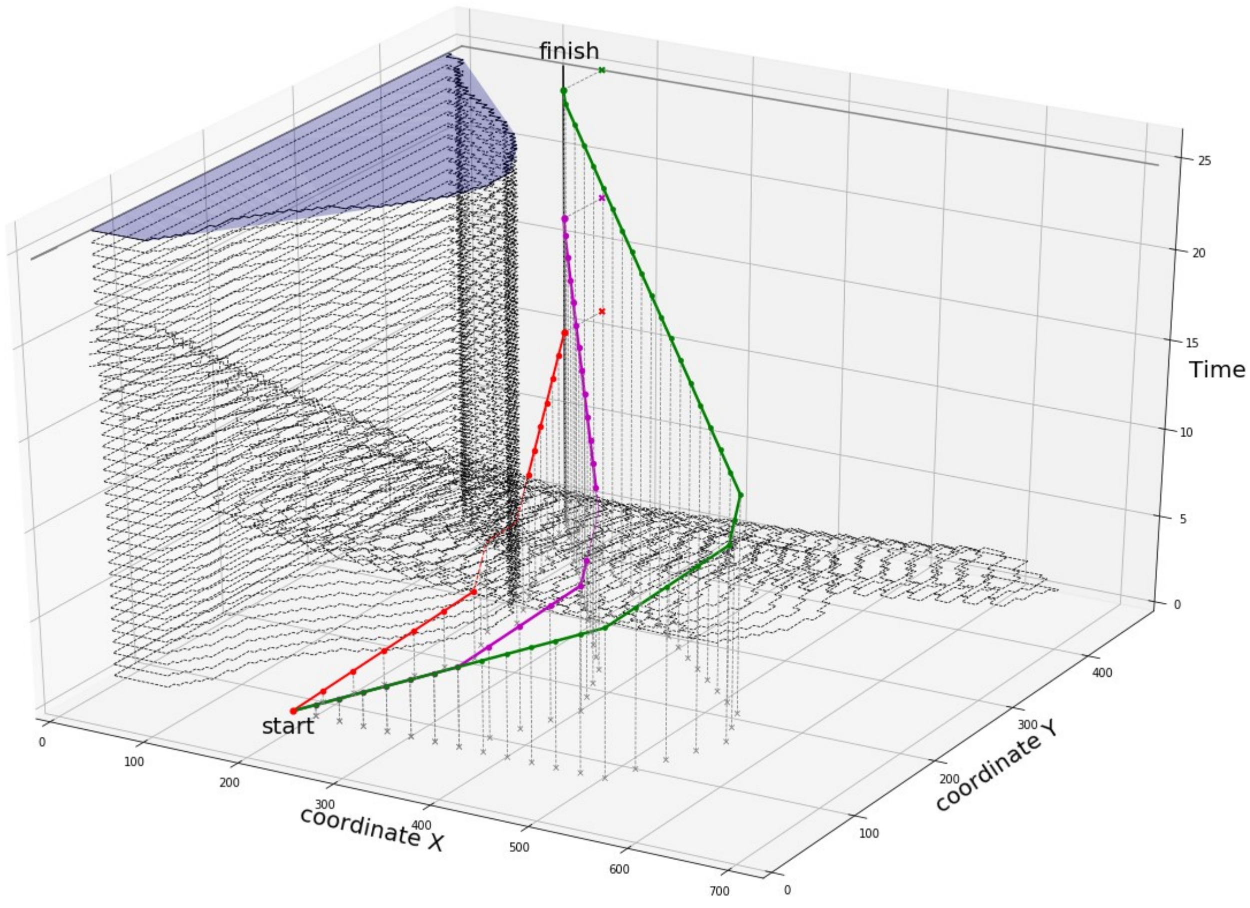



finish
start
Time
coordinate X
coordinate Y


finish
start
coordinate X
coordinate Y

$t_{13} = 8.45$ ч

Решение задачи оптимизации в динамической постановке



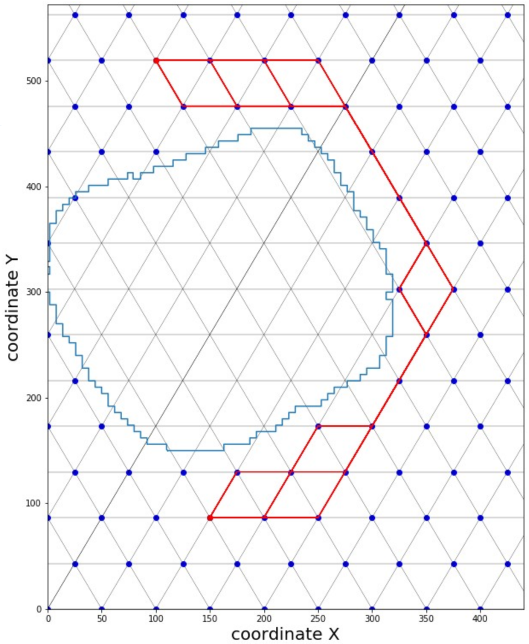
	1	3	5
Ограничение рисков	1	0.5	0
Суммарный риск $f_{2.1}$	7.5	2.0	0
Суммарное время t, ч	11.05	17.22	24.17

