

Министерство образования и науки Российской Федерации
—
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

П. А. Жилин

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

П. А. Жилин

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2015

УДК 531(075.8)
ББК 22.251я73
Ж72

Жилин П. А. **Динамика твердого тела**: учеб. пособие / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015. — 640 с.

Пособие соответствует содержанию направлений магистерской подготовки 010800 “Механика и математическое моделирование” и 010900 “Прикладная математика и физика”.

Динамика абсолютно твердого тела изложена на языке прямого тензорного исчисления. Разработан математический аппарат описания спинорных (вращательных) движений, основанный на использовании тензора поворота и связанных с ним понятий. Представлены оригинальные решения классических задач. Предложен ряд новых моделей: квазитвердое тело, твердотельный осциллятор, гиростат на упругом основании. Рассмотрена задача о вращении твердого тела на инерционном упругом стержне, имеющая непосредственное отношение к проблеме создания высокооборотных центрифуг.

Предназначено для студентов физико-математических и технических специальностей, а также аспирантов и преподавателей, деятельность которых связана с вопросами механики.

Библиогр.: 115 назв.

Редакционная коллегия:

Доктор физико-математических наук Е. А. Иванова
(главный редактор и составитель),
кандидат физико-математических наук Е. Н. Вильчевская,
доктор физико-математических наук А. М. Кривцов,
кандидат физико-математических наук В. А. Кузькин,
кандидат физико-математических наук Е. А. Подольская

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

© Жилина О. П., 2015

© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2015

ISBN 978-5-7422-4857-6

Оглавление

От редколлегии	11
Введение	18
Глава 1. Векторы и тензоры второго ранга	29
1.1. Тензорные величины в механике и физике.....	29
1.2. Системы отсчета и системы координат. Движения	31
1.3. Скаляры, или тензоры нулевого ранга	40
1.4. Полярные и аксиальные векторы	41
1.5. Основные операции с векторами.....	46
1.6. Базис. Взаимный базис. Замена базиса	50
1.7. Скалярные функции векторного аргумента	59
1.8. Необходимость введения тензоров второго ранга	63
1.9. Прямое произведение векторных пространств.....	66
1.10. Тензорное произведение векторных пространств.....	68
1.11. Операции с тензорами второго ранга	70
1.12. Симметричные и антисимметричные тензоры.....	74
1.13. Координаты тензора второго ранга	80
1.14. Линейные функции векторов и тензоры второго ранга.....	82
1.15. Ортогональные тензоры.....	85
1.16. Тензоры поворота. Теорема Эйлера	91
1.17. Правило квазикоммутативности поворотов	96
Глава 2. Кинематика спинорных движений	99
2.1. Трансляционные и спинорные движения.....	99
2.2. Абсолютно твердое тело.....	100
2.3. Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела.....	103
2.4. Тензор поворота и вектор поворота	111
2.5. Вектор малого поворота.....	116
2.6. Неоднозначность суждений о векторе поворота	117

2.7. Теорема о представлении тензора поворота.....	119
2.8. Угловая скорость	124
2.9. Тензор спина и вектор угловой скорости	126
2.10. Определение поворота по угловой скорости. Задача Дарбу	130
2.11. Вращение вокруг фиксированной оси	134
2.12. Связь угловой скорости с вектором поворота.....	137
2.13. Угловая скорость композиции поворотов	142
2.14. Скорости и ускорения точек твердого тела	148
2.15. Шарнир Гука	151
2.16. Сложные движения материальной точки и абсолютно твердого тела.....	157
2.17. Относительные повороты.....	163
2.18. Замена систем отсчета	165
2.19. Принцип материальной объективности.....	173
Глава 3. Фундаментальные законы рациональной механики	184
3.1. Пространство, время, движения	184
3.1.1. Тела отсчета. Время. Системы отсчета.....	184
3.1.2. Принцип инерции Галилея. Инерциальные тела отсчета	187
3.1.3. Математическое время. Тарировка часов по Галилею.....	189
3.1.4. Инерциальные системы отсчета.....	192
3.2. Тела и их динамические структуры.....	193
3.2.1. Тела-точки и их размерность.....	193
3.2.2. Закрытые и открытые тела. Динамические структуры тел	199
3.3. Воздействия	203
3.3.1. Силы и моменты	203
3.3.2. Условия равновесия абсолютно твердого тела.....	207
3.4. Полная энергия и внутренняя энергия	208
3.5. Фундаментальные законы механики.....	212
3.5.1. Уравнение баланса количества движения.....	213
3.5.2. Уравнение баланса кинетического момента.....	223
3.5.3. Первое и второе начала термодинамики.....	233
Глава 4. Классическая модель твердого тела и модель ква- зитвердого тела	244
4.1. Классическая модель абсолютно твердого тела.....	244

4.2.	Квазитвердое тело и его динамические структуры	248
4.3.	Тензоры инерции твердого тела и их свойства	256
4.4.	Теория симметрии и вычисление тензоров инерции твердых тел	264
4.5.	Динамические уравнения Эйлера	276
Глава 5.	Движение динамически симметричного твердого тела	281
5.1.	Свободные вращения твердого тела: случай Эйлера	281
5.2.	Движение твердого тела в центральном поле тяготения	285
5.3.	Реакция в опоре свободно вращающегося тела	288
5.4.	Быстро вращающийся гироскоп	289
5.5.	Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки: случай Лагранжа	297
5.5.1.	Общая постановка задачи	297
5.5.2.	Формальное решение задачи Лагранжа	299
5.5.3.	Регулярная прецессия	302
5.5.4.	Обсуждение формального решения	303
5.6.	Качение тяжелого конуса по плоскости без трения	307
5.7.	Движение гантели по плоскости без трения: качение с верчением	312
Глава 6.	Свободное вращение несимметричного твердого тела: случай Эйлера–Пуансо	316
6.1.	Постановка задачи	316
6.2.	Перманентные вращения твердого тела	318
6.3.	Новый метод исследования свободного вращения несим- метричного твердого тела	319
6.4.	Преобразование интеграла энергии	321
6.5.	Решения задачи для трех типов вращения тела	322
6.5.1.	Первый тип вращения тела	322
6.5.2.	Второй тип вращения тела	325
6.5.3.	Третий тип вращения тела	332
6.5.4.	Обсуждение результатов	334
6.6.	Сравнение с классическим решением	335
6.7.	Заключительные замечания	340
Глава 7.	Твердотельный осциллятор	342
7.1.	Твердотельный осциллятор в механике и физике	342
7.2.	Консервативный момент	343
7.3.	Метод возмущений на множестве тензоров поворота	348

7.4.	Уравнения движения твердотельного осциллятора	350
7.5.	Простейшая модель твердотельного осциллятора	355
7.5.1.	Классический подход, основанный на углах Эйлера	356
7.5.2.	Подход, основанный на использовании вектора поворота	357
7.5.3.	Сравнение двух методов решения задачи	361
7.5.4.	Регулярная прецессия твердотельного осциллятора.....	362
7.6.	Равновесные положения тела при действии крутяще- го момента.....	364
7.6.1.	Натуральная равновесная конфигурация	365
7.6.2.	Мертвый момент	366
7.6.3.	Касательный (следающий) момент	367
7.6.4.	Полукасательный момент	367
7.6.5.	Консервативный момент 1	368
7.6.6.	Консервативный момент 2	368
7.7.	Устойчивость в линейном приближении. Парадокс Николаи	369
7.7.1.	Устойчивость натурального состояния	371
7.7.2.	Мертвый момент	371
7.7.3.	Касательный (следающий) момент	373
7.7.4.	Полукасательный момент	374
7.7.5.	Консервативный момент 1	375
7.7.6.	Консервативный момент 2	376
7.7.7.	Обсуждение результатов	377
7.8.	Нелинейный анализ движения твердотельного осцил- лятора при действии внешнего момента.....	379
Глава 8.	Многоспиновый твердотельный осциллятор	384
8.1.	Уравнения движения двухроторного гиростата на нелинейно упругом основании.....	384
8.1.1.	Тензоры инерции. Кинетический момент двух- роторного гиростата.....	385
8.1.2.	Уравнения движения гиростата.....	388
8.1.3.	Уравнения движения роторов.....	390
8.1.4.	Полная система уравнений движения двухро- торного гиростата на упругом основании	392
8.1.5.	Уравнения движения двухроторного гиросста- та при малых поворотах несущего тела.....	393
8.2.	Динамика однороторного гиростата на упругом основании	394

8.2.1.	Уравнения движения однороторного гиростата с трансверсально-изотропным тензором инерции.....	395
8.2.2.	Крутильно-вращательные движения гиростата.....	396
8.2.3.	Устойчивость стационарных вращений ротора гиростата на упругом основании.....	399
8.2.4.	Движения гиростата с неуравновешенным ротором при малых углах поворота несущего тела.....	400
8.2.5.	Определение углов Эйлера	404
8.2.6.	Движения гиростата на упругом основании при малых поворотах несущего тела с произвольным тензором инерции.....	413
8.3.	Динамика двухроторного гиростата на упругом основании	418
8.3.1.	Основные уравнения при соосных роторах.....	418
8.3.2.	Двухроторный гиростат с шаровым тензором инерции на изотропном упругом основании	419
8.3.3.	Регулярная прецессия гиростата на упругом основании и ее устойчивость.....	420
8.3.4.	Динамика двухроторного гиростата на упругом основании при действии внешнего следящего момента	425

Глава 9. Нелинейные задачи теории стержней **429**

9.1.	Основные уравнения нелинейной теории стержней.....	429
9.2.	Равновесие консольного стержня, нагруженного мертвым моментом	436
9.3.	Условия потенциальности внешних воздействий	440
9.4.	Прямолинейные равновесные конфигурации консольного стержня.....	444
9.4.1.	Нагружение мертвым моментом.....	445
9.4.2.	Нагружение следящим моментом	446
9.4.3.	Нагружение полукасательным моментом	446
9.4.4.	Нагружение потенциальным моментом	447
9.5.	Нерастяжимый гибкий стержень	448
9.6.	Нагружение стержня мертвой силой (эластика Эйлера).....	452
9.7.	Нагружение стержня следящей силой	455
9.8.	Нагружение стержня мертвой силой и следящим моментом.....	456
9.9.	Стационарные вращения в эластике Эйлера	458

9.10. Динамика скрученного стержня. Парадокс Николаи	463
9.10.1. Историческая справка.....	463
9.10.2. Постановка задачи	464
9.10.3. Решение статической задачи.....	465
9.10.4. Малые колебания скрученного стержня.....	465
Глава 10. Вращение твердого тела на безынерционном	
гибком стержне	471
10.1. Вводные замечания	471
10.2. Постановка задачи и основные уравнения.....	472
10.3. Стационарное вращение твердого тела.....	475
10.4. Анализ устойчивости стационарного вращения твер-	
дого тела на гибком стержне	477
10.4.1. Уравнения в вариациях.....	477
10.4.2. Анализ устойчивости при отсутствии внешне-	
го момента.....	479
10.4.3. Вывод разрешающего уравнения при действии	
внешнего момента	480
10.4.4. Анализ устойчивости стационарных вращений	
при действии малого следящего момента	483
Глава 11. Вращение твердого тела на инерционном упругом ос-	
новании	487
11.1. Вращение твердого тела на инерционном стержне.....	487
11.1.1. Постановка задачи	488
11.1.2. Линеаризация основных уравнений	490
11.1.3. Вывод основного (разрешающего) уравнения.....	492
11.1.4. Упрощение разрешающего уравнения	495
11.1.5. Определение углов прецессии и собственного вращения	497
11.2. Движение твердого тела на инерционной пластине.....	498
11.2.1. Сводка основных уравнений линейной теории пластин....	499
11.2.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки	499
11.2.3. Движение твердого тела, не имеющего непо-	
движных точек.....	504
Глава 12. Мультиполярные среды	507
12.1. Многоспиновые частицы	507
12.1.1. Кинематика многоспиновых частиц.....	507

12.1.2. Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент многоспиновой частицы.....	509
12.1.3. Фундаментальные законы механики для мно- госпиновых частиц	511
12.2. Пространственное описание кинематики полярной среды.....	517
12.3. Динамика сред, состоящих из многоспиновых частиц.....	525
12.3.1. Интегральная и локальная формы закона со- хранения частиц.....	525
12.3.2. Интегральная и локальная формы первого за- кона динамики	526
12.3.3. Интегральная и локальная формы второго за- кона динамики	527
12.3.4. Интегральная и локальная формы уравнения баланса энергии.....	528
12.3.5. Приведенное неравенство диссипации энергии.....	529
12.4. Полярная среда и основные уравнения квантовой механики	531
12.4.1. Уравнения динамики полярной среды специ- ального вида.....	531
12.4.2. Метафизические представления о строении физического мира	535
12.4.3. Квантово-механические аналогии	537
12.5. Мультиполярная среда и электродинамика Максвелла.....	542
12.5.1. Механика и электромагнетизм.....	542
12.5.2. Классическая электродинамика Максвелла.....	546
12.5.3. Общая нелинейная теория электромагнитного поля	550
Библиографический список	558
Приложения	565
Приложение А. Основные кинематические соотношения и тен- зорные тождества	565
А.1. Произвольные векторы и тензоры второго ранга.....	565
А.2. Антисимметричные тензоры \mathbf{S}	566
А.3. Симметричные тензоры $\mathbf{\Theta}$	566
А.4. Ортогональные тензоры \mathbf{Q}	567
А.5. Тензор поворота \mathbf{P}	567
А.6. Тензоры спина и угловые скорости.....	568
А.7. Тензор-интегратор \mathbf{Z} и вектор поворота $\mathbf{\theta}$	569

Приложение В. О парадоксе Николаи	570
В.1. Вводные замечания	570
В.2. Стационарные движения стержня и моментные нагрузки	571
В.3. Твердое тело на упругом основании и моментные нагрузки	574
Приложение С. О парадоксе Николаи в консервативных систе- мах	578
С.1. Введение.....	578
С.2. Качественный анализ потенциальной энергии.....	578
С.3. Разложение потенциальной энергии в ряд вблизи по- ложений равновесия	580
С.4. Заключение	582
Приложение Д. Динамика систем с кулоновым трением	583
D.1. Закон трения Кулона	583
D.2. Парадоксы Пэнлеве.....	588
D.3. Задача Пэнлеве	594
D.3.1. Уравнения движения	594
D.3.2. Области движения и застоя.....	596
D.3.3. Схема решения задачи Пэнлеве.....	597
D.3.4. Конкретный случай задачи Пэнлеве.....	600
D.4. Задача Пэнлеве–Клейна.....	602
D.4.1. Традиционный подход.....	602
D.4.2. Альтернативный подход.....	606
D.4.3. Предельный переход к модели абсолютно твер- дого тела	611
D.5. Главная особенность закона Кулона	615
D.6. Мгновенный останов и его физический смысл	620
D.7. Мгновенный останов тел, имеющих конечные разме- ры, при наличии удерживающих контактов	623
D.8. Классическое решение и мгновенный останов как точ- ные пределы решений расширенных задач.....	627
D.8.1. Расширенная модель	628
D.8.2. Модель абсолютно твердого тела.....	631
D.8.3. Расширенная модель с безмассовым каркасом	632
D.8.4. Обсуждение.....	635
D.9. Заключение	638

От редколлегии

Книга Павла Андреевича Жилина существенно отличается от других книг по динамике твердого тела. В этой книге затрагиваются вопросы фундаментального характера, уделяется внимание логическим основам механики, рассматриваются задачи на стыке механики и физики. Обсуждается использование моделей динамики твердого тела при построении микрополярных континуальных теорий¹, предназначенных для описания не только механических, но и физических процессов различной природы, в частности электродинамических процессов.

Вместе с тем книга содержит изложение теоретических вопросов и задач, традиционно относящихся к области динамики твердого тела. Подробно излагается кинематика твердого тела, представлены различные формы уравнений динамики, обсуждаются вопросы, связанные с вычислением тензоров инерции твердых тел. Представлены классические задачи динамики твердого тела, допускающие полное интегрирование: случай Эйлера, случай Лагранжа, случай Эйлера–Пуансо. Анализируется задача о быстро вращающемся гироскопе. Приведены примеры решения задач о качении твердых тел по плоскости.

Кроме того, в книге представлен целый ряд задач, имеющих непосредственное отношение к инженерной практике. В частности, книга содержит детальный анализ нескольких формулировок задачи о движении твердого тела на упругом основании, а именно рассматриваются задачи об устойчивости положения равновесия и стационарного вращения, анализируется влияние инерционных свойств упругого основания, исследуется нестационарный режим движения. Результаты данных исследований важны для расчета и проектирования инженерных конструкций с быстро вращающимися деталями, в частности центрифуг и ультрацентрифуг.

Математический аппарат, используемый в книге П. А. Жилина, отличается от традиционного для динамики твердого тела. Обычно при решении задач

¹ Микрополярный континуум — это модель сплошной среды с независимыми полями перемещений и поворотов.

динамики твердого тела применяются кватернионные и матричные методы. Данная книга написана на языке прямого тензорного исчисления — языке, который получил широкое распространение в механике сплошных сред. Такой выбор математического аппарата не случаен. Будучи ученым с исключительно широким кругом интересов, П. А. Жилин не ограничивал свои исследования в области динамики твердого тела решением конкретных задач. Он видел в динамике твердого тела науку, в которой должны возникать и развиваться базовые модели, лежащие в основе современной физики и микрополярных континуальных теорий. Две такие модели, созданные П. А. Жилиным, — твердотельный осциллятор и многоспиновый твердотельный осциллятор — представлены в книге. Поскольку в механике сплошных сред нет альтернативы тензорным методам, при построении континуальных теорий представляют интерес только те базовые математические модели, которые написаны на языке тензорного исчисления. На протяжении нескольких лет развитие тензорных методов применительно к описанию спиновых (вращательных) движений было приоритетным направлением научной деятельности П. А. Жилина.

Работы П. А. Жилина по динамике твердого тела являются частью его научного наследия, которое содержит в том числе работы по механике тонкостенных конструкций, общей теории неупругих сред, фазовым переходам, пьезоупругости, ферромагнетизму, теории симметрии и теории инвариантов тензорных величин. Одной из главных своих задач Павел Андреевич Жилин считал расширение области применения механики и описание явлений, изучаемых в различных областях естествознания, с единых рациональных позиций, присущих механике. Приведем цитату, которая хорошо отражает представление П. А. Жилина о месте и роли механики в современном естествознании: *“Механика, как наука, — это не теория каких бы то ни было явлений Природы. Механика — это метод исследования Природы. Мнение о том, что механика имеет ограниченную область применимости, основано, главным образом, на ее фактической неспособности в настоящее время описать целый ряд явлений, известных в экспериментальной физике. Тем не менее никто не доказал, что механика принципиально не способна описать эти явления”*². Главную причину сложившейся ситуации П. А. Жилин видел в том, что все попытки описать с точки зрения механики известные в экспе-

² Цитата из рукописи П. А. Жилина “Построение модели электромагнитного поля с позиций рациональной механики”. Рукопись была положена в основу шестой главы книги [1]. Оригинальный текст рукописи, без редакторской правки и с сохранением всех авторских обозначений, опубликован в журнале “Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии”. 2013, Т. 5, № 1. С. 77–97.

риментальной физике явления базировались на механике Ньютона (механике материальных точек), в которой исследуется только одна форма движений — трансляционные движения. П. А. Жилин был глубоко убежден в том, что при описании явлений в микромире огромное значение приобретает учет спиновых движений, при которых точечное тело меняет свою ориентацию в пространстве, хотя его положение в пространстве может оставаться неизменным. Именно этим обстоятельством объясняется огромное значение, которое придавал П. А. Жилин моделям твердотельного осциллятора и многоспинового твердотельного осциллятора.

Книга П. А. Жилина многоплановая и адресована широкому кругу читателей. С одной стороны, она доступна студентам младших курсов, поскольку первые три главы по сути являются вводными и содержат все основные понятия и формулы, необходимые для понимания материала последующих глав. С другой стороны, книга в значительной степени основана на научных результатах автора, и поэтому даже специалисты по динамике твердого тела смогут найти в ней много нового и интересного. Книга, безусловно, будет полезна инженерам, которым необходимо решать задачи совместной динамики абсолютно твердых тел и тел с распределенными параметрами (континуальных тел). Трудно переоценить значение книги для ученых, занимающихся разработкой новых теорий в континуальной механике и физике. Книга не только содержит новые модели, уже готовые к использованию, она заставляет задуматься о нерешенных проблемах, указывает возможные пути и подходы к их решению, вдохновляет на разработку собственных концепций. Именно такими были лекции Павла Андреевича Жилина — они отличались глубоким проникновением в суть вещей и всегда содержали обсуждение его собственных научных взглядов и убеждений. Павел Андреевич никогда не скрывал существующих научных проблем, а наоборот, старался обратить на них внимание. Павел Андреевич — Ученый, Философ и Учитель в самом высоком понимании этих слов. Даже недолгое общение с Павлом Андреевичем могло изменить мировоззрение человека, а те, кому посчастливилось быть его учениками, навсегда сохраняют в душе тот удивительный взгляд на мир, который позволял Павлу Андреевичу видеть все окружающее с неожиданной, порой парадоксальной стороны, открывать то, что скрыто от обычного взгляда, но поражает своей правильностью и простотой.

К сожалению, П. А. Жилин не успел завершить работу над книгой. Начиная с шестой главы книга составлена из материалов, хранившихся в его личном архиве, и статей, опубликованных в различные годы. Редакционная коллегия постаралась максимально бережно отнестись к авторскому тексту.

Редакторская правка текста заключалась только в исключении повторов и приведении формул к единой системе обозначений. Редакционная коллегия сочла уместным поместить в книгу четыре главы, выходящие за рамки динамики абсолютно твердого тела, но имеющие непосредственное отношение к основному содержанию книги. Речь идет о девятой, десятой, одиннадцатой и двенадцатой главах.

Девятая глава посвящена нелинейной теории стержней. С математической точки зрения задачи статического изгиба стержней очень похожи на задачи динамики твердого тела, и в книге П. А. Жилина эти задачи решаются с помощью одних и тех же методов, основанных на использовании тензора поворота. Существенное различие заключается в том, что задачи динамики твердого тела — это задачи Коши, а задачи статики стержней — это краевые задачи, и их решение может быть не единственным. Обсуждая задачи статики стержней, автор постоянно обращает внимание на сходство и отличие соответствующих задач динамики твердого тела. Данная глава содержит также ряд динамических задач, связанных с исследованием потери устойчивости равновесной конфигурации прямолинейного стержня. В частности, обсуждается знаменитый парадокс Николаи. Эти задачи аналогичны задачам о потере устойчивости стационарного вращения твердого тела на безынерционном упругом основании, которые рассматриваются в седьмой и восьмой главах. Фактически речь идет о решении одних и тех же задач в разных постановках и сравнении результатов.

В десятой главе анализируется задача о вращении твердого тела на гибком безынерционном стержне. Данная задача имеет большое практическое значение, так как моделирует динамическое поведение валов — важнейших элементов многих машин. Задача является классической, и ее исследованию посвящено множество работ. Однако она не потеряла актуальности, поскольку известные теории не всегда находятся в согласии с экспериментальными данными. С точки зрения механической модели задача о вращении твердого тела на гибком безынерционном стержне очень похожа на задачу о движении твердотельного осциллятора. Однако с точки зрения математического описания есть существенное отличие. Уравнения движения твердотельного осциллятора — это в чистом виде уравнения динамики твердого тела. В задаче о вращении твердого тела на гибком безынерционном стержне уравнения динамики твердого тела являются граничными условиями в задаче об изгибе-кручении стержня. Из-за того что стержень считается безынерционным, задача распадается на две независимые задачи, которые решаются последовательно. На первом этапе интегрируются уравнения, описывающие деформацию стержня.

На втором этапе решаются уравнения динамики твердого тела. Однако условия сопряжения твердого тела и стержня имеют такой вид, что использование одинакового математического аппарата (тензорного исчисления) при описании деформации стержня и движения твердого тела существенно упрощает решение данной задачи и делает его более наглядным.

В одиннадцатой главе рассмотрены задачи о нестационарном движении твердого тела на инерционном упругом основании (инерционном стержне и инерционной пластине). Практическая значимость этих задач связана с проектированием и расчетом высокоскоростных центрифуг. Если рабочие угловые скорости ротора центрифуги лежат выше первых собственных частот упругого основания, учет инерционных свойств основания становится принципиально важным, поскольку в режиме разгона и торможения система проходит через несколько резонансов. Подобные инженерные задачи — это уже не задачи динамики твердого тела, а задачи совместной динамики абсолютно твердых и континуальных тел, которые описываются уравнениями в частных производных. Для успешного решения этих задач при описании кинематики твердых тел необходимо применять математический аппарат, который используется в континуальной механике, — аппарат тензорного исчисления. На примере задач, рассмотренных в данной главе, особенно ярко демонстрируется преимущество тензорных методов в динамике твердого тела и необходимость их развития.

В двенадцатой главе представлено несколько моделей континуальной механики, основанных на вращательных степенях свободы и предназначенных для описания электромагнитных процессов и квантово-механических явлений. Во введении и на протяжении всей книги П. А. Жилин неоднократно обращает внимание на важность учета спиновых (вращательных) движений при описании явлений в микромире и на возможность использования для этих целей предложенных им моделей, прежде всего моделей твердотельного осциллятора и многоспинового твердотельного осциллятора. Двенадцатая глава содержит реализацию этих идей.

Книга содержит ряд новых научных результатов, полученных автором, главным образом, в 90-е гг. прошлого века. По мнению редколлегии, в дальнейшем при упоминании этих результатов будет правильно связывать их с именем П. А. Жилина.

Первый результат — это теорема о представлении тензора поворота, на использовании которой основано изложенное в шестой главе решение задачи о свободном вращении несимметричного тела. Данное представление тензора поворота является обобщением представления тензора поворота через углы

Эйлера и содержит последнее как частный случай. Для теоремы, сформулированной и доказанной П. А. Жилиным, уместно название “*теорема Жилина*”.

Второй результат также относится к описанию спинорных движений, а именно речь идет о тензоре, посредством которого связаны между собой вектор угловой скорости и производная от вектора поворота. В тексте книги этот тензор называется тензором-интегратором, однако правильнее его называть *тензором Жилина*.

Третий результат связан с развитием методики исследования устойчивости при наличии спинорных движений. П. А. Жилиным разработан новый метод возмущений на множестве ортогональных тензоров, который излагается в седьмой главе. Преимущество такого подхода состоит в том, что возмущенный тензор поворота не утрачивает свойства ортогональности. Данный метод по праву можно называть *методом Жилина*.

Четвертый результат связан с введением понятия консервативного момента. Хорошо известно, что такое консервативный момент, когда речь идет о малых поворотах тела или о повороте тела вокруг фиксированной оси. В этих случаях есть полная аналогия с определением консервативной силы. Вопрос о том, как определить общий вид консервативного момента при пространственном вращении твердого тела, когда повороты не считаются малыми, впервые был решен П. А. Жилиным. В седьмой главе представлено несколько разновидностей консервативного момента: консервативный момент, содержащий слагаемое, зависящее от угловой скорости; консервативный позиционный момент и два его частных случая, соответствующие изотропному и трансверсально-изотропному потенциалам. Название “*момент Жилина*” уместно для всех перечисленных моментов.

Еще один результат, имеющий фундаментальное значение, относится к введению новых моделей в механику и физику. Речь идет о моделях твердотельного осциллятора и многоспинового твердотельного осциллятора, которые обсуждаются соответственно в седьмой и восьмой главах книги. Для этих моделей целесообразно использовать названия “*осциллятор Жилина*” и “*многоспиновый осциллятор Жилина*”.

Книга дополнена четырьмя приложениями. Приложение А (написано Е. Н. Вильчевской и Е. А. Подольской) содержит основные кинематические соотношения и тензорные тождества, часто используемые в книге. Данное приложение будет полезно читателям, желающим самостоятельно выводить формулы. Приложение В (написано А. М. Кривцовым) и приложение С (написано В. А. Кузькиным и А. М. Кривцовым) являются дополнением к седьмой

главе. Приложение D содержит статью П. А. Жилина, в которой обсуждаются вопросы, связанные с кулоновым трением. В этой статье не рассматриваются задачи о пространственном вращении твердых тел, однако содержащиеся в ней результаты могут найти применение в динамике твердого тела.

Редакционная коллегия выражает благодарность Н. А. Жилиной и Т. П. Товстик за предоставленные материалы.

Е. А. Иванова, А. М. Кривцов

Введение

Механика — одна из древнейших наук. Она развивается эволюционным путем без революционных скачков. Метод механики формировался в течение многих столетий трудами многих и многих исследователей и, разумеется, подкреплялся огромным опытным материалом. В основании механики лежат утверждения, которые принципиально не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты экспериментом. В этом состоит важнейшая особенность механики, благодаря которой механика не имеет пределов применимости. Недавняя “революция в физике” не оказала и не могла оказать влияния на развитие механики, поскольку “квантовые скачки” были принципиально несовместимы с логическими основами механики. Вместе с тем механика того времени не смогла распространить свой метод на электромагнитные и другие явления микромира. Последствия такой “неповоротливости” механики были весьма тяжелыми: к 1930 г. механика фактически утратила статус фундаментальной науки³. Существует только один способ вернуть механике статус фундаментальной науки, который заключается в расширении сферы ее действия на электромагнитные и другие явления микромира. При этом необходимо разрешить старый парадокс: *все знают, что механика неприменима к описанию явлений микромира, но никто не может указать, какие именно принципы механики теряют свою дееспособность в микромире*. Есть, разумеется, простое и радикальное разрешение указанного парадокса. Оно заключается в следующем утверждении: классическая механика неприменима в микромире просто потому, что в микромире неприменима классическая логика. Подобная точка зрения утверждается в науке уже много десятилетий. Тем не менее есть противники столь радикальной точки зрения. Наша цель состоит в том, чтобы показать другое разрешение парадокса и ясно выявить идею, утерянную в механике, как, впрочем, и в физике.

³ Многие ученые-механики не согласятся с таким утверждением. К сожалению, мировое научное сообщество в целом думает иначе и считает механику прикладной наукой. Иногда, впрочем, механику признают фундаментальным, но давно закрытым(!) разделом теоретической физики.

Современная механика ведет свой отсчет от Архимеда, сформулировавшего, помимо прочего, законы равновесия твердых тел. Этих законов было два. Первый относился к равновесию сил, а второй постулировал равновесие моментов и был дан в форме принципа рычага. Относительно последнего и развернулась самая продолжительная в истории современного человечества дискуссия. Конечно, никто не сомневался в правильности принципа рычага Архимеда. Вопрос заключался в его независимости, т. е. в возможности (или невозможности) его доказательства на основе закона равновесия сил. После Архимеда механика развивалась путем решения многочисленных частных задач. Важнейшие достижения принадлежат Галилео Галилею, они общеизвестны, и нет необходимости обсуждать их в данный момент.

В целом механика до Ньютона продолжала оставаться собранием многих важных, но мало связанных между собой фактов. Ньютон был первым, кто поставил задачу построения механики как науки первых принципов. В качестве первых принципов Ньютон предложил в словесной формулировке три закона движения, но он не считал их достаточными для общего построения механики. Например, в работе [2, с. 301], Ньютон писал: “*Vis inertiae* есть пассивный принцип, посредством которого тела пребывают в их движении или покое, получают движение, пропорциональное приложенной к ним силе, и сопротивляются настолько же, насколько сами встречают сопротивление. По одному этому принципу в мире еще не могло бы произойти движение. Был необходим некоторый иной принцип, чтобы привести тела в движение, и раз они находятся в движении — требуется еще один принцип для сохранения движения. Ибо из различного сложения двух движений вполне ясно, что в мире не всегда имеется одно и то же количество движения. Если два шара, соединенные тонким стержнем, вращаются вокруг их общего центра тяжести равномерным движением, в то время как центр равномерно движется по прямой линии, проведенной в плоскости их кругового движения, то сумма движений двух шаров в том случае, когда шары находятся на прямой линии, описываемой их общим центром тяжести, будет больше, чем сумма их движений, когда они находятся на линии, перпендикулярной к этой прямой. Из этого примера ясно, что движение может получаться и теряться”. Это важное высказывание относится к 1717 г. (опубликовано в 1719 г., т. е. спустя 30 лет после выхода в свет “Математических начал натуральной философии”). Данная цитата дает ясное представление о состоянии развития механики в начале XVIII в. Достаточно полно характеризуют состояние науки того времени работы И. Бернулли [3], опубликованные после 1726 г., а также книга Ж. Даламбера [4].

Следует обратить особое внимание на то обстоятельство, что в работах, написанных даже через 50 лет после выхода в свет “Математических начал”, не удастся обнаружить ничего похожего на то, что в настоящее время принято называть ньютоновской механикой. Приняв во внимание этот факт, едва ли кто-нибудь сможет поверить утверждению Э. Маха [5] о том, что после Ньютона в механике не было предложено ничего принципиально нового. А это утверждение, к сожалению, получило очень большое распространение среди физиков.

Программная идея Ньютона о построении механики на основе первых принципов сыграла огромную стимулирующую роль в развитии механики. Первая реализация этой идеи принадлежит Л. Эйлеру. То, что в настоящее время называется ньютоновской механикой, было создано Эйлером в период с 1732 по 1755 г. Прежде всего, Эйлер впервые перевел механику на язык дифференциальных уравнений и разработал методы их интегрирования. В результате метод механики обрел совершенно новое качество. Далее, в работе “Открытие нового принципа механики” [6], Эйлер дал новую и гораздо более сильную форму первому закону динамики⁴. Этот закон распространял второй закон Ньютона, применимый для материальных точек, на произвольные тела. В то время Эйлер полагал, что указанный принцип можно рассматривать “как единственный фундамент всей механики и других наук, которые трактуют о движении произвольных тел” (см. работу [7]). С помощью предложенного принципа Эйлеру удалось впервые рассмотреть задачу о вращении твердого тела. Тем не менее в работах того времени Эйлер рассматривал понятие момента как производного от понятия силы. Только значительно позднее Эйлер осознал в полной мере, что ньютоновская механика принципиально неполна и потому ограничена⁵. Впервые эта идея прослеживается в работах позднего Эйлера по теории стержней, где он вводит понятие момента в чистом виде, т. е. момента, не определяемого через понятие силы. Позднее Эйлер применил новое понятие момента при формулировке второго закона динамики. В 1776 г. Эйлер публикует мемуар “Новый метод определения движения твердых тел” [8], в котором впервые появляются формулировки двух независимых друг от друга законов динамики.

Здесь мы подошли к центральному вопросу, который необходимо обсу-

⁴ Современную форму законов динамики Эйлера, отличающуюся, конечно, от оригинальных формулировок, можно найти во второй главе. В частности, из современной формулировки в качестве следствия вытекает третий закон Ньютона.

⁵ Вопрос о неполноте ньютоновской механики обсуждается в подразделе 3.5.2, где в качестве примера рассмотрена задача, решение которой в рамках механики Ньютона оказывается невозможным. (*Примеч. ред.*)

дить подробнее. В ньютоновской механике исследуется только одна форма движений тел, а именно трансляционные движения, которые описывают изменение положений точечных тел в пространстве. Соответственно в ньютоновской механике определено только понятие силы. Связи между силами и движениями устанавливаются посредством так называемых определяющих уравнений, выражающих наши интуитивные представления и данные опыта. Типичным определяющим уравнением в ньютоновской механике является закон всемирного тяготения. Все остальные характеристики механического поведения тела определяются через силы на основе первого закона динамики. Введение независимого момента в корне меняет ситуацию. В механике все переменные появляются в виде сопряженных пар. Силам отвечают перемещения, т. е. трансляционные движения. Независимым моментам отвечают так называемые спинорные⁶ движения, при которых точечное тело меняет свою ориентацию в пространстве, хотя его положение в пространстве может оставаться неизменным. Спинорные движения тела управляются вторым законом динамики Эйлера. Механику, основанную на двух законах динамики Эйлера, будем называть эйлеровой механикой.

Так получилось, что величайшее открытие Эйлера оставалось неостребованным почти два столетия⁷ несмотря на то, что спинорные движения играют колоссальную роль в Природе. На макроуровне главную роль исполняют трансляционные движения, и именно этим определяется доминирующее положение ньютоновской механики в инженерных расчетах и задачах небесной механики. Однако чем глубже мы погружаемся в микромир, тем меньшую роль играют трансляционные движения и тем большую роль начинают играть спинорные движения. Именно игнорирование спинорных движений в ньютоновской механике явилось главной причиной неприменимости механики к описанию явлений микромира и, в частности, электромагнетизма. Думается, что при соответствующем учете спинорных движений современная и, особенно, квантовая физика имела бы совсем другой вид⁸.

⁶ Этот термин не является общепринятым и вводится во избежание смешения с термином “вращательное движение”. Последнее зачастую является трансляционным. Например, вращение Земли вокруг Солнца — это трансляционное движение, но вращение Земли вокруг собственной оси — это спинорное движение.

⁷ Значительное развитие динамики твердого тела и теории гироскопических систем имело скорее прикладное значение и мало сказалось на фундаментальных основах физики.

⁸ П. А. Жилин разработал несколько моделей описания физических явлений, основанных на средах с вращательными степенями свободы. Модель, математическое описание которой сводится к уравнениям Максвелла, рассмотрена в разделе 12.5. Модель, математическое описание которой сводится к основным уравнениям квантовой механики, рассмотрена в разделе 12.4. (*Примеч. ред.*)

Важную роль открытия Эйлером независимости второго закона динамики, видимо, осознал только Ж. Лагранж, но он не захотел с этим согласиться. По существу вопрос сводился к проблеме доказательства независимости принципа рычага Архимеда. Если его можно доказать на основе ньютоновской механики, т. е. на основе равновесия сил, то второй закон динамики Эйлера не является независимым законом Природы. Не случайно поэтому значительную часть обширного введения к своей “Аналитической механике” [9] Лагранж посвятил именно доказательству принципа рычага Архимеда. Лагранж подверг критике многие известные к тому времени доказательства принципа рычага Архимеда и предложил новое доказательство. При этом, как стало ясно в начале XX в., Лагранж допустил принципиальную ошибку⁹, последствия которой ощущаются вплоть до настоящего времени. Что касается самого Лагранжа, то он счел возможным ограничиться рамками ньютоновской механики и сумел придать ей весьма изящную форму. Однако красота лагранжевой механики была “отравленной”: многие стали ошибочно думать, что вся механика сводится к тому, чтобы выучить выражения для кинетической и потенциальной энергий и далее использовать лагранжев формализм. До некоторой степени это даже правильно. Беда в том, что в нетривиальных случаях лагранжева механика не дает никаких намеков на то, откуда взять правильные выражения для кинетической и потенциальной энергий. Во многих случаях, например для открытых систем, лагранжева механика вообще не применима, о чем многие и не подозревают¹⁰.

