

Summary

A generalized heat conduction equation for unsteady processes is solved to find temperature field distribution on the surface of a pulse source crystal. The solution is used to determine local superheats in growing homoepitaxial germanium films by the iodide method. The calculations show that local variation of the crystal surface temperature in heterogeneous chemical reactions may considerably affect the kinetics of growth processes.

Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: Высшая школа, 1967.—599 с.
2. Баранов А. А., Колпашиков В. Л. Релятивистская термомеханика сплошных сред.— Минск: Наука и техника, 1979.—149 с.
3. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Обобщенная термомеханика.— Киев: Наукова думка, 1976.—254 с.
4. Baeri P., Compisano S. U., Foti G., Rimini E. Arsenic diffusion in silicon melted by high-power nanosecond laser pulsing.— Appl. Phys. Lett., 1978, vol. 33, N 2, p. 137—139.
5. Арсламбеков В. А. О механизме образования первичных окисных пленок в металлах.— В кн.: Механизм взаимодействия металлов с газами. М.: Наука, 1964, с. 68—72.
6. Берман Р. Теплопроводность твердых тел.— М.: Мир, 1979.—258 с.
7. Роберт Ф. Ролстен. Йодидные металлы и йодиды металлов.— М.: Мир, 1968.—284 с.
8. Кристаллохимические, физико-химические и физические свойства полупроводниковых веществ: Справочник.— М.: Изд-во стандартов, 1973.—121 с.
9. Свойства элементов. Ч. 1: Справочник / Под ред. Г. В. Сомсонова.— М.: Металлургия, 1976.—189 с.
10. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Т. 2, кн. 2 / Под ред. В. П. Глушко.— М.: Наука, 1979.—156 с.
11. Краткий физико-технический справочник. Ч. 1 / Под ред. К. П. Яковлева.— М.: Физ.-мат. лит-ра, 1960.—324 с.
12. Современная кристаллография. Т. 4.— М.: Наука, 1981.—56 с.

Дагестанский государственный педагогический институт,
г. Махачкала

21.06.85.

УДК 536.24.02

Е. И. Леванов, Е. Н. Сотский

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕНОСА В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Исследованы решения гиперболической системы уравнений теплопереноса, в которых учтена зависимость коэффициента теплопроводности и времени релаксации теплового потока от температуры.

1°. Широкий круг физических задач приводит к необходимости подробно исследовать перенос тепла. Для описания этого процесса чаще всего используют закон Фурье:

$$W = W_F = -\kappa \operatorname{grad} T. \quad (1)$$

Однако рамки применимости закона Фурье ограничены требованием малости длины и времени свободного пробега частиц по сравнению с характерными пространственно-временными масштабами изменения температуры и часто нарушаются в случае интенсивного теплопереноса. Отметим также, что поток тепла не может превышать максимального значения, определяемого условной ситуацией, когда все частицы вдруг изменили направление своего движения и полетели в одну сторону.

Такое ограничение теплового потока сверху оказывается принци-

пиально важным при описании электронной теплопроводности горячей плазмы [1, 2]. Однако наиболее широко распространенным в численных расчетах способам учета ограничения теплового потока, как показано в [2], присущи определенные недостатки. Строго говоря, следовало бы обратиться к кинетическим уравнениям. Но в силу значительных затрат машинного времени использование кинетических уравнений не всегда приемлемо для задач, осложненных учетом многих нелинейных эффектов.

Исходя из изложенного выше, понятна актуальность задачи поиска и исследования других физически осмысленных математических моделей для переноса тепла.

2°. Одна из таких моделей, известная еще со времен Дж. К. Максвелла [3], опирается на следующее уравнение для потока тепла:

$$\tau \frac{\partial W}{\partial t} + W = - \kappa \text{grad } T, \quad (2)$$

где τ — время релаксации теплового потока, равное по порядку величины времени свободного пробега частиц.

В простейшем случае, когда коэффициент теплопроводности κ и время релаксации теплового потока τ — постоянные величины, оно используется, например, для описания теплопереноса в наследственно-упругих материалах [4], в разреженных газах [5—8]. В [9] указывается, что экспериментальные данные по распространению тепловых импульсов в твердых телах при низких температурах хорошо согласуются с расчетами, использующими уравнение (2). В статье [10] отмечается, что «давно обнаруженное в жидком гелии явление второго звука возникло именно при использовании уравнения теплопроводности гиперболического типа». Применению (2) в задачах термоупругости посвящена книга [11]. Там же можно найти дополнительную библиографию по данному вопросу.