Влияние размера ребра ячейки графа на N

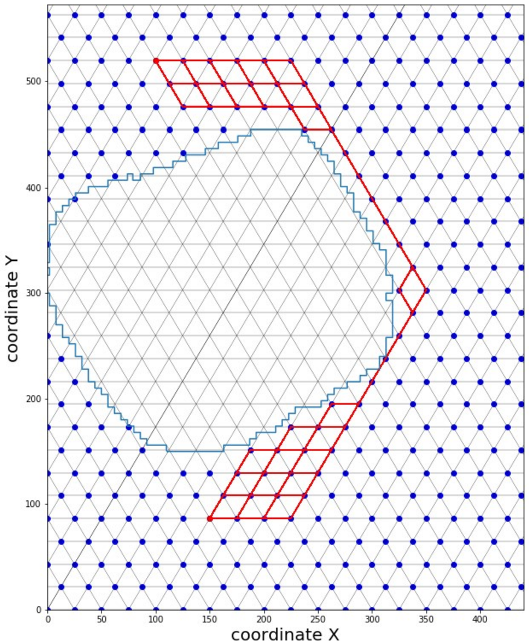
$\nu(l) -$ *мощность множества* $\mathcal{X}$ *вершин графа*

$N(l) -$ *количество равнооптимальных по длине маршрутов*

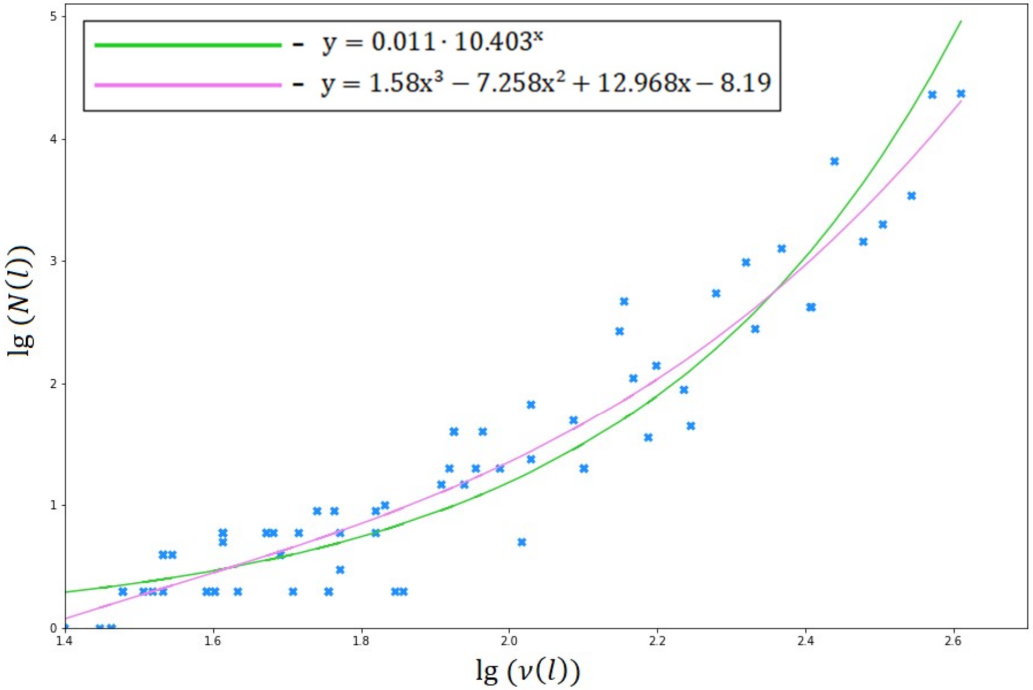
$l = [22, \ldots, 100]$, шаг $\Delta l = 1$ ед.