В дальнейшем лагранжева механика была усилена Гамильтоном. Механика Лагранжа–Гамильтона стала олицетворением механики в современной теоретической физике, где она играет двойную роль. С одной стороны, когда физики говорят об ограниченности классической механики, то они имеют в виду именно механику Лагранжа–Гамильтона. С другой стороны, в основе современной квантовой физики лежит формализм Лагранжа–Гамильтона с добавлениями к нему правил квантования. К сожалению, физики не осознают, что механика Лагранжа–Гамильтона является красивой одеждой для механики и не более того. Поэтому сама по себе механика Лагранжа–Гамильтона не

⁹ Лагранж использовал соображения симметрии относительно поворота, которые, как известно ныне (соответствующая теорема доказана Эмми Нетер в 1915 г. и опубликована в 1918 г.), эквивалентны условию баланса моментов, т. е. второму закону динамики Эйлера. Таким образом в качестве исходной предпосылки Лагранж фактически использовал то, что хотел доказать. В этом и заключалась его принципиальная ошибка. (*Примеч. ред.*)

¹⁰ В подразделе 3.5.1 рассматриваются примеры открытых систем и, в частности, подробно обсуждается вопрос о правильной записи выражений для кинетической и потенциальной энергий. (*Примеч. ред.*)

может служить основой для построения новых физически содержательных моделей реальных объектов. Именно это обстоятельство породило следующее заявление М. Планка [10]: “Сегодня мы должны осознать, что... рамки классической динамики... оказались слишком узкими для того, чтобы включить все те физические явления, которые не поддаются непосредственному наблюдению посредством наших грубых органов чувств. Доказательство этого заключения даются нам кричащим противоречием между классической теорией и экспериментом, которое проявилось в универсальных законах теплового излучения”. Разумеется, под классической динамикой Планк понимал механику Лагранжа–Гамильтона. Между тем фундаментальная механика в XIX–XX столетиях развивалась главным образом на основе принципов, предложенных Галилеем, Ньютоном, Эйлером. Основное внимание уделялось не аналитической механике систем с конечным числом степеней свободы, где царствовала механика Лагранжа–Гамильтона, а механике сплошных сред.

В минувшем столетии механика испытала как взлеты, так и серьезные затруднения. С одной стороны, механике принадлежит выдающаяся роль в развитии современной техники. С другой стороны, механика оказалась неспособной дать удовлетворительное описание целого ряда явлений микромира¹¹. Следует, впрочем, иметь в виду, что рациональных объяснений многих явлений микромира не существует до сих пор. Те объяснения, которые даются в современной теоретической физике, далеко выходят за рамки рациональных наук и могут использоваться только в качестве временной меры.

В последние 40 лет XX в. классическая механика претерпела существенные изменения, главное из которых связано с введением спинорных движений и переходом на фундамент эйлеровой механики, являющейся мощным развитием ньютоновой механики. В настоящее время механика Эйлера обрела вполне оформившуюся структуру в механике сплошных сред. В механике дискретных систем сегодня также стал необратимым переход с ньютоновской механики на более общую, более простую и более эффективную в приложениях механику Эйлера.

Какие же черты механики Эйлера позволяют надеяться, что разрыв между механикой и физикой может быть устранен? Так же как в механике Ньютона основным исходным элементом являлась материальная точка, так в механике Эйлера исходным элементом выступает модель “элементарной” частицы, которая в механике Эйлера аналогична абсолютно твердому телу (в том смысле, что ее кинетическая энергия является квадратичной формой линейной и

¹¹ Например, механика оказалась неспособной предложить удовлетворительную модель атома. (*Примеч. ред.*)

угловой скоростей частицы). В зависимости от строения энергии частицы различаются по сортам. У нейтральных частиц отсутствует перекрестный член в энергии: эти частицы вполне аналогичны абсолютно твердому телу в макромеханике, а трансляционные и вращательные движения у них как бы не взаимодействуют между собой. У “положительных” и “отрицательных” частиц присутствует перекрестный член в энергии, причем один сорт частиц отличается от другого строением перекрестного члена, т. е. у обсуждаемых частиц взаимодействие трансляционных и вращательных движений неустраимо. Прямой аналогии этих частиц с абсолютно твердым телом в макромеханике не существует, а композиция “положительных” и “отрицательных” частиц приводит к нейтральной частице. Любопытно, что если эти частицы действительно можно отождествить с заряженными частицами, то ни электрон, ни протон нельзя представить себе в виде маленьких шариков. Более того, их вообще нельзя вообразить в виде обычного маленького твердого тела. Имеется еще одна особенность, отличающая “электрон” от маленького абсолютно твердого тела: очень похоже на то, что не существует инерциальной системы отсчета, в которой траектория “центра масс” движущегося по инерции “электрона” была бы прямолинейной¹².

Широкое использование модели абсолютно твердого тела и “элементарной” частицы, аналогичной твердому телу, приводит к необходимости вводить в рассмотрение понятия поворота и угловой скорости. Повороты, в свою очередь, невозможно просто и естественно изложить, не используя понятия собственнортогонального тензора, или тензора поворота. За последним сразу же тянется понятие спина (тензора спина) и понятие вектора угловой скорости. Попытки изложения спина и угловой скорости на языке, отличном от тензорного исчисления, трудно признать удачными. Во всяком случае теоремы, относящиеся к этим понятиям, в классических учебниках теоретической механики являются просто ошибочными¹³. К счастью, эти ошибки имеют логическую основу и, видимо, не проявляются в приложениях. Хотя, например, расхождение в теоретическом предсказании скорости прецессии Земли (300 суток) объясняется именно тем, что наблюдают не ту величину, кото-

¹² Модели “элементарных” частиц, аналогичных абсолютно твердому телу, обсуждаются в подразделе 3.2.1, где, в частности, представлено решение задачи о свободном движении одной из таких частиц и показано, что траектория частицы — винтовая линия. (*Примеч. ред.*)

¹³ В разделе 2.13 обсуждается теорема сложения угловых скоростей и показывается, в чем ошибочность той формулировки данной теоремы, которая представлена в классических учебниках по теоретической механике. (*Примеч. ред.*)

рую вычисляют¹⁴. И происходит это именно из-за недостаточности (и ненаглядности) используемого математического аппарата. Аналогично тому, как в начале 30-х гг. XX в. назрела необходимость широкого внедрения в механику векторного исчисления, так и сейчас без введения в механику тензоров высших рангов уже невозможно правильно излагать механику.

Хорошо известна роль, которую играют в механике и физике разного рода модели. В ньютоновской механике, т. е. в механике материальных точек, наиболее фундаментальной принято считать модель нелинейного осциллятора или точечной массы на нелинейно упругой пружине общего вида. В механике Эйлера аналогичную роль играет твердое тело на упругом основании общего вида. Такую систему можно назвать твердотельным осциллятором. О необходимости построения модели твердотельного осциллятора говорили многие известные физики. Эта модель важна, например, для объяснения аномального эффекта Зеемана¹⁵.

Развитие механики и физики в XX в. со всей очевидностью показало, что существующих модельных представлений недостаточно для адекватного описания целого ряда явлений. Тот факт, что модель твердотельного осциллятора постоянно возникает в умах многих ученых на протяжении уже целого столетия, указывает на необходимость ее детального изучения. В этой связи возникает вопрос: “Если модель твердотельного осциллятора столь важна, то почему она до сих пор фактически не представлена в ясной математической форме в научных публикациях?” Ответ, вероятно, будет очевиден только тем, кто хорошо знаком с динамикой твердого тела. В качестве иллюстрации приведем такой пример. Сначала рассмотрим простейшую задачу ньютоновской механики: в инерциальной системе отсчета дана материальная точка и известны ее положение и скорость в начальный момент времени $t = 0$, требуется указать ее движение при $t > 0$ и отсутствии внешних сил. Только очень нерадивые школьники не знают решения этой задачи. Теперь рассмотрим простейшую задачу эйлеровой механики: в инерциальной системе отсчета дано абсолютно твердое тело с произвольным тензором инерции, центр масс покоится; при $t = 0$ заданы его положение и угловая скорость, а требуется указать, как будет поворачиваться тело при $t > 0$ в отсутствие внешних полей. Только очень немногие специалисты смогут правильно ответить на этот простейший (!) вопрос без предварительного анализа сложных эллип-

¹⁴ Этот вопрос подробно обсуждается в разделе 5.2, где рассматривается задача о свободном вращении осесимметричного тела. (*Примеч. ред.*)

¹⁵ Эффект Зеемана — это эффект расщепления линий атомных спектров в магнитном поле. Открыт Зееманом в 1896 г. (*Примеч. ред.*)

тических интегралов. Между прочим этот вопрос часто не по силам даже мощным компьютерам, если пользоваться приводимыми в учебниках выражениями. Проблема здесь вовсе не в сложности построения точных решений нелинейных уравнений. Например, для нелинейного уравнения Дуффинга с трением нельзя построить точное решение, но качественное поведение осциллятора Дуффинга с трением¹⁶ легко представит себе даже хороший студент, не говоря уже о специалистах, и притом без всякого интегрирования. Повороты твердого тела, в противоположность указанному случаю, воспринимаются нашей интуицией с большим трудом и только после специальной тренировки. Например, у многих студентов (людей с неиспорченной образованием интуицией) вызывает немалое изумление тот факт, что при знаменитой регулярной прецессии ось вращения тела и ось поворота тела ортогональны между собой. Из изложенного, видимо, ясно, что отсутствие модели твердотельного осциллятора в литературе отнюдь не является простым упущением. Есть и еще одно препятствие на пути к созданию модели твердотельного осциллятора. Всем хорошо известно, что такое потенциальная сила. Аналогичный вопрос, возникающий в эйлеровой механике: как определить общий вид потенциального момента? Найти ответ в литературе не удалось. Но без ответа на этот вопрос об общей постановке задачи о твердотельном осцилляторе нечего и думать.

Для многих целей модели твердого тела (односпиновой частицы) и твердотельного осциллятора оказываются недостаточными. Уже в начале этого века высказывались суждения о необходимости построения модели многоспиновой частицы. Частицы такого рода вводились в квантовой механике, но это сопровождалось принятием допущений, которые трудно примирить с классическими представлениями. Существенно, что наряду с трансляционными движениями в эйлеровой механике на паритетных началах введены в рассмотрение спинорные движения, описывающие вращения точечных частиц¹⁷. Спинорные движения устраняют одно из главных противоречий квантовой механики, в которой частицы обладают спином, но движения, порождающие спины, отсутствуют. Простейшим примером многоспиновой частицы является гироскоп, т. е. твердое тело с встроенными в него роторами, обладающими независимыми скоростями вращения. При вращении роторов вокруг собствен-

¹⁶ Осциллятор Дуффинга с трением описывается дифференциальным уравнением: $m\ddot{x} + b\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$. (Примеч. ред.)

¹⁷ Модели многоспиновых точечных частиц вводятся в рассмотрение в подразделе 3.2.1. Более подробно многоспиновые частицы и состоящие из них среды обсуждаются в разделе 12.1. (Примеч. ред.)

ных осей распределение масс в теле не меняется — это и есть главный признак, в соответствии с которым рассматриваемая конструкция называется гириостатом. В технике применяются гириостаты, которые закреплены на разного рода упругих основаниях. Гириостат на упругом основании может быть назван многоспиновым твердотельным осциллятором. Последний является фундаментальной моделью в динамике многоспиновых частиц — науке, возникшей и развиваемой в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете и Институте проблем машиноведения РАН. В настоящее время еще трудно судить о том, насколько полезной для механики и физики окажется модель многоспинового твердотельного осциллятора.

При построении моделей твердотельного осциллятора и многоспинового твердотельного осциллятора достаточно серьезные изменения или, лучше сказать, дополнения в динамике твердого тела совершенно необходимы. Именно этому, в частности, посвящена данная книга. Математики, специалисты по нелинейным дифференциальным уравнениям найдут в ней весьма интересные и необычные по форме уравнения, анализ которых еще впереди.

Несмотря на элементарность используемого языка, в книге излагаются вопросы, которые, как правило, выпадают из учебников, но крайне важны для инженеров и физиков. В частности, в книге проводится строгое различие между понятиями системы отсчета и системы координат. Дается более точное изложение замены системы отсчета, и уточняется формулировка принципа материальной объективности. Дается строгое определение аксиальных векторов и тензоров. Новым является изложение теории поворотов (спиновых движений) твердых тел. Книга содержит обсуждение ряда фундаментальных понятий механики, которые не рассматриваются в традиционных учебниках по теоретической механике и динамике твердого тела. Прежде всего, речь идет о таких понятиях, как пространство, время, принцип инерции Галилея, инерциальные системы отсчета. Как ни удивительно, но строгое введение этих понятий было осуществлено только в 1940 г. (см. работу С. Зарембы [11]).

В главе, посвященной исходным понятиям и фундаментальным законам рациональной механики, рассматриваются тела и их динамические структуры: кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент. Подробно обсуждаются воздействия, т. е. силы и моменты, обращается внимание на то, что в эйлеровой механике понятие силы сохраняется, но момент уже не полностью определяется силами, а становится самостоятельным понятием. Фундаментальные законы эйлеровой механики формулируются для открытых тел, т. е. тел, которые могут обмениваться со своим окружением массой, количеством движения, кинетическим моментом и энергией.

В главе, посвященной кинематике спинорных движений, доказывается общая теорема о представлении тензора поворота. Вводимое представление содержит все известные представления тензора поворота и добавляет к ним новые. Оригинальным является изложение теоремы об угловой скорости композиции поворотов. Вводится несколько новых понятий, в частности, вводится понятие тензора-интегратора, играющего важную роль при введении понятия потенциального момента. В целом результаты главы полезны при исследовании динамики роторных машин и гироскопических приборов.

В книге рассматривается ряд прикладных задач, в том числе классических. Однако получаемые решения, как правило, являются более полными, нежели приводимые в учебниках. Например, впервые приведено полное решение старой задачи о шарнире Гука, который известен всем автомобилистам. Подробно излагается задача о свободном вращении твердого тела. Эта классическая задача приводится во всех учебниках, но даваемое в них решение трудно использовать для практических целей. Излагаемое в книге решение не только проще классического, но и поучительно, поскольку показывает важность правильного выбора осей, поворотами вокруг которых описывается вращение тела. Подробно обсуждается знаменитый парадокс Николаи. Строится модель твердотельного осциллятора, т. е. твердого тела на упругом основании. При этом вводится несколько новых понятий и рассматриваются решения ряда конкретных задач. В классической динамике твердого тела роль поворотов относительно невелика, главную роль играют вращения, т. е. угловые скорости. При рассмотрении твердотельного осциллятора на первый план выдвигаются именно повороты, поскольку внешние поля (в частности, упругое основание) реагируют, как правило, на повороты, а не угловые скорости. Именно недостаточно эффективное описание поворотов в классической динамике твердого тела породило ряд специфических проблем.

Одна из главных целей автора — показать в книге возможности и конкретные пути существенного расширения сферы действия классической механики. Автор уверен, что молодое поколение станет свидетелем вторжения механики в ранее недоступные для нее области физики, включая атомную физику.

Глава 1

Векторы и тензоры второго ранга

1.1. Тензорные величины в механике и физике

В физике используется множество различных понятий. Этих понятий так много, что их необходимо как-нибудь классифицировать и некоторым образом упорядочить. Классифицировать можно по определенным признакам. Наиболее общей является классификация по так называемому тензорному признаку, ибо все понятия, описывающие количественные характеристики физических объектов или физических процессов, являются тензорами, но тензорами различных рангов. Тензоры нулевого ранга называются скалярами. Тензоры первого ранга называются векторами. Тензоры нулевого ранга (скаляры) и тензоры первого ранга (векторы) не исчерпывают списка необходимых для физики и, в частности механики, понятий. Необходимы и более сложные конструкции — тензоры высших рангов. На интуитивном уровне тензоры, например, второго ранга ощущаются уже не столь отчетливо, как скаляры и векторы. Поэтому вначале требуется определенная тренировка на уровне логического мышления, прежде чем исчезнет неудобство, связанное с восприятием тензора второго ранга как чисто формального объекта. При первоначальном знакомстве с тензорами второго ранга вполне допустимо и даже полезно рассматривать их как формальные конструкции. Однако в последующем при изучении механики мы убедимся, что тензоры второго ранга являются необходимыми элементами языка, на котором говорит Природа. В этом смысле тензоры второго ранга отнюдь не являются формальностями. По мнению автора, тензорное исчисление является истинным языком, в основе которого лежат интуитивные (визуальные) образы, хорошо знакомые даже тем, кто никогда не слышал слов “вектор” или “тензор”.

В математизированной науке XX в. интуитивное мышление перестало играть ту важную роль, которую оно играло в прошлые века. Тем не менее автор убежден, что интуитивное мышление не просто помогает в решении многих

проблем, но является единственным источником новых идей и новых физических теорий. Знания, полученные на основе интуитивного мышления, можно использовать в рациональной науке¹ только при наличии подходящего языка. Для физических и технических наук таковым является тензорный язык, владение которым необходимо любому человеку, решившему посвятить себя исследованию физико-технических проблем. Существует мнение, что тензорный язык и тензорные формы тех или иных уравнений являются просто удобными обозначениями, позволяющими экономно излагать некоторые разделы научного знания. Это является глубоким заблуждением. Фактически развитие рациональной механики необходимо сопровождалось развитием, не всегда осознанным, тензорного языка, процесс становления которого был очень длительным и трудным. Например, понятие вектора было введено Саймоном Стевином (S. Stevin) в 1580 г., но первые учебники по механике, использующие векторный язык, появились только в начале XX в. [12, 13]. Более подробно о становлении тензорного языка будет сказано далее.

Тензорный язык² в относительно полном объеме стал применяться в некоторых книгах по механике только в последней четверти XX в. К сожалению, в

¹ Под рациональной наукой понимается метод описания Природы, основанный на первых принципах, представленных в математической форме, и их логических следствиях. Разумеется, неотъемлемой частью любой естественной науки являются экспериментально установленные факты, и поэтому естественная наука не может достичь формализма, присущего математике. Однако рациональная наука, в отличие от эмпирической, не является простым перечислением известных фактов, а представляет собой теорию, объясняющую различные природные явления с единых позиций. (*Примеч. ред.*)

² Язык является основным средством общения между людьми, а также способом хранения и выражения информации. Многообразие языков не поддается описанию. Существует язык чисел — это сложный символический язык, которым пользовались полумифические сущности вроде Пифагора; овладеть им дано очень немногим. Существует множество интонационных языков, используемых на бытовом уровне. Языки такого рода наиболее распространены. Между этими двумя полюсами расположен широкий спектр других языков: язык музыки, язык поэзии, язык живописи и т. д. Вместе с тем существуют способы хранения и кодирования информации, которые можно назвать языками только условно. К таковым псевдоязыкам относятся, например, языки программирования. В истинных языках действует, по терминологии древних мыслителей, Закон Соответствия, или Закон Аналогий. Сущность этого закона заключается в следующем. В истинном языке каждому “слову” (звуку, музыкальной фразе, цветосочетанию, термину и т. д.) соответствуют интуитивные образы. Одному и тому же слову могут отвечать несколько и даже бесконечно много интуитивных образов, но все они имеют единую основу, т. е. носят объективный характер. Собственно говоря, именно интуитивные образы и порождают тот или иной язык. По мнению автора, тензорное исчисление является истинным языком, в основе которого лежат интуитивные (визуальные) образы, хорошо знакомые даже тем, кто никогда не слышал слов “вектор” или “тензор”.

книгах по теоретической физике вплоть до настоящего времени используется исключительно координатная форма тензорного исчисления, но не тензорный язык. Впрочем, этому есть объяснения. Физики предпочитают работать с четырехмерными многообразиями, для которых многие атрибуты тензорного языка просто отсутствуют, равно как отсутствуют и интуитивные образы, присущие тензорному языку. Отличие тензорного языка от тензорного исчисления полностью осознают только те, кто имеет дело с постановками новых задач и построениями новых теорий. В тех случаях, когда речь идет о решениях пусть даже и новых задач, но в рамках уже устоявшихся моделей и сформировавшихся теорий, вышеупомянутые различия часто становятся малозаметными. Впрочем, и здесь многое определяется степенью владения тензорным языком. Когда в рассмотрение вводится новая модель, то, как правило, используется следующая цепочка рассуждений. Имеется интуитивный (визуальный) прообраз. Ему ставится в соответствие некий тензор или система тензоров. Этому тензору, в свою очередь, ставится в соответствие интуитивный (визуальный) образ. Сравнивая между собой интуитивные образ и прообраз, немедленно убеждаемся, что они различаются и часто весьма существенно³. Теперь исследователю предстоит решить, насколько существенными для поставленных целей являются эти различия и в какой мере введенный им образ учитывает свойства прообраза.

1.2. Системы отсчета и системы координат. Движения

Вселенная представляет собой движущуюся материю. Многообразие явлений во Вселенной порождается как многообразием форм существования материи, так и многообразием форм ее движения. Материя как философская категория в данной книге не обсуждается, ибо в физике материя представлена вполне конкретными моделями: материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная деформируемая среда, электромагнитное поле и т. д. Все эти модели вводятся определенными математическими структурами и потому могут рассматриваться не только как физические, но и как математические объекты. Аналогично обстоит дело и с движениями. В физике изучают не движения вообще, а движения конкретных моделей. Легко понять, что понятие движения

³ Для пояснения сказанного приведем простой пример. Представим себе твердое тело из однородного материала, имеющее форму куба. Соответствующий этому визуальному прообразу тензор инерции будет шаровым. Наиболее естественным визуальным образом, который можно поставить в соответствие шаровому тензору инерции, является твердое тело из однородного материала, имеющее форму шара. (*Примеч. ред.*)

принципиально относительно. Невозможно говорить о движении без четкого указания относительно какого тела рассматривается это движение. В старых версиях классической механики использовалось представление об абсолютном пространстве Ньютона, которое легко воспринимается нашей интуицией как нечто неподвижное и вмещающее в себя все сущее. Движение на уровне интуиции рассматривается относительно этого абсолютного пространства. К сожалению, наш интеллект, т. е. рациональное мышление, не понимает языка интуиции. Нужен специальный переводчик интуитивных представлений на символичный язык, используемый интеллектом. В частности, чтобы использовать абсолютное пространство в рациональной науке необходимо каким-либо образом параметризовать все точки абсолютного пространства, т. е. ввести в нем систему координат. Это одна из центральных проблем физики, неясное решение которой служило и продолжает служить главной причиной многочисленных недоразумений. После непродолжительных размышлений читатель осознает, что параметризовать точки абсолютного пространства невозможно. Отсюда следует, что оно недоступно для использования в рациональной науке. Поэтому необходимо искать другие тела, относительно которых можно наблюдать движение. Здесь мы ограничимся описанием только первого шага, а именно введением понятия системы отсчета. Следует подчеркнуть, что для физических теорий вводимое далее понятие системы отсчета совершенно недостаточно, но оно достаточно для построения векторного и тензорного исчисления.

Итак, нам необходимо ввести в рассмотрение тело отсчета. Природа не позаботилась о предоставлении нам какого-либо естественного тела отсчета, и мы вынуждены сотворить его сами. Поступим следующим образом. Возьмем маленький пластилиновый шарик (в идеале — точку) и поставим на нем метку O , которая будет рассматриваться в качестве начала в теле отсчета. Возьмем три одинаковые палочки со стрелками на концах. Можно взять палочки-стрелки разной длины, но для краткости мы ограничимся наиболее наглядным случаем. Изучающий без всяких затруднений сможет самостоятельно рассмотреть и другие случаи. Упомянутые палочки отметим символами

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}. \quad (1.1)$$

В дальнейшем строчными полужирными латинскими буквами будут обозначаться векторы. Но введенные нами объекты векторами не являются — это именно палочки-стрелки. Дело в том, что направление этих палочек не определено и не может быть определено до тех пор, пока не введено в рассмотрение тело отсчета. Если же тело отсчета имеется (отличное от того, которое

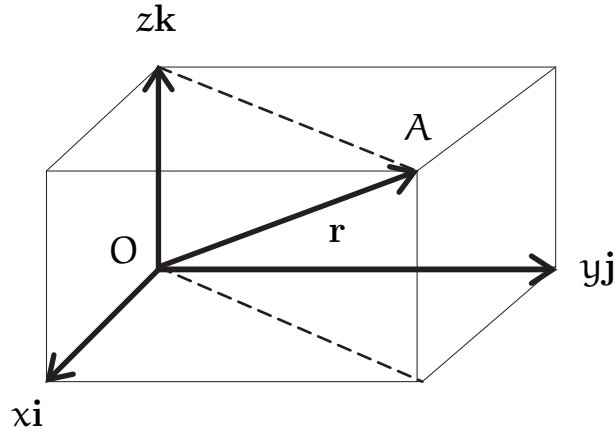


Рис. 1.1. Система отсчета

мы сейчас строим), то в нем объекты (1.1) уже можно, хотя и с оговорками, считать векторами. Воткнем теперь палочки в пластилиновый шарик так, чтобы углы между ними составляли $\pi/2$. В принципе это не обязательно, но так проще. В результате, мы получили фигуру

$$\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad (1.2)$$

которая в геометрии называется *репером*.

Точка O в (1.2) называется вершиной репера. Присоединим к введенному реперу множество точек, определяемых радиус-вектором

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad -\infty < (x, y, z) < +\infty. \quad (1.3)$$

Например, к реперу (1.2) присоединена точка A с координатами x, y, z . Чтобы получить образ точки A , нужно выполнить следующую мысленную операцию. Представим себе, что палочки-стрелки $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ устроены наподобие телескопической антенны у автомобиля. Выдвинем у этих палочек-стрелок нужное число звеньев: $x\mathbf{i}$ будет иметь x звеньев, $y\mathbf{j}$ — y звеньев; $z\mathbf{k}$ — z звеньев. На получившихся палочках-стрелках можно построить параллелепипед. Тогда радиус-вектор (1.3) будет расположен на диагонали параллелепипеда, исходящей из вершины репера; его длина будет равна длине диагонали, а его конец будет определять точку A (рис. 1.1). Аналогичным образом к реперу (1.2) присоединяется весь бесконечный набор точек, отвечающих всевозможным значениям координат x, y, z у радиус-вектора (1.3). Если мы мысленно повернем или перенесем репер (1.2), то вместе с ним повернутся или перенесутся все присоединенные к нему точки таким образом, что их положение относительно репера останется неизменным (рис. 1.2). Иными словами, мы построили рукотворную модель абсолютного пространства, но, в отличие от

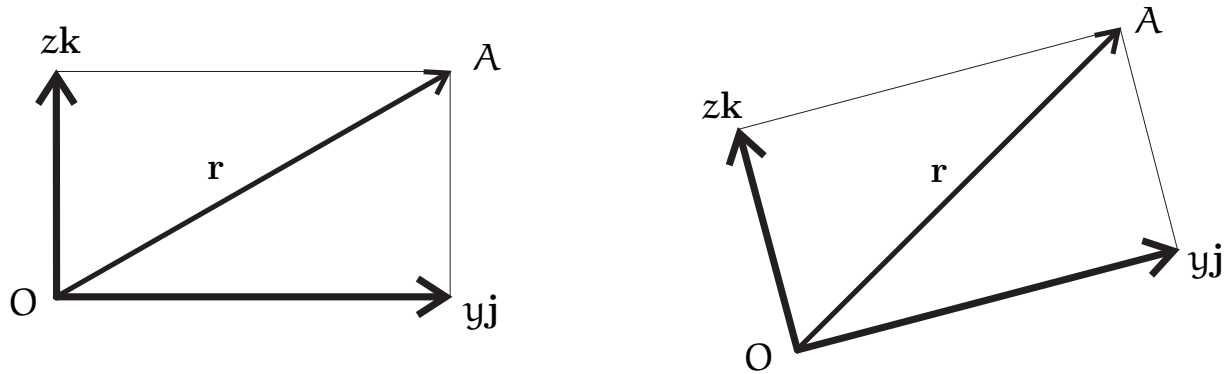


Рис. 1.2. Поворот системы отсчета

последнего, все точки этого пространства помечены. Поэтому стало возможным наблюдать движение любого тела относительно введенного нами тела отсчета.

Определение. Репер (1.2) с присоединенным к нему множеством точек (1.3) называется телом отсчета.

Невозможно судить о движении самого тела отсчета. Но наблюдать движения других тел относительно тела отсчета стало возможным. Для описания количественных характеристик движения необходим еще один элемент, а именно часы, позволяющие фиксировать время.

Часами называют прибор для измерения времени, основанный на любом периодическом процессе.

Определение. Тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.

Репер (1.2) и координаты x , y , z будем называть отсчетными. Они определяют систему отсчета и не подлежат каким-либо заменам. Все вводимые в дальнейшем понятия не имеют никакого смысла вне системы отсчета. К сожалению, как в математической, так и в физической литературе это обстоятельство часто игнорируется, а сами системы отсчета остаются за кадром. В рассмотрение вводятся системы координат и в них определяются те или иные объекты. Однако вводимые системы координат, как правило, ни к чему не прицеплены и существуют как бы сами по себе.

Роль системы отсчета ясно очерчена К. Трусделлом [14]: система отсчета — это “чистый холст, на котором можно рисовать картины Природы. Этот холст должен быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но никоим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать”.

Противоположной точки зрения придерживался А. Эйнштейн [15]. Напри-

мер, в работе [16] он пишет: “Теория вводит два рода физических предметов, а именно: 1) масштабы и часы (т. е. системы отсчета. П. Ж.), 2) все остальное, например, электромагнитное поле, материальную точку и т. д. Это в известном смысле нелогично; собственно говоря, теорию масштабов и часов следовало бы выводить из решений основных уравнений, а не считать ее независимой от них”. Иными словами, считается возможным сначала нарисовать картину Природы, т. е. написать основные уравнения, а только потом подобрать для картины холст.

Не сравнивая эти две позиции, просто отметим, что в данной книге принята первая точка зрения, традиционная для классической физики и механики. Подчеркнем еще раз, что введенная система отсчета — пока еще не то, с чем работают в механике. Об этом речь пойдет в разделе 3.1, а сейчас мы должны остановиться на понятии системы координат.

Определение. Система идентификации точек системы отсчета называется системой координат в данной системе отсчета.

Все точки системы отсчета уже идентифицированы координатами x , y и z , которые мы будем называть, как уже было указано, отсчетными координатами. Последние играют особенную роль, ибо определяют как саму систему отсчета, так и точки системы отсчета, присваивая им определенные имена.

Наряду с отсчетными координатами можно ввести в рассмотрение и другие координаты, т. е. помимо “подлинных имен” точкам можно присвоить “псевдонимы” y^1 , y^2 , y^3 :

$$y^1 = y^1(x, y, z, t); \quad y^2 = y^2(x, y, z, t), \quad y^3 = y^3(x, y, z, t); \quad (1.4)$$

где t — время.

Отображение (1.4) каждой точке системы отсчета, определяемой координатами x , y , z , ставит в соответствие в данный момент времени одну и только одну тройку чисел y^1 , y^2 , y^3 . Таким образом, соотношениями (1.4) в данной системе отсчета вводится еще одна система координат, которая меняется во времени, т. е. движется относительно системы отсчета. При этом точка, неподвижная в системе отсчета, будет иметь меняющиеся во времени координаты y^1 , y^2 , y^3 . И наоборот, точка с фиксированными координатами y^1 , y^2 , y^3 будет двигаться относительно системы отсчета. Преобразования (1.4) предполагаются непрерывными и однозначно обратимыми. Иными словами, в данный момент времени тройке чисел y^1 , y^2 , y^3 отвечает одна и только одна тройка чисел x , y , z :

$$x = f(y^1, y^2, y^3, t); \quad y = g(y^1, y^2, y^3, t); \quad z = h(y^1, y^2, y^3, t). \quad (1.5)$$

Заметим, что здесь координаты x , y , z не зависят от времени, а координаты y^1 , y^2 , y^3 являются функциями времени. Отсюда, например, следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y^1} \frac{dy^1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y^2} \frac{dy^2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y^3} \frac{dy^3}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Соотношения такого рода понадобятся нам в дальнейшем. Вместо координат y^1 , y^2 , y^3 можно было ввести и какие-то другие координаты $y^{1'}$, $y^{2'}$, $y^{3'}$, такие, что

$$y^{1'} = y^{1'}(x, y, z, t); \quad y^{2'} = y^{2'}(x, y, z, t); \quad y^{3'} = y^{3'}(x, y, z, t). \quad (1.6)$$

Подставляя в формулу (1.6) соотношения (1.5), получаем

$$y^{1'} = y^{1'}(y^1, y^2, y^3, t); \quad y^{2'} = y^{2'}(y^1, y^2, y^3, t); \quad y^{3'} = y^{3'}(y^1, y^2, y^3, t). \quad (1.7)$$

Соотношениями (1.7) устанавливаются замены систем координат в данной системе отсчета. Следует обратить особое внимание на следующие обстоятельства. В соотношениях (1.7) отсчетные координаты x , y , z отсутствуют, и тем самым система отсчета оказалась спрятанной. Отсюда, разумеется, не следует, что о системе отсчета можно позабыть.

Сами по себе координаты y^k не имеют никакого смысла. Если позабыть о существовании соотношений (1.4) или (1.6), то координаты y^k повисают в воздухе. Из (1.4)–(1.6) соотношения (1.7) вытекают однозначно. Но из (1.7) не следует существование соотношений (1.4)–(1.6). Поэтому о последних ни в коем случае нельзя забывать.

Итак, система координат x , y , z неподвижна относительно тела отсчета. Можно использовать подвижную декартову систему координат x' , y' , z' , например, такую:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z. \quad (1.8)$$

Начало этой подвижной системы координат ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$) движется относительно тела отсчета вдоль оси x со скоростью v . Неподвижная точка тела отсчета A в подвижной системе координат будет определяться переменными во времени координатами x' , y' , z' .

Пусть, например, точка A имеет координаты $x = 2$, $y = 4$, $z = 5$. Тогда в подвижной системе ее координаты определяются выражениями

$$x' = 2 - vt; \quad y' = 4; \quad z' = 5,$$

т. е. эти координаты неподвижной точки тела отсчета меняются во времени.

Могут быть системы координат, меняющиеся во времени более сложным образом. Например, пульсирующая система координат:

$$x' = (1 - e_1 \cos \omega t)x; \quad y' = (1 - e_2 \cos \omega t)y; \quad z' = (1 - e_3 \cos \omega t)z, \quad (1.9)$$

где e_k : $0 < e_k < 1$ — постоянные числа; ω — частота пульсации.

Начало системы координат (1.9) совпадает с началом в системе координат x , y , z и неподвижно в теле отсчета. Но, например, точка с координатами $x = y = z = 1$ имеет переменные во времени координаты

$$x' = 1 - e_1 \cos \omega t; \quad y' = 1 - e_2 \cos \omega t; \quad z' = 1 - e_3 \cos \omega t.$$

Наоборот, фиксированным координатам подвижной системы координат отвечают различные точки тела отсчета.

Например, координатам $x' = y' = z' = 1$ отвечает множество точек тела отсчета с координатами

$$x = \frac{1}{1 - e_1 \cos \omega t}; \quad y = \frac{1}{1 - e_2 \cos \omega t}; \quad z = \frac{1}{1 - e_3 \cos \omega t}.$$

Здесь разным моментам времени отвечают разные точки системы отсчета. При $t = 0$ точке с координатами $x' = y' = z' = 1$ отвечает точка тела отсчета с координатами

$$x = 1/(1 - e_1); \quad y = 1/(1 - e_2); \quad z = 1/(1 - e_3).$$

Но при $\omega t = \pi/2$ точке с координатами $x' = y' = z' = 1$ отвечает уже другая точка тела отсчета с координатами $x = y = z = 1$.

В данной системе отсчета можно ввести сколь угодно много различных систем координат, и все они равноправны. Начиная изучать рациональные теории должны отчетливо осознать различие между понятиями “система отсчета” и “система координат”. Недопустимость смешения этих понятий ясно показывает следующее утверждение.

Утверждение. *Многие физические величины (скорость, ускорение, кинетическая энергия и др.) зависят от выбора системы отсчета, но ни одна физическая величина не зависит от выбора системы координат в данной системе отсчета.*

К сожалению, во многих книгах и статьях не делается ясного различия между этими понятиями и для них используется термин “система координат”, причем в одних случаях он имеет смысл системы отсчета, а в других случаях — системы координат.

Итак, ранее была введена в рассмотрение некая рукотворная конструкция, названная системой отсчета. Ничего нельзя сказать ни о движении, ни о положении, ни об ориентации этой системы отсчета в гипотетическом абсолютном пространстве. Тем не менее без этой конструкции двигаться дальше так же невозможно, как рисовать вилами на воде. Практически все понятия, используемые в рациональной физике, лишаются всякого физического смысла вне рамок системы отсчета. После введения системы отсчета мы обрели возможность проводить разного рода построения, которые вполне определены, по крайней мере в данной системе отсчета. В ней мы можем изучать движения тел, вводить векторы и тензоры различных рангов, устанавливать математические формы физических законов.

С формально математической точки зрения введенного понятия системы отсчета вполне достаточно для изучения векторно-тензорного языка. Поэтому здесь мы пока остановимся и продолжим обсуждение систем отсчета в первом разделе пятой главы.