Уравнение (2) можно при определенных предположениях получить из уравнения Больцмана при помощи метода 13 моментов Грэда [12, 13]. Не строго, но наглядно можно вывести (2) исходя из простейших молекулярно-кинетических соображений [8], если простейшим способом учесть запаздывание. Поток тепла, переносимый частицами через выделенную площадку, создается не сразу в тот самый момент, когда действует градиент температуры, а через некоторое время, необходимое частицам, чтобы долететь до этой площадки. В первом приближении можно записать

$$- \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_t = W|_{t+\tau} = \left(W + \tau \frac{\partial W}{\partial t} \right) \Big|_t$$

и получить тем самым уравнение (2). Переписав (2) в виде

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \frac{W - W_F}{\tau},$$

можно трактовать его как уравнение для релаксации теплового потока к своему квазиравновесному значению, определяемому законом Фурье.

В последнее время интерес к уравнению (2) возрос в связи с тем, что было предложено применять его и для описания электронной теплопроводности горячей плазмы [13—16]. Следует подчеркнуть, что при этом уравнение (2) становится нелинейным, так как τ и κ зависят от состояния среды. Например, для полностью ионизованной плазмы можно упрощенно полагать $\kappa \sim T^{5/2}$, $\tau \sim T^{3/2}$ [13—17].

Ниже исследуются свойства математической модели теплопереноса, опирающейся на уравнение (2), изучается теплоперенос в неподвижной однородной (полагаем $\rho \equiv 1$, $C_V = \text{const}$) среде, описываемой системой уравнений:

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\tau \frac{\partial W}{\partial t} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x} + W = 0. \quad (4)$$

3°. При $\kappa = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ система (3), (4) сводится к уравнению

$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\kappa}{C_V} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

известному как частный случай так называемого «телеграфного уравнения» и имеющему специальное название «гиперболическое уравнение теплопроводности» [12, 18]. При произвольной зависимости κ и τ от температуры необходимо решать систему (3), (4), которая является системой гиперболического типа. Уравнения характеристик для нее имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \pm c_1, \quad c_1 = \sqrt{\kappa / (C_V \tau)}. \quad (6)$$

Величина c_1 имеет смысл скорости распространения тепла [5, 6, 12, 18]. Если $\kappa = \kappa_0 T^a$, $\tau = \tau_0 T^{a_1}$, то $c_1 = \sqrt{\kappa_0 / (C_V \tau_0)} T^{(a-a_1)/2}$, и в силу зависимости локального наклона характеристик от температуры характеристики одного семейства могут пересекаться. Следовательно, процессу теплопереноса могут сопутствовать явления типа ударных волн в газовой динамике, т. е. скачки температуры и теплового потока.

4°. Запишем некоторые решения системы уравнений (3), (4) при постоянных κ и τ . Исследованию (3), (4) в этом случае посвящено много работ (см., например, [4—8, 10—12, 18—20] и библиографию в них). Для решения линейного уравнения (5), к которому сводится данная система, применимы классические методы уравнений математической физики [21], и иногда его даже можно решить точно.

а) Решение задачи о мгновенном плоском источнике тепла (в момент времени $t=0$ в плоскости $x=0$ на единице площади выделяется энергия $E_0 = C_V Q_0$; $T(x, 0) = 0$ при $x \neq 0$) имеет вид [8]

$$T(x, t) = Q_0 \sqrt{\frac{C_V}{2\kappa\tau}} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) I_0\left(\sqrt{\frac{t^2}{\tau^2} - \frac{C_V}{\kappa\tau} x^2}\right) H(c_1 t - x), \quad (7)$$

где $H(z)$ — единичная ступенчатая функция Хевисайда ($H(z) = 0$ при $z < 0$, $H(z) = 1$ при $z \geq 0$); I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В отличие от решения аналогичной задачи для обычного уравнения теплопроводности ($\tau = 0$), имеющего вид [21]:

$$T(x, t) = Q_0 \sqrt{\frac{C_V}{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{C_V x^2}{4\kappa t}\right), \quad (8)$$