$l = 50$

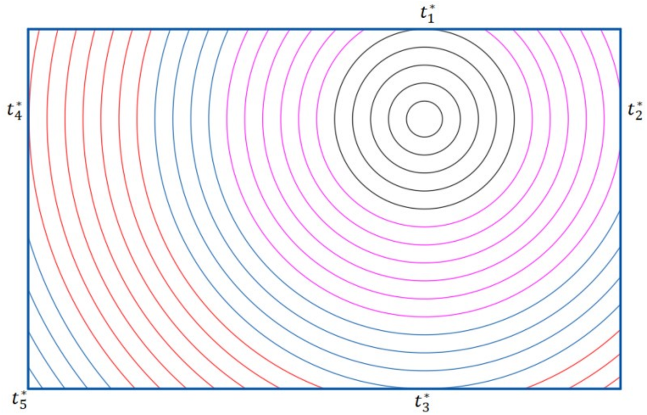


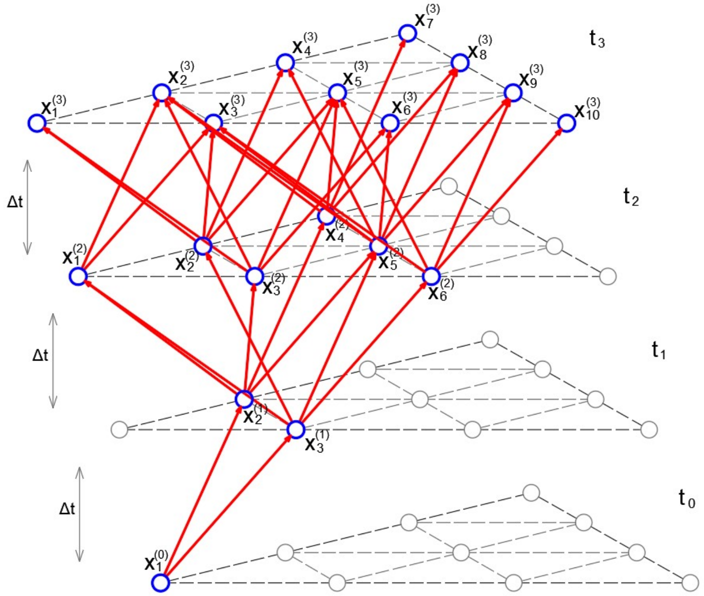
$l = 25$

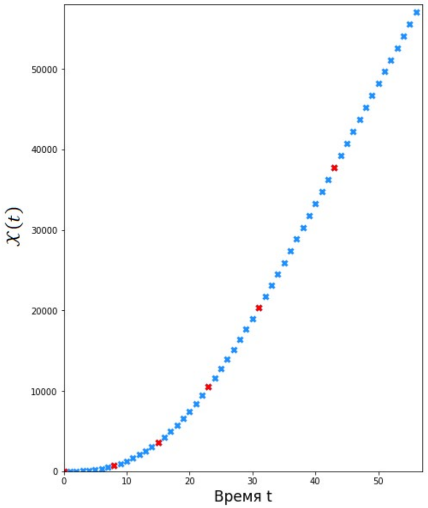


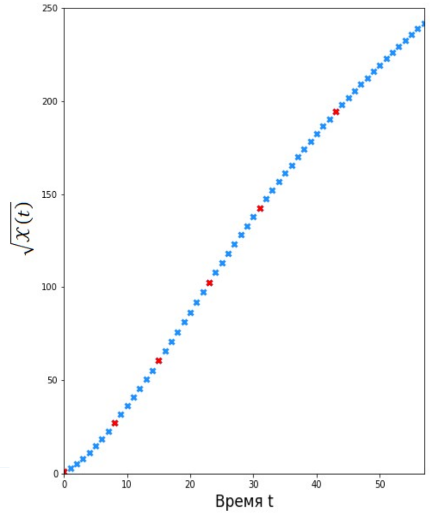
$$N(l) \approx 10^{1.58(lg^3(\nu(l))) - 7.258(lg^2(\nu(l))) + 12.968(\lg(\nu(l))) - 8.19}$$

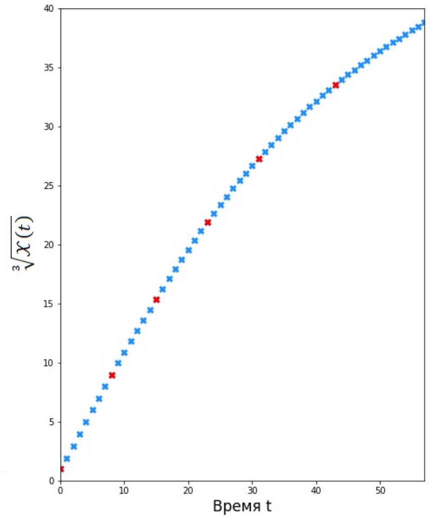
Оценка мощности множества вершин трехмерного графа











Временной интервал	Аппроксимирующая функция
$[0; t_1^*)$	$y = x^3 + 3x^2 + 3x$
$[t_1^*; t_2^*)$	$y = 0.5x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1$
$[t_2^*; t_3^*)$	$y = 0.25x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2$
$[t_3^*; t_4^*)$	$y = a_3x^2 + b_3x + c_3$
$[t_4^*; t_5^*)$	$y = a_4x^2 + b_4x + c_4$
$[t_5^*; t_6^*]$	$y = \lambda_1 x - \mu_1$

- ✓ Разработана математическая модель, которая позволяет получить множество маршрутов, обладающих свойствами оптимальности к ряду заданных целевых функций.
- ✓ Разработан алгоритм для формирования трехмерного графа, учитывающий актуальное положение отдельных льдин во времени.
- ✓ Предложен закон движения отдельных льдин, ледовых полей и ледовых образований под влиянием ветра и течения.
- ✓ Разработана компьютерная реализация на Python, позволяющая автоматически находить решение задачи двухкритериальной оптимизации:
    - в статическом положении льдин;
    - при возможном дрейфе льдин.
- ✓ Исследованы свойства созданной математической модели.

Спасибо за внимание!