Даже начинающему необходимо осознать, почему введенные системы отсчета недостаточны для полноценного использования в физических теориях и почему их необходимо превратить в так называемые инерциальные системы отсчета. Понятно, что можно ввести сколь угодно много различных систем отсчета, и все они будут равноправны. Вообразим, что мы сконструировали три совершенно одинаковые системы отсчета. Одну из них установим на крыше здания, другую — на качелях, наконец, третью — на карусели. Допустим, что высоко в небе летит реактивный самолет, оставляя за собой всем хорошо знакомый след. Допустим также, что самолет оставляет свой след в каждой из введенных нами систем отсчета. Только эти следы (траектории), зафиксированные посредством системы отсчета, доступны нам для рационального анализа. Сравним эти траектории между собой. При этом считаем, что самолет не выполняет виражей и фигур высшего пилотажа, а летит по заданию из одного пункта в другой. Тогда в системе отсчета, установленной на крыше здания, траектория будет близка к прямой линии. В системе отсчета, установленной на качелях, плоскость качания которых ортогональна направлению полета, траектория будет иметь вид синусоиды. Наконец, в системе отсчета, установленной на карусели, траектория будет иметь вид раскручивающейся спирали. Как видим, траектории движения одного и того же объекта в разных системах отсчета представлены кривыми, которые не имеют между собой ничего общего. Вместе с тем у нас нет серьезных оснований для предпочтения одной из этих систем отсчета какой-либо другой. Иными словами, введя в рассмотрение систему отсчета, мы получили возможность описывать движе-

ния тел относительно этой системы отсчета, но такое описание необъективно, т. е. оно зависит от нашего произвола. В рациональной науке изучаются законы Природы, т. е. объективные закономерности, а вовсе не наши фантазии. Поэтому введенные нами системы отсчета нельзя применять для построения рациональной физики.

Чтобы еще раз подчеркнуть серьезность обсуждаемого вопроса, отметим следующие обстоятельства. Рассмотрим какое-либо тело (материальную точку), которое объективно существует и, значит, как-то движется. Выберем теперь произвольным образом вектор-функцию $\mathbf{R}(t)$. Нетрудно понять, что всегда найдется такая система отсчета, в которой эта произвольно выбранная функция $\mathbf{R}(t)$ будет описывать траекторию рассматриваемого и объективно существующего тела. Ясно, что такого рода описания движений тел не доставляют никакого научного (объективного) знания и потому неинтересны.

До сих пор мы говорили о движении с точки зрения описания положения тела относительно системы отсчета. В этом случае понятие времени играет вспомогательную роль и не очень существенно, как именно измеряется время. Ситуация резко меняется при введении таких важных характеристик движения, как скорость и ускорение. Скорость характеризуется, в частности, расстоянием, проходимым телом в единицу времени. Эта характеристика имеет смысл только в том случае, если время течет равномерно. Но как определить равномерность хода времени? Кто или что может гарантировать, что длительности всех минут, отсчитываемых по используемым часам, строго одинаковы? При измерении расстояний у нас была принципиальная возможность использовать шаблон длины, посредством которого мы могли удостовериться в одинаковости всех, например, метров в нашей системе отсчета. К несчастью, мы принципиально лишены возможности изготовить шаблон единицы времени. Эту центральную для физики проблему подробно анализировал А. Пуанкаре в работе [17], в которой он ясно показал условность, т. е. необъективность, понятия равномерности хода времени. Это, в свою очередь, показывает условность понятий скорости и ускорения, что нельзя понимать иначе как катастрофу для всей классической физики.

В современной физике проблему равномерности хода времени даже не упоминают, подменив ее проблемой синхронизации часов в разных точках системы отсчета. Понятно, что как бы мы ни синхронизировали часы, прежде всего они должны идти равномерно. В противном случае мы можем сделать скорость движения любого объекта постоянной во всех системах отсчета простым переопределением понятия времени, что и делается в современной физике для скорости света. Удовлетворительное решение проблемы равно-

мерности хода времени в классической механике было найдено С. Зарембой только в 1940 г. [11]. Оно будет изложено в разделе 3.1, посвященном обсуждению инерциальных систем отсчета. Повторим, что при построении собственно тензорного исчисления введенные системы отсчета вполне достаточны.

1.3. Скаляры, или тензоры нулевого ранга

Определение. Физические величины, которые полностью характеризуются заданием одного вещественного числа, не зависящего от выбора системы координат, называются скалярами.

Примерами скаляров в механике являются масса, объем, энергия, модуль вектора, время и т. д. Координаты вектора нельзя назвать скалярами, так как координаты вектора меняются при замене системы координат. Следует обратить внимание на то, что скаляры не зависят от выбора системы координат в данной системе отсчета, но они могут меняться, а могут и не меняться при переходе к другой системе отсчета. Например, температура не зависит от выбора системы отсчета. С понятием энергии ситуация сложнее. Внутренняя энергия тела не зависит от выбора системы отсчета, а кинетическая энергия — зависит. При построении тензорного исчисления все рассуждения всегда ведутся в одной и только одной системе отсчета. По этой причине в книгах по векторному и тензорному исчислению системы отсчета, как правило, даже не упоминаются. В физических теориях дело обстоит иначе. Здесь уже обойтись без явного использования систем отсчета невозможно. Выбор системы отсчета в достаточной мере произволен, а физические теории должны описывать объективную реальность, т. е. не должны зависеть от нашего произвола. Поэтому в физике важнейшую роль играет специально вводимый принцип независимости физической теории от выбора системы отсчета. При этом величины, входящие в эту теорию, вполне могут зависеть от выбора системы отсчета. Отсюда ясно, что физические теории не могут строиться произвольно, а их структура должна удовлетворять неким ограничениям.

Эта книга адресована тем, кто будет иметь дело именно с физическими теориями и кто категорически не должен смешивать системы отсчета и системы координат. Скаляры могут зависеть от точек системы отсчета, т. е. являться функциями точек системы отсчета. В таких случаях говорят, что задано скалярное поле. Например, распределение температуры в теле есть типичный пример скалярного поля, хотя для механики он как раз нетипичен. Типичные для механики скалярные поля более сложны, но все, конечно, слышали о гравитационном потенциале, являющемся примером скалярного поля.

Скаляры, будучи вещественными числами, подчиняются обычным, известным из школьной программы, правилам сложения, вычитания, умножения и деления. Скаляры определяют физические величины и имеют размерность. Например, масса измеряется в килограммах, расстояние — в метрах, объем — в кубических метрах и т. д. Складывать и вычитать можно скаляры, имеющие одинаковую размерность. Делить и умножать можно скаляры разной размерности. Например, если массу тела разделить на его объем, то получим новую скалярную величину, называемую средней массовой плотностью. В дальнейшем скаляры будем считать элементами множества вещественных чисел, на котором введены обычные операции сложения, вычитания, умножения и деления. Это множество будем обозначать символом \mathcal{T}_0 , а физическую величину, полностью определяемую одним элементом этого множества, будем называть скаляром или тензором нулевого ранга.

1.4. Полярные и аксиальные векторы

Следующей после скаляров ступенькой в классификации физических величин являются векторы, или тензоры первого ранга. Векторы являются не только и не столько математическими изобретениями, сколько элементами нашего интуитивного мышления. Знание векторов присуще всем людям независимо от их уровня образования. Например, понятием вектора пользовались пираты всех времен для указания места, где спрятаны сокровища. Причем для изображения вектора у пиратов было принято использовать человеческие скелеты, уложенные в виде стрелки. Конечно, векторы как элементы интуитивного мышления не могут быть использованы в рациональных теориях. Для этого необходимо превратить векторы в элементы нашего логического мышления, т. е. превратить их в формализованные структуры.

В физическом пространстве, т. е. в данной системе отсчета, можно наблюдать и фиксировать два принципиально различных типа движения тел. Первый тип движения характеризует перенос (трансляцию) тела в пространстве и может быть назван трансляционным движением. Этот тип движения давно изучен и легко воспринимается нашей интуицией. Второй тип движения характеризует изменение ориентации тела в пространстве. Если размеры тела малы, то при такого рода движении положение тела в пространстве не меняется. Простейшим интуитивным образом здесь может служить малое тело, быстро вращающееся вокруг какой-либо оси, проходящей через это тело. Этот тип движения мы будем называть спинорным движением. Обычно такое движение тела называют вращательным, но последний термин часто приме-

няется и при описании трансляционного движения. Например, говорят, что Земля вращается вокруг Солнца. Но, кроме того, говорят о вращении Земли вокруг собственной оси. Хотя в обоих случаях говорят о вращении, тем не менее речь идет о принципиально различных видах движения. При вращении Земли вокруг Солнца мы имеем типичный пример трансляционного движения, так как при этом изменяется положение Земли в пространстве. При вращении Земли вокруг собственной оси мы имеем типичный пример спинорного движения. Полное движение Земли является комбинацией трансляционного и спинорного движений, причем последнее малосущественно и, как правило, игнорируется, а сама Земля рассматривается как материальная точка. Таким образом, в небесной механике вращательное движение Земли является преимущественно трансляционным. В то же время суточное вращение Земли является преимущественно спинорным движением. Соответственно двум типам движения в физическом пространстве действуют два различных типа векторов.

Первый тип вектора — это направленный отрезок. Чтобы задать этот тип вектора (будем временно называть его прямым вектором), необходимо указать направление в физическом (трехмерном) пространстве и вещественное число (скаляр), называемое длиной (модулем) вектора. Прямые векторы (этот термин далее будет заменен общеупотребительным термином “полярный вектор”) будем обозначать малыми полужирными буквами латинского алфавита: **a**, **b**, **c**, Длина вектора **a** (модуль вектора **a**) обозначается $|\mathbf{a}|$, или $\mathbf{a} \equiv |\mathbf{a}|$. Для измерения длины вектора необходимо иметь эталон длины (мерную линейку). Два вектора **a** и **b** считаются равными, если они имеют одинаковое направление (сонаправлены) в физическом пространстве и одинаковые длины: $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. Вектор, длина которого равна нулю, называется нулевым вектором. Направление нулевого вектора не определено и не имеет значения. Все нулевые векторы эквивалентны между собой. В этом смысле говорят, что существует только один нулевой вектор. Примерами прямых векторов в физике служат: сила, скорость, ускорение, количество движения и т. д. Наиболее естественной интерпретацией прямых векторов является трансляция, т. е. перенос в физическом пространстве. Например, в парке можно увидеть стрелку с надписью “Ресторан”, указывающую направление и содержащую указание “300 метров”. Это означает, что для того чтобы попасть в ресторан, надо перенестись с данного места в указанном направлении на 300 метров. Это типичный пример прямого вектора.

Для описания спинорного движения необходимо ввести в рассмотрение понятие спин-вектора, которое также является элементом нашего интуитивного



Рис. 1.3. Вектор и спин-вектор

мышления. Чтобы убедиться в этом, читатель может провести следующий эксперимент. Пусть он обратится к группе людей (например, филологов), никогда профессионально не имевших дело с математикой или рациональной механикой, и покажет им обычный вращающийся волчок. Далее пусть он обратится к каждому из них с просьбой схематически изобразить увиденное движение на рисунке. Можно не сомневаться, что на каждом из рисунков в том или ином виде будет представлен объект, изображенный на рис. 1.3 под названием спин-вектор.

Формально спин-вектор определяется следующим образом. В физическом (трехмерном) пространстве задается прямая, называемая осью спин-вектора. Затем в плоскости, ортогональной оси спин-вектора, изображается круговая стрелка, идущая вокруг оси и показывающая направление вращения. Длина круговой стрелки называется модулем (длиной) спин-вектора и указывает величину вращения или поворота. Итак, спин-векторы изображают вращения в трехмерном физическом пространстве, в то время как прямые векторы изображают трансляции в этом же пространстве. Подчеркнем, что указанные интерпретации не следует воспринимать слишком буквально. Например, вектор силы (прямой вектор) нельзя интерпретировать как перенос в пространстве, но сила, действующая на свободное тело, вызовет его перенос в пространстве, хотя и не обязательно только перенос. Для того чтобы тело перемещалось без вращения, необходимо выполнить определенные условия. Аналогично, вращающий момент (спин-вектор), приложенный к телу, стремится вызвать поворот этого тела. Короче говоря, указанные интерпретации являются интуитивными ощущениями, которые проявляются у человека постепенно по мере работы с векторами в конкретных ситуациях. В данный момент эти интерпретации необязательны для формального рассмотрения.

Спин-векторы будем обозначать малыми полужирными латинскими буквами с индексом в виде звездочек: \mathbf{a}_* , \mathbf{b}_* , \mathbf{c}_* , ... Такие обозначения, конечно,

неудобны, но они будут использоваться довольно редко. Модуль спин-вектора, т. е. длину круговой стрелки, будем обозначать стандартным образом: $|\mathbf{a}_*|$.

Итак, мы ввели два множества объектов, действующих в трехмерном физическом пространстве: множество направленных отрезков (множество прямых векторов) и множество спин-векторов, конструкция которых описана ранее. Однако работать с двумя множествами элементов различной природы неудобно. Тем более что спин-векторам можно взаимно однозначно поставить в соответствие прямые векторы, если принять дополнительное соглашение, связанное с ориентацией системы отсчета. Ориентация системы отсчета вводится следующим образом.

Пусть дан спин-вектор \mathbf{a}_* . Этому спин-вектору поставим в соответствие прямой вектор \mathbf{a} по следующим **правилам**:

- а) вектор \mathbf{a} расположен на оси спин-вектора \mathbf{a}_* ;
- б) модуль \mathbf{a} равен модулю \mathbf{a}_* : $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}_*|$, т. е. длина направленного отрезка \mathbf{a} равна длине круговой стрелки;
- в) вектор \mathbf{a} направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка показывала вращение против хода часовой стрелки.

Вместо соглашения в) мы с таким же успехом могли бы принять условие г):

- г) вектор \mathbf{a} направлен так, чтобы при взгляде с его конца круговая стрелка показывала вращение по ходу часовой стрелки.

Выбор одной из этих двух возможностей и называется ориентацией системы отсчета.

Определение. Система отсчета называется правоориентированной, если трансляции и вращения в ней согласованы в соответствии с правилами а), б) и в). Система отсчета называется левоориентированной, если трансляции и вращения в ней согласованы в соответствии с правилами а), б) и г).

Таким образом, в ориентированной системе отсчета мы можем работать только с одним множеством: множеством направленных отрезков. Однако в этом множестве все равно сохраняется различие между истинно прямыми векторами и псевдопрямыми векторами, прообразами которых служили спин-векторы. Это различие устанавливается в следующих определениях.

Определение. Направленный отрезок называется полярным вектором (прямым вектором), если при замене ориентации системы отсчета на противоположную упомянутый направленный отрезок не меняется.

Например, если направленный отрезок обозначает смещение некоторого тела из точки A физического пространства в точку B этого же пространства,

то ему (направленному отрезку) совершенно безразлично, какое именно соглашение о положительном направлении вращения мы приняли. Это типичный пример полярного вектора — он “не чувствует” изменения ориентации системы отсчета.

Определение. *Направленный отрезок называется аксиальным вектором (псевдопрямым вектором), если при замене ориентации системы отсчета на противоположную упомянутый направленный отрезок меняет свое направление на противоположное, сохраняя свою длину.*

Полезно помнить, что за аксиальными векторами всегда стоят спин-векторы, т. е. вращения в физическом пространстве. Поэтому с физической точки зрения различие между полярными и аксиальными векторами существенно и неустранимо. Это различие никак не связано с выбором системы координат в системе отсчета. Например, в правоориентированной системе отсчета мы можем использовать как левые, так и правые системы координат, выбор которых совершенно не сказывается ни на полярных, ни на аксиальных векторах. Мы столь долго подходили к понятиям полярного и аксиального векторов и даже позволили себе ввести не используемые в литературе понятия прямого вектора и спин-вектора по той причине, что в этом важном для физика вопросе существует немалая путаница. Начиная с этого места, мы будем использовать общеупотребительные понятия полярного и аксиального векторов.

Замечание. Символические обозначения векторов, показанные на рис. 1.3, являются общеупотребительными — см., например, книгу [18], в которой направленный отрезок трактуется как символ полярного вектора, а спин-вектор трактуется как символ аксиального вектора. Это правильно только до некоторой степени. С формальной точки зрения, которая обязательна в любой рациональной теории, такая трактовка неудовлетворительна. В следующем разделе мы увидим, что и направленный отрезок, и спин-вектор могут быть обоих типов. Например, будут встречаться полярные и аксиальные спин-векторы.

Полярными и аксиальными могут быть не только векторы, т. е. тензоры первого ранга, но и тензоры любого ранга. Во всех случаях тип тензора определяется по его отношению к выбору ориентации в системе отсчета: объекты, не зависящие от выбора ориентации, называются полярными; объекты, которые умножаются на -1 при замене ориентации на противоположную, называются аксиальными. В частности, можно говорить о полярных и аксиальных скалярах, последние чаще называют псевдоскалярами. Понятно, что складывать и вычитать можно скаляры одного типа, ибо в противном случае

результаты сложения и вычитания зависели бы от нашего произвола в выборе ориентации системы отсчета.

1.5. Основные операции с векторами

Мы ввели в рассмотрение множество направленных отрезков. Однако не всякие множества представляют интерес для физики и математики. Интересны только такие множества, на которых удастся ввести законы композиции элементов множества. На множестве направленных отрезков (векторов) вводятся четыре основных закона композиции векторов.

- Первый закон композиции, или правило сложения векторов.
- Второй закон композиции: умножение вектора на скаляр.
- Третий закон композиции: скалярное произведение векторов.

***Определение.** Множество направленных отрезков (векторов), на котором заданы три закона композиции элементов, называется нормированным векторным пространством⁴.*

- Четвертый закон композиции: векторное произведение векторов.

Первые три закона векторов имеют смысл как в ориентированной системе отсчета, так и в неориентированной. Четвертый закон композиции, называемый векторным произведением векторов, имеет смысл только в ориентированной системе отсчета.

Как и всюду, в этой главе мы считаем, что читатель знаком со всеми используемыми здесь понятиями, включая векторное произведение векторов. Однако опыт преподавания показывает, что векторное произведение нуждается в более подробном изложении.

Прежде всего подчеркнем, что использованный нами способ ориентации системы отсчета имеет смысл только в трехмерном пространстве, поскольку спин-векторы однозначно определены только в трехмерном пространстве. Кроме того, важно помнить, что ориентация пространства производится до выполнения каких бы то ни было операций над векторами и в дальнейшем никакие операции с векторами не меняют выбранной ориентации, если только не вводятся специально оговоренные операции. Как правило, нужды в таких

⁴ Более строгое определение нормированного векторного пространства можно найти, например, в [19]. (*Примеч. ред.*)

операциях не возникает, и они не вводятся. В частности, ориентация пространства сохраняется при зеркальных отражениях и других подобных операциях. Это обстоятельство важно запомнить.

Операцию векторного произведения введем в два этапа. Сначала двум направленным отрезкам (прямым векторам) поставим в соответствие спин-вектор. Этот шаг не зависит от выбора ориентации в пространстве. А затем спин-вектору поставим в соответствие прямой вектор по правилам, сформулированным в разделе 1.4. Этот шаг уже непосредственно связан с выбором ориентации. Кажется бы, такое разбиение операции векторного произведения на два шага усложняет дело. Однако к этому легко привыкнуть. Возникающие при этом преимущества в сравнении со стандартным определением мы покажем далее.

Итак, примем следующее определение векторного произведения векторов. Пусть дана упорядоченная пара векторов (направленных отрезков) \mathbf{a} и \mathbf{b} , где \mathbf{a} считается первым (левым) множителем, а вектор \mathbf{b} — вторым (или правым) множителем. Векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} поставим в соответствие спин-вектор \mathbf{c}_* , такой, что:

- а) ось спин-вектора \mathbf{c}_* ортогональна плоскости, натянутой на векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} ;
- б) круговая стрелка показывает направление кратчайшего поворота от вектора \mathbf{a} (левого множителя) к вектору \mathbf{b} (правому множителю);
- в) модуль спин-вектора \mathbf{c}_* , т. е. длина круговой стрелки:

$$|\mathbf{c}_*| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta,$$

где θ — угол кратчайшего поворота от \mathbf{a} к \mathbf{b} .

Для введенного таким образом спин-вектора \mathbf{c}_* примем обозначение

$$\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Согласно принятому определению

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}],$$

так как при изменении порядка сомножителей направление поворота меняется на обратное. Следовательно, порядок сомножителей в произведении $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ оказывается существенным.

Теперь осталось совершить последний шаг и спин-вектору \mathbf{c}_* поставить в соответствие прямой вектор \mathbf{c} по правилу, описанному ранее. Этот шаг уже зависит от выбранной нами ориентации в физическом пространстве (системе отсчета).

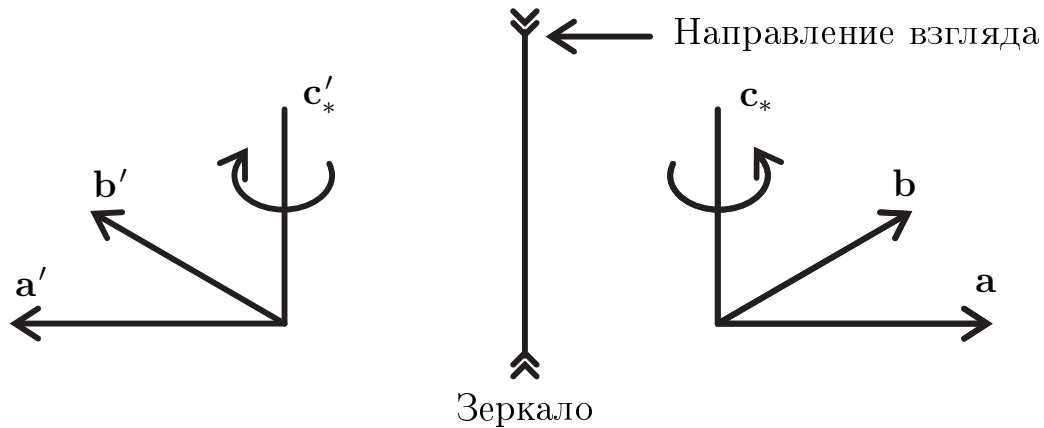


Рис. 1.4. Зеркальное отражение спин-вектора

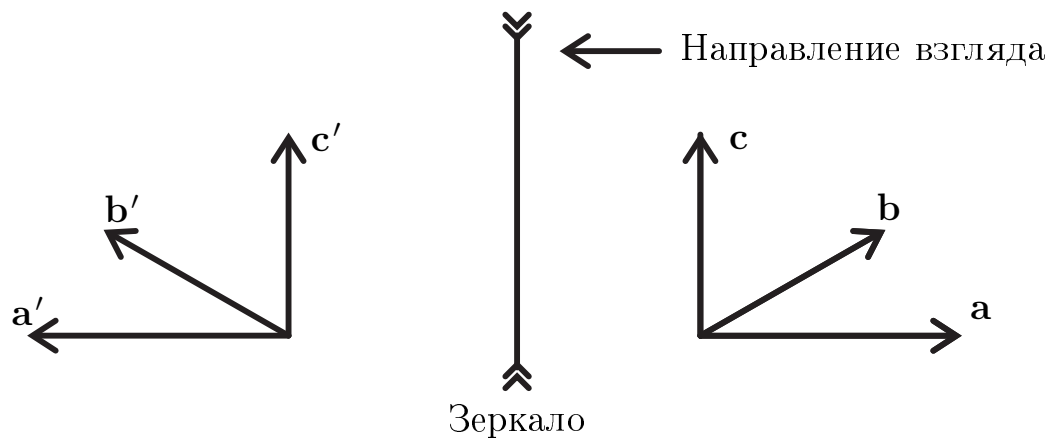


Рис. 1.5. Зеркальное отражение векторного произведения

Прямой вектор \mathbf{c} , соответствующий спин-вектору $\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, называется векторным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} и обозначается

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Сразу же возникает вопрос о типе вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Для ответа на этот вопрос необходимо прежде всего указать тип векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Здесь возможны различные ситуации. Рассмотрим сначала случай, когда \mathbf{a} и \mathbf{b} оба полярны, т. е. не зависят от выбора ориентации в физическом пространстве. Тогда очевидно, что и спин-вектор $\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ не зависит от выбора ориентации системы отсчета, а вектор \mathbf{c} , отвечающий \mathbf{c}_* , напротив, зависит от выбора ориентации и, следовательно, является аксиальным. Покажем, что именно спин-вектор $\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ отвечает физическому, если так можно выразиться, смыслу, а вовсе не аксиальный вектор, который в некотором смысле является нашей выдумкой. Для этого воспользуемся операцией зеркального

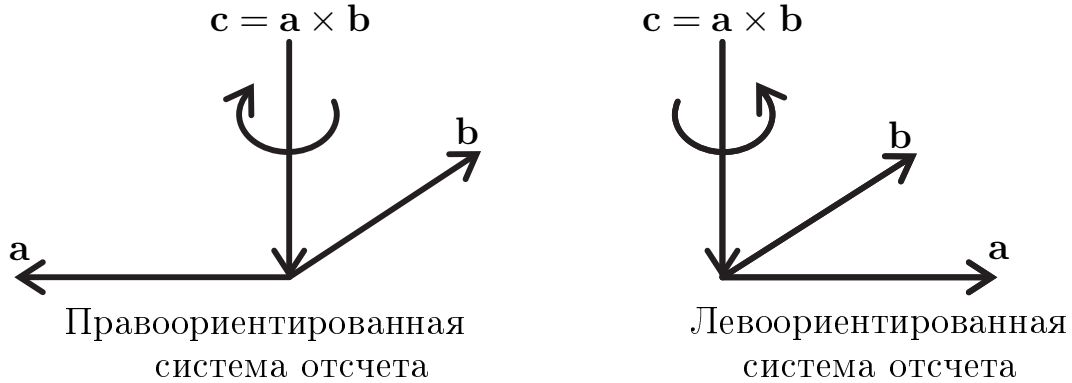


Рис. 1.6. Векторное произведение разнотипных векторов

отражения векторного произведения. На рис. 1.4 плоскость зеркала ортогональна плоскости чертежа и параллельна оси спин-вектора \mathbf{c}_* . Зеркальное отражение спин-вектора полностью согласуется с принятым определением для спин-вектора $\mathbf{c}_* = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, т. е. $\mathbf{c}'_* = [\mathbf{a}', \mathbf{b}']$. В то же время из рис. 1.5 следует, что \mathbf{c}' , т. е. зеркальный образ вектора \mathbf{c} , не равен векторному произведению отраженных векторов \mathbf{a}' и \mathbf{b}' : $\mathbf{c}' \neq \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = \mathbf{c}'' = -\mathbf{c}'$. Это происходит потому, что зеркало (физическая операция) ничего “не знает” о нашем произвольном соглашении об ориентации пространства. Указанная особенность аксиальных объектов будет существенна при определении их групп симметрии.

Итак, векторное произведение двух полярных векторов есть аксиальный вектор. Пусть теперь первый сомножитель есть аксиальный вектор \mathbf{a} , а второй сомножитель есть полярный вектор \mathbf{b} . Каким будет тип вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо выяснить, как ведет себя вектор \mathbf{c} при замене ориентации пространства. На рис. 1.6 показано, что векторное произведение двух векторов различных типов есть полярный вектор, т. е. он не зависит от выбора ориентации в пространстве.

Замечание. Обратим внимание на то, что спин-вектор \mathbf{c}_* , который ставится в соответствие аксиальному вектору \mathbf{a} и полярному вектору \mathbf{b} , сам оказывается аксиальным, т. е. он умножается на -1 при замене ориентации системы отсчета на противоположную. В этом случае операция зеркального отражения покажет неверный результат для отраженного спин-вектора \mathbf{c}_* . Точнее говоря, в зеркале мы увидим неверный образ аксиального вектора \mathbf{a} , а неверный образ спин-вектора \mathbf{c}_* есть следствие неверного зеркального образа аксиального вектора \mathbf{a} .

Легко убедиться, что векторное произведение двух аксиальных векторов есть аксиальный вектор.

1.6. Базис. Взаимный базис. Замена базиса

Мы уже неоднократно упоминали, что рассматриваемое нами физическое пространство трехмерно, но в явном виде не использовали этого понятия.

Определение. Векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} называются линейно независимыми, если равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

где α , β , γ — скаляры, возможно в том и только в том случае, когда $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

В трехмерном пространстве такие тройки линейно независимых векторов существуют, но любые четыре вектора являются линейно зависимыми. В противном случае пространство, в котором существуют четверки линейно независимых векторов, было бы, как минимум, четырехмерным. Из определения линейной независимости векторов сразу же следует, что нулевой вектор не может входить в систему линейно независимых векторов. Геометрически линейная зависимость трех векторов означает, что все три вектора лежат в одной плоскости. Отсюда очевидна возможность дать другое определение линейно независимой системе трех векторов.

Определение. Система трех векторов линейно независима тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0. \quad (1.10)$$

Смысл этого определения становится очевидным, если вспомнить, что модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

Определение. Любая тройка линейно независимых векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 называется базисом.

Название объясняется тем, что любой вектор \mathbf{a} может быть представлен в виде разложения по векторам базиса. В самом деле любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы, т. е. равенство

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{e}_1 + \gamma \mathbf{e}_2 + \omega \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

возможно, когда не все скалярные коэффициенты равны нулю. Понятно, что $\alpha \neq 0$. В противном случае векторы \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 были бы линейно зависимы. Поэтому из предыдущего равенства следует

$$\mathbf{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{e}_1 - \frac{\gamma}{\alpha} \mathbf{e}_2 - \frac{\omega}{\alpha} \mathbf{e}_3,$$

или

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3; \quad a^1 \equiv -\frac{\beta}{\alpha}; \quad a^2 = -\frac{\gamma}{\alpha}; \quad a^3 = -\frac{\omega}{\alpha},$$

где числа a^1, a^2, a^3 называются координатами вектора \mathbf{a} относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Удобно использовать индексную запись: \mathbf{e}_i (где $i = 1, 2, 3$) означает тройку векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, обозначение \mathbf{a}^i (где $i = 1, 2, 3$) — тройку чисел a^1, a^2, a^3 . Примем соглашение, что малые латинские индексы всегда пробегают значения $1, 2, 3$, и отдельно оговаривать это не будем. Таким образом, \mathbf{c}_i означает тройку $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Теперь разложение вектора \mathbf{a} можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \mathbf{e}_i \equiv \sum_{m=1}^3 a^m \mathbf{e}_m \equiv a^i \mathbf{e}_i \equiv a^m \mathbf{e}_m. \quad (1.11)$$

Здесь мы приняли соглашение о суммировании Эйнштейна: если в одном выражении встречается пара одинаковых, но разновысоких индексов, то по ним подразумевается суммирование от 1 до 3. Индекс суммирования называется немым, и его можно заменить любым другим. Нельзя допускать в одном выражении двух одинаковых пар немых индексов, так как возникает неясность, по каким именно парам идет суммирование. Например, при вычислении скалярного произведения $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ нужно писать так:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m \cdot a^n \mathbf{e}_n = a^m a^n \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv \sum_{m,n=1}^3 a^m a^n \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n.$$

Как вычислить координаты вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}_i ? Возможны разные подходы. Стандартным подходом принято считать введение взаимного базиса к базису \mathbf{e}_i . Взаимный базис обозначается той же корневой буквой, но индекс ставится сверху, т. е. взаимный базис к базису \mathbf{e}_i обозначается \mathbf{e}^m . Взаимный базис строится так, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^m = \begin{cases} 1, & m = i; \\ 0, & m \neq i, \end{cases} \quad (1.12)$$

где δ_i^m называется символом Кронекера.

В (1.12) содержатся девять равенств, которые получаются, если индексам m, i придавать различные значения от 1 до 3. Например, для вектора взаимного базиса \mathbf{e}^3 получим три равенства:

$$\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0; \quad \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0; \quad \mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1. \quad (1.13)$$

Из равенств (1.13) следует, что \mathbf{e}^3 ортогонален плоскости, натянутой на векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , и направлен так, чтобы угол между векторами \mathbf{e}_3 и \mathbf{e}^3 был меньше $\pi/2$. Последнее следует из того, что

$$\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = |\mathbf{e}^3| |\mathbf{e}_3| \cos \theta = 1,$$

где θ — угол между векторами \mathbf{e}_3 и \mathbf{e}^3 , и косинус этого угла должен быть положительным.

Поскольку угол θ не может быть больше π , то в этой области косинус положителен при углах, меньших $\pi/2$. По равенствам (1.13) видно, что взаимные векторы действительно существуют и строятся однозначно по векторам базиса \mathbf{e}_m .

Нетрудно доказать равенства

$$\mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}; \quad \mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}. \quad (1.14)$$

Допустим, что мы построили взаимный базис \mathbf{e}^n . Легко понять, что векторы \mathbf{e}^m линейно независимы, если \mathbf{e}_m — базис, поэтому использование для \mathbf{e}^s термина “базис” вполне оправданно. Таким образом, мы имеем два базиса, связанные соотношениями (1.12), что и оправдывает термин “взаимный (или дуальный) базис”. Вычислим координаты вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}_i . С этой целью вычислим скалярное произведение

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m = a^s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}^m = a^s \delta_s^m \equiv \sum_{s=1}^3 a^s \delta_s^m = a^1 \delta_1^m + a^2 \delta_2^m + a^3 \delta_3^m = a^m.$$

Последнее равенство в цепочке связано со свойством символа Кронекера: из трех слагаемых отлично от нуля только то, в котором символ Кронекера равен единице, например,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^2 = a^s \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}^2 = a^s \delta_s^2 = a^1 \delta_1^2 + a^2 \delta_2^2 + a^3 \delta_3^2 = a^2.$$

Итак, координаты вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}_i вычисляются умножением вектора \mathbf{a} скалярно на векторы взаимного базиса \mathbf{e}^m :

$$\mathbf{a} = a^m \mathbf{e}_m; \quad a^m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m.$$

Поскольку векторы взаимного базиса \mathbf{e}^m сами могут использоваться в качестве базиса, то вектор \mathbf{a} может быть представлен в виде разложения по векторам \mathbf{e}^i :

$$\mathbf{a} = a_m \mathbf{e}^m \equiv a_1 \mathbf{e}^1 + a_2 \mathbf{e}^2 + a_3 \mathbf{e}^3,$$

где числа \mathbf{a}_m называются координатами вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}^s .

Эти координаты \mathbf{a}_m в общем случае не совпадают с координатами \mathbf{a}^s вектора \mathbf{a} относительно исходного базиса \mathbf{e}_i , хотя и обозначаются одной и той же корневой буквой, но индексы у них находятся в разных позициях: у одних — вверху, а у других — внизу. Таким образом, положение индекса (вверху или внизу) имеет значение, ибо $\mathbf{a}^m \neq \mathbf{a}_m$. Правило для постановки индекса (вверху или внизу) мы установим далее. Для базиса \mathbf{e}^m взаимным оказывается базис \mathbf{e}_s , что сразу же дает нам возможность вычислить координаты вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}^m :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m = \mathbf{a}_s \mathbf{e}^s \cdot \mathbf{e}_m = \mathbf{a}_s \delta_m^s = \mathbf{a}_m. \quad (1.15)$$

Полезно запомнить следующие часто используемые тождества:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_s) \mathbf{e}^s. \quad (1.16)$$

Иногда исходный и взаимный базисы совпадают. Это происходит тогда и только тогда, когда базис \mathbf{e}_i — ортонормирован, т. е. векторы \mathbf{e}_i являются единичными и попарно ортогональными между собой:

$$|\mathbf{e}_i| = 1; \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_m = 0 \quad (i \neq m). \quad (1.17)$$

В этом случае очевидно, что $\mathbf{e}^m = \mathbf{e}_m$ и $\mathbf{a}^m = \mathbf{a}_m$, т. е. положение индекса становится безразличным. Именно этот случай чаще всего и используется в первоначальных курсах механики. Считается, что использование ортонормированных базисов упрощает изложение, ибо не нужно вводить взаимный базис. Но на самом деле эти упрощения заметны тогда и только тогда, когда активно используются “фигуры умолчания”, т. е. сознательно не упоминаются достаточно важные обстоятельства. При обсуждении многих вопросов использование неортогональных базисов облегчает положение. Поэтому мы будем использовать взаимный базис \mathbf{e}^m даже тогда, когда он совпадает с исходным ортонормированным базисом \mathbf{e}_m .