температура, согласно формуле (7), равна нулю при $x > c_1 t$, тепло распространяется с конечной скоростью c_1 , на фронте тепловой волны происходит разрыв температуры. При малых временах поведение решений обычного (8) и гиперболического (7) уравнений теплопроводности различается самым существенным образом. В то же время при $t \rightarrow \infty$ асимптотики выражений (7) и (8) совпадают, в чем нетрудно убедиться, используя асимптотическое представление функции I_0 , справедливое при больших значениях аргумента

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi z} e^z (1 + O(1/z)).$$

б) Рассмотрим задачу об эволюции начального распределения температуры и теплового потока в теплоизолированной области конечных размеров. Будем считать, что на отрезке $0 \leq x \leq l$ распространение тепла описывается системой (3), (4); начальные условия даны в виде

$$T(x, 0) = T_0(x); W(x, 0) = W_0(x); 0 \leq x \leq l, \quad (9)$$

граничные — $W(0, t) = W(l, t) = 0$. Решение задачи, полученное методом разделения переменных, записывается следующим образом:

$$T(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \exp(S_n^+ t) \cos \frac{\pi n x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \exp(S_n^- t) \cos \frac{\pi n x}{l},$$

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ \exp(S_n^+ t) \sin \frac{\pi n x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- \exp(S_n^- t) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где

$$S_n^{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \frac{1}{2\tau} \sqrt{1 - 4\tau\pi^2\kappa n^2 / (l^2 C_V)},$$

а коэффициенты рядов a_n^{\pm} и b_n^{\pm} однозначно определяются начальными данными (9).

Отметим некоторые особенности построенного решения.

1) При $\tau \rightarrow 0$ $S_n^- \rightarrow -\infty$, а S_n^+ стремятся к соответствующим декрементам затухания для параболического уравнения; $S_n^+ \rightarrow -\lambda_n$, $\lambda_n = \kappa^2 \pi^2 n^2 / (l^2 C_V)$ (см., например, [21]).

2) Для любого набора значений κ , τ , C_V , l найдется такой номер N , что любая гармоника с номером $n \geq N$ будет испытывать осцилляции во времени, $\text{Im}(S_n^{\pm}) \neq 0$. При этом сами по себе эти гармоники будут затухать пропорционально $\exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$, так как для них $\text{Re}(S_n^{\pm}) = -1/(2\tau)$.

3) При заданных κ , C_V , l существует «критическое» значение $\tau = \tau_*$. При $\tau > \tau_*$ все гармоники, начиная с первой, испытывают осцилляции во времени. «Критическое» значение времени релаксации теплового потока равно

$$\tau_* = C_V l^2 / (4\pi^2 \kappa)$$

и уменьшается вместе с длиной области l . При $\tau > \tau_*$ решение представляет собой суперпозицию колебаний, затухающих пропорционально $\exp(-t/(2\tau))$.

4) Если $\tau < \tau_*$, то по крайней мере первая гармоника не испытывает осцилляций во времени. При этом самая медленно затухающая гармоника та, которой при $n=1$ соответствует знак (+) перед корнем. При $t \rightarrow \infty$ решение выходит на регулярный режим

$$W(x, t) \simeq \tilde{W}_0 \exp \left[\left(-\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau} \sqrt{1 - 4\tau\pi^2\kappa / (l^2 C_V)} \right) t \right] \sin(\pi x / l),$$

$$T(x, t) \simeq \frac{1}{l} \int_0^l T_0(x) dx + \frac{l}{2\pi\kappa} \tilde{W}_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\tau\pi^2\kappa}{l^2 C_V}} \right) \times \\ \times \cos \frac{\pi x}{l} \exp \left[\left(-\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau} \sqrt{1 - \frac{4\tau\pi^2\kappa}{l^2 C_V}} \right) t \right].$$

5) Выясним физический смысл неравенства

$$\tau < \tau_* = \frac{C_V l^2}{4\pi^2 \kappa}. \quad (10)$$

С учетом выражения (6) для скорости распространения тепла c_1 неравенство (10) можно переписать в виде

$$c_1 \tau < l/(2\pi). \quad (11)$$

Поскольку время релаксации τ порядка времени свободного пробега частиц в веществе, а скорость распространения тепла c_1 порядка средней тепловой скорости, в левой части неравенства (11) стоит величина порядка длины свободного пробега L . Тем самым неравенство (10) означает $L \lesssim l/2\pi$.