Важным является понятие фундаментальной матрицы:

$$\mathbf{g}_{mn} \equiv \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n. \quad (1.18)$$

Мы используем, следуя традиции, термин “матрица” для совокупности девяти чисел \mathbf{g}_{mn} . Однако здесь имеется некоторое различие. Матрица порядка $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$ — это таблица, содержащая \mathbf{N} строк и \mathbf{M} столбцов. При этом важно не путать их местами. Что касается фундаментальной матрицы (1.18), то это просто совокупность девяти чисел, которые совсем не обязательно представлять себе в виде таблицы 3×3 . Никакие правила из теории матриц здесь не

нужны. Все операции указываются в явном виде. Вместе с тем иногда удобно рассматривать \mathbf{g}_{mn} и как матрицу. Следующие записи для нас будут эквивалентными:

$$\mathbf{g}_{mn} \equiv (\mathbf{g}_{mn}) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} \\ \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{32} & \mathbf{g}_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

В тех случаях, когда совокупность девяти чисел \mathbf{g}_{mn} представляется в виде таблицы (квадратной матрицы 3×3), мы будем считать, что первый индекс означает номер строки, а второй индекс — номер столбца. Смысл фундаментальной матрицы \mathbf{g}_{mn} ясен из определения (1.18) и тождества (1.16):

$$\mathbf{e}_m = (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}^n = \mathbf{g}_{mn} \mathbf{e}^n = \mathbf{g}_{m1} \mathbf{e}^1 + \mathbf{g}_{m2} \mathbf{e}^2 + \mathbf{g}_{m3} \mathbf{e}^3. \quad (1.20)$$

Иными словами, \mathbf{g}_{mn} — это коэффициенты разложения векторов исходного базиса по векторам взаимного базиса. Точно так же можно ввести в рассмотрение взаимную фундаментальную матрицу:

$$\mathbf{g}^{mn} \equiv \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^n, \quad \mathbf{e}^m = (\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}^n) \mathbf{e}_n = \mathbf{g}^{mn} \mathbf{e}_n, \quad (1.21)$$

элементы которой являются коэффициентами разложения векторов взаимного базиса по векторам исходного базиса. Ясно, что матрицы \mathbf{g}^{mn} и \mathbf{g}_{pq} как-то связаны между собой, поскольку векторы взаимного базиса строятся по векторам исходного базиса однозначно. Эта связь немедленно вытекает из (1.12), (1.20) и (1.18). В самом деле

$$\mathbf{e}^p \cdot \mathbf{e}_q = (\mathbf{g}^{pm} \mathbf{e}_m) \cdot (\mathbf{g}_{qs} \mathbf{e}^s) = \mathbf{g}^{pm} \mathbf{g}_{qs} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}^s = \mathbf{g}^{pm} \mathbf{g}_{qs} \delta_m^s = \mathbf{g}^{pm} \mathbf{g}_{qm} = \delta_q^p. \quad (1.22)$$

Иными словами, матрицы \mathbf{g}^{mn} и \mathbf{g}_{pq} взаимно обратны. Обратим внимание на то, что здесь слегка нарушено матричное правило: умножаются не строки на столбцы, а столбцы на столбцы. Это произошло потому, что в данном случае мы так ввели матрицы \mathbf{g}_{mn} и \mathbf{g}^{mn} . Можно было бы ввести их чуть-чуть иначе, и матричное правило было бы соблюдено. Сделали мы это сознательно, чтобы еще раз подчеркнуть, что матричные правила здесь не нужны: все операции указаны в (1.22) явно. Обратим внимание на то, что объекты \mathbf{g}_{mn} и \mathbf{g}^{pq} симметричны относительно индексов:

$$\mathbf{g}_{mn} = \mathbf{g}_{nm}; \quad \mathbf{g}^{pq} = \mathbf{g}^{qp}. \quad (1.23)$$

Поэтому (1.22) можно переписать в эквивалентных формах:

$$\mathbf{g}^{pq} \mathbf{g}_{qm} = \mathbf{g}^{pq} \mathbf{g}_{mq} = \mathbf{g}^{qp} \mathbf{g}_{mq} = \delta_m^p. \quad (1.24)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{g} \equiv \det(\mathbf{g}_{mn}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} \\ \mathbf{g}_{31} & \mathbf{g}_{32} & \mathbf{g}_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.25)$$

Нетрудно доказать равенства:

$$\mathbf{g} = |(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3|^2; \quad (1.26)$$

$$\frac{1}{\mathbf{g}} = \det(\mathbf{g}^{mn}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{g}^{11} & \mathbf{g}^{12} & \mathbf{g}^{13} \\ \mathbf{g}^{21} & \mathbf{g}^{22} & \mathbf{g}^{23} \\ \mathbf{g}^{31} & \mathbf{g}^{32} & \mathbf{g}^{33} \end{vmatrix}. \quad (1.27)$$

Если совокупность девяти чисел \mathbf{g}_{mn} задана, т. е. заданы векторы базиса \mathbf{e}_m и по ним найдены \mathbf{g}_{mn} , то совокупность чисел \mathbf{g}^{mn} находится очень легко по правилам, даваемым теорией матриц, а именно:

$$\mathbf{g}^{mn} = \text{Cof}(\mathbf{g}_{nm})/\mathbf{g}, \quad (1.28)$$

где кофактор $\text{Cof}(\mathbf{g}_{ij})$ — определитель, полученный из (1.25) вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, умноженный на $(-1)^{i+j}$, например,

$$\mathbf{g}^{13} = \frac{1}{\mathbf{g}}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \mathbf{g}_{12} & \mathbf{g}_{13} \\ \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{23} \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{g}_{12}\mathbf{g}_{23} - \mathbf{g}_{13}\mathbf{g}_{22}}{\mathbf{g}}.$$

Следует обратить внимание на индексы в (1.28): при построении элемента \mathbf{g}^{rs} кофактор находится для элемента \mathbf{g}_{sr} . Впрочем, поскольку матрица \mathbf{g}_{mn} симметрична, то это обстоятельство в данном случае не имеет значения. Таким образом, построение взаимного базиса \mathbf{e}^s сводится к выполнению следующих шагов: 1) по \mathbf{e}_m вычисляется $\mathbf{g}_{st} = \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{e}_t$; 2) по (1.25) находится $\mathbf{g} = \det(\mathbf{g}_{mn})$; 3) по (1.28) вычисляются \mathbf{g}^{st} ; 4) по (1.21) строятся $\mathbf{e}^m = \mathbf{g}^{mp}\mathbf{e}_p$. Для нас важна не столько процедура построения взаимного базиса, сколько его существование и единственность.

Нетрудно доказать, что координаты \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}_m однозначно связаны с координатами \mathbf{a} относительно взаимного базиса \mathbf{e}^m :

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{g}_{mp}\mathbf{a}^p; \quad \mathbf{a}^p = \mathbf{g}^{pq}\mathbf{a}_q. \quad (1.29)$$

До сих пор мы использовали верхние и нижние индексы без каких-либо объяснений. Это было возможно, так как величины \mathbf{a}_m и \mathbf{a}^n рассматривались нами просто как различные тройки чисел. Теперь настала пора ввести строгое правило для определения положения индекса: вверху или внизу. В дальнейшем положение индекса будет нести вполне определенный смысл, и станет

ясно, почему правило суммирования Эйнштейна распространяется только на разновысокие индексы. Для этого необходимо установить, как и на что влияет замена базиса. Ведь выбор базиса является нашим произволом, поэтому сам вектор \mathbf{a} не может меняться при замене базиса. В то же время координаты вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}_m при замене последнего меняются, но меняются так, чтобы сумма $\mathbf{a}^m \mathbf{e}_m$ при этом не менялась.

Пусть дан базис \mathbf{e}_m . Вместо этого базиса мы можем ввести новый базис \mathbf{e}_p^* . Новый базис удобнее обозначать не заменой корневой буквы (\mathbf{e} на \mathbf{e}^*), а постановкой штриха у индекса: $\mathbf{e}_p^* \equiv \mathbf{e}_{p'}$ ($\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$). Векторы $\mathbf{e}_{p'}$ нового базиса могут быть представлены в виде разложения по векторам старого базиса \mathbf{e}_s :

$$\mathbf{e}_{m'} = h_{m'}^n \mathbf{e}_n \quad (h_{m'}^n = \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}^n). \quad (1.30)$$

И, наоборот, векторы старого базиса могут быть представлены в виде разложения по векторам нового базиса:

$$\mathbf{e}_n = h_n^{m'} \mathbf{e}_{m'} \quad (h_n^{m'} = \mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_{m'}). \quad (1.31)$$

Совокупности чисел $h_n^{m'}$ и $h_{m'}^n$ — различные совокупности, но они тесно связаны между собой:

$$h_{p'}^n h_m^{p'} = (\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_{p'}) (\mathbf{e}^{p'} \cdot \mathbf{e}_m) \equiv \mathbf{e}^n \cdot [\mathbf{e}_{p'} (\mathbf{e}^{p'} \cdot \mathbf{e}_m)] = \mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_m = \delta_m^n; \quad (1.32)$$

$$h_p^n h_n^{t'} = (\mathbf{e}^n \cdot \mathbf{e}_{p'}) (\mathbf{e}^{t'} \cdot \mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_{p'} \cdot [\mathbf{e}^n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}^{t'})] = \mathbf{e}_{p'} \cdot \mathbf{e}^{t'} = \delta_p^{t'}. \quad (1.33)$$

Если совокупности $h_n^{m'}$ и $h_{m'}^n$ воспринимать как матрицы, то соотношения (1.32) и (1.33) показывают, что эти матрицы взаимно обратны. Совокупность чисел $h_{m'}^n$, входящую в преобразование (1.30), будем называть матрицей прямого преобразования, а совокупность $h_p^{n'}$, входящую в обратное преобразование (1.31), будем называть матрицей обратного преобразования. Итак, связь между старым и новым базисами дается формулами (1.32) и (1.33). Выясним, как связаны между собой старый и новый взаимные базисы. По определению взаимного базиса

$$\mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_{n'} = \delta_n^m.$$

Умножая эти уравнения на $h_p^{n'}$ и суммируя по n , получаем

$$\mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_{n'} h_p^{n'} = \delta_n^m h_p^{n'} = h_p^{m'} \Rightarrow \mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_p = h_p^{m'}.$$

Умножая последнее равенство на \mathbf{e}^p и вспоминая тождества (1.16), получаем

$$\mathbf{e}^{m'} = h_p^{m'} \mathbf{e}^p. \quad (1.34)$$

Таким образом, если новый и старый основные базисы связаны прямым преобразованием, то новый и старый взаимные базисы связаны обратным преобразованием. Формулы преобразования (1.30) и (1.34) являются ключом для правила расстановки индексов (вверху или внизу).

Рассмотрим некую тройку чисел $\mathbf{c}(\mathbf{e}_m)$, зависящую от выбора базиса. Зависимость от базиса обычно указывается индексом: $\mathbf{c}(\mathbf{e}_m) \equiv \mathbf{c}_{(m)}$.

Определение. Если тройка чисел $\mathbf{c}_{(m)}$ при замене базиса преобразуется в соответствии с законом (1.30):

$$\mathbf{c}_{(m')} = \sum_{n=1}^3 h_{m'}^n \mathbf{c}_{(n)},$$

то она называется ковариантным объектом первого порядка (порядок объекта определяется числом индексов: \mathbf{a}_m — объект первого порядка; \mathbf{g}_{mn} — объект второго порядка).

Индекс у ковариантного объекта ставится внизу: $\mathbf{c}_{(m)} = \mathbf{c}_m$. Смысл термина “ковариантный” означает, что объект меняется по тому же закону, что и базис.

Определение. Если тройка чисел $\mathbf{c}_{(m)}$ при замене базиса преобразуется в соответствии с законом (1.34):

$$\mathbf{c}_{(m')} = \sum_{n=1}^3 h_n^{m'} \mathbf{c}_{(n)},$$

то она называется контравариантным объектом первого порядка.

Индекс у контравариантного объекта ставится сверху: $\mathbf{c}^{(m)} = \mathbf{c}^m$. Термин “контравариантность” означает, что объект при замене базиса преобразуется по закону, противоположному (обратному) закону преобразования базиса. Если, наконец, тройка чисел $\mathbf{c}_{(m)}$ при замене базиса преобразуется по закону, отличному от (1.30) или (1.34), то такой объект первого порядка называется нетензорным и индекс у него заключается в скобки: $\mathbf{c}^{(m)}$ или $\mathbf{c}_{(m)}$. В этом случае расположение индекса не несет смысловой нагрузки. Рассмотрим с этой точки зрения координаты вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}_m , т. е. числа \mathbf{a}^m . Относительно старого базиса они определяются формулой $\mathbf{a}^m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^m$. Относительно нового базиса они определяются аналогичной формулой:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{m'} \mathbf{e}_{m'} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^{m'} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{m'}.$$

Сам вектор \mathbf{a} от выбора базиса не зависит. С учетом формулы (1.34)

$$\mathbf{a}^{m'} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{m'} = \mathbf{a} \cdot h_p^{m'} \mathbf{e}^p = h_p^{m'} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^p = h_p^{m'} \mathbf{a}^p.$$

Из этой формулы видим, что \mathbf{a}^m является контравариантным объектом первого порядка и верхнее положение индекса у него оправданно. По этой причине координаты вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}_m называются контравариантными координатами вектора.

Координаты вектора \mathbf{a} относительно взаимного базиса, т. е. числа $\mathbf{a}_m = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_m$, преобразуются при замене базиса по формулам

$$\mathbf{a}_{m'} = h_{m'}^p \mathbf{a}_p.$$

Поэтому координаты вектора \mathbf{a} относительно взаимного базиса \mathbf{e}^p называются ковариантными координатами \mathbf{a} . Теперь уже легко понять, каким образом вектор \mathbf{a} , представленный в виде разложения по величинам, меняющимся при замене базиса, тем не менее от выбора базиса не зависит:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{m'} \mathbf{e}_{m'} = h_p^{m'} \mathbf{a}^p h_{m'}^q \mathbf{e}_q = h_p^{m'} h_{m'}^q \mathbf{a}^p \mathbf{e}_q = \delta_p^q \mathbf{a}^p \mathbf{e}_q = \mathbf{a}^p \mathbf{e}_p.$$

Природа этого обстоятельства состоит в том, что базис \mathbf{e}_p и координаты вектора \mathbf{a} относительно базиса \mathbf{e}_p меняются по взаимно обратным законам, так что изменение одного компенсируется изменением другого. Также понятным становится и соглашение о суммировании, которое распространяется на разновысокие индексы: только такие суммы дают в результате величины, которые не зависят от выбора базиса и, следовательно, могут претендовать на физический смысл. Фундаментальная матрица g_{mn} есть ковариантный объект второго порядка, или, что то же самое, дважды ковариантный объект:

$$g_{m'n'} = \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}_{n'} = h_p^{m'} h_{n'}^q \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_q = h_p^{m'} h_{n'}^q g_{pq}.$$

Обратим внимание на то, что каждый индекс преобразуется независимо друг от друга по закону преобразования базиса. Взаимная фундаментальная матрица является дважды контравариантным объектом:

$$g^{m'n'} = \mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}^{n'} = h_p^{m'} h_q^{n'} \mathbf{e}^p \cdot \mathbf{e}^q = h_p^{m'} h_q^{n'} g^{pq}.$$

Ранее в рассмотрение был введен символ Кронекера δ_n^m как совокупность девяти чисел, из которых три равны единице, а остальные шесть равны нулю. Вообще говоря, эта совокупность девяти чисел никак не связана с выбором базиса и его заменами. Однако легко убедиться, что символ Кронекера можно рассматривать как смешанный объект второго порядка: один раз ковариантный и один раз контравариантный. Действительно, можно рассуждать следующим образом. Будем рассматривать δ_n^m как совокупность, данную в выбранном базисе \mathbf{e}_m , и потребуем, чтобы при замене базиса она менялась

в соответствии с законами, по которым меняются ковариантные и контравариантные индексы. Тогда в другом базисе мы получим уже какой-то другой объект \mathbf{a}_n^m :

$$\mathbf{a}_{n'}^{m'} = h_p^{m'} h_n^q \delta_q^p = h_p^{m'} h_{n'}^p = \delta_{n'}^{m'} = \delta_n^m.$$

Таким образом, данная выкладка показала, что в результате перехода мы получили не “какой-то другой объект \mathbf{a}_n^m ”, а вновь пришли к исходному символу Кронекера, т. е. той же совокупности девяти чисел, состоящей из трех единиц и шести нулей. Это не случайность. На самом деле все рассмотренные нами объекты второго порядка \mathbf{g}_{mn} , \mathbf{g}^{mn} , δ_n^m являются координатами одного и того же объекта, а именно единичного тензора второго ранга. Поэтому δ_n^m уместно назвать смешанной фундаментальной матрицей, но это название в литературе не используется. Можно ввести объекты более высоких порядков. Правила (1.30) и (1.34), использованные для объектов первого порядка, могут применяться и для объектов произвольного порядка.

Определение. Объект $C_{m_1 m_2 \dots m_q}^{n_1 n_2 \dots n_p}$, который имеет p верхних индексов и q нижних индексов, и является, таким образом, объектом порядка $s = p + q$, называется p раз контравариантным и q раз ковариантным, если при замене базиса выполняются следующие соотношения:

$$C_{m'_1 m'_2 \dots m'_q}^{n'_1 n'_2 \dots n'_p} = \underbrace{h_{t_1}^{n'_1} h_{t_2}^{n'_2} \dots h_{t_p}^{n'_p}}_{p \text{ множителей}} \underbrace{h_{m'_1}^{s_1} h_{m'_2}^{s_2} \dots h_{m'_q}^{s_q}}_{q \text{ множителей}} C_{s_1 s_2 \dots s_q}^{t_1 t_2 \dots t_p}.$$

1.7. Скалярные функции векторного аргумента

При построении физических теорий часто приходится вводить в рассмотрение тензорные функции нескольких тензорных аргументов. Поэтому свободное владение такого рода функциями составляет важнейшую часть тензорного языка. В данном разделе мы начинаем знакомство с тензорными функциями в их простейшей реализации, а именно мы познакомимся с отображениями вида $\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_0$, т. е. со скалярными функциями одного векторного аргумента. В заключительной части этого раздела будут рассмотрены скалярные функции нескольких векторных аргументов.

Рассмотрение начнем с изучения скалярных полей. Пусть дана скалярная функция

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{t}). \quad (1.35)$$

Иными словами, в каждой точке системы отсчета (или в какой-либо области системы отсчета) нам задана некая величина, которая может меняться

во времени. Точки системы отсчета будем идентифицировать координатами $\mathbf{y}^k(\mathbf{t})$, которые могут меняться во времени. Посмотрим, как меняется функция \mathbf{u} при переходе из точки \mathbf{r} в точку $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{u} = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{t}) - f(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = f(\mathbf{y}^k + d\mathbf{y}^k, \mathbf{t}) - f(\mathbf{y}^k, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial y^k} d\mathbf{y}^k. \quad (1.36)$$

При получении формул (1.36) подразумевается, что время фиксировано, т. е. все рассмотрения носят мгновенный характер.

Отметим справедливость равенств:

$$d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y^k} d\mathbf{y}^k = d\mathbf{y}^k \mathbf{r}^k \Rightarrow d\mathbf{y}^k = \mathbf{r}^k \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.37)$$

Подставляя (1.37) в выражение (1.36) и учитывая определение оператора градиента $\nabla = \mathbf{r}^k \frac{\partial}{\partial y^k}$, получаем

$$d\mathbf{u} = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \nabla f. \quad (1.38)$$

По определению, коэффициент при $d\mathbf{r}$ называется производной от функции $f(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ по вектору \mathbf{r} :

$$\frac{df(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial y^k} \mathbf{r}^k = \nabla f. \quad (1.39)$$

Таким образом, производная от скалярной функции по вектору, или, что то же самое, градиент скалярной функции, является вектором.

Рассмотрим несколько простых примеров вычисления производных по вектору.

Линейная функция вектора:

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{b} \Rightarrow d\mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \nabla f = \mathbf{a}.$$

Изотропная скалярная функция вектора (точный смысл этого термина будет установлен позднее, когда будут введены все необходимые понятия) может быть выражена как функция модуля векторного аргумента:

$$\mathbf{u} = f(r^2) = f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \Rightarrow d\mathbf{u} = \frac{df}{d(r^2)} 2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \nabla f = 2 \frac{df}{d(r^2)} \mathbf{r}.$$

Градиент скалярной функции, будучи вектором, характеризуется модулем и направлением. Что касается модуля градиента, то он вычисляется стандартным образом:

$$|\nabla f|^2 = \nabla f \cdot \nabla f = g^{mn} \frac{\partial f}{\partial y^m} \frac{\partial f}{\partial y^n},$$

где использовано правило суммирования по повторяющимся индексам.

Несколько сложнее устанавливается направление градиента скалярной функции. Для этого введем в рассмотрение понятие поверхности равного уровня. Эта поверхность определяется уравнением

$$f(\mathbf{r}) = H = \text{const.} \quad (1.40)$$

Меняя здесь значение постоянной H , получаем семейство поверхностей равного уровня функции f . Выберем какую-либо точку \mathbf{r}_0 . Тогда вместо (1.40) получим

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0). \quad (1.41)$$

Рассмотрим малую окрестность точки \mathbf{r}_0 , принадлежащую поверхности (1.41). Положения точек этой окрестности определяются заданием векторов $\mathbf{r}_0 + \mathbf{dr}$, где совокупность векторов \mathbf{dr} образует плоскость, касательную к поверхности уровня в точке \mathbf{r}_0 . Для рассматриваемых точек согласно (1.41)

$$f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{dr}) = f(\mathbf{r}_0) + \nabla f \cdot \mathbf{dr} = f(\mathbf{r}_0) \quad \Rightarrow \quad \nabla f \cdot \mathbf{dr} = 0. \quad (1.42)$$

Поскольку векторы \mathbf{dr} принадлежат касательной плоскости, то последнее равенство в (1.42) показывает, что градиент скалярной функции направлен по нормали к поверхности уровня. Итак, для скалярных полей производная по вектору положения совпадает с градиентом скалярного поля. В общем случае скалярной функции векторного аргумента это уже не так. Градиент такой функции, вообще говоря, не определен, но понятие производной по векторному аргументу сохраняется. Для введения понятия производной по вектору предварительно докажем один простой факт, относящийся к линейным скалярным функциям векторного аргумента.

Определение. Скалярная функция

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{v}) \quad (1.43)$$

векторного аргумента \mathbf{v} называется линейной, если для любых скаляров α , β и любых векторов \mathbf{x} , \mathbf{y} справедливы равенства

$$f(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}). \quad (1.44)$$

Утверждение. Любая линейная функция векторного аргумента \mathbf{v} может быть представлена в виде скалярного произведения

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.45)$$

где вектор

$$\mathbf{f} = f(\mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k \quad (1.46)$$

называется вектором линейного отображения и не зависит от выбора базиса \mathbf{e}_k .

Доказательство немедленно вытекает из определения линейной функции (1.44). Представим вектор \mathbf{v} в виде разложения по произвольно выбранному базису \mathbf{e}_k и воспользуемся (1.44). Тогда получим

$$f(\mathbf{v}) = f(v^k \mathbf{e}_k) = v^k f(\mathbf{e}_k) = f(\mathbf{e}_k) (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{v}) = (f(\mathbf{e}_k) \mathbf{e}^k) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},$$

где вектор \mathbf{f} определен выражением (1.46).

Теперь уже нетрудно ввести определение производной от скалярной функции векторного аргумента (1.43). Дифференциал функции (1.43)

$$d\mathbf{u} = f(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - f(\mathbf{v})$$

является линейной функцией вектора $d\mathbf{v}$. Поэтому согласно доказанному утверждению обсуждаемый дифференциал может быть представлен в виде

$$d\mathbf{u} = df(\mathbf{v}) = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{v})}{d\mathbf{v}}. \quad (1.47)$$

Вектор \mathbf{L} в выражении (1.47) по определению называется производной от скалярной функции по вектору. Желающие получить более строгое изложение теории дифференцирования на абстрактных множествах могут обратиться к главе VIII книги [20].

Производную от скалярной функции по вектору можно вычислять и по формуле, вполне аналогичной (1.39), если функцию вектора рассматривать как функцию координат вектора относительно некоторого базиса \mathbf{e}_k :

$$f(\mathbf{v}) = F(v^1, v^2, v^3), \quad \mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k, \quad v^k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^k.$$

Теперь простые выкладки дают

$$df = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F}{\partial v^k} dv^k = \frac{\partial F}{\partial v^k} \mathbf{e}^k \cdot d\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{v}} = \frac{\partial F}{\partial v^k} \mathbf{e}^k. \quad (1.48)$$

Здесь следует обратить внимание на два обстоятельства. Первое — базис \mathbf{e}_k может зависеть от точек системы отсчета, т. е. в некотором смысле является переменным. Но он не зависит от вектора \mathbf{v} . Поэтому при вычислении дифференциала вектора \mathbf{v} базисные векторы должны рассматриваться как постоянные:

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{v} = (dv^k) \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad dv^k = \mathbf{e}^k \cdot d\mathbf{v}.$$

Второе обстоятельство заключается в том, что производная от скалярной функции по контравариантному объекту является ковариантным объектом и, наоборот, производная по ковариантному объекту является контравариантным объектом. Поэтому производная от скаляра по вектору (1.48) не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим скалярную функцию двух векторных аргументов

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \quad (1.49)$$

Дифференциал этой функции является билинейной функцией векторов $d\mathbf{v}_1$ и $d\mathbf{v}_2$:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{L}_1 \cdot d\mathbf{v}_1 + \mathbf{L}_2 \cdot d\mathbf{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L}_1 = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_1}, \quad \mathbf{L}_2 = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_2}. \quad (1.50)$$

Формулами (1.50) устанавливаются частные производные от скалярной функции по векторным аргументам.

1.8. Необходимость введения тензоров второго ранга

Известно, что скаляры (тензоры нулевого ранга) и векторы (тензоры первого ранга) не удовлетворяют всех потребностей в понятиях, необходимых при построении механики. Тем не менее евклидово ориентированное пространство \mathcal{T}_1 , элементами которого являются векторы, играет определяющую роль и при введении объектов более сложной природы — тензоров высших рангов. Более того, человек, свободно владеющий понятием вектора, не будет испытывать ни малейших затруднений при работе с тензорами высших рангов. Последние являются элементами множеств, которые вводятся посредством специальных конструкций, называемых тензорными произведениями векторных пространств. Но прежде чем переходить к построению тензорных произведений, покажем, что мы действительно нуждаемся в тензорах высших рангов.

В 1638 г. вышла в свет книга Г. Галилея “Беседы о двух новых науках” [21], сыгравшая огромную роль в развитии рациональной механики. В ней, при обсуждении проблемы прочности каната на разрыв, Г. Галилей ввел понятие напряжения. Он указал, что прочность каната определяется величиной $\sigma = P/F$, где P — сила, действующая на канат вдоль оси каната; F — площадь поперечного сечения каната. Понятие напряжения оказалось очень плодотворным, но в общем случае выяснилось, что напряжение является объектом совершенно новой природы.

Попытаемся обобщить галилеевское понятие напряжения. Прежде всего мы знаем, что сила является вектором \mathbf{P} . Поэтому галилеевское определение следовало бы заменить следующим:

$$\sigma = \mathbf{P}/F.$$

В таком случае напряжение оказалось бы векторной величиной. Но при этом трудности не исчезают. Действительно, для каната площадь поперечного сечения F вполне определена. Но в общем случае площадка является векторной величиной \mathbf{F} , и предыдущая формула должна быть переписана в виде

$$\sigma = \mathbf{P}/\mathbf{F}.$$

Пришли к абсурдному результату, ибо операция деления вектора на вектор не определена и не может быть определена. Напомним, что операция деления может быть определена только на тех множествах, в которых имеется единичный элемент и притом единственный. Векторное пространство таким множеством не является, поскольку в нем имеется несчетное множество различных по направлению единичных векторов.

Возникший тупик является характерным признаком того, что мы нуждаемся в расширении списка исходных понятий, а напряжение не является ни скаляром, ни вектором. Попытаемся взглянуть на это понятие более внимательно. При этом будем иметь в виду уже не канат, а твердое тело общего вида.

Выберем в твердом теле произвольную точку A . Зададим в точке A единичный вектор \mathbf{n} , направленный по нашему произволу. Проведем через A плоскость, ортогональную \mathbf{n} , и в этой плоскости рассмотрим область ΔS , содержащую точку A . Пусть на ΔS действует сила $\Delta \mathbf{P}$, моделирующая воздействие части тела, находящейся со стороны положительной нормали \mathbf{n} , на часть тела, находящуюся со стороны отрицательной нормали \mathbf{n} . Вектором напряжения $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$ в точке A , действующим по бесконечно малой площадке $\Delta S \mathbf{n}$,

называется предел отношения

$$\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S},$$

где $\Delta S \rightarrow 0$ означает, что к нулю стремится наибольший диаметр площадки ΔS . Итак, чтобы определить напряжение в точке \mathbf{A} твердого тела, необходимо задать: а) площадку $d\mathbf{S}$ (точнее, ориентированную площадку $d\mathbf{S}\mathbf{n}$, определяемую вектором нормали \mathbf{n}); б) вектор напряжения $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$, действующий на эту площадку.

Таким образом, напряжение есть упорядоченная пара векторов \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$, из которых первый вектор задает площадку, а второй — действующую по этой площадке силу, отнесенную к единице площади. Эта пара векторов составляет единое целое. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, описанную пару векторов записывают в виде $\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$, где \otimes — знак тензорного произведения. Ясно, что

$$\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} \neq \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})} \otimes \mathbf{n},$$

так как в последнем случае в соответствии с соглашением $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$ — вектор нормали, а \mathbf{n} — сила. Поэтому понятие напряжения связывается с упорядоченной парой векторов $\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n})}$; упорядоченность означает, что порядок следования сомножителей имеет значение. Пары $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ различны⁵.

Чтобы полностью описать напряжение в точке \mathbf{A} , необходимо задать напряжения на всех площадках, проходящих через эту точку. Однако таких площадок бесконечно много. Если применить специальные рассуждения, использующие законы механики (только математики недостаточно!), то можно показать, что напряженное состояние в точке \mathbf{A} полностью определено, если задана неупорядоченная совокупность трех упорядоченных пар векторов:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n}_{(1)} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n}_{(1)})} + \mathbf{n}_{(2)} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n}_{(2)})} + \mathbf{n}_{(3)} \otimes \boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n}_{(3)})}, \quad (1.51)$$

где $\mathbf{n}_{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) — три единичных взаимно ортогональных вектора, задающие три взаимно ортогональные площадки; $\boldsymbol{\tau}_{(\mathbf{n}_{(i)})}$ — вектор напряжения, действующий на площадке с нормалью $\mathbf{n}_{(i)}$; знаки $+$ в (1.51) следует понимать как символы объединения, т. е. (1.51) — это именно совокупность трех пар векторов, являющаяся примером нового объекта — тензора второго ранга.

Следует обратить особое внимание на тот факт, что тензор напряжений (впервые его ввел знаменитый французский математик Огюстен Луи Коши в 1822 г.) является самостоятельной сущностью, имеет ясный физический

⁵ Исключение составляет случай, когда векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны. (Примеч. ред.)

смысл и может изучаться сам по себе. Широко распространенная точка зрения, что тензоры второго ранга являются некими операторами, переводящими что-то во что-то другое, хотя и имеет право на существование, но мало плодотворна. Во всяком случае в данной книге тензоры второго ранга подобно векторам будут рассматриваться именно как самостоятельные объекты. Цель этой главы — ввести формальные объекты, называемые тензорами второго ранга, и определить основные законы композиции этих объектов. Элементами живого языка они станут немного позднее — при изучении собственно механики.

1.9. Прямое произведение векторных пространств

Иногда приходится иметь дело с парами векторов, рассматриваемыми как единое целое и называемыми диадами. Последние являются элементами множества, являющегося прямым произведением двух векторных пространств⁶. Приступим к формальному введению диад.

Пусть даны два экземпляра $\mathcal{T}_1^{(1)}$ и $\mathcal{T}_1^{(2)}$ векторного пространства \mathcal{T}_1 , элементами которого являются векторы классической физики. Рассмотрим множество

$$\mathcal{N} = \mathcal{T}_1^{(1)} \times \mathcal{T}_1^{(2)},$$

элементами которого являются упорядоченные пары векторов

$$\mathcal{N} = \left\{ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathbf{a} \in \mathcal{T}_1^{(1)}, \mathbf{b} \in \mathcal{T}_1^{(2)} \right\}.$$

Поскольку $\mathcal{T}_1^{(1)}$ и $\mathcal{T}_1^{(2)}$ неразличимы между собой, то верхние индексы, означающие номер экземпляра векторного пространства, в дальнейшем будем опускать. Упорядоченную пару векторов $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ будем называть диадой. Термин упорядоченность означает, что порядок следования векторов в диаде важен

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}.$$

Итак, мы ввели некое множество \mathcal{N} диад. Однако не всякие множества представляют интерес для рациональных наук. Интересны только такие множества, на которых можно ввести законы композиции элементов, позволяющие превратить эти множества в инструменты для исследования. Например,

⁶ Прямое, или декартово, произведение двух множеств — это множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары элементов исходных множеств. Понятие прямого произведения используется не только в теории множеств, но и в других областях математики, в частности в алгебре и топологии. (*Примеч. ред.*)

множество направленных отрезков (векторов) не представляло бы никакого интереса, если бы на нем не были введены операции сложения, умножения на число, скалярного произведения и т. д. Важно при этом, чтобы вводимые операции не выводили нас за пределы рассматриваемого множества. Например, сумма векторов снова является вектором, т. е. элементом исходного множества.

Можно ли сделать что-то аналогичное на множестве диад? Иными словами, можно ли превратить прямое произведение двух векторных пространств в нечто содержательное, например в линейное пространство? Для этого на множестве \mathcal{N} достаточно ввести два закона композиции элементов: умножение диады на число и сложение диад. Введем на множестве \mathcal{N} операцию умножения на вещественное число:

$$\alpha(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes (\alpha\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}. \quad (1.52)$$

Последнее равенство в формуле (1.52) постулирует эквивалентность пар: $(\alpha\mathbf{a}) \otimes \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} \otimes (\alpha\mathbf{b})$. Умножать вектор на число мы умеем. Тогда (1.52) определяет новую операцию – умножение диады на число. Примем аксиому:

$$(\alpha + \beta)\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \alpha\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \beta\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}. \quad (1.53)$$

Этой аксиомой введено правило сложения двух одинаковых диад. Из (1.52) при $\alpha = 0$ получим

$$0\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = 0 \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes 0,$$

где 0 – нулевой вектор.

Из (1.53) при $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ получим

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (1 + 0)\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = 1\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + 0\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}.$$

Поэтому диаду $0(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 0 \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes 0$ называем нулевой диадой: ее прибавление к произвольной диаде $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ не меняет диады $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$. Примем еще два правила сложения диад:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c}; \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \otimes \mathbf{c} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Эти правила позволяют нам складывать диады, если у них либо левые, либо правые сомножители одинаковы. При этом сумма диад вновь является диадой, т. е. элементом множества $\mathcal{N} = \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$. Однако в общем случае

любое разумное определение суммы диад уже не будет диадой. Например, непонятно, что означает “сумма”:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} = ?$$

Оказывается, что “сумма” $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$, если ее как-то определить, уже не принадлежит множеству $\mathcal{N} = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_1$. Поэтому множество диад нельзя превратить в линейное пространство. Таким образом, прямое произведение двух векторных пространств оказалось слишком бедным для того, чтобы превратить его хотя бы в линейное пространство.

1.10. Тензорное произведение векторных пространств

Чтобы устранить возникшее затруднение, расширим множество \mathcal{N} , а именно рассмотрим множество

$$\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_1 = \{\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)} : \mathbf{a}_{(i)}, \mathbf{b}_{(i)} \in \mathcal{T}_1\}. \quad (1.55)$$

Элементами этого множества являются неупорядоченные совокупности трех упорядоченных пар векторов. Диады, очевидно, также являются элементами \mathcal{T}_2 , если принять, что

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0}$ — нулевая диада.

Для диад мы сохраним соотношения эквивалентности (1.52)–(1.54). Примем следующие соотношения эквивалентности на множестве \mathcal{T}_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)} &= \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \\ &+ \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)} = \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)} + \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

В этом и состоит смысл термина “неупорядоченная совокупность трех пар векторов”: порядок следования слагаемых в этой совокупности безразличен. Знак “+” в (1.55) и (1.56) есть символ объединения элементов и понимается так же, как знак “+” в записи комплексного числа $x + iy$.

Умножение на число определим равенством

$$\begin{aligned} \alpha [\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}] &= \\ = \alpha \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \alpha \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \alpha \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Кроме того,

$$(\alpha + \beta) [\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}] = \alpha [\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}] + \beta [\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}].$$

При этом считаем, что для диад остаются верными аксиомы (1.52)–(1.54). Следовательно, остается и понятие нулевой диады. Поэтому множество \mathcal{T}_2 содержит в себе множество \mathcal{N} , ибо ничто не мешает в совокупности

$$\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}$$

считать диады $\mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)}$ и $\mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}$ нулевыми.

Введенное множество \mathcal{T}_2 обладает структурой линейного пространства. В самом деле на нем введена операция умножения на число и определено понятие суммы элементов. Обе эти операции не выводят, конечно, за пределы исходного множества \mathcal{T}_2 . Пусть, например, \mathbf{A} и \mathbf{B} принадлежат \mathcal{T}_2 :

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{a}_{(4)} \otimes \mathbf{b}_{(4)}.$$

Покажем, что элемент $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ определен и принадлежит \mathcal{T}_2 . Поскольку векторы $\mathbf{a}_{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) принадлежат \mathcal{T}_1 , то они могут быть представлены в виде разложения по базису \mathcal{T}_1 . Возьмем в качестве базиса $\mathbf{e}_i \in \mathcal{T}_1$. Тогда

$$\mathbf{a}_{(m)} = \alpha_{(m)}^s \mathbf{e}_s \quad (m = 1, 2, 3, 4).$$

По индексу s подразумевается, как всегда, суммирование от 1 до 3. Теперь можем записать

$$\mathbf{C} = \sum_{s=1}^4 \alpha_{(s)}^m \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{b}_{(s)} = \mathbf{e}_m \otimes \sum_{s=1}^4 \alpha_{(s)}^m \mathbf{b}_{(s)} = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{d}^m,$$

где $\mathbf{d}^m = \sum_{s=1}^4 \alpha_{(s)}^m \mathbf{b}_{(s)}$ — векторы.

Может показаться, что введенное определение суммы зависит от выбора базиса, но это не так.

Итак, введенное множество \mathcal{T}_2 является линейным пространством. Оно называется тензорным произведением двух трехмерных линейных пространств \mathcal{T}_1 и обозначается буквой \mathcal{T}_2 , так что $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_1$. Можно сказать, что пространство \mathcal{T}_2 порождено пространством \mathcal{T}_1 . Элементы множества \mathcal{T}_2 называются тензорами второго ранга и обозначаются полужирными прописными буквами:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$$

К сожалению, далеко не всегда удается придерживаться правила: векторы обозначать полужирными строчными буквами, а тензоры — полужирными прописными буквами. Нарушения этого правила встречаются очень часто, и потому отличать векторы от тензоров нужно по смыслу, а не по обозначениям.

Итак, тензоры второго ранга — это совокупности конечного числа упорядоченных пар векторов (диад):

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} + \dots + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}.$$

Мы видели, что любой тензор второго ранга можно свести к совокупности не более чем трех диад. Однако стремиться к этому не только не надо, но, как правило, нецелесообразно. Отметим, что всякая диада является тензором второго ранга, но далеко не всякий тензор второго ранга может быть сведен к одной диаде.

Ранее тензоры второго ранга были введены совершенно формально, и вопрос об их полезности (или бесполезности) еще предстоит выяснить.

1.11. Операции с тензорами второго ранга

Ранее уже введены операции умножения тензора второго ранга на число и сложения тензоров. Можно ввести еще целый ряд операций.

1. Внутреннее умножение тензоров второго ранга есть отображение $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$. Пусть $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_2$. Поставим им в соответствие элемент $\mathbf{C} \in \mathcal{T}_2$ по правилу:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{b}_{(1)} + \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{b}_{(2)} + \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{b}_{(3)}) \cdot (\mathbf{c}_{(1)} \otimes \mathbf{d}_{(1)} + \\ &+ \mathbf{c}_{(2)} \otimes \mathbf{d}_{(2)} + \mathbf{c}_{(3)} \otimes \mathbf{d}_{(3)}) = (\mathbf{b}_{(1)} \cdot \mathbf{c}_{(1)}) \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{d}_{(1)} + \\ &+ (\mathbf{b}_{(2)} \cdot \mathbf{c}_{(1)}) \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{d}_{(1)} + (\mathbf{b}_{(3)} \cdot \mathbf{c}_{(1)}) \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{d}_{(1)} + \\ &+ (\mathbf{b}_{(1)} \cdot \mathbf{c}_{(2)}) \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{d}_{(2)} + (\mathbf{b}_{(2)} \cdot \mathbf{c}_{(2)}) \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{d}_{(2)} + (\mathbf{b}_{(3)} \cdot \mathbf{c}_{(2)}) \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{d}_{(2)} + \\ &+ (\mathbf{b}_{(1)} \cdot \mathbf{c}_{(3)}) \mathbf{a}_{(1)} \otimes \mathbf{d}_{(3)} + (\mathbf{b}_{(2)} \cdot \mathbf{c}_{(3)}) \mathbf{a}_{(2)} \otimes \mathbf{d}_{(3)} + (\mathbf{b}_{(3)} \cdot \mathbf{c}_{(3)}) \mathbf{a}_{(3)} \otimes \mathbf{d}_{(3)}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Проще всего это правило запоминается при внутреннем умножении диад:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}; \quad \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}.$$

Внутреннее умножение тензоров в общем случае некоммутативно, т. е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

В этом легко убедиться на примере диад $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, $\mathbf{B} = \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \otimes \mathbf{d}; \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{c} \otimes \mathbf{b}.$$

2. *Двойное внутреннее умножение тензоров* есть отображение $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_0$. Любым двум тензорам из \mathcal{T}_2 можно поставить в соответствие число по правилу:

$$\alpha = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \cdot \cdot \sum_{s=1}^3 \mathbf{c}_{(s)} \otimes \mathbf{d}_{(s)} = \sum_{s,k=1}^3 (\mathbf{b}_{(s)} \cdot \mathbf{c}_{(k)}) (\mathbf{a}_{(s)} \cdot \mathbf{d}_{(k)}). \quad (1.59)$$

Для диад

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}).$$

Двойное внутреннее умножение коммутативно:

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}. \quad (1.60)$$

В этом легко убедиться прямым вычислением, учитывая, что $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ для любых векторов. Операции внутреннего и двойного внутреннего умножения бинарны, т. е. в них участвуют два элемента из \mathcal{T}_2 . Важное значение имеет унарная операция⁷, называемая транспонированием тензора.

3. *Транспонирование тензора.* Эта операция представляет собой отображение $\mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_2$. Пусть задан тензор \mathbf{A} . Транспонированным тензором \mathbf{A}^Γ называется тензор, построенный по правилу:

$$\mathbf{A}^\Gamma = \left(\sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \right)^\Gamma = \sum_{s=1}^3 \mathbf{b}_{(s)} \otimes \mathbf{a}_{(s)}. \quad (1.61)$$

Для диады $\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ получим $\mathbf{A}^\Gamma = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

4. *Скалярное произведение тензоров.* Транспонированный тензор встречается, например, в операции скалярного умножения тензоров второго ранга. Скалярным произведением тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} называется отображение $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_0$, т. е. двум тензорам ставится в соответствие число по правилу:

$$\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B}^\Gamma. \quad (1.62)$$

Скалярное умножение отличается от двойного внутреннего умножения важным свойством. А именно в первом случае

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^\Gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

⁷ Унарной называется операция, которая каждому элементу из данного множества ставит в соответствие некоторый элемент из того же множества. (*Примеч. ред.*)

В то же время, если $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, то отсюда не следует, что $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Проще всего убедиться в этом на примере диады $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2; \\ \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^\top &= (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^\top = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}).\end{aligned}$$

Поэтому $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, если векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} ортогональны, т. е. если $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Если же $\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{0}$, то по крайней мере один вектор из диады равен $\mathbf{0}$, а потому и вся диада нулевая.

Введем еще операции умножения тензоров второго ранга на векторы. Таких операций можно ввести четыре.

5. Скалярное умножение тензора второго ранга на вектор справа. Пусть $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_2$ и $\mathbf{a} \in \mathcal{T}_1$. Рассмотрим отображение $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$, т. е. паре тензор и вектор ставим в соответствие вектор по правилу:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)}) \cdot \mathbf{a} = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_{(s)}) \mathbf{a}_{(s)}. \quad (1.63)$$

6. Скалярное умножение тензора второго ранга на вектор слева:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_{(s)}) \mathbf{b}_{(s)}. \quad (1.64)$$

Сравнивая (1.63) и (1.64), видим, что в общем случае

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}.$$

Определим теперь векторное умножение тензора на вектор. Это отображение $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$. Можно ввести левое и правое векторные умножения.

7. Векторное умножение тензора на вектор справа:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{a} = \left(\sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \right) \times \mathbf{a} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes (\mathbf{b}_{(s)} \times \mathbf{a}). \quad (1.65)$$

8. Векторное умножение тензора на вектор слева:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{A} = \mathbf{a} \times \left(\sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \right) = \sum_{s=1}^3 (\mathbf{a} \times \mathbf{a}_{(s)}) \otimes \mathbf{b}_{(s)}. \quad (1.66)$$

Результатом векторного умножения тензора второго ранга на вектор является тензор второго ранга.

Важной и часто встречающейся операцией для тензоров второго ранга является операция вычисления следа (trace) тензора второго ранга \mathbf{A} .

9. След тензора второго ранга. При вычислении следа тензора любому тензору \mathbf{A} однозначно ставится в соответствие число, обозначаемое $\text{tr } \mathbf{A}$. Пусть тензор \mathbf{A} есть совокупность диад:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \dots + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}.$$

Тогда след тензора \mathbf{A} вычисляется по правилу:

$$\text{tr} \mathbf{A} = \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \dots + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) \equiv \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \dots + \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}. \quad (1.67)$$

Отметим, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Размерность пространства $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_1$ равна $9 = 3 \times 3$, где 3 — размерность пространства \mathcal{T}_1 .

Доказательство. Пусть \mathbf{e}_i — базис в \mathcal{T}_1 . Докажем, что элементы \mathcal{T}_2 , являющиеся диадами $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, линейно независимы. Это означает, что равенство

$$\mathbf{h}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

возможно тогда и только тогда, когда $\mathbf{h}^{ij} = 0$. Действительно, пусть $\mathbf{H} = \mathbf{h}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ равен нулю. Возьмем тройку векторов \mathbf{e}^m . Умножим последнее равенство скалярно на векторы \mathbf{e}^m . Тогда получим

$$(\mathbf{h}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}^m = \mathbf{h}^{im} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}.$$

Последнее равенство возможно только тогда, когда все \mathbf{h}^{ij} равны нулю, что и доказывает линейную независимость диад $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Они принадлежат множеству \mathcal{T}_2 . Таким образом, имеем девять линейно независимых диад. Поэтому размерность \mathcal{T}_2 не может быть меньше девяти. Но она не может быть и выше девяти, ибо любой элемент из \mathcal{T}_2 , т. е. любой тензор второго ранга, может быть представлен единственным образом как линейная комбинация этих диад. Действительно,

$$\mathbf{A} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)}^m \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{b}_{(s)}^p \mathbf{e}_p = A^{mp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_p, \quad (1.68)$$

где

$$A^{mp} = \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)}^m \mathbf{b}_{(s)}^p.$$

Единственность представления (1.68) обусловлена единственностью разложения векторов в \mathcal{T}_1 . Таким образом, размерность \mathcal{T}_2 в точности равна девяти.

1.12. Симметричные и антисимметричные тензоры

Тензор второго ранга называется симметричным, если он удовлетворяет равенству

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T. \quad (1.69)$$

Возможно и другое, эквивалентное, определение симметричного тензора. Тензор второго ранга симметричен, если для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_1$ справедливо равенство

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.70)$$

Иногда последнее определение удобнее.

Примеры симметричных тензоров второго ранга:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}.$$

Важным примером симметричного тензора является единичный тензор \mathbf{E} . Можно различным способом вводить определение единичного тензора. Все эти способы, конечно, эквивалентны в том смысле, что приводят к одному и тому же элементу из \mathcal{T}_2 .

Определение. Тензор второго ранга \mathbf{E} называется единичным, если для любого вектора \mathbf{x} справедливо равенство

$$\mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}.$$

Для введения единичного тензора исходим из тождества: $\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Разложим вектор \mathbf{x} по базису \mathbf{e}_m : $\mathbf{x} = x^m \mathbf{e}_m$. Координаты вектора \mathbf{x} находят по формулам $x^m = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^m$. Теперь

$$\mathbf{x} = x^m \mathbf{e}_m = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}_m = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m,$$

или, иначе,

$$\mathbf{x} = x^m \mathbf{e}_m = \mathbf{e}_m (\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{x} = \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}^* = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m.$$

Видим, что левая единица $\mathbf{E}^* = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m$ и правая единица $\mathbf{E}_* = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m$ связаны равенством $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_*^T$. Убедимся, что на самом деле они совпадают. Действительно, с учетом формул $\mathbf{e}^m = g^{mn} \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_n = g_{nm} \mathbf{e}^m$ получаем

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m = \mathbf{e}_m \otimes g^{mn} \mathbf{e}_n = g^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = g^{nm} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = \mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}_n = \mathbf{E}_*,$$

т. е. левая и правая единицы совпадают и единичный тензор

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_* = \mathbf{E}^*$$

симметричен. Для \mathbf{E} можно использовать эквивалентные представления:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m = g^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = g_{mn} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m. \quad (1.71)$$

Здесь указано выражение \mathbf{E} через базисы, но сам \mathbf{E} от выбора базиса не зависит. В частности, полезно помнить следующее представление для единичного тензора:

$$\mathbf{E} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p},$$

где \mathbf{m} , \mathbf{n} , \mathbf{p} — произвольная ортонормированная тройка векторов.

Легко убедиться, что $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}$.

Не вызывает затруднения доказательство тождества

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}, \quad (1.72)$$

справедливого для любого тензора \mathbf{A} .

Нетрудно убедиться, что существует только один единичный тензор в \mathcal{T}_2 . В самом деле допустим, что существует два единичных тензора \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Оба они обладают свойством (1.72). Тогда

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}.$$

Первый знак равенства следует из того, что \mathbf{E}_2 есть единичный тензор, а второе равенство следует из того, что \mathbf{E}_1 есть единичный тензор. Конечно, для единичного тензора справедливо равенство (1.72).

Тензор Леви-Чивиты. На основе единичного тензора \mathbf{E} вводится важный для приложений тензор Леви-Чивиты \mathcal{E} , но для этого мы вынуждены выйти за пределы \mathcal{T}_2 . Введем в рассмотрение тензор

$$\mathcal{E} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E}. \quad (1.73)$$

Строго говоря, эта операция у нас не определена и не могла быть определена в \mathcal{T}_2 . Но будем поступать совершенно формально и попробуем все же вычислить тензор \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = -\mathbf{E} \times \mathbf{E} = -(\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m) \times (\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^n) = -\mathbf{e}^m \otimes (\varepsilon_{mnp} \mathbf{e}^p) \otimes \mathbf{e}^n.$$

В этом выражении скобки можно было не расставлять, и, кроме того, мы воспользовались формулой для векторного произведения базисных векторов через символы Леви-Чивиты⁸. В результате мы получили некий объект

$$\mathcal{E} = \varepsilon_{mnp} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}^p, \quad (1.74)$$

⁸ Символы Леви-Чивиты являются смешанными произведениями базисных векторов: $\varepsilon_{mnp} = (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_p$. (Примеч. ред.)

где, как всегда, подразумевается суммирование по разновысоким повторяющимся индексам⁹.

Тензор Леви-Чивиты \mathcal{E} оказался совокупностью уже не диад, а триад векторов вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}$, т. е. это не тензор второго ранга. На самом деле тензор Леви-Чивиты является тензором третьего ранга, т. е. элементом нового множества, называемого тензорным произведением \mathcal{T}_3 трех векторных пространств:

$$\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_1.$$

На этом примере читатель может легко понять способ введения тензоров высших рангов.

Важными примерами симметричных тензоров второго ранга являются проекторы.

Определение. Тензор \mathbf{A} называется проектором, если выполняются следующие два условия:

$$1) \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^T; \quad 2) \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}. \quad (1.75)$$

Например, проекторами являются тензоры

$$\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}; \quad \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}; \quad \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} = \mathbf{E},$$

где \mathbf{m} , \mathbf{n} , \mathbf{p} суть единичные ортогональные между собой векторы.

Первый из этих проекторов при действии на вектор \mathbf{a} проецирует его на прямую, натянутую на вектор \mathbf{m} . Вторым проектор при действии на вектор \mathbf{a} проецирует его на плоскость, натянутую на векторы \mathbf{m} и \mathbf{n} :

$$(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{m})\mathbf{m}, \quad (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{a})\mathbf{m} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n}.$$

Теорема о спектральном разложении симметричного тензора. Для каждого тензора второго ранга \mathbf{T} : $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ существует по крайней мере три собственных вектора, ортогональных между собой. Собственные числа, соответствующие этим векторам, вещественны. Если собственные векторы \mathbf{T} принять в качестве базиса в \mathcal{T}_1 , то справедливо представление:

$$\mathbf{T} = \lambda_{(1)} \mathbf{m}_{(1)} \otimes \mathbf{m}_{(1)} + \lambda_{(2)} \mathbf{m}_{(2)} \otimes \mathbf{m}_{(2)} + \lambda_{(3)} \mathbf{m}_{(3)} \otimes \mathbf{m}_{(3)}, \quad (1.76)$$

где $\lambda_{(k)}$ — собственные числа тензора \mathbf{T} ; $\mathbf{m}_{(k)}$: $\mathbf{m}_{(k)} \cdot \mathbf{m}_{(s)} = \delta_{ks}$.

Представление (1.76) называется спектральным разложением симметричного тензора второго ранга.

⁹ Тензор Леви-Чивиты можно также представить в виде $\mathcal{E} = \varepsilon^{mnp} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_p$, где использованы символы Леви-Чивиты $\varepsilon^{mnp} = (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n) \cdot \mathbf{e}^p$. (Примеч. ред.)

Если среди собственных чисел $\lambda_{(k)}$ есть равные друг другу, то собственные векторы уже необязательно ортогональны. Кроме того, собственных векторов становится бесконечно много. Пусть совпадают два собственных числа. Тогда все пространство \mathcal{T}_1 разлагается на прямую сумму двух подпространств: плоскость и ортогональную ей прямую. Если $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} \neq \lambda_{(3)}$, то упомянутой прямой соответствует вектор $\mathbf{m}_{(3)}$. Представление (1.76) для симметричного тензора принимает вид:

$$\mathbf{T} = \lambda_{(3)} \mathbf{m}_{(3)} \otimes \mathbf{m}_{(3)} + \lambda_{(1)} (\mathbf{E} - \mathbf{m}_{(3)} \otimes \mathbf{m}_{(3)}). \quad (1.77)$$

Из формулы (1.77) видно, что любой вектор, ортогональный $\mathbf{m}_{(3)}$, является собственным для \mathbf{T} , и ему соответствует собственное число $\lambda_{(1)}$:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \lambda_{(1)} \mathbf{a}; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{m}_{(3)} = 0.$$

Множество этих векторов образует плоскость, ортогональную $\mathbf{m}_{(3)}$. Если совпадают все три собственных числа, то \mathbf{T} — шаровой тензор: $\mathbf{T} = \lambda \mathbf{E}$. Любой вектор является собственным для шарового тензора.

Определение. Тензор \mathbf{A} называется антисимметричным (кососимметричным), если справедливо равенство

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, \quad (1.78)$$

или иначе: тензор \mathbf{A} называется антисимметричным, если для любого вектора \mathbf{x} справедливо тождество

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}. \quad (1.79)$$

Примером антисимметричного тензора является тензор $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$.

Произвольному тензору второго ранга \mathbf{A} можно однозначно поставить в соответствие симметричный тензор, который называется симметричной частью \mathbf{A} и обозначается \mathbf{A}^s :

$$\mathbf{A}^s = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T). \quad (1.80)$$

Эта операция называется *симметрированием* тензора. Аналогично любому тензору \mathbf{A} можно однозначно поставить в соответствие антисимметричный тензор \mathbf{A}^a :

$$\mathbf{A}^a = \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T). \quad (1.81)$$

Эта операция называется *альтернированием* тензора. Очевидно, что любой тензор однозначно разлагается на симметричную и антисимметричную части:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^s + \mathbf{A}^a. \quad (1.82)$$

Симметричный тензор $\alpha \mathbf{E}$, где α – вещественное число, называется шаровым. Любому симметричному тензору \mathbf{A} можно однозначно поставить в соответствие шаровой тензор по правилу:

$$\mathbf{A}_* \equiv \frac{1}{3}(\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{E}. \quad (1.83)$$

Симметричный тензор называется девиатором, если его след равен нулю¹⁰. Произвольный симметричный тензор можно представить в виде разложения на шаровой тензор и девиатор:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}(\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{E} + \mathbf{A}^d \quad \Rightarrow \quad \text{tr} \mathbf{A}^d = 0 \quad (\mathbf{A} = \mathbf{A}^T).$$

Векторным инвариантом тензора второго ранга называется вектор \mathbf{A}_\times , получаемый по правилу:

$$\mathbf{A}_\times \equiv \left(\sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \otimes \mathbf{b}_{(s)} \right)_\times \equiv \sum_{s=1}^3 \mathbf{a}_{(s)} \times \mathbf{b}_{(s)}. \quad (1.84)$$

Для диады $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_\times = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Теорема. Любой антисимметричный тензор представим в виде

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{T}_1, \quad \mathbf{S} = -\mathbf{S}^T, \quad (1.85)$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется сопутствующим вектором тензора \mathbf{S} .

Доказательство. Выберем в \mathcal{T}_1 базис \mathbf{e}_m . Тензор \mathbf{S} представим в виде разложения по выбранному базису $\mathbf{S} = S^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$. Условие $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T$ влечет за собой равенство $S^{mn} = -S^{nm}$, т. е. среди девяти чисел S^{mn} только три являются независимыми. Иначе говоря, числа S^{mn} могут быть выражены через три числа. Например, это можно сделать с помощью формулы

$$S^{mn} = -\varepsilon^{mnp} \omega_p, \quad (1.86)$$

где ε^{mnp} – символ Леви-Чивиты; ω_p – искомые три числа¹¹.

Нетрудно убедиться, что соответствие (1.86) взаимно однозначное. Подставляя (1.86) в разложение для \mathbf{S} , получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= S^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = -\varepsilon^{mnp} \omega_p \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = -\omega_p \mathbf{e}^n \times \mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}_n = \\ &= \omega_p \mathbf{e}^p \times \mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}; \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_p \mathbf{e}^p. \end{aligned}$$

¹⁰ В литературе встречается и другое определение девиатора, а именно девиатором называют любой тензор, след которого равен нулю. (*Примеч. ред.*)

¹¹ Согласно определению, символы Леви-Чивиты обладают свойством: $\varepsilon^{mnp} = -\varepsilon^{nmp}$. Именно это свойство символов Леви-Чивиты позволяет использовать представление (1.86) для S^{mn} . (*Примеч. ред.*)

Вычисляя векторные инварианты от обеих частей этого равенства, получаем

$$\mathbf{S}_\times = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E})_\times = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}^n) \times \mathbf{e}_n = -2\boldsymbol{\omega}. \quad (1.87)$$

Необходимо запомнить это важное тождество, из которого находим

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \mathbf{S}_\times. \quad (1.88)$$

Формулой (1.88) устанавливается связь между векторным инвариантом тензора \mathbf{S} и его сопутствующим вектором.

Можно дать другое и весьма поучительное доказательство представления (1.85). Возьмем произвольный вектор \mathbf{a} и вычислим произведение

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Легко доказать, что для любого антисимметричного тензора \mathbf{S} и любого вектора \mathbf{a} справедливо равенство

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Поскольку $\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = 0$, то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$, где вектор $\boldsymbol{\omega}$ произволен. Итак, получили равенство

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}.$$

Поскольку левая часть этого равенства линейно зависит от вектора \mathbf{a} , то и правая его часть линейно зависит от \mathbf{a} , т. е. вектор $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от вектора \mathbf{a} . Последнее равенство справедливо для любых векторов \mathbf{a} . Поэтому можно написать это равенство для тройки базисных векторов \mathbf{e}_n :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}^n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}. \quad (1.89)$$

Здесь были учтены представления (1.71) для единичного тензора.

Часто бывает полезно представлять векторное произведение векторов с помощью скалярного произведения антисимметричного тензора на вектор:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{a} \times \mathbf{E}.$$

Докажем с помощью этих представлений, например, формулу двойного векторного произведения:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Заметим, что

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

Теперь можем записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \\ &= [\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{E}] \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

1.13. Координаты тензора второго ранга

Тензоры второго ранга могут быть представлены в различных, но совершенно эквивалентных формах. Уже показывалось, что множество $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_1$, элементами которого являются всевозможные совокупности трех пар векторов, — девятимерное пространство. Оно обладает базисом, а следовательно, обладает несчетным множеством базисов. Тензор второго ранга может быть представлен в любом из этих базисов.

Наиболее употребительными являются следующие базисы в \mathcal{T}_2 . В пространстве векторов \mathcal{T}_1 вводятся два базиса: основной \mathbf{e}_i и взаимный \mathbf{e}^m : $\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^m$. Этим двум базисам в \mathcal{T}_2 соответствует четыре базиса:

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^m, \quad \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n.$$

Тензор второго ранга может быть записан в любом из перечисленных базисов

$$\mathbf{A} = A^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = A_{mn} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n = A_{*n}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n = A_{m*}^{*n} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_n. \quad (1.90)$$

Числа A^{mn} называются координатами тензора \mathbf{A} относительно базиса $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$; их также называют контравариантными координатами \mathbf{A} . Числа A_{mn} — координаты \mathbf{A} относительно базиса $\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n$ или ковариантные координаты \mathbf{A} . Числа A_{*n}^{m*} и A_{m*}^{*n} — координаты относительно базисов $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n$ и $\mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_n$ соответственно; их называют смешанными координатами. Для вычисления координат тензора используются формулы

$$\begin{aligned} A^{mn} &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n, & A_{mn} &= \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n, \\ A_{*n}^{m*} &= \mathbf{e}^m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_n, & A_{m*}^{*n} &= \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^n. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Порядок следования индексов у координат важен; первый индекс у координаты всегда относится к первому базису в диаде базисных векторов, а второй — ко второму. Поэтому при записи тензора в смешанном базисе $\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n$ у

координатных индексов ставятся звездочки, чтобы было ясно, какой индекс является первым, а какой — вторым.

Использование базиса в \mathcal{T}_2 позволяет установить почти взаимно однозначное соответствие между тензорами второго ранга и матрицами 3×3 . Однако здесь нужно соблюдать некоторую осторожность. Допустим, нам дано тензорное соотношение

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.92)$$

Выберем какой-либо тензорный базис, например $\mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}^n$. Тогда соотношению (1.92) однозначно ставится в соответствие координатное равенство

$$C_{*n}^{m*} = A_{*p}^{m*} B_{*n}^{p*} \equiv A_{*p}^{m*} \delta_q^p B_{*n}^{q*}. \quad (1.93)$$

Однако это координатное равенство не является полным аналогом равенства (1.92), поскольку нужно еще помнить о выбранном тензорном базисе. Если об этом забыть, то соотношению (1.93) можно поставить в соответствие бесконечно много разных инвариантных равенств. Действительно, введем в рассмотрение произвольно выбранные векторные базисы \mathbf{e}_m , \mathbf{d}_s , \mathbf{f}^n и перепишем соотношение (1.93) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} C_{*n}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{f}^n &= A_{*p}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{d}^p \cdot B_{*n}^{q*} \mathbf{d}_q \otimes \mathbf{f}^n, \quad \delta_q^p \equiv \mathbf{d}^p \cdot \mathbf{d}_q \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{C}_* &= \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{B}_*, \quad \mathbf{C}_* \equiv C_{*n}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{f}^n \neq \mathbf{C}, \\ \mathbf{A}_* &\equiv A_{*p}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{d}^p \neq \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}_* \equiv B_{*n}^{q*} \mathbf{d}_q \otimes \mathbf{f}^n \neq \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

На первый взгляд кажется, что запоминание базиса, в котором записано равенство (1.93), не является слишком обременительным. Однако это не так. В равенстве (1.92) мы свободны в выборе представлять каждый из входящих в него тензоров в своем собственном произвольно выбираемом базисе. Часто подобный выбор оказывается чрезвычайно полезным. Если же мы работаем с координатной записью (1.93), то оказываемся связанными излишними ограничениями и теряем много полезных возможностей. Кроме того, определитель тензора не всегда равен определителю матрицы его координат¹².

¹² Если тензор \mathbf{A} представлен в неортонормированном базисе

$$\mathbf{A} = A^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = A_{mn} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n = A_{*n}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n = A_{m*}^{*n} \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_n,$$

то его определитель не равен определителю матрицы координат относительно основного или взаимного базиса. Определитель тензора равен определителю матрицы его координат относительно смешанного базиса, т. е. координат A_{*n}^{m*} или A_{m*}^{*n} . (*Примеч. ред.*)

1.14. Линейные функции векторов и тензоры второго ранга

В этом разделе будет показано одно из приложений тензоров второго ранга. Одними из важнейших в механике являются линейные вектор-функции векторного аргумента. Например, количество движения и кинетический момент произвольной механической системы являются линейными вектор-функциями скоростей.

Рассмотрим векторную функцию векторного аргумента, т. е. отображение $\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{T}_1. \quad (1.95)$$

Отображение (1.95) называется линейным, если

$$\mathbf{f}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (1.96)$$

для всех α и $\beta \in \mathcal{T}_0$ и всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{T}_1$.

Теорема. Любое линейное отображение $\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$ представимо в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad (1.97)$$

где \mathbf{A} – тензор второго ранга, называемый тензором линейного отображения.

Доказательство. Выберем в \mathcal{T}_1 базис \mathbf{e}_m . Представим \mathbf{x} в виде разложения

$$\mathbf{x} = x^m \mathbf{e}_m.$$

Тогда по (1.95) и (1.96)

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(x^m \mathbf{e}_m) = x^m \mathbf{f}(\mathbf{e}_m). \quad (1.98)$$

Объект $\mathbf{f}(\mathbf{e}_m)$ является ковариантным, т. е. он при переходе к новому базису преобразуется по тому же закону, что и векторы базиса \mathbf{e}_m . В самом деле

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_{m'}) = \mathbf{f}(h_m^p \mathbf{e}_p) = h_m^p \mathbf{f}(\mathbf{e}_p).$$

Как уже отмечалось, у таких объектов индекс ставится внизу. Итак, $\mathbf{f}(\mathbf{e}_p) \equiv \mathbf{f}_p$. Теперь (1.98) записывается в форме

$$\mathbf{y} = x^m \mathbf{f}_m = \mathbf{f}_m x^m = \mathbf{f}_m (\mathbf{e}^m \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{f}_m \otimes \mathbf{e}^m) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x},$$

где

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{f}_m \otimes \mathbf{e}^m = \mathbf{f}(\mathbf{e}_m) \otimes \mathbf{e}^m. \quad (1.99)$$

Легко убедиться, что \mathbf{A} не зависит от выбора конкретного базиса \mathbf{e}_m . Поскольку \mathbf{A} есть совокупность трех пар векторов, то это тензор второго ранга:

$$\mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{f}(\mathbf{e}_3) \otimes \mathbf{e}^3. \quad (1.100)$$

Таким образом, теорема доказана.

Эта теорема показывает одну из возможных и важных областей приложения тензоров второго ранга, ибо линейные векторные функции векторного аргумента очень часто встречаются в физике. Среди линейных отображений важное место занимают однозначно обратимые отображения. Выясним, в чем состоят необходимые и достаточные условия обратимости. Область определения отображения (1.97) есть все множество \mathcal{T}_1 . Областью значений отображения (1.97) является некоторое подмножество $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ множества \mathcal{T}_1 . Для однозначной обратимости (1.97) необходимо и достаточно, чтобы размерности множеств \mathcal{T}_1 и $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ совпадали. Размерность \mathcal{T}_1 равна трем. Если размерность $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ также равна трем, то между ними, как известно¹³, существует изоморфизм¹⁴. Из (1.100) видим, что тензор линейного отображения \mathbf{A} полностью определен, если заданы его значения на трех линейно независимых векторах, например, на векторах базиса \mathcal{T}_1 . Действительно, пусть известны векторы

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_m. \quad (1.101)$$

Умножая обе части равенства (1.101) тензорно на \mathbf{e}^m и суммируя по m , получаем

$$\mathbf{a}_m \otimes \mathbf{e}^m = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^m) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}.$$

Очевидно, что если векторы \mathbf{a}_m линейно независимы, то размерность $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ равна трем. Если же \mathbf{a}_m линейно зависимы, то размерность $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ меньше трех. В самом деле линейная зависимость \mathbf{a}_m означает, что они лежат в одной плоскости. Убедимся, что образ¹⁵ любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_1$ также лежит в этой плоскости. Пусть вектор \mathbf{m} ортогонален плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{a}_m . Тогда, умножая обе части (1.101) на \mathbf{m} скалярно, получаем

$$\mathbf{0} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (1.102)$$

¹³ См., например, [19]. (*Примеч. ред.*)

¹⁴ Изоморфизм — соответствие (отношение) между объектами или системами объектов, выражающее в некотором смысле тождество их строения. Изоморфизм линейных пространств — это взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные операции. (*Примеч. ред.*)

¹⁵ Образ — это результат отображения. В данном случае образом вектора \mathbf{x} является вектор $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. (*Примеч. ред.*)

Пусть теперь $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}_1$. Умножая это равенство скалярно на \mathbf{m} и учитывая (1.102), получаем, что $\mathbf{y} \cdot \mathbf{m} = 0$, т. е. все значения отображения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ лежат в одной плоскости. Поэтому размерность $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ не больше двух.

Теперь мы можем сформулировать условие однозначной обратимости линейного отображения: отображение (1.97) обратимо тогда и только тогда, когда образы трех линейно независимых векторов являются линейно независимыми. Выберем три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{T}_1$. Линейная независимость этих векторов эквивалентна условию

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0.$$

Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Образы векторов будем обозначать штрихами:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{c}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}.$$

Линейная независимость образов \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' записывается в виде

$$(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}' \neq 0.$$

Важное значение имеет характеристика тензора \mathbf{A} , называемая определителем тензора [22]

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}'}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} = \frac{[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}. \quad (1.103)$$

Значение определителя тензора \mathbf{A} на самом деле не зависит от выбора векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Чтобы убедиться в этом, проведем прямое вычисление¹⁶ $(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}'$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}' &= (A^{mn} \mathbf{a}_n \mathbf{e}_m \times A^{pq} \mathbf{b}_q \mathbf{e}_p) \cdot A^{rs} \mathbf{c}_s \mathbf{e}_r = \\ &= A^{mn} A^{pq} A^{rs} \mathbf{a}_n \mathbf{b}_q \mathbf{c}_s \mathbf{e}_{mpr} \sqrt{g} = \\ &= (\det A^{mn}) \frac{g}{\sqrt{g}} \mathbf{e}^{nqs} \mathbf{a}_n \mathbf{b}_q \mathbf{c}_s = g \det(A^{mn}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \end{aligned}$$

¹⁶ При вычислении используются символы Риччи \mathbf{e}_{mpr} и \mathbf{e}^{nqs} , которые связаны с символами Леви-Чивиты соотношениями

$$\varepsilon_{mpr} = \varepsilon \sqrt{g} \mathbf{e}_{mpr}, \quad \varepsilon^{nqs} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} \mathbf{e}^{nqs},$$

где $\varepsilon = +1$, если тройка векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ правая, и $\varepsilon = -1$, если тройка векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ левая. (Примеч. ред.)

Определитель \mathbf{E} равен, очевидно, единице. Итак, для обратимости линейного отображения необходимо и достаточно, чтобы определитель тензора этого отображения был отличен от нуля. Введем понятие правого обратного тензора \mathbf{A}^{-1} , как решения уравнения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A} \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}.$$

Левым обратным тензором \mathbf{A}_*^{-1} называется решение уравнения

$$\mathbf{A}_*^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}. \quad (1.104)$$

Покажем, что левый и правый обратные тензоры совпадают. Действительно, умножая (1.104) на \mathbf{A}^{-1} справа, получаем

$$\mathbf{A}_*^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}_*^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Поэтому в дальнейшем будем говорить просто об обратном тензоре. Обратный тензор существует только для тензоров, определитель которых отличен от нуля. Такие тензоры называются невырожденными. Вырожденными называют тензоры с нулевым определителем.

Приведем полезное тождество, справедливое для любого невырожденного тензора \mathbf{A} и для любой пары векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} :

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (1.105)$$

Доказательство этого тождества оставляем читателю. Отправной точкой при доказательстве являются формула (1.103) и произвольность входящих в нее линейно независимых векторов.

1.15. Ортогональные тензоры

Чрезвычайно важным классом тензоров второго ранга являются так называемые ортогональные тензоры. К множеству ортогональных тензоров принадлежат так называемые тензоры поворота, посредством которых описываются спиновые движения, играющие важную роль в механике.

Рассмотрим специальный класс линейных отображений $\mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_1$, не меняющих длин векторов:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}. \quad (1.106)$$

По условию

$$|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|,$$

откуда

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \quad (1.107)$$

Нетрудно доказать, что из (1.107) следует необходимость выполнения равенства

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}. \quad (1.108)$$

Равенство (1.108) можно принять за определение ортогонального тензора как тензора, транспонированный к которому совпадает с обратным к нему, т. е. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Поскольку транспонированный тензор существует всегда, то любой ортогональный тензор невырожден и, следовательно, обратим. Множество ортогональных тензоров не пусто (ибо единичный тензор является, очевидно, ортогональным) и образует группу — одно из центральных понятий в математике и физике. Поэтому напомним определение группы. Говорят, что множество Γ элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$ называется группой, если в нем введен ассоциативный закон композиции элементов, обозначаемый далее символом \odot и не выводящий за пределы этого множества. Кроме того, среди элементов этого множества содержится единичный элемент, и каждый элемент имеет обратный.

Определение. Множество элементов $\Gamma = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots\}$ с законом композиции \odot элементов называется группой, если:

- а) $\mathbf{x} \in \Gamma, \mathbf{y} \in \Gamma \Rightarrow \mathbf{x} \odot \mathbf{y} = \mathbf{z} \in \Gamma$;
- б) $\mathbf{x} \odot (\mathbf{y} \odot \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) \odot \mathbf{z}$;
- в) в Γ существует единичный элемент \mathbf{e} : $\mathbf{e} \odot \mathbf{x} = \mathbf{x} \odot \mathbf{e} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \Gamma$;
- г) для любого элемента $\forall \mathbf{x} \in \Gamma$ существует обратный элемент \mathbf{x}^{-1} , такой, что $\mathbf{x}^{-1} \odot \mathbf{x} = \mathbf{x} \odot \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{e}$.

В рассматриваемом нами случае множество Γ есть множество тензоров, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \quad (1.109)$$

В качестве закона композиции элементов принимается внутреннее умножение тензоров второго ранга. Этот закон ассоциативен:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Покажем, что этот закон композиции не выводит за пределы исходного множества, т. е. если \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 — ортогональные тензоры, то $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$ также является ортогональным. Для этого надо показать, что

$$\mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_3^T = \mathbf{E}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_3^T &= (\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1) \cdot (\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1)^T = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_1^T \cdot \mathbf{Q}_2^T = \\ &= \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Роль единицы на множестве ортогональных тензоров выполняет единичный тензор \mathbf{E} . Существование обратного элемента обеспечено самим определением ортогонального тензора.

Множество ортогональных тензоров называется полной ортогональной группой и обозначается буквой \mathcal{O} . Для ортогонального тензора справедливы равенства:

$$\det \mathbf{E} = \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) = (\det \mathbf{Q})^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1.$$

Все множество ортогональных тензоров можно разбить на два подмножества в зависимости от знака $\det \mathbf{Q}$. Множество тензоров, у которых $\det \mathbf{Q} = +1$, само образует группу, ибо если $\det \mathbf{Q}_1 = +1$ и $\det \mathbf{Q}_2 = +1$, то и $\det \mathbf{Q}_3 = \det(\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) = +1$. Эта группа называется собственно ортогональной группой и обозначается буквой \mathcal{O}_+ , а ее элементы называются *собственно ортогональными тензорами* или тензорами поворота. Произвольный ортогональный тензор является либо тензором поворота, либо произведением тензора поворота на ортогональный тензор $\mathbf{Q} = -\mathbf{E}$, который называется *тензором инверсии* ($\det(-\mathbf{E}) = -1$). Поэтому при изучении ортогональных тензоров достаточно ограничиться изучением тензоров поворота.