5°. Система уравнений (3), (4), вообще говоря, допускает существование таких решений, где $\text{sign } W = \text{sign}(\partial T/\partial x)$, поток тепла направлен в сторону увеличения температуры. Оказывается, учет релаксации теплового потока приводит к изменению основного неравенства термодинамики необратимых процессов для выражения производства энтропии σ :

$$\sigma = W \text{grad} (1/T) \geq 0. \quad (12)$$

В работе [22] неравенство (12) было заменено более общим:

$$\sigma = \left(W + \tau \frac{\partial W}{\partial t} \right) \text{grad} (1/T) \geq 0.$$

Поэтому при описании теплопереноса системой (3), (4) нарушения второго начала термодинамики не происходит, как это может показаться на первый взгляд.

6°. Положим теперь $\kappa = \kappa_0 T^a$, $\tau = \tau_0 T^{a_1}$, $C_V = \text{const}$ и будем искать решения уже квазилинейной системы (3), (4) в виде бегущей волны, распространяющейся по постоянному фону. Очевидно, предполагаемый постоянный фон должен характеризоваться некоторым значением $T = T_0$ и нулевым значением W .

Вводя независимую переменную $\xi = x - Dt$, где $D = \text{const}$ — скорость бегущей волны, получаем, что искомые решения должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-C_V D \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{dW}{d\xi} = 0, \quad (13)$$

$$-D\tau_0 T^{a_1} \frac{dW}{d\xi} + \kappa_0 T^a \frac{dT}{d\xi} + W = 0. \quad (14)$$

Интеграл уравнения (13) с учетом значений на фоне запишем в виде

$$W = C_V D (T - T_0). \quad (15)$$

Подставив (15) в (14), сведем систему к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dT}{d\xi} \frac{C_V D^2 \tau_0 T^{a_1} - \kappa_0 T^a}{C_V D (T - T_0)} = 1. \quad (16)$$