Рассмотрим действие ортогонального тензора на вектор \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (1.110)$$

Вычисляя длину вектора \mathbf{a}' , получаем

$$|\mathbf{a}'|^2 = \mathbf{a}' \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2. \quad (1.111)$$

Итак, длина вектора \mathbf{a}' равна длине вектора \mathbf{a} , т. е. вектор \mathbf{a}' отличается от \mathbf{a} только направлением. Поэтому вектор $\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$ можно рассматривать как повернутый вектор \mathbf{a} . Отсюда, казалось бы, следует, что любой ортогональный тензор можно было бы назвать тензором поворота, а не только такой тензор \mathbf{Q} , у которого $\det \mathbf{Q} = +1$. Однако это не так, и далее мы это увидим. Важным свойством ортогонального тензора является то, что он не меняет скалярного произведения векторов. Пусть

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{b}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}.$$

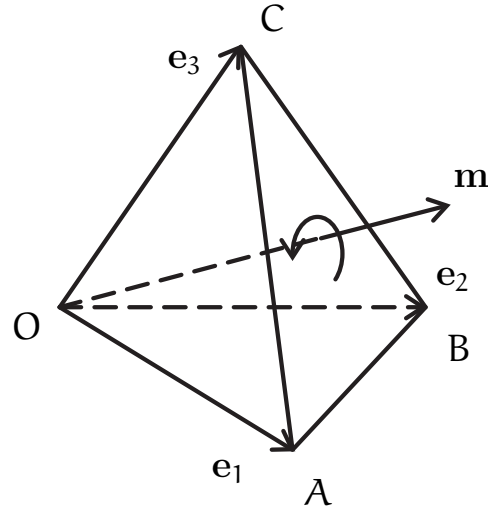


Рис. 1.7. Определение правой тройки векторов

Тогда

$$\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (1.112)$$

Иными словами, в результате действия ортогонального тензора \mathbf{Q} на векторы не меняются не только длины векторов, но и углы между ними. Выясним теперь точный смысл термина “тензор поворота”, т. е. рассмотрим влияние знака определителя ортогонального тензора \mathbf{Q} . Для этого необходимо рассмотреть действие тензора на тройку линейнонезависимых векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 :

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \neq 0. \quad (1.113)$$

Прежде всего, необходимо придать точный смысл понятиям “правая и левая тройка векторов”. Эти понятия зависят от выбора ориентации в пространстве. Далее мы будем считать, что все рассуждения проводятся в правоориентированном пространстве. В левоориентированном пространстве названия “правая и левая тройка” лучше бы поменять местами, но можно этого и не делать. Построим на векторах \mathbf{e}_k трехгранник (рис. 1.7). Соединим концы векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 и получим треугольник ABC . Далее, из точки O — вершины трехгранника — проведем вектор \mathbf{m} , который ортогонален плоскости треугольника ABC . В плоскости треугольника ABC проводим круговую стрелку, показывающую направление обхода вершин треугольника: первая вершина — конец вектора \mathbf{e}_1 , вторая — конец \mathbf{e}_2 , третья — конец \mathbf{e}_3 . Если при взгляде с конца вектора \mathbf{m} обход вершин осуществляется против хода часовой стрелки, то тройка векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 называется правой. В противном случае, т. е. если обход совершается по ходу часовой стрелки, тройка векторов называется левой.

На рис. 1.7 показана правая тройка векторов. Если бы мы взяли тройку $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3$, то эта тройка \mathbf{e}'_k была бы левой. Как известно, для правой тройки векторов \mathbf{e}_k смешанное произведение $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Для левой тройки \mathbf{e}_k смешанное произведение $(\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3$ равно объему параллелепипеда, взятому со знаком “минус” (объем, разумеется, — величина неотрицательная).

Изучим теперь действие \mathbf{Q} на линейно независимую тройку векторов:

$$\mathbf{e}'_m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_m. \quad (1.114)$$

Определитель тензора вычисляется по формуле

$$\det \mathbf{Q} = \frac{(\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2) \cdot \mathbf{e}'_3}{(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3}. \quad (1.115)$$

Из (1.115) видим, что если $\det \mathbf{Q} = +1$, то тензор \mathbf{Q} переводит правую тройку \mathbf{e}_m , в правую тройку векторов \mathbf{e}'_m , а левую тройку \mathbf{e}_m переводит в левую тройку \mathbf{e}'_m . Как мы видели, \mathbf{Q} не меняет длин векторов, т. е. $|\mathbf{e}'_m| = |\mathbf{e}_m|$. Кроме того, \mathbf{Q} не меняет и углов между векторами, т. е.

$$\mathbf{e}'_m \cdot \mathbf{e}'_n = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \cos(\widehat{\mathbf{e}'_m, \mathbf{e}'_n}) = \cos(\widehat{\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n}).$$

Отсюда видим, что действие \mathbf{Q} на тройку векторов \mathbf{e}_m сводится к повороту рассматриваемой тройки как жесткого целого при условии, что $\det \mathbf{Q} = +1$. Таким образом, тройки \mathbf{e}_m и \mathbf{e}'_m могут быть совмещены друг с другом посредством поворота в пространстве. Именно поэтому ортогональный тензор \mathbf{Q} : $\det \mathbf{Q} = +1$ называется тензором поворота.

Если же $\det \mathbf{Q} = -1$, то из (1.115) видим, что \mathbf{Q} переводит правую тройку в левую и наоборот. В этом случае никакими поворотами тройки \mathbf{e}_k и $\mathbf{e}'_k = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_k$ совместить невозможно. Нужна еще одна операция, называемая инверсией. Тогда ортогональный тензор \mathbf{Q} : $\det \mathbf{Q} = -1$ можно представить в виде произведения:

$$\mathbf{Q} = (-\mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}; \quad \det \mathbf{Q} = -1; \quad \det \mathbf{P} = +1,$$

где \mathbf{P} уже является тензором поворота.

Обратимся к описанию различных форм представлений тензоров поворота. Одним из наиболее простых представлений является следующее. Выберем произвольную линейно независимую тройку векторов \mathbf{d}_m , удовлетворяющую условию (1.113). При действии тензора \mathbf{Q} тройка векторов \mathbf{d}_m переходит в тройку \mathbf{D}_m (здесь вектор обозначен прописной буквой):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_m \otimes \mathbf{d}^m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{Q} \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{Q} = \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m, \end{aligned} \quad (1.116)$$

где \mathbf{d}^m взаимная к \mathbf{d}_n тройка векторов: $\mathbf{d}^m \cdot \mathbf{d}_s = \delta_s^m$. Если подействовать тензором \mathbf{Q} на векторы взаимного базиса \mathbf{d}^m , то получим

$$\mathbf{D}^m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}^m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}^m \otimes \mathbf{d}_m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}^m \otimes \mathbf{d}_m = \mathbf{Q}. \quad (1.117)$$

Легко убедиться, что векторы: \mathbf{D}_m и \mathbf{D}^n образуют взаимные (биортогональные) тройки векторов:

$$\mathbf{D}_n \cdot \mathbf{D}^m = \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}^m = \mathbf{d}_n \cdot \mathbf{d}^m = \delta_n^m.$$

Итак, любой ортогональный тензор может быть представлен в формах

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m = \mathbf{D}^m \otimes \mathbf{d}_m, \\ \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{D}^n &= \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}^n = \delta_m^n; \quad \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{D}_n = \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Сама возможность представления ортогонального тензора в форме (1.118) оказывается часто очень полезной.

Для любого вектора \mathbf{a} и для любого ортогонального тензора \mathbf{Q} справедливы тождества:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{Q}^\top) &= \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^\top = (\det \mathbf{Q}) [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}], \\ (\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^\top &= \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^\top = (\det \mathbf{Q}) [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (1.119)$$

При выводе соотношений (1.119) будем исходить из представления (1.103):

$$\det \mathbf{A} = \frac{(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') \cdot \mathbf{c}'}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}} = \frac{[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}.$$

Это выражение справедливо для произвольного тензора второго ранга и произвольной тройки линейно независимых тензоров. Очевидно, что мы можем в качестве вектора \mathbf{c} последовательно выбрать три линейно независимых вектора \mathbf{e}_k . Предыдущую формулу перепишем в виде трех выражений:

$$(\det \mathbf{A}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}_k = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.120)$$

Умножая обе части равенств (1.120) тензорно на \mathbf{e}^k и суммируя по k , получаем

$$(\det \mathbf{A}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot \mathbf{A}.$$

Предполагая тензор \mathbf{A} невырожденным и умножая это равенство скалярно на \mathbf{A}^{-1} справа, получаем тождество (1.105):

$$(\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}),$$

которое ранее приводилось без доказательства. Последнее равенство верно для любой пары векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} . Перепишем его в эквивалентном виде:

$$(\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{b}_k = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}_k,$$

где \mathbf{b}_k — линейно независимая тройка векторов. Отсюда следует равенство

$$(\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) = [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{A}. \quad (1.121)$$

Умножая равенство (1.121) скалярно на \mathbf{A}^{-1} справа, получаем искомое тождество:

$$(\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}. \quad (1.122)$$

Принимая здесь $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$, где \mathbf{Q} — ортогональный тензор, т. е. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\top$, $\mathbf{Q}^{-\top} = \mathbf{Q}$, приходим к тождеству (1.119).

1.16. Тензоры поворота. Теорема Эйлера

Приведем доказательство одной чрезвычайно важной в кинематике твердого тела теоремы. Обычно доказательство этой теоремы опирается на теорему о спектральном разложении несимметричного тензора. Однако последняя теорема, будучи громоздкой, в теоретической механике не находит приложений. Поэтому мы предпочитаем другое и значительно более простое доказательство.

Теорема Эйлера. Произвольный тензор поворота \mathbf{P} , отличный от \mathbf{E} , допускает единственное представление:

$$\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (1.123)$$

где единичный вектор \mathbf{m} является неподвижным вектором тензора \mathbf{P} и определяет прямую в пространстве, называемую осью поворота; θ называется углом поворота и считается положительным, если поворот при взгляде с конца вектора \mathbf{m} происходит против хода часовой стрелки.

Доказательство. Единичный вектор \mathbf{m} , не меняющийся при действии на него тензора \mathbf{P} , называется неподвижным вектором тензора \mathbf{P} . Не для всякого тензора второго ранга неподвижный вектор существует. Но для тензора поворота (собственно ортогонального тензора) он не только существует, но и определяет единственную прямую, которая называется осью поворота. Сам же вектор \mathbf{m} определяется с точностью до множителя ± 1 . По определению, неподвижный вектор является решением уравнения

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}; \quad |\mathbf{m}| = 1. \quad (1.124)$$

Вектор \mathbf{m} , являющийся решением уравнения (1.124), называется правым неподвижным вектором тензора \mathbf{P} . Но легко убедиться, что одновременно он является и левым неподвижным вектором $\mathbf{m} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{m}$. В самом деле, умножая (1.124) скалярно на \mathbf{P}^\top слева, получаем

$$\mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{P}.$$

Уравнение (1.124) можно переписать в эквивалентной форме:

$$(\mathbf{P} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{m}| = 1, \quad (1.125)$$

т. е. вектор \mathbf{m} является решением однородного линейного уравнения.

Из курса линейной алгебры известно, что однородная система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевое (нетривиальное) решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\det(\mathbf{P} - \mathbf{E}) \equiv \det(\mathbf{P}_{*t}^{s*} - \delta_t^s) = 0. \quad (1.126)$$

Покажем, что равенство (1.126) действительно выполняется. Для этого выпишем цепочку тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P} - \mathbf{E}) &= \det[\mathbf{P} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{P}^\top)] = \det \mathbf{P} \det(\mathbf{E} - \mathbf{P}^\top) = \\ &= \det(\mathbf{E} - \mathbf{P}^\top) = \det(\mathbf{E} - \mathbf{P})^\top = \det(\mathbf{E} - \mathbf{P}) = \det[(-\mathbf{E}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{E})] = \\ &= \det(-\mathbf{E}) \det(\mathbf{P} - \mathbf{E}) = -\det(\mathbf{P} - \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Получили, что $\det(\mathbf{P} - \mathbf{E}) = -\det(\mathbf{P} - \mathbf{E})$, а это возможно, если верно равенство (1.126). Итак, ненулевое решение (1.125) существует. Понятно, что если \mathbf{m} есть решение (1.125), то и минус \mathbf{m} есть решение этого уравнения. Однако оба эти вектора определяют одну и ту же прямую, натянутую на вектор \mathbf{m} . Покажем теперь, что тензор поворота \mathbf{P} , отличный от \mathbf{E} , имеет не более одной неподвижной прямой. Допустим обратное, т. е. пусть (1.125) имеет два решения \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 , таких, что $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq \mathbf{0}$. Если $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 = \mathbf{0}$, то такие решения рассматриваются как совпадающие, так как они определяют одно и то же семейство прямых. Если \mathbf{P} имеет два различных неподвижных вектора \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 : $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2 \neq \mathbf{0}$, то он имеет и третий неподвижный вектор $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$. Доказательство этого утверждения немедленно вытекает из тождества (1.105), если в нем принять $\mathbf{A} = \mathbf{P}$, $\mathbf{A}^{-\top} = \mathbf{P}$, $\mathbf{a} = \mathbf{m}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{m}_2$, $\det \mathbf{P} = 1$:

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_1) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_2) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2).$$

Но по условию $\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_1$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_2$. Поэтому

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2) = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2.$$

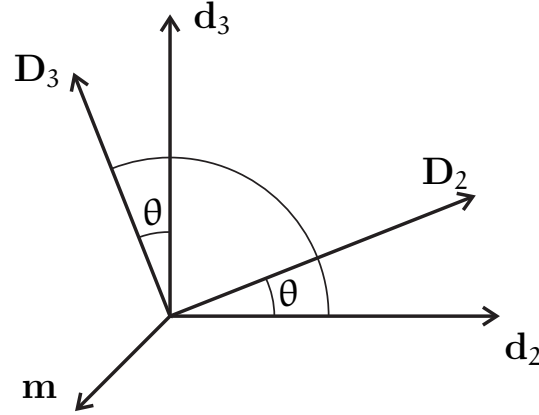


Рис. 1.8. К теореме Эйлера

Следовательно, вектор $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ также является неподвижным вектором тензора \mathbf{P} . Итак, если \mathbf{P} имеет два неподвижных вектора \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 , то он имеет и третий неподвижный вектор $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$. Причем тройка векторов \mathbf{m}_k , очевидно, является линейно независимой и допускает построение взаимного базиса \mathbf{m}^k . Тогда

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_k \otimes \mathbf{m}^k = \mathbf{m}_k \otimes \mathbf{m}^k \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}.$$

Таким образом, \mathbf{P} может иметь более одного неподвижного вектора только в том случае, когда он совпадает с единичным тензором, а это исключено условием теоремы. Выберем теперь правую ортонормированную тройку векторов $\mathbf{d}_1 = \mathbf{m}$, \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 . Согласно (1.118) можем записать

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{m} + \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{d}_3,$$

где тройка векторов \mathbf{D}_i также является правой ортонормированной. Умножая это равенство скалярно на \mathbf{m} справа и учитывая (1.124), получаем

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{D}_1 = \mathbf{m}.$$

Предыдущее равенство принимает вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \quad (1.127)$$

Здесь все четыре вектора \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 , \mathbf{D}_2 , \mathbf{D}_3 лежат в одной плоскости, так как все они ортогональны одному и тому же вектору \mathbf{m} . Поэтому векторы \mathbf{D}_2 и \mathbf{D}_3 можно разложить по векторам \mathbf{d}_2 и \mathbf{d}_3 (рис. 1.8):

$$\mathbf{D}_2 = \cos \theta \mathbf{d}_2 + \sin \theta \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{D}_3 = -\sin \theta \mathbf{d}_2 + \cos \theta \mathbf{d}_3, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Подставляя эти разложения в (1.127) и проводя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + (\cos \theta \mathbf{d}_2 + \sin \theta \mathbf{d}_3) \otimes \mathbf{d}_2 + (-\sin \theta \mathbf{d}_2 + \cos \theta \mathbf{d}_3) \otimes \mathbf{d}_3 = \\ &= \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) + \sin \theta (\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_3) = \\ &= \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \end{aligned}$$

где использованы тождества

$$\begin{aligned} \mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} &= \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3; \\ \mathbf{m} \times \mathbf{E} &= \mathbf{m} \times (\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) = \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_3; \end{aligned}$$

которые справедливы для любой правой ортонормированной тройки векторов $\mathbf{d}_1 = \mathbf{m}$, \mathbf{d}_2 , \mathbf{d}_3 . Установленным равенством и заканчивается доказательство теоремы Эйлера (1.123).

Обратим внимание, что замена в (1.123) вектора \mathbf{m} на вектор $-\mathbf{m}$ влечет за собой замену θ на $-\theta$. При этом сам тензор \mathbf{P} не меняется. Теорема Эйлера позволяет дать очень ясное представление о результате действия тензора поворота \mathbf{P} на вектор \mathbf{a} . Если вектор \mathbf{a} параллелен оси поворота (лежит на оси поворота), т. е. $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{m}$, то $\mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и вектор \mathbf{a} не меняется при действии на него тензора \mathbf{P} . Пусть \mathbf{a} ортогонален оси поворота: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{m} = 0$. Тогда

$$\mathbf{a}' \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \cos \theta \mathbf{a} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{a}.$$

Изобразим этот результат на рис. 1.9. На рис. 1.9, *a* показано, что действие тензора поворота на вектор \mathbf{a} , ортогональный оси поворота, сводится к повороту этого вектора на угол θ вокруг \mathbf{m} . Если $\theta > 0$, то поворот производится против движения часовой стрелки при взгляде с конца \mathbf{m} . Поворот произвольного вектора \mathbf{a} показан на рис. 1.9, *б*, при этом проекция вектора \mathbf{a} на \mathbf{m} сохраняется, а часть вектора \mathbf{a} , ортогональная \mathbf{m} , поворачивается на угол θ вокруг \mathbf{m} . Следует обратить внимание на то, что угол θ равен углу между проекциями векторов \mathbf{a}' и \mathbf{a} на плоскость, ортогональную оси поворота, но не между самими векторами.

Теорема Эйлера делает ясным еще один важный факт, а именно тензор поворота полностью определяется заданием не более чем трех независимых параметров. В представлении (1.123) ими являются: угол θ и два угла, фиксирующие положение \mathbf{m} (или $-\mathbf{m}$) относительно какого-либо базиса. Выбор именно этих трех независимых параметров необязателен: существует бесконечно много различных троек независимых параметров, полностью определяющих тензор поворота. Отсюда следует, что множество ортогональных тен-

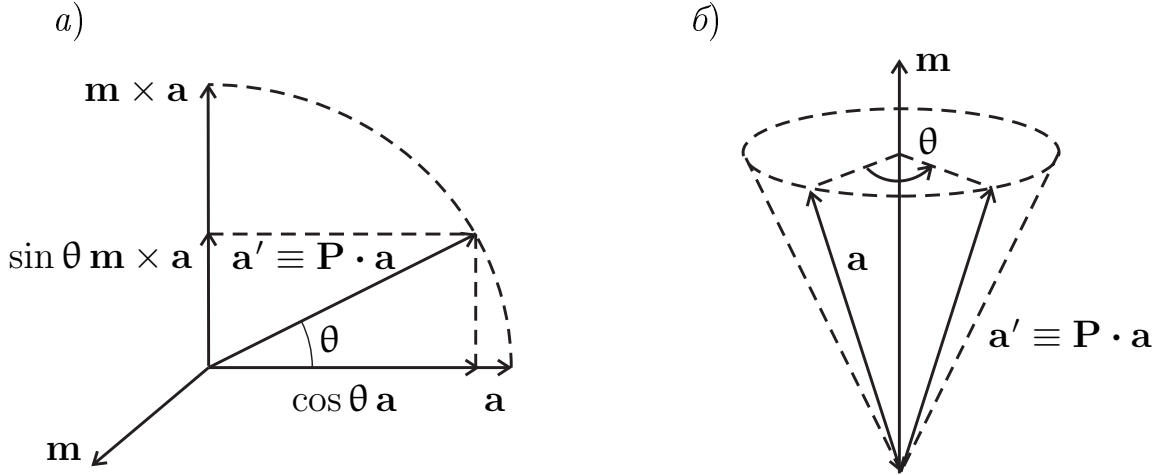


Рис. 1.9. Поворот вектора, ортогонального оси поворота (а) и поворот вектора общего направления (б)

зоров образует трехмерное пространство. Хотя последнее и не является линейным пространством, но оно позволяет установить взаимно однозначное соответствие между кососимметричными тензорами второго ранга, множество которых образует линейное пространство, и тензорами поворота. А отсюда, в свою очередь, следует, что повороты можно описывать векторами, так как существует однозначная связь между кососимметричными тензорами второго ранга и векторами. Подробно этот факт будет обсуждаться в кинематике абсолютно твердого тела.

Наконец, теорема Эйлера дает простой способ вычисления угла поворота θ и неподвижного вектора \mathbf{m} . Из (1.123) следует, что

$$1 + 2 \cos \theta = \text{tr} \mathbf{P}; \quad -2 \sin \theta \mathbf{m} = \mathbf{P}_{\times}. \quad (1.128)$$

Тензор поворота \mathbf{P} в правых частях (1.128) может быть задан в произвольной форме. Например, если \mathbf{P} задан в виде разложения

$$\mathbf{P} = P^{mn} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = P_{*n}^{m*} \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n,$$

то

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cos \theta &= P^{mn} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = g_{mn} P^{mn} = P_{*m}^{m*}, \\ -2 \sin \theta \mathbf{m} &= P^{mn} \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n = \varepsilon_{mnt} P^{mn} \mathbf{e}^t. \end{aligned}$$

Если тензор \mathbf{P} задан в виде (1.118), то

$$1 + 2 \cos \theta = \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{d}^m; \quad -2 \sin \theta \mathbf{m} = \mathbf{D}_m \times \mathbf{d}^m.$$

1.17. Правило квазикоммутативности поворотов

Введем в рассмотрение понятие сложного поворота. Пусть задан вектор \mathbf{a} и тензоры \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 . Повернем вектор \mathbf{a} тензором \mathbf{P}_1 и найдем вектор $\mathbf{a}' = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a}$. Далее вектор \mathbf{a}' повернем тензором \mathbf{P}_2 и найдем вектор $\mathbf{a}'' = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}'$. В результате вектор \mathbf{a}'' вычисляется как сложный поворот вектора \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1. \quad (1.129)$$

Из (1.129) видим, что при последовательном проведении двух поворотов результирующий поворот выражается через произведение составляющих поворотов. Этот факт выражают словами: композиция поворотов мультипликативна. Мы знаем, что в общем случае произведение тензоров некоммукативно, т. е. если \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 — тензоры поворота, то

$$\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2. \quad (1.130)$$

В справедливости последнего утверждения легко убедиться непосредственно. Пусть \mathbf{P}_1 — поворот вокруг \mathbf{e}_1 на угол $-\pi/2$. Пусть \mathbf{P}_2 — поворот вокруг \mathbf{e}_3 на угол $-\pi/2$. Композиция поворотов \mathbf{P}_2 и \mathbf{P}_1 представлена на рис. 1.10.

Проведем теперь повороты в обратной последовательности: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$ (рис. 1.11). Сравнивая заключительные позиции на рис. 1.10 и рис. 1.11, наглядно убеждаемся в справедливости (1.130). Не следует, однако, абсолютизировать условие (1.130). Дело в том, что существует вполне определенное правило квазикоммутативности (т. е. как бы перестановочности) поворотов, играющее важную роль в динамике и кинематике твердого тела. Сейчас мы выведем это правило. Но сначала рассмотрим некое специальное преобразование тензора поворота \mathbf{P} . Пусть \mathbf{S} — тензор поворота. Тогда \mathbf{S}^T есть обратный поворот. Рассмотрим композицию поворотов $\mathbf{S} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}^T$ — такое преобразование \mathbf{P} называется преобразованием подобия. Что мы получили в результате такой манипуляции? Введем обозначение:

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (1.131)$$

т. е. $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})$ мы обозначили поворот вокруг \mathbf{m} на угол φ .

Рассмотрим тензор поворота:

$$\begin{aligned} & \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S}^T = \\ & = (1 - \cos \varphi)(\mathbf{S} \cdot \mathbf{m}) \otimes (\mathbf{S} \cdot \mathbf{m}) + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{S} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{S}^T). \end{aligned} \quad (1.132)$$

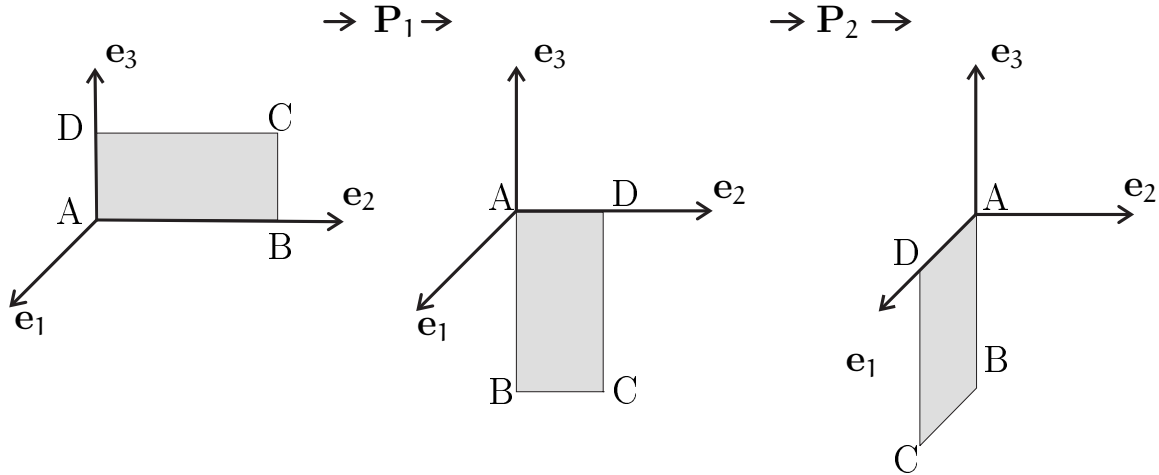


Рис. 1.10. Композиция поворотов $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1$

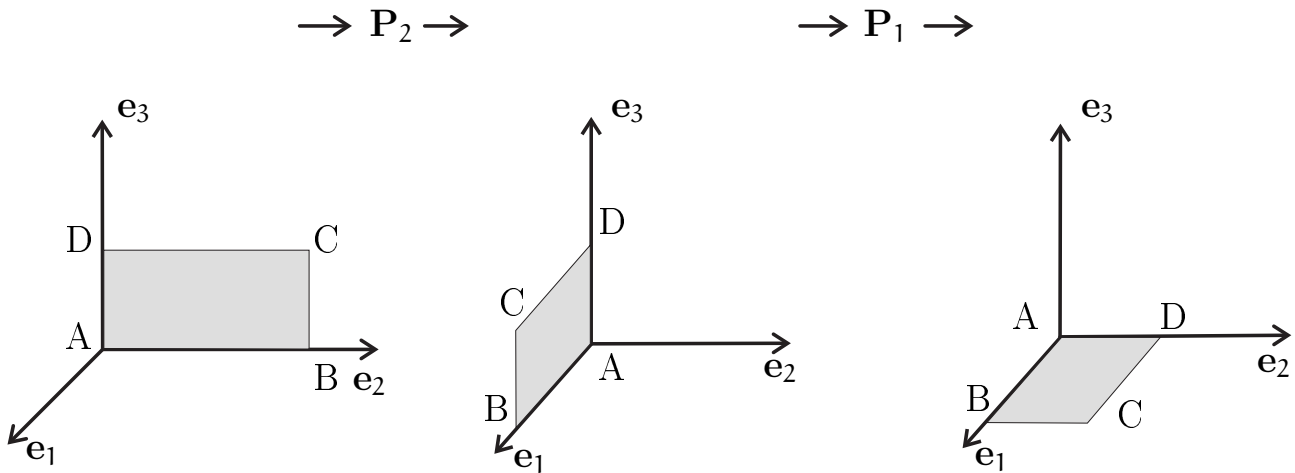


Рис. 1.11. Композиция поворотов $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$

Здесь мы учли тождество $\mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}$ и должны вспомнить тождество (1.119):

$$(\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}],$$

справедливое для любого вектора \mathbf{a} и любого ортогонального тензора \mathbf{Q} .

Тогда равенство (1.132) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{S}^T &= \\ &= (1 - \cos \varphi) \mathbf{m}' \otimes \mathbf{m}' + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{m}' \times \mathbf{E} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}'), \end{aligned} \tag{1.133}$$

где $\mathbf{m}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{m}$.

Итак, в результате преобразования подобия (1.133) мы приходим к тензору поворота $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}')$, который поворачивает на тот же угол φ , но вокруг повернутой оси \mathbf{m}' .

Теперь легко установить правило квазикоммутативности поворотов $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})$ и $\mathbf{Q}(\theta \mathbf{n})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{n}) &= \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{n}) \cdot \underline{\mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})} = \\ &= \mathbf{Q}(\theta \mathbf{n}') \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}), \end{aligned} \quad (1.134)$$

где $\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}$. В (1.134) подчеркнутый тензор есть единичный тензор.

В левой части (1.134) мы сначала поворачиваем на угол θ вокруг \mathbf{n} , а затем поворачиваем на угол φ вокруг \mathbf{m} . В правой части (1.134) мы сначала поворачиваем на угол φ вокруг \mathbf{m} , а затем — на тот же угол θ , но уже вокруг повернутой оси \mathbf{n}' . С физической точки зрения правило квазикоммутативности играет ту же роль, что и настоящая коммутативность (перестановочность). Это правило чрезвычайно важно в кинематике абсолютно твердого тела. Из (1.134) сразу видим, когда квазикоммутативность становится истинной коммутативностью. Для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор \mathbf{n}' совпал с \mathbf{n} :

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \pm \mathbf{m},$$

т. е. \mathbf{n} должен быть неподвижным вектором тензора $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})$. Иными словами, оси поворотов тензоров $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m})$ и $\mathbf{Q}(\theta \mathbf{n})$ должны совпадать. При этом легко убедиться в справедливости равенства $\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) = \mathbf{Q}((\varphi + \theta)\mathbf{m})$.

В механике теорема Эйлера особенно эффективна в тех задачах, в которых ось поворота заранее известна и фиксирована во времени. Таких задач много. Кроме того, общая ситуация может быть сведена к трем последовательным поворотам вокруг заранее и произвольно выбранных фиксированных осей. Это можно сделать многими способами. Подробнее этот вопрос будет обсужден при изложении кинематики абсолютно твердого тела.

Замечание. Рассматривая повороты, мы имели в виду именно последовательность поворотов в смысле порядка произведения этих поворотов. Не следует путать эту последовательность с временной последовательностью. Поворот — это мгновенное действие. В какой бы последовательности мы ни производили повороты, все они происходят в один и тот же момент времени. Изменение поворотов во времени определяется изменением аргумента \mathbf{t} в выражениях типа $\mathbf{Q}(\varphi(\mathbf{t}) \mathbf{m}(\mathbf{t}))$.

Глава 2

Кинематика спинорных движений

2.1. Трансляционные и спинорные движения

Движение материальной точки вполне определено, если известны ее положение, скорость и ускорение. В дальнейшем это описание будет дополнено введением спинорных движений тел-точек. Однако для этого необходимо изучить само понятие спинорного движения, которое значительно сложнее по своей природе, нежели обычное (трансляционное) движение, и которое значительно труднее для интуитивного восприятия. Поэтому начинать изучение спинорного движения лучше всего на примере интуитивно ясных моделей. Одной из таких моделей, имеющей к тому же большое практическое значение, является модель абсолютно твердого тела.

Итак, существуют два принципиально различных вида движений: трансляционные и спинорные. Первые определяются заданием векторов положений и описывают перемещения (трансляции) тел в системе отсчета. Спинорные движения определяются заданием функций времени, значениями которых являются собственно ортогональные тензоры размерности три. Сопутствующие спинорным движениям характеристики (векторы поворота, угловые скорости и т. д.) описываются с помощью понятия аксиального вектора, прообразом которого являются спин-векторы — объекты, введенные в предыдущей главе.

Далее показывается удобство применения тензора поворота в кинематике твердого тела. Обсуждаются понятия угла поворота, оси поворота, вектора поворота, вектора угловой скорости, оси вращения. По смыслу эти понятия совпадают с имеющимися в литературе по теоретической механике и динамике твердого тела, где им сопутствуют многие неточности¹. Доказывается

¹ Здесь речь идет о неоднозначности суждений о векторе поворота — см. раздел 2.6, о том, что нельзя смешивать понятия “ось вращения” и “ось поворота” — см. раздел 2.9, а также об ошибочности представленной в классических учебниках формулировки теоремы сложения угловых скоростей — см. раздел 2.13. (*Примеч. ред.*)

теорема о сложении угловых скоростей, которая отличается от приводимой в учебниках. Приводится новая трактовка углов Эйлера, показывается неубедительность вывода кинематического уравнения Эйлера, дается его строгое доказательство. Вводятся модифицированные углы Эйлера, частными случаями которых являются как углы Эйлера, так и другие наборы углов, например углы Брайнта.

2.2. Абсолютно твердое тело

Всякое макротело можно представлять себе как множество микрочастиц, или материальных точек. Макротело может включать в себя произвольное, вплоть до бесконечного, число материальных точек. Рассмотрим какую-либо точку A макротела. Ее движение характеризуется радиус-вектором

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}), \quad A — \text{любая точка тела.} \quad (2.1)$$

Здесь индекс A можно рассматривать как имя рассматриваемой точки. Будем считать, что этот индекс пробегает все имена точек, составляющих макротело. Таким образом, (2.1) — это не один какой-то радиус-вектор, а множество различных радиусов-векторов, каждый из которых задает движение определяемой им точки. Иными словами, (2.1) содержит столько радиус-векторов, сколько частиц содержится в рассматриваемом макротеле. В общем случае этих частиц может быть бесконечно много. Поэтому описание движения макротела общего вида является бесконечномерным со всеми вытекающими отсюда последствиями. Ситуация резко упрощается, если рассматриваемое макротело можно считать абсолютно твердым.

Определение. *Макротело называется абсолютно твердым, если расстояния между точками этого тела остаются неизменными при всех возможных движениях макротела.*

Если условие, указанное в определении абсолютно твердого тела, не выполняется, то такое макротело называют деформируемым. Разумеется, абсолютно твердое тело — это только модель, в реальности все тела являются деформируемыми. Однако во многих случаях деформируемостью тела можно пренебречь. Следует, впрочем, отметить, что важны не только свойства тела, но и условия рассматриваемой задачи. Одно и то же тело в одних задачах можно считать абсолютно твердым, а в других задачах подобная идеализация неприемлема. Тем не менее изучение идеализированных моделей является необходимым шагом на пути изучения механики.

Принятое определение абсолютно твердого тела в математической форме можно выразить следующим образом:

$$|\mathbf{R}_A(\mathbf{t}_1) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t}_1)| = |\mathbf{R}_A(\mathbf{t}_2) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t}_2)|, \quad (2.2)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — две любые произвольно выбранные точки абсолютно твердого тела; а \mathbf{t}_1 и \mathbf{t}_2 — два произвольно выбранных момента времени.

Из (2.2) немедленно следует, что не только длины векторов $\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B$ остаются неизменными в процессе движения, но и углы между векторами $\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A$ и $\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_A$ не меняются при движениях абсолютно твердого тела:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{R}_B(\mathbf{t}_1) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}_1)) \cdot (\mathbf{R}_C(\mathbf{t}_1) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}_1)) = \\ & = (\mathbf{R}_B(\mathbf{t}_2) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}_2)) \cdot (\mathbf{R}_C(\mathbf{t}_2) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}_2)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Кажется поистине удивительным, как много нетривиальных следствий можно извлечь из единственного равенства (2.2). Этим следствиям будет посвящена вся данная глава. Прежде чем обращаться к ним, нам необходимо ввести пару вспомогательных понятий-образов.

Начнем с понятия материального вектора. Это понятие не используется в литературе, но оно весьма полезно для правильного интуитивного восприятия движения абсолютно твердого тела. Выберем в теле две произвольные точки \mathbf{A} и \mathbf{B} и соединим их стрелкой. В результате получим направленный отрезок \overrightarrow{AB} , состоящий из точек тела и как бы замороженный в это тело. Объект \overrightarrow{AB} будем называть *материальным вектором*, который является чисто физическим объектом. При движениях тела этот материальный вектор перемещается вместе с телом, не претерпевая при этом никаких изменений относительно самого тела. Следует сразу же подчеркнуть, что ни в какие математические формулы материальный вектор сам по себе не входит и не может входить, ибо он определен в теле, а математика имеет дело с объектами, заданными в системе отсчета.

Связь между материальными векторами и их математическими образами определяется следующими отношениями:

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{R}_{AB}(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_A(\mathbf{t}). \quad (2.4)$$

Таким образом, истинный вектор $\mathbf{R}_{AB}(\mathbf{t})$ — это как бы образ (отпечаток), оставляемый материальным вектором \overrightarrow{AB} в системе отсчета в данный момент времени. Если тело движется, то вместе с ним движется и материальный вектор \overrightarrow{AB} . Последний не меняется, но его образ в системе отсчета меняется во времени. Именно посредством своего математического образа материальный вектор входит во все математические формулы.

Заметим, что всякому материальному вектору можно поставить в соответствие его математический образ, т. е. истинный вектор. Но далеко не всякий истинный вектор имеет свой материальный прообраз. Например, не имеют материальных прообразов векторы силы, момента, скорости и многие другие. Тем не менее необходимо научиться воспринимать и такие математические объекты на интуитивном уровне.

Материальный вектор \overrightarrow{AB} описывает ориентацию твердого тела относительно системы отсчета только с точностью до поворота тела вокруг материальной оси, натянутой на вектор \overrightarrow{AB} . Чтобы устранить эту неоднозначность, введем в рассмотрение объект, который будем называть *двойным материальным вектором* и обозначать $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Выберем в теле три произвольные точки A , B , C , не лежащие на одной прямой. Введем в рассмотрение пару материальных векторов. Эту пару можно ввести различными способами. Например, можно ввести пару \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} . Можно ввести пару \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} . Важно только, чтобы векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} или \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} не лежали на одной прямой. В таком случае задание любой из этих пар векторов полностью фиксирует ориентацию тела в системе отсчета.

Замечание. Термин “ориентация” используется в данной книге в двух совершенно различных смыслах. Ранее речь шла об ориентации системы отсчета и различались правоориентированные и левоориентированные системы отсчета. Встречается также термин “ориентированная кривая”. Здесь термином “ориентация” обозначается выбор одной реализации из двух равноправных возможностей. Например, ориентировать кривую — это значит выбрать из двух возможных направлений на кривой то, которое принимается положительным. Использование термина “ориентация” в указанном смысле общепринято в математической литературе. В технике термин “ориентация” используется в другом смысле. Видимо, всем ясен смысл утверждений: ориентировать солнечные батареи спутника на Солнце или ориентировать зеркало телескопа. Здесь речь идет о фиксации угловых положений тела. Иными словами, задание ориентации тела в пространстве (системе отсчета) означает фиксацию угловых координат тела по отношению к выбранному трехграннику осей. При этом не имеет значения, в каком месте системы отсчета находится тело. Говоря о задании ориентации тела в системе отсчета, мы использовали термин “ориентация” именно в этом, втором, смысле. В механике и математика, и техника тесно переплетаются. Отсюда и возможность появления несогласованности в терминологии. К этому нужно быть готовым. К счастью, подобная несогласованность в терминах — явление относительно редкое.

Вернемся к описанию задания ориентации тела. Задание одного материального вектора позволяет судить об ориентации тела только с точностью до поворота этого тела вокруг материального вектора. Чтобы избежать этой неоднозначности, в рассмотрение вводится еще один материальный вектор, не коллинеарный первому. Назначение этого второго вектора состоит в том, чтобы наблюдать поворот тела вокруг первого материального вектора. В данной книге в качестве пары материальных векторов выбрана пара \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{BC} . Вектор \overrightarrow{AB} в этой паре будет называться *базой* двойного материального вектора. Вектор \overrightarrow{BC} в этой паре будет называться *кросс-вектором* двойного материального вектора.

Читателю полезно немного поупражняться. Возьмите два одинаковых кубика и пронумеруйте их грани. Затем на одноименных гранях нарисуйте одинаковые двойные векторы. В результате вы получите два одинаковых экземпляра тела. Убедитесь, что если двойные векторы этих тел одинаково ориентированы в системе отсчета, то и сами тела одинаково ориентированы в системе отсчета, хотя они могут быть расположены в разных областях системы отсчета. Правда, что лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать (или прочитать). Двойной материальный вектор сам по себе, конечно, не входит ни в одну математическую формулу и ни в одно уравнение. Формальные описания имеют дело с двойными векторами, заданными в системе отсчета. Например, в момент времени \mathbf{t} пара материальных векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} совпадает с парой истинных векторов $\mathbf{a}(\mathbf{t})$, $\mathbf{b}(\mathbf{t})$:

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{a}(\mathbf{t}); \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{b}(\mathbf{t}).$$

Именно пара векторов $(\mathbf{a}(\mathbf{t}), \mathbf{b}(\mathbf{t}))$, заданная в системе отсчета, и является математическим образом двойного материального вектора.

2.3. Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела

Движение какого-либо тела определяется заданием движений всех частиц (точек), составляющих тело. В общем случае тело состоит из бесконечного набора точек. Поэтому описание его движения бесконечномерно, т. е. требует задания бесконечного набора векторов, зависящих от времени, определяющих положение всех точек тела. Для абсолютно твердого тела ситуация упрощается. Оказывается, что движение любой точки абсолютно твердого тела полностью определено, если известно движение какой-либо одной произвольно

выбираемой точки Q тела, называемой полюсом, и, кроме того, определен некий тензор второго ранга $\mathbf{P}(t)$, называемый тензором поворота.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, движущееся относительно выбранной системы отсчета. Движение абсолютно твердого тела сводится к трансляциям и поворотам относительно системы отсчета. Выберем в теле какую-нибудь точку Q , которую будем называть полюсом. Выберем еще три точки в теле: A_1, A_2, A_3 . Выбор этих точек также произволен, но удовлетворяет ограничению: четыре точки Q, A_1, A_2, A_3 не должны лежать в одной плоскости. Выбранным точкам отвечают три материальных вектора: $\overrightarrow{QA_1}, \overrightarrow{QA_2}$ и $\overrightarrow{QA_3}$, которые, очевидно, не лежат в одной плоскости. Выберем теперь какое-либо положение абсолютно твердого тела в системе отсчета. В этом положении полюс Q тела определяется заданием радиус-вектора \mathbf{r}_Q . Ориентация тела в выбранном положении определяется заданием тройки векторов \mathbf{e}_m такой, что

$$\overrightarrow{QA_1} \sim \mathbf{e}_1; \quad \overrightarrow{QA_2} \sim \mathbf{e}_2; \quad \overrightarrow{QA_3} \sim \mathbf{e}_3. \quad (2.5)$$

Определение. Положение тела, фиксируемое заданием четверки векторов

$$\mathbf{r}_Q; \quad \mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_3, \quad (2.6)$$

называется *отсчетным*.

Положение любой точки S тела в отсчетном положении определяется заданием радиус-вектора:

$$\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_Q + \chi_S^m \mathbf{e}_m \equiv \mathbf{r}_Q + \sum_{m=1}^3 \chi_S^m \mathbf{e}_m, \quad (2.7)$$

где числа χ^1, χ^2, χ^3 называются материальными координатами.

Точке A_1 отвечают координаты $\chi^1 = 1, \chi^2 = \chi^3 = 0$. Точке A_2 соответствуют координаты $\chi^1 = 0, \chi^2 = 1, \chi^3 = 0$. Точке A_3 соответствуют координаты $\chi^1 = 0, \chi^2 = 0, \chi^3 = 1$. Координаты χ^m позволяют идентифицировать все точки абсолютно твердого тела. Отсчетное положение абсолютно твердого тела может выбираться совершенно произвольно, причем выбор диктуется соображениями удобства и зависит от рассматриваемой задачи. Заметим, что в реальном движении положение рассматриваемого тела может никогда не совпадать с отсчетным положением.

Определение. Положение тела в данный момент времени называется *актуальным*.

Чтобы задать актуальное положение тела, мы должны задать радиус-вектор $\mathbf{R}_Q(t)$, определяющий положение полюса Q в данный момент вре-

мени \mathbf{t} , а также тройку векторов \mathbf{E}_m такую, что

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{E}_1(\mathbf{t}); \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{E}_2(\mathbf{t}); \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{E}_3(\mathbf{t}).$$

Таким образом, актуальное положение определяется заданием четверки векторов:

$$\mathbf{R}_Q(\mathbf{t}); \quad \mathbf{E}_1(\mathbf{t}); \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{t}); \quad \mathbf{E}_3(\mathbf{t}). \quad (2.8)$$

Актуальное положение произвольной точки S находят по формуле

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \chi_S^m \mathbf{E}_m(\mathbf{t}), \quad (2.9)$$

где χ_S^m — координаты точки S тела относительно базиса $\mathbf{E}_m(\mathbf{t})$.

Теорема. Актуальное положение произвольной точки S абсолютно твердого тела полностью определяется заданием радиус-вектора $\mathbf{R}_Q(\mathbf{t})$ и собственно ортогонального тензора $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ и вычисляется с помощью уравнения

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q), \quad (2.10)$$

где тензор 2-го ранга $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P} = +1 \quad (2.11)$$

и не зависит от выбора ни полюса Q , ни точки S , ни каких бы то ни было других точек абсолютно твердого тела.

Замечание. Впервые изучающий предмет вполне может просто запомнить уравнение (2.10). Оно носит название основного уравнения кинематики абсолютно твердого тела. При необходимости можно подробно изучить приводимое далее доказательство, но лучше выполнить его самостоятельно. При этом важно обратить внимание на два обстоятельства. Первое. Входящие в уравнение (2.10) радиус-вектор $\mathbf{R}_Q(\mathbf{t})$ и тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ являются характеристиками движения абсолютно твердого тела и никак не связаны с какими бы то ни было особенностями строения абсолютно твердого тела. При этом вектор $\mathbf{R}_Q(\mathbf{t})$ характеризует трансляционное движение абсолютно твердого тела, а тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ описывает спинорное (вращательное) движение абсолютно твердого тела. В дальнейшем тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ будем называть тензором поворота. Второе обстоятельство связано со способом введения тензора поворота. Следует обратить внимание на то, что тензор поворота вводится не для удобства описания (можно вводить, а можно не вводить), а по необходимости. Иными словами, повороты тела описываются тензором второго ранга, и с этим ничего нельзя поделать. Поэтому трудно согласиться с распространенным мнением о том, что теоретическую механику для студентов младших курсов следует

излагать без применения тензорного языка. Можно, конечно, замаскировать тензор поворота разного рода матрицами, но ничего, кроме неясности в трактовках, это не принесет.

Доказательство. Обратимся непосредственно к выводу уравнения (2.10). Для этого по существу нам нужно доказать всего два факта:

$$1) \chi_S^m = \mathcal{X}_S^m, \quad \forall S; \quad 2) \boldsymbol{\varepsilon}_m(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{e}_m. \quad (2.12)$$

Оба эти факта совершенно очевидны, т. е. видны очам. Поэтому речь идет о сугубо формальном доказательстве, опирающемся исключительно на определение абсолютно твердого тела (2.2). Векторы

$$\mathbf{e}_m = \mathbf{r}_{A_m} - \mathbf{r}_Q \quad (2.13)$$

линейно независимы и потому могут быть использованы в качестве базиса.

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу g_{mn} и обратную матрицу g^{mn} :

$$\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n = g_{mn}; \quad g_{mn} g^{np} = \delta_m^p. \quad (2.14)$$

Зная матрицу g^{np} , можно ввести в рассмотрение векторы взаимного базиса \mathbf{e}^m :

$$\mathbf{e}^m = g^{mn} \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_n = g_{nm} \mathbf{e}^m. \quad (2.15)$$

Из равенства (2.7) следует

$$\chi_S^m = (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q) \cdot \mathbf{e}^m. \quad (2.16)$$

Все изложенное относилось к отсчетному положению тела. Обратимся к рассмотрению актуального положения тела. Подчеркнем, что и актуальное, и отсчетное положение тела рассматривается в одной и той же системе отсчета. Векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(t) = \mathbf{R}_{A_m}(t) - \mathbf{R}_Q(t) \quad (2.17)$$

удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_m \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_n &= (\mathbf{R}_{A_m} - \mathbf{R}_Q) \cdot (\mathbf{R}_{A_n} - \mathbf{R}_Q) = \\ &= (\mathbf{r}_{A_m} - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q) = (\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n) = g_{mn}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

которые немедленно следуют из (2.3). Поэтому векторы взаимного базиса $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ связаны с векторами основного базиса соотношениями

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m(t) = g^{mn} \boldsymbol{\varepsilon}_n(t) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n(t) = g_{nm} \boldsymbol{\varepsilon}^m(t). \quad (2.19)$$

Из равенства (2.9) следует

$$\begin{aligned}\chi_S^m &= (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^m = g^{mn} (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_n = \\ &= g^{mn} (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_Q) \cdot (\mathbf{R}_{A_n} - \mathbf{R}_Q) = g^{mn} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q) = \\ &= g^{mn} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q) \cdot \mathbf{e}_n = (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q) \cdot \mathbf{e}^m = \chi_S^m.\end{aligned}\quad (2.20)$$

Здесь также использовано равенство (2.3). Теперь равенство (2.9) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_S(\mathbf{t}) &= \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \chi_S^m \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t})[\mathbf{e}^m \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q)] = \\ &= \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + (\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{e}^m) \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q).\end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_Q), \quad (2.21)$$

где

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{e}^m = g^{mn} (\mathbf{R}_{A_m} - \mathbf{R}_Q) \otimes (\mathbf{r}_{A_n} - \mathbf{r}_Q). \quad (2.22)$$

Итак, мы ввели в рассмотрение некий объект $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, являющийся совокупностью диад. Подобные объекты называются тензорами второго ранга, т. е. $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ — тензор второго ранга. Равенство (2.21) внешне совпадает с основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела (2.10). Однако в теореме утверждается нечто большее, нежели в (2.21). Во-первых, тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ должен удовлетворять условиям (2.11). Во-вторых, тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ не должен зависеть от выбора точек Q, A_1, A_2, A_3 в абсолютно твердом теле. Ни первое, ни второе мы еще не доказали. Докажем сначала, что $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, определенный равенством (2.22), — ортогональный тензор. Заметим, что

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \mathbf{e}^m = g^{mn} \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\varepsilon}^n \otimes \mathbf{e}_n = \boldsymbol{\varepsilon}^m \otimes \mathbf{e}_m. \quad (2.23)$$

Здесь мы использовали равенства (2.15) и (2.19). Итак,

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \mathbf{e}^m = \boldsymbol{\varepsilon}^m \otimes \mathbf{e}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{e}^m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{e}_m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^m. \quad (2.24)$$

Операция транспонирования тензора и другие простейшие операции с тензорами второго ранга описаны в первой главе. Напомним также, что для любой тройки линейно независимых векторов \mathbf{a}_m справедливо тождество

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}^m \otimes \mathbf{a}_m = \mathbf{a}_m \otimes \mathbf{a}^m,$$

где \mathbf{E} — единичный тензор 2-го ранга.

Следовательно, для троек \mathbf{e}_m и $\boldsymbol{\varepsilon}_m$

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{\varepsilon}^m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m.$$

Теперь находим

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = (\boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \mathbf{e}^m) \cdot (\mathbf{e}_n \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^n) = \delta_n^m \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^n = \boldsymbol{\varepsilon}_m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} = (\mathbf{e}^m \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_m) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^n \otimes \mathbf{e}_n) = \delta_m^n \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_n = \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{E}.$$

Таким образом, тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{P} = \mathbf{E}. \quad (2.25)$$

Тензоры, удовлетворяющие этому условию, называются *ортогональными* (см. раздел 1.15). Кроме того, из (2.25) следует

$$\det(\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^\top) = \det \mathbf{P} \det \mathbf{P}^\top = (\det \mathbf{P})^2 = \det \mathbf{E} = 1. \quad (2.26)$$

Понятие определителя тензора второго ранга введено в разделе 1.14. Из равенства (2.26) следует, что

$$\det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \pm 1. \quad (2.27)$$

Дифференцируя равенство (2.26) по времени, получаем

$$2 \det \mathbf{P} (\det \mathbf{P})^\bullet = 0 \quad \Rightarrow \quad (\det \mathbf{P})^\bullet = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P} = \text{const}. \quad (2.28)$$

Заметим, что из (2.27) это равенство не следует, поскольку в принципе знаки в (2.27) могут меняться с течением времени. Однако (2.28) показывает, что это невозможно. Если в какой-то момент времени $\det \mathbf{P} = +1$, то он будет равен этому значению во все другие моменты времени. Тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ согласно (2.24) зависит от отсчетного и актуального положений тела. Рассмотрим его в момент времени $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}$, когда актуальное и отсчетное положения совпадали. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{e}_m; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^m(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{e}^m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = 1.$$

Следовательно, при всех \mathbf{t}

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{t}) = \mathbf{E}; \quad \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = +1. \quad (2.29)$$

Ортогональные тензоры, определитель которых равен $+1$, называются собственно ортогональными тензорами или тензорами поворота (см. раздел 1.15). Итак, тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, входящий в (2.21), является тензором поворота,

что и утверждается в условии теоремы. Осталось доказать, что этот тензор не зависит от выбора точек Q, A_1, A_2, A_3 в абсолютно твердом теле. Вообще говоря, из определения тензора поворота (2.22) это обстоятельство формально неочевидно, поскольку точки Q и A_m в нем присутствуют в явном виде. Покажем теперь, что $\mathbf{P}(t)$ не зависит от выбора точек A_k в теле. С этой целью выберем какие-либо другие три точки $A_{k'}$, такие, что точки $Q, A_{k'}$ не лежат в одной плоскости. В точности повторяя все рассуждения, ведущие к представлению (2.23), вводим в рассмотрение тензор

$$\mathbf{P}'(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \otimes \mathbf{e}^{m'} = \boldsymbol{\varepsilon}^{m'} \otimes \mathbf{e}_{m'}, \quad (2.30)$$

где

$$\overrightarrow{QA_{m'}} \sim \mathbf{e}_{m'} = \mathbf{r}_{A_{m'}} - \mathbf{r}_Q$$

в отсчетном положении и

$$\overrightarrow{QA_{m'}} \sim \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} = \mathbf{R}_{A_{m'}} - \mathbf{R}_Q$$

в актуальном положении.

Векторы $\mathbf{e}_{m'}$ можно разложить по векторам \mathbf{e}_n :

$$\mathbf{e}_{m'} = h_{m'}^n \mathbf{e}_n \Rightarrow \mathbf{e}^{m'} = h_n^{m'} \mathbf{e}^n; \quad h_{m'}^n = \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}^n; \quad h_n^{m'} = \mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_n, \quad (2.31)$$

где матрицы $h_{m'}^n$ и $h_n^{m'}$ взаимно обратны:

$$h_{m'}^n h_n^{p'} = \delta_p^{m'}; \quad h_n^{m'} h_{m'}^p = \delta_n^p.$$

Справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{m'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_n &= \mathbf{e}^{m'} \cdot \mathbf{e}_n = h_n^{m'} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{m'} = h_n^{m'} \boldsymbol{\varepsilon}^n; \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^n &= \mathbf{e}_{m'} \cdot \mathbf{e}^n = h_{m'}^n \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} = h_{m'}^n \boldsymbol{\varepsilon}_n. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Перепишем теперь (2.30) в следующем виде:

$$\mathbf{P}' = \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \otimes \mathbf{e}^{m'} = h_n^{m'} \boldsymbol{\varepsilon}_{m'} \otimes \mathbf{e}^n = \boldsymbol{\varepsilon}_n \otimes \mathbf{e}^n = \mathbf{P}.$$

Здесь мы сначала воспользовались (2.31), а затем формулами (2.32). При этом мы убедились, что тензор \mathbf{P} , построенный с помощью точек Q, A_k , совпадает с тензором \mathbf{P}' , построенным с помощью точек $Q, A_{k'}$. Поскольку выбор точек A_k и $A_{m'}$ был совершенно произволен, то тензор \mathbf{P} не зависит от выбора этих точек. Осталось показать, что тензор $\mathbf{P}(t)$ не зависит от полюса Q в теле. С этой целью запишем равенство (2.21) для двух точек A и B :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A(t) &= \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t, Q) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q); \\ \mathbf{R}_B(t) &= \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t, Q) \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_Q), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где тензор \mathbf{P} может в принципе зависеть от выбора полюса \mathbf{Q} , что и указано в (2.33) явно.

Вычитая в (2.33) из первого равенства второе, получаем

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}, \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B).$$

Левая часть этого равенства не зависит от точки \mathbf{Q} , следовательно, и правая часть не зависит от точки \mathbf{Q} . А это означает, что тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ не зависит от выбора точки \mathbf{Q} . Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела полностью доказана. Доказательство хотя и длинное, но вполне элементарное. После того как читатель убедился, что теорема и в самом деле правильна, он может забыть о доказательстве и наслаждаться основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела (2.10), извлекая из него массу полезных результатов.

Обсудим некоторые свойства движения абсолютно твердого тела, вытекающие из основной теоремы кинематики (2.10). Тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ описывает поворот тела из отсчетной ориентации в актуальную. Если актуальная ориентация тела совпадает с отсчетной (независимо от положения тела в системе отсчета), то тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ равен единичному тензору: $\mathbf{P} = \mathbf{E}$. Если при движении тела его ориентация в пространстве не меняется, то $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}$ при всех \mathbf{t} . При таком движении из (2.10) следует, что все точки тела испытывают одинаковые смещения, определяемые вектором перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_S(\mathbf{t}) - \mathbf{r}_S = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) - \mathbf{r}_Q. \quad (2.34)$$

Напомним, что \mathbf{S} — это любая интересующая нас точка тела. Движение (2.34) называют плоскопараллельным. В этом движении все точки тела движутся по сколь угодно сложным траекториям, но все эти траектории одинаковы и могут быть совмещены друг с другом жестким переносом. При этом все материальные отрезки в теле перемещаются, оставаясь параллельными своим положениям во все моменты времени. Иными словами, ориентация тела при плоскопараллельном движении не меняется. Плоскопараллельное движение — типичный пример трансляционного движения в чистом виде, когда все точки твердого тела меняют свои положения в пространстве. Полное движение тела, как показывает (2.10), есть композиция трансляционного и спирного движений. При последнем полюс \mathbf{Q} тела не меняет своего положения в пространстве, но само тело поворачивается вокруг полюса, меняя свою ориентацию в пространстве. Все изложенное является совершенно очевидным. Тем не менее основная теорема кинематики не является ни самоочевидной, ни тривиальной. Совсем неочевидно, что этот способ описания не зависит от

выбора полюса в теле. Могло бы случиться и так, что при изменении выбора полюса у нас менялся бы и поворот (т. е. менялся бы тензор поворота) тела вокруг этого нового полюса. Однако теорема утверждает, что это не так, а тензор поворота не зависит от выбора полюса.

2.4. Тензор поворота и вектор поворота

Тензор поворота является характеристикой спинорного (вращательного) движения тела и может изучаться как вполне самостоятельный объект, не связанный с абсолютно твердым телом. Сейчас читателю полезно вернуться к тем разделам первой главы, которые посвящены ортогональным тензорам и тензорам поворота. Далее будут сообщены некоторые дополнительные сведения. В разделе 1.16 доказана теорема Эйлера, утверждающая, что любой поворот может быть реализован как поворот вокруг оси, натянутой на некоторый единичный вектор \mathbf{m} , на некоторый угол θ . В математической форме теорема Эйлера выражается формулой (1.123):

$$\mathbf{Q}(\theta\mathbf{m}) = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}; \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (2.35)$$

Стандартное для данной книги обозначение $\mathbf{Q}(\theta\mathbf{m})$ означает поворот на угол θ вокруг оси \mathbf{m} . Обратим внимание на то, что ось поворота не привязана к каким-либо точкам тела или точкам системы отсчета. Фактически осью поворота является любая прямая из семейства параллельных прямых, натянутых на вектор \mathbf{m} . На первый взгляд это обстоятельство кажется странным. В самом деле, если, например, цилиндр вращается вокруг собственной оси, то именно ось цилиндра и хотелось бы считать осью поворота, а вовсе не произвольную прямую, параллельную оси цилиндра. Тем не менее определение оси поворота как семейства параллельных прямых не только оправданно, но и необходимо. Представим себе, что мы рассматриваем вращение цилиндра в двух инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга. В одной системе отсчета ось цилиндра покоится, и ее естественно называть осью поворота. В другой же системе отсчета ось цилиндра движется и в разные моменты времени совпадает с разными прямыми в системе отсчета. Поворот цилиндра абсолютен и одинаков во всех инерциальных системах отсчета, поэтому и характеристики поворота не должны зависеть от выбора инерциальной системы. Если читатель тщательно обдумает все изложенное, то он поймет, что только данное определение оси поворота является допустимым и совместимым с принципом независимости от выбора системы отсчета.

Преимуществом представления (2.35) является то, что оно содержит все необходимые величины в явном виде.

Тензор поворота, записанный в форме (2.35), не имеет каких-либо ограничений и может применяться всегда, т. е. описание поворотов с помощью тензора второго ранга является наиболее общим. Тем не менее интуитивным образом поворота является не тензор второго ранга, а некий спин-вектор. В самом деле, чтобы задать поворот в его, так сказать, чистом виде, мы должны задать ось в пространстве (системе отсчета), направление и величину поворота, т. е. задать так называемый спин-вектор [22]. Спин-вектору по стандартным правилам можно поставить в соответствие аксиальный вектор, называемый вектором поворота. Итак, вектором поворота уместно назвать вектор

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}; \quad |\mathbf{m}| = 1, \quad (2.36)$$

где единичный вектор \mathbf{m} определяет ось поворота, а величина θ задает угол поворота в радианах.

Если поворот происходит против часовой стрелки при взгляде с конца \mathbf{m} , то в правоориентированной системе отсчета $\theta > 0$, но в левоориентированной системе отсчета этот же поворот считается отрицательным: $\theta < 0$. Поскольку поворот выражает реальное явление, то наличие двух способов его описания возможно только при условии, что эти два способа связаны взаимно однозначным образом. Иными словами, тензор поворота может быть выражен через вектор поворота, и наоборот, вектор поворота может быть вычислен по тензору поворота. Проще всего решается первая задача. Принимая во внимание определение вектора поворота (2.36), выражение (2.35) переписываем в следующем эквивалентном виде:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + \cos \theta \mathbf{E}. \quad (2.37)$$

Хотя выражение (2.37) эквивалентно (2.35), тем не менее оно выявляет одно важное свойство, а именно в (2.35) величина θ есть угол поворота и может иметь любой знак. Аналогично может восприниматься величина θ в (2.37). Однако здесь она может восприниматься и иначе. Заметим, что справедливы тождества

$$|\boldsymbol{\theta}| = |\theta|; \quad \cos \theta = \cos |\theta| = \cos |\boldsymbol{\theta}|; \quad \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\sin |\boldsymbol{\theta}|}{|\boldsymbol{\theta}|}. \quad (2.38)$$

Поэтому в (2.37) величину θ можно рассматривать как модуль вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$. Отсюда следует, что тензор поворота действительно выражается

только через вектор поворота без дополнительных разговоров, необходимых при использовании (2.35), где $\boldsymbol{\theta}$ нельзя отождествить с модулем вектора поворота. Выражение (2.37) удобно записать в другой форме. Воспользовавшись теоремой о представлении антисимметричного тензора (1.85), введем в рассмотрение антисимметричный тензор

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}, \quad (2.39)$$

который будем называть логарифмическим тензором поворота. Смысл этого названия будет понятен далее. Кроме того, используем тождество

$$\mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^2 \mathbf{E}. \quad (2.40)$$

Учитывая (2.39) и (2.40), выражение (2.37) переписываем в виде

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \frac{\sin \boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos \boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{\theta}^2} \mathbf{R}^2. \quad (2.41)$$

Представлением (2.41) тензор поворота определен как функция логарифмического тензора поворота, причем $\boldsymbol{\theta}$ можно выразить через норму тензора \mathbf{R} . Действительно, нормой тензора \mathbf{A} называется величина

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)}.$$

Для логарифмического тензора поворота \mathbf{R}

$$\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T)} = \sqrt{-\text{tr} \mathbf{R}^2} = \sqrt{2 \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} = \sqrt{2} \boldsymbol{\theta}.$$

Кстати, обратим внимание, что норма тензора поворота

$$\|\mathbf{Q}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T)} = \sqrt{\text{tr} \mathbf{E}} = \sqrt{3}$$

всегда одинакова и никак не характеризует величину поворота. Выражение (2.41) в приложениях часто бывает удобнее, нежели (2.35) или (2.37). Оно любопытно еще как пример тензорной функции тензорного аргумента. Функцию (2.41) можно записать в другом, более знакомом виде. Хорошо известна скалярная функция скалярного аргумента

$$\exp x \equiv e^x; \quad e = 2,71828. \quad (2.42)$$

Скалярную экспоненту $\exp x$ можно определять разными способами. Один из наиболее распространенных способов состоит в том, чтобы определить ее с помощью ряда

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k. \quad (2.43)$$

Известно, что этот ряд имеет бесконечный радиус сходимости и абсолютно сходится вместе со всеми своими производными. Функцию (2.43) легко обобщить для тензорного случая. Пусть дан тензор второго ранга \mathbf{A} . Определим тензорную экспоненту

$$\exp \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k, \quad (2.44)$$

где степень тензора определяется как

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}; \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}^4 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \dots$$

Ряд, стоящий в правой части (2.44) и называемый тензорной экспонентой, сходится для любых тензоров \mathbf{A} . Спецификой тензорных рядов типа (2.44) является то, что они всегда могут быть сведены к виду

$$\exp \mathbf{A} = \varphi_0 \mathbf{E} + \varphi_1 \mathbf{A} + \varphi_2 \mathbf{A}^2,$$

где φ_0 , φ_1 , φ_2 — некие скалярные функции инвариантов тензора \mathbf{A} .

Справедливость последнего утверждения доказывается путем последовательного исключения степеней тензора \mathbf{A} выше второй с помощью тождества Кэли–Гамильтона (см. [22]). Несмотря на полное сходство определений (2.43) и (2.44), тензорная экспонента не похожа на свой скалярный аналог. Например, для скалярной экспоненты

$$\exp(x + y) = \exp x \exp y.$$

Это равенство справедливо только потому, что произведение скаляров коммутативно: $xy = yx$. Для тензорных экспонент это свойство уже несправедливо:

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} \neq \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}). \quad (2.45)$$

Отмеченное обстоятельство легко понять. Слева стоит произведение двух тензоров второго ранга $\exp \mathbf{A}$ и $\exp \mathbf{B}$. Произведение тензоров в общем случае некоммукативно:

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} \neq \exp \mathbf{B} \cdot \exp \mathbf{A}.$$

В правой части (2.45) стоит тензор $\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B})$, причем

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{B} + \mathbf{A}),$$

так как сложение тензоров коммутативно. Поэтому в общем случае неравенство (2.45) обязано иметь место.

Используя определение тензорной экспоненты (2.44), можно доказать, что

$$\mathbf{A} \cdot (\exp \mathbf{A}) = (\exp \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A};$$

$$\exp \mathbf{A} \cdot \exp \mathbf{B} = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}), \quad \text{если } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Теорема. Тензор поворота является тензорной экспонентой от логарифмического тензора поворота:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \exp \mathbf{R} = \exp(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}). \quad (2.46)$$

Доказательство. По определению тензорной экспоненты (2.44)

$$\exp \mathbf{R} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{R}^k = \mathbf{E} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \mathbf{R}^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \mathbf{R}^{2k}. \quad (2.47)$$

Здесь мы отдельно выделили суммирование по нечетным и четным степеням \mathbf{R} . Вычислим теперь степени \mathbf{R}^m , при этом учтем очевидное равенство

$$\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}. \quad (2.48)$$

Нетрудно доказать формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{2k+1} &= (-\theta^2)^k \mathbf{R}, & k = 0, 1, 2, \dots; \\ \mathbf{R}^{2k} &= (-\theta^2)^{k-1} \mathbf{R}^2, & k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.49)$$

Подставляя (2.49) в (2.47), получаем

$$\exp \mathbf{R} = \mathbf{E} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^k}{(2k+1)!} \mathbf{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^{k-1}}{(2k)!} \mathbf{R}^2.$$

Учтем теперь известные разложения в степенные ряды:

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^k}{(2k+1)!}; \quad \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\theta^2)^{k-1}}{(2k)!}. \quad (2.50)$$

Подставляя ряды (2.50) в предыдущее равенство, получаем

$$\exp \mathbf{R} = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{R} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R}^2. \quad (2.51)$$

Сравнивая (2.51) и (2.41), приходим к утверждению (2.46). Доказательство завершено.

Таким образом, поворот может быть описан как тензором второго ранга, так и вектором поворота. Если мы имеем вектор \mathbf{a} , то повернутый вектор \mathbf{a}' можно представить в эквивалентных формах:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}). \quad (2.52)$$

Во многих случаях удобнее пользоваться тензором поворота, но в дальнейшем мы убедимся, что бывают случаи, когда использование вектора поворота оказывается необходимым.

Отметим, что в литературе [23] иногда используется так называемый вектор конечного поворота Родрига

$$\boldsymbol{\psi} = 2 \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{m}. \quad (2.53)$$

Здесь смысл $\boldsymbol{\theta}$ и \mathbf{m} тот же, что и в (2.36). Имеют место представления

$$\left(1 + \frac{\psi^2}{4} \right) \mathbf{P} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi} \otimes \boldsymbol{\psi} + \left(1 - \frac{\psi^2}{4} \right) \mathbf{E} + \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{E}; \quad \psi^2 = 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.54)$$

2.5. Вектор малого поворота

В приложениях часто можно считать, что модуль вектора поворота мал:

$$|\boldsymbol{\theta}| = |\theta| \ll 1. \quad (2.55)$$

В этих случаях говорят о малых поворотах. При этом норма логарифмического тензора поворота также мала:

$$\|\mathbf{R}\|^2 = \operatorname{tr}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T) = -\operatorname{tr}(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}) = 2\theta^2 \ll 1. \quad (2.56)$$

В разложении (2.47) можно отбросить все степени \mathbf{R} выше первой. Тогда получим

$$\mathbf{Q} \simeq \mathbf{E} + \mathbf{R} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}. \quad (2.57)$$

Тензор (2.57) называется тензором малого поворота. Повернутый вектор \mathbf{a}' в таком случае вычисляется по простой формуле:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} \simeq \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}. \quad (2.58)$$

В некоторых случаях удобно квадратичное приближение:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{R}^2 + \mathcal{O}(\theta^3). \quad (2.59)$$

Повернутый вектор находят по формуле

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}). \quad (2.60)$$

Формула (2.60) может с успехом применяться для малых, но не бесконечно малых поворотов². Для малых поворотов вектор конечного поворота (2.53) отличается от вектора поворота (2.36) только членами третьего порядка малости:

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\theta} + O(\theta^3).$$

2.6. Неоднозначность суждений о векторе поворота

У вектора поворота удивительная и странная судьба. В литературе многие годы сосуществуют противоположные точки зрения на это понятие. Например, в книге А. И. Лурье [23] вводится вектор поворота Родрига и с ним работают как с обычным вектором. Существование вектора поворота устанавливается теоремой Эйлера, которая доказывается во всех учебниках по механике. Тем не менее существует и другая точка зрения, согласно которой вектор поворота, будучи направленным отрезком, не является настоящим вектором. Это мнение воспроизводится во многих работах, например в относительно недавней статье [24]. Эту точку зрения мы изложим в трактовке популярного учебника физики [25, с. 39, 47–48]:

“Вектором называется количественная характеристика, имеющая не только числовое значение, но и направление (с. 39.) ... Не все величины, которые имеют числовое значение и направление, обязательно являются векторами. Например, повороту твердого тела вокруг определенной оси, неподвижной в пространстве, можно приписать как числовое значение (величина угла поворота), так и направление (направление оси). Однако два таких поворота не

² При решении инженерных задач важной является не асимптотическая, а реальная точность. Необходимость учета слагаемых определенного порядка малости определяется тем, могут ли они качественно повлиять на характер решения. Допустим, вместо формулы (2.60) используется линейное приближение $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}$. Видно, что в этом случае вектор \mathbf{a}' лежит в плоскости векторов \mathbf{a} и $\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}$. Вектор \mathbf{a}' , вычисленный с использованием точного выражения для тензора поворота (2.41), таким свойством не обладает. Не обладает таким свойством и вектор \mathbf{a}' , вычисленный по приближенной формуле (2.60), учитывающей квадратичные слагаемые. Учет слагаемых более высокого порядка малости приносит малые поправки в проекции вектора \mathbf{a}' на три взаимно ортогональных вектора \mathbf{a} , $\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}$ и $\mathbf{a} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a})$, но качественно это уже ни на что не влияет. Поэтому можно сказать, что при малых $\boldsymbol{\theta}$ квадратичного приближения вполне достаточно, тогда как линейное приближение оставляет определенное сомнение. (*Примеч. ред.*)

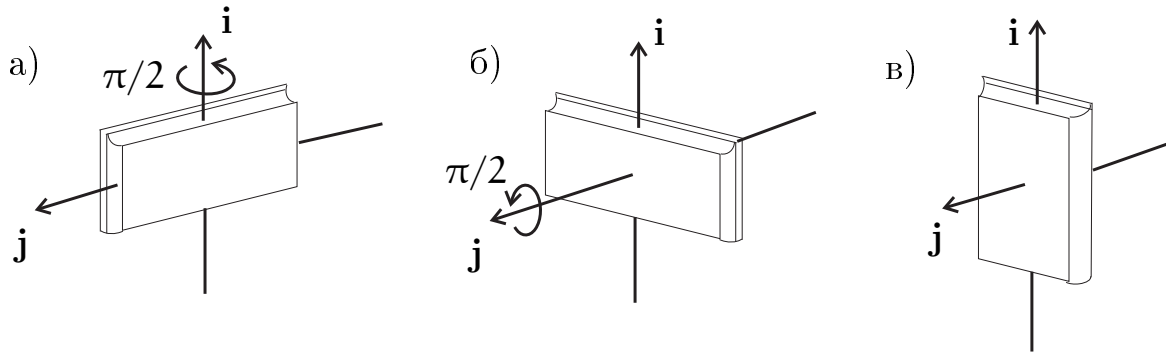


Рис. 2.1. Первая последовательность поворотов

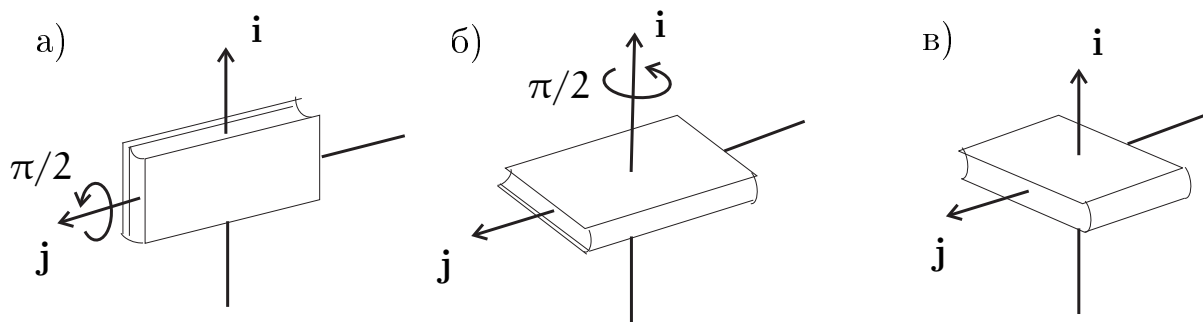


Рис. 2.2. Вторая последовательность поворотов

складываются согласно закону сложения векторов, если только углы поворота не являются бесконечно малыми. Это легко видеть, когда две оси перпендикулярны друг к другу, а оба угла поворота равны по $\pi/2$ каждый. Представим себе какой-либо предмет, например книгу (рис. 2.1,а). Поворот (1) переводит ее в положение, показанное на рис.2.1,б, а последующий поворот (2) вокруг другой оси — в положение на рис. 2.1,с. Однако если вернуть предмет в первоначальное положение и сначала произвести поворот (2), а затем поворот (1), то в конце концов этот предмет окажется в положении, показанном на рис. 2.2,с. Ориентация предмета на рис. 2.2,с отличается от его ориентации на рис. 2.1,с. Очевидно, что для этих поворотов не выполняется закон коммутативности сложения. Повороты на конечный угол нельзя выразить векторами, хотя их можно охарактеризовать числовым значением и направлением”.