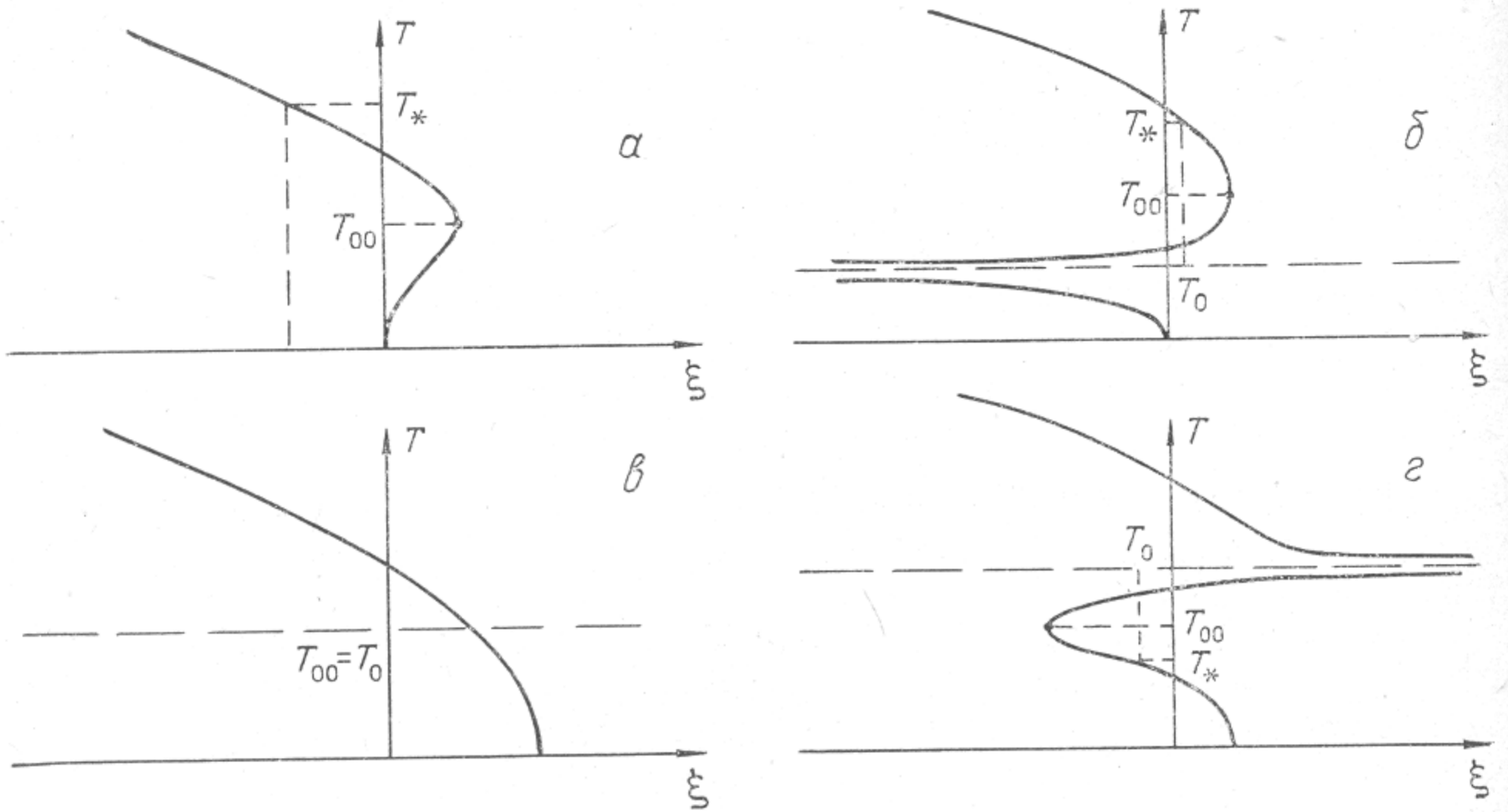
Не исследуя подробно всех возможных значений параметров, остановимся на случае, соответствующем полностью ионизованной плазме ($a = 5/2$, $a_1 = 3/2$). При этом решение уравнения (16) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi - \xi_0 = & -\frac{2}{5} \frac{\kappa_0}{C_V D} T^{5/2} + \frac{\kappa_0}{C_V D} \left(\frac{C_V D^2 \tau_0}{\kappa_0} - T_0 \right) \times \\ & \times \left[\frac{2}{3} T^{3/2} + 2T_0 T^{1/2} + T_0^{3/2} \ln \left| \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T_0}}{\sqrt{T} + \sqrt{T_0}} \right| \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Появление свободного параметра ξ_0 обусловлено инвариантностью уравнений (13), (14) относительно преобразования $\xi' = \xi - \xi_0$. Произвол, свя-

занный с выбором ξ_0 , может быть устранен заданием начального (при $t=0$) положения искомой бегущей волны.

7°. Качественный характер зависимости (17) определяется соотношением между T_0 и значением комбинации определяющих параметров $T_{00} = C_V D^2 \tau_0 / \kappa_0$ или, другими словами, соотношением между скоростью бегущей волны D и скоростью распространения тепла по фону $c_1|_{T=T_0} = \sqrt{\kappa_0 T_0 / C_V \tau_0}$. На рисунке изображены интегральные кривые для случаев а $T_0 = 0$ ($c_1 = 0$), б $0 < T_0 < T_{00}$ ($0 < c_1 < D$), в $T_0 = T_{00}$ ($c_1 = D$) и г $T_0 > T_{00}$ ($c_1 > D$). Соответствующие семейства получаются переносом изображенных кривых параллельно оси $O\xi$.



Качественный характер интегральных кривых (17) в случае а — $T_0 = 0$ ($c_1 = 0$); б — $0 < T_0 < T_{00}$ ($0 < c_1 < D$); в — $T_0 = T_{00}$ ($c_1 = D$); г — $T_0 > T_{00}$ ($c_1 > D$)

Принимая во внимание зависимость $\xi = x - Dt$, легко видеть, что некоему физическому процессу во времени (t возрастает) могут соответствовать точки интегральных кривых, прослеживаемые при убывании значения ξ . В общем случае невозможен непрерывный переход с фона на интегральную кривую, и допустимые решения типа бегущих волн следует искать в классе разрывных функций, составленных из отдельных участков интегральных кривых со скачкообразным переходом на фон.

8°. Для получения условий, которым должно удовлетворять на разрыве искомое решение, перепишем систему (3), (4) в консервативном [23] виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{W}{C_V} \right) = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\kappa_0}{\tau_0} \frac{T^{a-a_1+1}}{a-a_1+1} \right) = - \frac{W}{\tau_0 T^{a_1}}.$$

Интегрируя полученные уравнения по малой, сжимающейся до нулевого объема области изменения независимых переменных (x, t), включающей в себя линию разрыва, получаем при $a = 5/2$, $a_1 = 3/2$ в качестве аналогов условий Гюгонио следующие соотношения:

$$W_* = C_V D (T_* - T_0), \quad (18)$$

$$T_* = 2C_V D^2 \tau_0 / \kappa_0 - T_0 \quad \text{или} \quad T_* - T_0 = 2(C_V D^2 \tau_0 / \kappa_0 - T_0). \quad (19)$$

При произвольных a и a_1 вместо (19) получается условие

$$T_*^{a-a_1+1} - T_0^{a-a_1+1} = \tau_0 C_V D^2 (a - a_1 + 1) \kappa_0^{-1} (T_* - T_0).$$

Здесь D — скорость распространения разрыва. Для решения типа бегущей волны она, естественно, совпадает со скоростью движения волны,

поэтому для нее использовано то же обозначение; T_0 — значение температуры справа от разрыва — температура невозмущенного фона, звездочкой отмечены значения искомых функций «за скачком» — слева от разрыва.

В связи с изложенным выше нельзя не отметить, что в статье [24], где также исследуется система уравнений (3), (4) для значений параметров, соответствующих электронной теплопроводности горячей плазмы, при нахождении автомодельных решений, зависящих от одной переменной вида $\xi = x/(1-at)$, допущены ошибки. В построенных там решениях разрыв терпит только температура, а тепловой поток на фронте тепловой волны остается непрерывным.

Соотношение (19) однозначным образом по заданным параметрам определяет температуру за скачком, а тем самым и положение разрыва, что можно видеть на рисунке.

Заметим, что, когда $c_1 < D$ (или $T_0 > T_{00} = C_V D^2 \tau_0 / \kappa_0$) (см. рисунок, *г*), соотношение (19) либо «уводит» температуру в область отрицательных значений, либо «помещает» значение T_* на самую нижнюю ветвь $T < T_{00}$ интегральной кривой, с которой связано метастабильное решение. В этом случае решения задачи в рассматриваемом классе функций (с разрывом) не существует, но существует непрерывное решение, асимптотически стремящееся к фону при $\xi \rightarrow \infty$, изображенное на рисунке, *г*, — верхняя кривая, целиком расположенная в области $T > T_0$.

При $c_1 \geq D$ или $T_0 \leq T_{00}$ решение, как уже сказано, определяется однозначным образом, причем, когда $c_1 \rightarrow D$ ($T_0 \rightarrow T_{00}$), разрывное решение переходит в непрерывное, как следует из формул (18), (19).

Анализ поведения характеристик в окрестности разрыва, а также прямые численные расчеты на ЭВМ системы уравнений (3), (4) с соответствующими начальными и граничными условиями показывают эволюционный характер построенного решения.

Обозначения

x — пространственная координата; t — время; T — температура; W — поток тепла; W_F — поток тепла, вычисляемый по закону Фурье; κ — коэффициент теплопроводности; τ — время релаксации теплового потока; ρ — плотность; C_V — удельная теплоемкость; c_1 — характеристическая скорость распространения тепла; D — скорость движения бегущей волны.

Nomenclature

x , space coordinate; t , time; T , temperature; W , heat flux; W_F , heat flux calculated by the Fourier law; κ , thermal conductivity; τ , relaxation time of heat flux; ρ , density; C_V , specific heat capacity; c_1 , characteristic heat propagation velocity; D , velocity of a running wave.

Figure Caption

Qualitative behaviour of integral curves (17).

Summary

Some solutions are built for a hyperbolic system of equations describing heat transfer in a fixed homogeneous medium with finite relaxation time of heat flux. Nonlinear dependence of the thermal conductivity and relaxation time of heat flux on temperature is taken into account. For the running wave-type processes the process pattern considerably depends on the relationship between the running wave velocity and the velocity of heat propagation against the background.

Литература

1. Афанасьев Ю. В., Гамалий Е. Г., Розанов В. Б. Основные уравнения динамики и кинетики лазерной плазмы.— В кн.: Теория нагрева и сжатия низкоэнтропийных термоядерных мишеней (Тр. ФИАН, т. 134).— М.: Наука, 1982, с. 10—31.

2. **Волосевич П. П., Косарев В. И., Леванов Е. И.** Об учете ограничения теплового потока в численном эксперименте: Препринт № 21.—М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1978.—22 с.
3. **Maxwell J. C.** On the Dynamical Theory of Gases.—Phylos. Trans. Roy. Soc., 1867, vol. 157, p. 49—88.
4. **Осокин А. Е., Суворова Ю. В.** Некоторые задачи теплопроводности для наследственно-упругих материалов.—Изв. АН СССР. Машиноведение, 1983, № 1, с. 87—92.
5. **Vernotte P.** Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur.—Comptes rendus, 1958, t. 246, N 22, p. 3154—3155.
6. **Cattaneo C.** Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantée.—Comptes rendus, 1958, t. 247, N 4, p. 431—433.
7. **Хонькин А. Д.** Об уравнениях гидродинамики быстрых процессов.—Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 5, с. 1033—1035.
8. **Хонькин А. Д.** О парадоксе бесконечной скорости распространения возмущений в гидродинамике вязкой теплопроводной среды и уравнениях гидродинамики быстрых процессов.—В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976, с. 289—299.
9. **Гутфельд Р.** Распространение тепловых импульсов.—В кн.: Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. Т. 5.—М.: Мир, 1973, с. 267—329.
10. **Бубнов В. А.** Замечания к волновым уравнениям теории теплопроводности.—В кн.: Проблема тепло- и массопереноса. Минск: Наука и техника, 1976, с. 168—175.
11. **Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.** Обобщенная термомеханика.—Киев: Наукова думка, 1976.—312 с.
12. **Лыков А. В.** Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена.—ИФЖ, 1965, т. 9, № 3, с. 287—304.
13. **Moses G. A., Duderstadt J.** Improved treatment of electron thermal conduction in plasma hydrodynamics calculations.—Phys. Fluids, 1977, vol. 20, N 5, p. 762—770.
14. **Choi S. H., Wilhelm H. E.** Similarity transformations for explosions in two-component plasmas with thermal energy and heat-flux relaxation.—Phys. Rev. A., 1976, vol. 14, N 5, p. 1825—1834.
15. **Okada T., Yabe T., Niu K.** Thermal flux reduction by electromagnetic instabilities.—J. of Plasma Physics, 1978, vol. 20, N 3, p. 405—417.
16. **Косарев В. И., Леванов Е. И., Сотский Е. Н.** Об одном способе описания процесса электронной теплопроводности в высокотемпературной плазме: Препринт № 142.—М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981.—25 с.
17. **Леванов Е. И., Сотский Е. Н.** Ограничение теплового потока и способы его учета в численном эксперименте.—В кн.: Математические модели в теории тепло- и массообмена (Материалы междунар. школы-семинара).—Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова АН БССР, 1982, с. 84—89.
18. **Лыков А. В.** Теплообмен: Справочник.—М.: Энергия, 1978.—480 с.
19. **Баумейстер К., Хамилл Т.** Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле.—Теплопередача, 1969, № 4, с. 112—119.
20. **Ленюк М. П.** О волновом уравнении теплопроводности.—Укр. мат. журн., 1972, т. 24, № 6, с. 832—838.
21. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения мат. физики.—М.: Наука, 1972.—736 с.
22. **Lambermont J., Lebon G.** On a generalisation of the Gibbs equation for heat conduction.—Physics Letters, 1973, vol. 42A, N 7, p. 499—500.
23. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений.—М.: Наука, 1978.—688 с.
24. **Feshner W. B., Mayer F. L.** Analysis of flux-relaxed electron heat waves.—Phys. Fluids, 1984, vol. 27, N 6, p. 1538—1544.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
АН СССР, г. Москва

01.02.85.

УДК 517.9

В. И. Власов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЛУНОЧНОЙ ОБЛАСТИ

Дано решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в луночной области; к ней сводятся некоторые стационарные задачи теплопроводности, электростатики, теории упругости.

1. Пусть g (рис. 1) представляет собой луночную область на комплексной плоскости w :

$$g = \{w : |w| < R; |w - O_1| > \eta\},$$