Интересно, что же все-таки называется вектором? Из приведенной цитаты автор этого так и не понял. Приведенное доказательство, разумеется, является ошибочным, и читателю будет полезно выявить конкретную ошибку (вообще-то их несколько) в данном рассуждении. В качестве наводящего соображения рассмотрим сходное, но более простое рассуждение. Пусть векторы \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 — векторы смещения материальной точки. Тогда суммарное

смещение точки — вектор $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Здесь все нормально: сумма двух смещений есть результирующее смещение. Вспомним теперь понятие направляющего орта вектора \mathbf{a} : $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$. Видно, что $\hat{\mathbf{u}} \neq \hat{\mathbf{u}}_1 + \hat{\mathbf{u}}_2$. Отсюда, следуя логике цитированного рассуждения, заключаем, что орт вектора не является вектором, поскольку сумма ортов исходных векторов не является ортом результирующего вектора. Надеемся, что читатель не согласится с таким выводом. Основную ошибку читатель обнаружит, когда ознакомится с формулами сложения векторов поворота (2.75)–(2.76).

2.7. Теорема о представлении тензора поворота

Читатель уже обратил внимание на резкое повышение сложности описания движения при переходе от трансляционных движений, определяемых заданием вектора положения $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$, к спинорным движениям, определяемым заданием тензора поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$. В самом деле, для трансляционных движений достаточно задать всего три вектора:

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}); \quad \mathbf{V}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{t}); \quad \mathbf{W}(\mathbf{t}) = \ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{t}),$$

причем любые два из этих векторов легко находятся по третьему. Например, если задан вектор скорости, то ускорение находится однократным дифференцированием, а вектор положения — однократным интегрированием. Что касается описания самого трансляционного движения, то здесь и говорить особо не о чем — все определяется вектором $\mathbf{R}(\mathbf{t})$. При описании спинорных движений, определяемых собственно ортогональным тензором, ситуация намного сложнее. Тензор поворота допускает множество различных представлений. В настоящее время описание поворотов еще не стало каноническим. В разных задачах используют различные описания, в том числе и такие, которые в данной книге мы даже не упоминаем. А, например, в современной физике спинорные движения вообще не рассматриваются, хотя некоторые характеристики спинорного движения все-таки вводятся без упоминания самого спинорного движения. Между тем спинорные движения играют значительно более важную роль в Природе, нежели трансляционные движения. К обсуждению этих вопросов мы еще неоднократно будем возвращаться в дальнейшем. Здесь же мы обращаем внимание читателя на то, что, истратив немало места на описание поворотов, мы еще даже не ввели понятие угловой скорости. Более того, сейчас мы хотим еще продолжить изучение тензора поворота и доказать одну важную для приложений теорему, частные случаи которой

известны уже много лет, но общая формулировка была предложена только в [26].

Согласно теореме Эйлера (2.35) любой поворот может быть осуществлен как один поворот вокруг некоторой оси на некоторый угол. Казалось бы, теорема Эйлера полностью решает все проблемы. Но это не так. Фактически теорема Эйлера указывает эффективный способ решения только таких задач, в которых ось поворота фиксирована во времени. Однако в большинстве случаев ось поворота меняется во времени, что резко усложняет все построения. Один из возможных способов преодоления возникающих здесь затруднений был указан еще Эйлером и заключался в представлении полного поворота в виде композиции трех поворотов вокруг заданных осей. Позднее появились и другие представления, но представление поворота через введенные Эйлером углы является наиболее популярным и считается, хотя и без должных оснований, наиболее удобным для приложений. Сейчас мы докажем теорему, которая не только включает в себя все известные представления и добавляет к ним новые, но и дает новую интерпретацию уже известных представлений.

Теорема. *Любой поворот $\mathbf{Q}(\theta)$ может быть осуществлен в виде композиции поворотов вокруг произвольно выбираемых и фиксированных во времени осей \mathbf{m} и \mathbf{n} :*

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\psi(t) \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta(t) \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t) \mathbf{n}); \quad \mathbf{e} = \mathbf{m} \times \mathbf{n} / |\mathbf{m} \times \mathbf{n}|, \quad (2.61)$$

где углы $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ и $\varphi(t)$ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно.

Если $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, то углы ψ , ϑ и φ называются углами Эйлера, а вектор \mathbf{e} выбирается произвольно, но должен быть ортогонален \mathbf{n} .

Доказательство. Выделим в теле двойной материальный вектор $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ (раздел 2.2). Пусть \mathbf{m} и \mathbf{n} — два произвольно выбранных единичных вектора. Натянем на них плоскость (рис. 2.3), которую совместим с плоскостью рисунка.

Пусть в отсчетном положении база \overrightarrow{AB} двойного материального вектора $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ совпадает с вектором \mathbf{n} . Это не налагает никаких ограничений на выбор \mathbf{n} , поскольку выбор двойного материального вектора в теле также произволен. Тогда в отсчетном положении

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{n}; \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{d}. \quad (2.62)$$

Пусть в актуальном положении, т. е. в положении в данный момент времени t

$$\overrightarrow{AB} \sim \mathbf{N}; \quad \overrightarrow{BC} \sim \mathbf{D}.$$

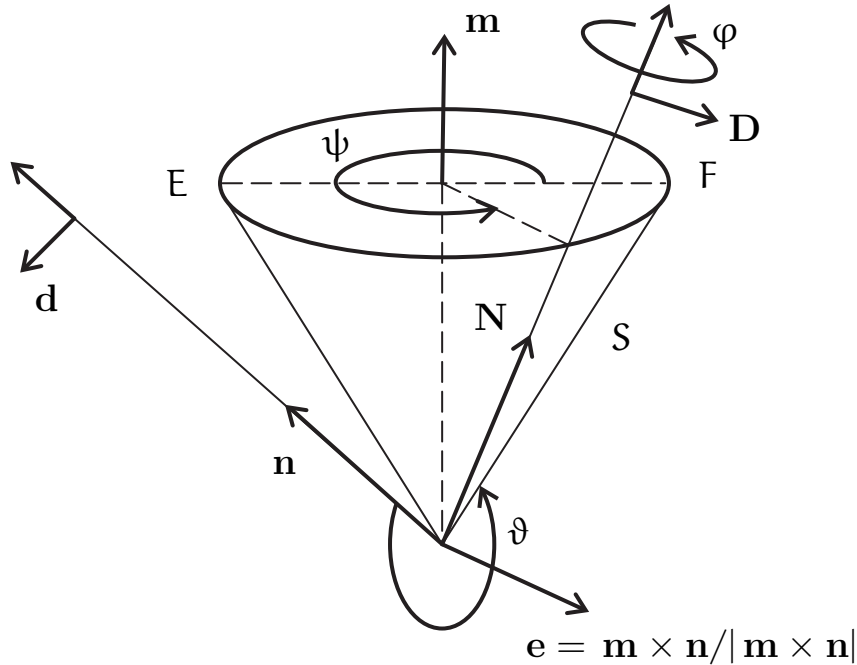


Рис. 2.3. Представление тензора поворота

Напомним, что двойные векторы (\mathbf{n}, \mathbf{d}) и (\mathbf{N}, \mathbf{D}) , заданные, разумеется, в системе отсчета, образуют жесткие конструкции и могут быть совмещены друг с другом поворотом.

Итак, выполняем следующие шаги. Первый. Произвольно выбираем векторы \mathbf{m} и \mathbf{n} (см. рис. 2.3). Второй шаг можно выполнить двумя способами. Во-первых, можно выбрать по желанию отсчетное положение тела, а затем выбрать в теле двойной материальный вектор $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ так, чтобы его база \overrightarrow{AB} совпадала бы с вектором \mathbf{n} . Во-вторых, можно сначала произвольно выбрать в теле двойной материальный вектор, а затем выбрать отсчетное положение тела так, чтобы база двойного вектора совпала бы с вектором \mathbf{n} . Мы придерживаемся первого способа выполнения второго шага. Третий шаг. В актуальном положении тела отмечаем двойной вектор (\mathbf{N}, \mathbf{D}) , с которым совпадает двойной материальный вектор $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ в момент времени t . Наша задача состоит в том, чтобы поворотами вокруг векторов \mathbf{m} , \mathbf{n} , \mathbf{e} перевести тело из положения, где двойной материальный вектор $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ совпадает с двойным вектором (\mathbf{n}, \mathbf{d}) , в положение, где двойной материальный вектор $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ совпадает с двойным вектором (\mathbf{N}, \mathbf{D}) . Для этого предварительно мысленно образуем коническую поверхность S , полученную вращением вектора \mathbf{N} вокруг вектора \mathbf{m} (см. рис. 2.3). Искомый поворот тела осуществляем в виде последовательности трех поворотов. Первый поворот производим на

угол ϑ вокруг вектора \mathbf{e} так, чтобы база \overrightarrow{AB} оказалась на конической поверхности \mathcal{S} . Согласно (2.35) этот поворот задается тензором

$$\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) = (1 - \cos \vartheta) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \vartheta \mathbf{E} + \sin \vartheta \mathbf{e} \times \mathbf{E}. \quad (2.63)$$

В результате \overrightarrow{AB} совпадет с вектором

$$\mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.64)$$

Второй поворот производим вокруг вектора \mathbf{m} . В результате вектор \overrightarrow{AB} скользит по конической поверхности \mathcal{S} . После поворота на угол ψ вектор \overrightarrow{AB} совпадает с вектором \mathbf{N} . Этот поворот определяется тензором

$$\mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) = (1 - \cos \psi) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \psi \mathbf{E} + \sin \psi \mathbf{m} \times \mathbf{E}. \quad (2.65)$$

При этом

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.66)$$

После поворота (2.65) база \overrightarrow{AB} двойного материального вектора $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ совпадает с вектором \mathbf{N} . Однако кросс-вектор \overrightarrow{BC} при этом не будет совпадать с кросс-вектором \mathbf{D} . Поэтому необходим еще один поворот вокруг прямой, натянутой на \mathbf{N} . Этот поворот задается тензором

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{N}) = (1 - \cos \varphi) \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{N} \times \mathbf{E}. \quad (2.67)$$

Таким образом, в результате трех поворотов (2.63), (2.65) и (2.67) двойной материальный вектор $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ из отсчетного положения (\mathbf{n}, \mathbf{d}) перешел в актуальное положение (\mathbf{N}, \mathbf{D}) . Тем самым и само тело перешло из отсчетного положения в актуальное. Полный тензор поворота — композиция описанных трех поворотов:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{N}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}). \quad (2.68)$$

По существу теорема доказана, но представление (2.68) пока не совпадает с утверждением теоремы (2.61). Осталось вспомнить тождество [22]:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{S}^\top; \quad \forall \mathbf{S} : \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^\top = \mathbf{E}. \quad (2.69)$$

Согласно (2.66)

$$\mathbf{N} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}; \quad \mathbf{S} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}). \quad (2.70)$$

Используя тождество (2.69) и равенство (2.70), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{N}) &= \mathbf{Q}(\mathbf{S} \cdot \varphi \mathbf{n}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{S}^\top = \\ &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^\top(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^\top(\psi \mathbf{m}). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (2.68), приходим к утверждению теоремы (2.61). Доказательство завершено.

В литературе известно много частных случаев представления (2.61). Например, при $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ и векторе \mathbf{e} таком, что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = 0$, получаем известное представление, введенное еще Эйлером в других, разумеется, терминах и представлениях. Тензор поворота, представленный через углы Эйлера, имеет вид

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}). \quad (2.71)$$

Здесь сначала производится поворот вокруг \mathbf{m} на угол собственного вращения φ , затем — вокруг \mathbf{e} на угол нутации ϑ , наконец — поворот вокруг того же вектора \mathbf{m} на угол прецессии ψ . Обратим внимание на то, что все эти повороты производятся вокруг неизменных во времени векторов. В классическом представлении поворота через углы Эйлера повороты производятся в обратном порядке. При этом повороты производятся уже вокруг переменных во времени осей. Для того чтобы получить это представление, достаточно умножить (2.71) справа на единичный тензор, записанный в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}).$$

Умножая (2.71) на этот тензор справа и перегруппировывая сомножители, получаем

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}'') \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}') \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}), \quad (2.72)$$

где использовано тождество (2.69) и

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}. \quad (2.73)$$

Выражение (2.72) дает нам классическое представление тензора через углы Эйлера. Следует, впрочем, указать, что углами Эйлера в литературе часто называют разные величины. Поэтому необходимо быть внимательным, чтобы избежать недоразумений. Возможные недоразумения связаны, в частности, с тем, что представления типа (2.72) в литературе не используются, а заменяются их матричными аналогами, в которых векторы \mathbf{m} и \mathbf{e} в явном виде не фигурируют. При этом выбор этих векторов осуществляется в различных книгах по-разному, что и приводит к изменению смысла углов Эйлера. Таким образом, в классическом представлении повороты производятся в обратном порядке и вокруг вращающихся векторов \mathbf{e}' и \mathbf{m}'' . В дальнейшем мы убедимся, что представление (2.71) значительно удобнее, нежели (2.72).

Отметим, что для композиции поворотов

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}(\varphi) \cdot \mathbf{Q}(\psi) \quad (2.74)$$

вектор суммарного поворота $\boldsymbol{\theta}$ связан с векторами составляющих поворотов $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ следующими малопривлекательными формулами:

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \varphi + \cos \psi + \cos \varphi \cos \psi - 2 \frac{\sin \varphi \sin \psi}{\varphi \psi} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} + \frac{(1 - \cos \varphi)}{\varphi^2} \cdot \frac{(1 - \cos \psi)}{\psi^2} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi})^2; \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} = & \left(\frac{\sin \varphi}{\varphi} (1 + \cos \psi) - \frac{(1 - \cos \varphi) \sin \psi}{\varphi^2 \psi} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) \boldsymbol{\varphi} + \\ & + \left(\frac{\sin \psi}{\psi} (1 + \cos \varphi) - \frac{(1 - \cos \psi) \sin \varphi}{\psi^2 \varphi} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) \boldsymbol{\psi} + \\ & + \left(\frac{\sin \varphi \sin \psi}{\varphi \psi} - \frac{(1 - \cos \varphi) (1 - \cos \psi)}{\varphi^2 \psi^2} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\psi} \right) \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\psi}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

где $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$; $\varphi = |\boldsymbol{\varphi}|$; $\psi = |\boldsymbol{\psi}|$.

Напомним, что

$$\theta = |\boldsymbol{\theta}| < \pi; \quad \varphi = |\boldsymbol{\varphi}| < \pi; \quad \psi = |\boldsymbol{\psi}| < \pi. \quad (2.77)$$

В принципе от ограничения (2.77) можно отказаться, если повороты происходят вокруг совпадающих и фиксированных во времени осей.

2.8. Угловая скорость

При описании трансляционных движений понятие скорости не вызывает никаких затруднений. Оно кажется совершенно естественным с интуитивной точки зрения, а его формальное определение представляется единственно возможным. Запишем это определение в удобной для нас форме. С этой целью введем в рассмотрение вектор перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ материальной точки. Пусть какое-то положение точки, определяемое вектором \mathbf{r} , выбрано в качестве отсчетного. Тогда вектор перемещения \mathbf{u} вводится следующим образом:

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{t}).$$

Вектор скорости определяется как производная

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}). \quad (2.78)$$

Видимо, можно придумать какие-то другие определения скорости трансляционного движения, но никакой нужды в этом не возникает.

К сожалению, аналогичная ясность и определенность для скорости спи-
норного движения (угловой скорости) вряд ли достижима. На первый взгляд
это кажется странным. В самом деле, относительно полным аналогом вектора
перемещений при трансляционных движениях является вектор поворота при
спиновых движениях. Поэтому естественным кажется следующее определе-
ние вектора угловой скорости:

$$\boldsymbol{\omega}_* = \frac{d\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t). \quad (2.79)$$

Это определение формально аналогично определению (2.78). Определение
(2.79) вполне может быть выбрано в качестве основного для угловой скорости.
Тем не менее в литературе оно практически не используется и, кроме того, не
очень удобно. Далее будет показано, что не менее естественными являются
следующие два определения угловой скорости:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t); \quad (2.80)$$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t). \quad (2.81)$$

Важно подчеркнуть, что все три вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$,
будучи различными, вполне допустимы в качестве исходных определений уг-
ловой скорости, ибо между этими векторами существует взаимно однозначное
соответствие. В общем случае, как будет показано далее, это соответствие вы-
ражается относительно сложными формулами. Однако в простейшем случае,
когда повороты происходят вокруг фиксированной во времени оси, все три
вектора угловой скорости тождественно совпадают. Впрочем, и в общем слу-
чае существует способ описания поворотов, когда все три вектора угловой
скорости совпадают, но совпадают только в данный момент времени, оста-
ваясь различными в любой другой момент времени. При таком описании в
качестве отсчетного положения выбирается актуальное положение тела, т. е.
тензор поворота строится в следующем виде:

$$\mathbf{P}(\tau - t); \quad -\infty < \tau < \infty; \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}. \quad (2.82)$$

Определение угловой скорости (2.79) заменяется следующим:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \left[\frac{d\boldsymbol{\theta}(\tau - t)}{d\tau} \right]_{\tau=t}, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \mathbf{0}, \quad (2.83)$$

где t — данный момент времени, который считается фиксированным; τ —
текущее время.

Аналогично можно изменить определения (2.80) и (2.81). При этом все три определения приведут к одному и тому же вектору угловой скорости. По существу именно определение (2.83) принимается в большинстве книг и учебников, но никогда не используется при решении задач. В данной книге описание поворотов в форме (2.82) и определение угловой скорости (2.83) использоваться не будут, и потому их дальнейшее обсуждение опускается. Заметим только, что получаемые далее результаты будут отличаться от приводимых в учебниках, но их можно согласовывать посредством перехода к описанию (2.82), (2.83).

После этих предварительных замечаний, показывающих, что природа понятия угловой скорости является не столь простой, обратимся к последовательному описанию угловой скорости и других характеристик спинового движения.

2.9. Тензор спина и вектор угловой скорости

Основной теоремой кинематики введен в рассмотрение тензор поворота $\mathbf{P}(t)$, посредством которого выражался поворот твердого тела. Вместе с тем тензор $\mathbf{P}(t)$ не привязан ни к каким точкам твердого тела и живет вполне самостоятельной жизнью, поэтому и изучать его можно совершенно независимо от твердого тела. По определению тензор поворота удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}^T(t) \cdot \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}. \quad (2.84)$$

Продифференцируем тождество (2.84) по времени и учтем, что $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$, так как \mathbf{E} — постоянный тензор:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}^T(t) = \mathbf{0}. \quad (2.85)$$

Введем в рассмотрение тензор \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad (2.86)$$

назовем его *левым тензором спина* или просто тензором спина. Подставляя (2.86) в (2.85), получаем

$$\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}^T(t) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^T(t) = -\mathbf{S}(t). \quad (2.87)$$

Итак, тензор спина $\mathbf{S}(t)$ антисимметричен. Согласно теореме о представлении антисимметричного тензора (1.85) любой антисимметричный тензор, в

том числе и тензор спина $\mathbf{S}(\mathbf{t})$, может быть представлен через сопутствующий вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}). \quad (2.88)$$

Определение. Вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$, сопутствующий левому тензору спина $\mathbf{S}(\mathbf{t})$, называется вектором левой угловой скорости, отвечающей тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$.

В дальнейшем эпитет “левый” у угловой скорости будет опускаться, т. е. термины вектор левой угловой скорости и вектор угловой скорости будут рассматриваться как равнозначные. Кроме того, вместо длинного термина вектор угловой скорости, отвечающей тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, будем использовать более короткий термин — угловая скорость поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$.

Наряду с тензором $\mathbf{S}(\mathbf{t})$ можно ввести еще один антисимметричный тензор:

$$\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}). \quad (2.89)$$

Определение. Тензор $\mathbf{S}_r(\mathbf{t})$ называется правым тензором спина. Здесь эпитет “правый” должен всегда присутствовать.

Нетрудно показать, что левый и правый тензоры спина связаны соотношением

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}_r(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}). \quad (2.90)$$

Определение. Вектор $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})$, сопутствующий правому тензору спина, называется вектором правой угловой скорости, отвечающей тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{S}_r(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}). \quad (2.91)$$

Между левым и правым векторами угловой скорости существует простая связь, которая немедленно устанавливается с помощью весьма полезного тождества³:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^T = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}, \quad (2.92)$$

верного для любого вектора \mathbf{a} и любого тензора поворота \mathbf{P} . Подставляя (2.88) и (2.91) в (2.90), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} = \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}^T = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}). \quad (2.93)$$

Если в отсчетный момент времени $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}$ тензор поворота $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau})$ обращается в единичный, то из (2.93) получаем совпадение $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\tau})$ и $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\tau})$:

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\tau}). \quad (2.94)$$

³ Тождество (2.92) является частным случаем тождества (1.119), справедливого для любого ортогонального тензора. (Примеч. ред.)

При решении задач динамики твердого тела используются оба вектора угловой скорости. Уравнение (2.88) удобнее и нагляднее записать в другой форме:

$$\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t). \quad (2.95)$$

Уравнение (2.95) носит название левого уравнения Пуассона или уравнения Пуассона (в литературе). Аналогично может быть переписано и уравнение (2.91):

$$\mathbf{S}_r(t) = \mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}^T(t) = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t). \quad (2.96)$$

Уравнение (2.96) будем называть правым уравнением Пуассона.

Из левого уравнения Пуассона однозначно следует правое уравнение Пуассона, т. е. (2.95) и (2.96) — разные записи одного и того же уравнения.

Определение. *Прямая, натянутая на вектор левой угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, называется левой осью вращения, а прямая, натянутая на вектор правой угловой скорости, называется правой осью вращения.*

Левая ось вращения обычно называется просто осью вращения. Ни в коем случае нельзя смешивать понятия “ось вращения” и “ось поворота”. В общем (типичном) случае эти оси различаются. Поворот тела и его вращение происходят вокруг разных осей. Кроме того, следует помнить, что ни ось вращения, ни ось поворота, ни векторы угловых скоростей не связаны ни с какими точками тела, т. е. векторы угловых скоростей — свободные аксиальные векторы. Ось вращения — это множество параллельных прямых, любая из которых может с равным правом называться осью вращения. Если тензор поворота задан, то левый и правый векторы угловой скорости вычисляются относительно легко с помощью уравнений (2.95) и (2.96), которые (вспомним определение векторного инварианта тензора второго ранга (1.84)) удобнее переписать в другой форме:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) \right)_{\times}; \quad \boldsymbol{\Omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) \right)_{\times}, \quad (2.97)$$

где $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{\times} \equiv \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Таким образом, введены понятия левой и правой угловых скоростей. Формально мы, конечно, имели право это сделать. Но пока что неясно, насколько эти понятия удобны. Заранее это предвидеть трудно. Ситуация прояснится немного позднее, когда мы увидим, что именно эти величины будут естественным образом возникать в приложениях. Тем не менее один вопрос мы должны выяснить немедленно. По определению тензора поворота он зависит

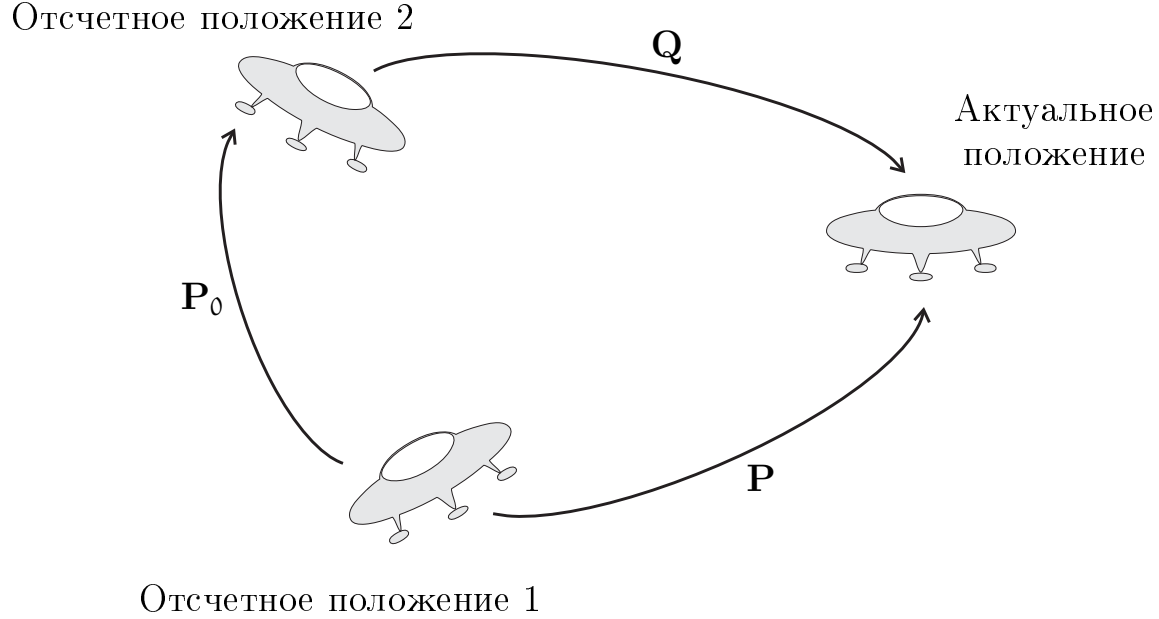


Рис. 2.4. Замена отсчетного положения

существенным образом от выбора отсчетного положения. Интуитивно ясно, что вектор угловой скорости при любом разумном определении не должен зависеть от выбора отсчетного положения. Если это не так, то такое определение нельзя признать удовлетворительным. Покажем, что левая угловая скорость действительно не зависит от выбора отсчетного положения, а правая угловая скорость хотя и зависит от выбора отсчетного положения, но зависит весьма простым и понятным образом. Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 2.4.

Пусть тензор поворота \mathbf{P} поворачивает тело из отсчетного положения 1 в актуальное положение, а тензор \mathbf{Q} поворачивает тело из отсчетного положения 2 в то же самое актуальное положение. Очевидно, что поворот \mathbf{P} может быть осуществлен в виде композиции поворота \mathbf{P}_0 , переводящего тело из положения 1 в положение 2, и последующего поворота \mathbf{Q} . Иными словами, получим представление

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}_0. \quad (2.98)$$

Используя определение левой угловой скорости (2.97), получаем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_P(t) &= -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) \right)_{\times} = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{P}_0^T \cdot \mathbf{Q}^T(t) \right)_{\times} = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{Q}}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(t) \right)_{\times} = \boldsymbol{\omega}_Q(t), \end{aligned} \quad (2.99)$$

т. е. левая угловая скорость не зависит от выбора отсчетного положения.

Для правой угловой скорости согласно (2.94) и (2.99) получим

$$\boldsymbol{\Omega}_P = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_P = \mathbf{P}_0^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\omega}_Q = \mathbf{P}_0^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_Q, \quad (2.100)$$

т. е. правая угловая скорость зависит от выбора отсчетного положения.

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ можно представить в виде

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{t}) \mathbf{n}(\mathbf{t}); \quad |\mathbf{n}(\mathbf{t})| = 1, \quad (2.101)$$

где $\omega(\mathbf{t})$ называется величиной угловой скорости.

Если $\omega(\mathbf{t}) > 0$, то вращение происходит против движения часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{n}(\mathbf{t})$. Иногда в качестве $\mathbf{n}(\mathbf{t})$ выбирают направляющий вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{n}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})/|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})|. \quad (2.102)$$

В этом случае $\omega(\mathbf{t})$ в (2.101) — модуль вектора $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$. Представление (2.102) неудобно, так как в этом случае направляющий вектор $\mathbf{n}(\mathbf{t})$ не является в общем случае непрерывной функцией времени: если модуль $|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})|$ в какой-то момент времени обращается в нуль, а сам вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ при этом меняет направление на противоположное, то $\mathbf{n}(\mathbf{t})$ скачком меняет свою величину, ибо $|\mathbf{n}(\mathbf{t})| = 1$ при всех \mathbf{t} . В представлении (2.101) знак будет менять величина $\omega(\mathbf{t})$, а вектор $\mathbf{n}(\mathbf{t})$ будет меняться непрерывно.

Итак, по заданному тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ векторы угловых скоростей вычисляются однозначно по формулам (2.97). Сложнее обстоит дело с обратной задачей: по заданному вектору $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ восстановить тензор поворота.

2.10. Определение поворота по угловой скорости.

Задача Дарбу

Допустим, что нам известен левый (правый) вектор угловой скорости. Кроме того, известно, что в момент сравнения $\mathbf{t} = \tau$ тензор поворота равен единичному тензору:

$$\mathbf{P}(\mathbf{t})|_{\mathbf{t}=\tau} = \mathbf{E}. \quad (2.103)$$

Требуется найти тензор поворота, отвечающий вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$. Запишем уравнение Пуассона:

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{P}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} > \tau, \quad (2.104)$$

где $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ считается заданным.

Тензорное уравнение (2.104) эквивалентно девяти скалярным уравнениям первого порядка для координат тензора $\mathbf{P}(\mathbf{t}) = P^{mn}(\mathbf{t})\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$. Однако не все эти уравнения являются независимыми. В (2.104) только три уравнения оказываются независимыми. Поэтому система (2.104) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Несмотря на то, что это отнюдь не очевидно для начинающего, мы не будем заниматься доказательствами немедленно, а изложим их немного позднее, когда ознакомимся с различными представлениями тензора поворота. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений задача их интегрирования при определенных начальных условиях типа (2.103) называется задачей Коши. Таким образом, нахождение тензора поворота по заданной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ сводится к интегрированию уравнения (2.104) при начальных условиях (2.103). Эта задача Коши весьма специфична и исследована еще в прошлом веке Жаном Дарбу (1842–1917). Поэтому задачу интегрирования уравнения (2.104) при начальных условиях (2.103) в динамике твердого тела принято называть задачей Дарбу.

Теорема. *Решение задачи Дарбу, т. е. решение уравнения (2.104) при начальных условиях (2.103), существует, единственно и является тензором поворота.*

Доказательство. Существование и единственность решения задачи Коши, частным случаем которой является задача Дарбу, доказывается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому нам необходимо доказать только последнее утверждение теоремы, т. е. доказать, что тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, являющийся решением уравнения (2.104) и удовлетворяющий условию (2.103), — это тензор поворота. Пусть $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ удовлетворяет уравнению (2.104) и начальному условию (2.103). Составим тензор $\mathbf{V}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}); \quad \mathbf{V}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{t} \geq \boldsymbol{\tau}. \quad (2.105)$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{E}$ в силу (2.103). Продифференцируем (2.105) по времени и воспользуемся уравнением (2.104) для того, чтобы исключить производные от $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ по времени. Получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{P}}^T(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})^T = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом, если тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ удовлетворяет уравнению (2.104), то тензор $\mathbf{V}(\mathbf{t})$ должен удовлетворять уравнению

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{V}(\mathbf{t}) - \mathbf{V}(\mathbf{t}) \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} > \boldsymbol{\tau}. \quad (2.106)$$

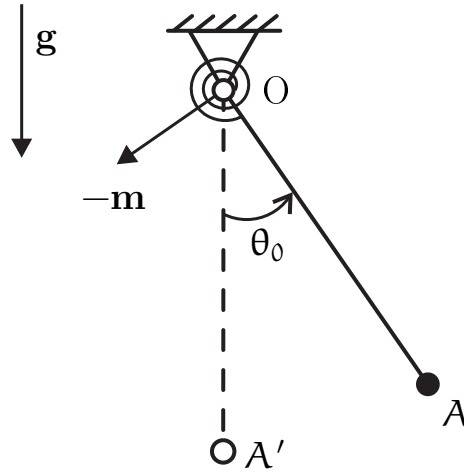


Рис. 2.5. Выбор отсчетного положения

Кроме того, $\mathbf{V}(\mathbf{t})$ при $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}$ должен удовлетворять условию (2.105): $\mathbf{V}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{E}$. Иными словами, для тензора $\mathbf{V}(\mathbf{t})$ мы также получили задачу Коши, решение которой существует и единственно. На первый взгляд решение задачи (2.106) и (2.105) ничуть не проще, чем решение задачи Дарбу (2.104) и (2.103). Но все дело в том, что решение задачи (2.106) и (2.105) легко угадать. Именно угадать, а не построить на основе каких-либо общих методов. Действительно, тензор $\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}$ удовлетворяет как уравнению (2.106), так и начальному условию (2.105). Поскольку решение задачи Коши (2.106) и (2.105) единственно, то тензор $\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}$ является единственным решением задачи. Таким образом, тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ при всех \mathbf{t} удовлетворяет условию

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) = \mathbf{E},$$

из которого следует, что тензор $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ ортогонален. Как следствие получаем отсюда условия:

$$[\det \mathbf{P}(\mathbf{t})]^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) [\det \mathbf{P}(\mathbf{t})]' = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \text{const.}$$

Поскольку при $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau}$ имеют место равенства $\det \mathbf{P}(\boldsymbol{\tau}) = \det \mathbf{E} = 1$, то $\det \mathbf{P}(\mathbf{t}) = 1$ при всех \mathbf{t} . Итак, решение задачи Дарбу является тензором поворота.

В качестве момента сравнения $\boldsymbol{\tau}$ всегда можно выбрать значение $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, т. е. $\boldsymbol{\tau}$ принять за начало отсчета времени. Но это не всегда удобно. Рассмотрим пример (рис. 2.5).

Пусть стержень \mathbf{OA} подвешен с помощью шарнира в точке \mathbf{O} и может совершать движения вокруг \mathbf{O} в плоскости чертежа. Пусть на стержень действует поле силы тяжести \mathbf{g} . Тогда если стержень слегка отклонить от вертикали

и затем опустить, то он начнет совершать малые колебания около вертикали. Начальное положение стержня при $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ отклонено от вертикали. В качестве отсчетного положения удобно принять не это начальное положение, а вертикальное положение стержня. Поэтому принимаем, что при каком-то $\tau < 0$ стержень занимал вертикальное положение и тензор поворота $\mathbf{P}(\tau) = \mathbf{E}$. При $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ тензор поворота имеет вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{0}) = (1 - \cos \theta_0) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta_0 \mathbf{E} + \sin \theta_0 \mathbf{m} \times \mathbf{E} \equiv \mathbf{P}_0,$$

где \mathbf{m} ортогонален плоскости чертежа и направлен “от нас”.

Задача Дарбу в этом случае принимает вид

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{P}(\mathbf{t}); \quad \mathbf{t} > \mathbf{0}; \quad \mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{P}_0. \quad (2.107)$$

Отметим одно свойство задачи Дарбу. На первый взгляд может показаться, что задача (2.107) линейна. Следовательно, ее общее решение должно быть суммой трех частных решений уравнения (2.107). Именно так гласит известная теорема из теории линейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Здесь имеется одна тонкость, которая резко меняет ситуацию. Дело, конечно, в начальном условии. Тензор \mathbf{P}_0 в (2.107) должен быть тензором поворота. Повороты, как мы уже знаем, мультипликативны, а вовсе не аддитивны. Поэтому сумма частных решений нас попросту не устраивает. Как же строить в таком случае общее решение задачи Дарбу (2.107)? Оказывается, что достаточно найти одно частное решение уравнения (2.107), но такое, чтобы оно являлось тензором поворота. Последнее обстоятельство существенно затрудняет построение решения задачи Дарбу. В частности, оно делает проблематичным численное построение решения, ибо строить численно матрицы, строго удовлетворяющие условиям ортогональности, весьма затруднительно, если вообще возможно. Позднее мы покажем, как устранить описанное затруднение. Сейчас мы ограничимся демонстрацией того, что одного частного решения уравнения (2.107), без учета начального условия, достаточно, чтобы найти общее решение задачи (2.107).

Пусть тензор поворота $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ является каким-либо решением уравнения (2.107) без учета начального условия:

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times \mathbf{Q}(\mathbf{t}).$$

Тогда тензор поворота

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q}^T(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{P}_0 \quad (2.108)$$

является решением задачи (2.107).

2.11. Вращение вокруг фиксированной оси

Повороты и вращения твердого тела вокруг фиксированной оси часто встречаются в приложениях, например, при плоских движениях тела. Этот случай наиболее прост для интуитивного восприятия спинового движения. Не случайно поэтому в элементарных учебниках по физике угловая скорость вводится именно на примере вращения тела вокруг фиксированной оси. Рассмотрим диск, который поворачивается (вращается) вокруг собственной оси, причем плоскость диска сохраняет неизменное положение. За время Δt диск поворачивается на угол $\Delta\theta(t)$. Ось диска совпадает с прямой, натянутой на единичный вектор $\mathbf{m} = \text{const}$. Угловой скоростью называют векторную величину:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{m} = \dot{\theta}(t) \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \text{const}. \quad (2.109)$$

В некоторых книгах определение (2.109) распространяется на общий случай, когда \mathbf{m} меняется во времени. Интуитивно не вполне ясно, всегда ли приемлемо определение угловой скорости в виде (2.109). Однако совершенно ясно, что любое приемлемое определение угловой скорости обязательно должно совпадать с (2.109) в описанной ситуации, т. е. когда вращение происходит вокруг фиксированной во времени оси. Проверим этот факт для левой и правой угловых скоростей, определенных посредством (2.88) и (2.91).

Тензор поворота вокруг оси \mathbf{m} определяется теоремой Эйлера (2.35), причем

$$\mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}. \quad (2.110)$$

Равенство (2.110), разумеется, справедливо всегда, а не только при $\mathbf{m} = \text{const}$. Запишем теперь уравнение Пуассона:

$$\dot{\mathbf{Q}}(\theta \mathbf{m}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}). \quad (2.111)$$

Умножив равенство (2.111) скалярно на вектор \mathbf{m} справа и приняв во внимание, что $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$, получим

$$[\dot{\mathbf{Q}}(\theta \mathbf{m})] \cdot \mathbf{m} = [\mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m}]' = 0.$$

Тогда из (2.111) следует равенство

$$\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \lambda(t) \mathbf{m}. \quad (2.112)$$

Иными словами, если повороты происходят вокруг фиксированной оси, то и вращения происходят вокруг этой же фиксированной оси. Оси поворота и

вращения совпадают. Подставляя (2.112) в (2.111), получаем

$$\dot{\mathbf{Q}}(\theta \mathbf{m}) = \lambda(t) \mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}). \quad (2.113)$$

Вычислим теперь след от обеих частей уравнения (2.113) и учтем равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{Q}}(\theta \mathbf{m}) &= [\operatorname{tr} \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m})]^\cdot = (1 + 2 \cos \theta)^\cdot = -2 \sin \theta \dot{\theta}; \\ \operatorname{tr} [\mathbf{m} \times \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m})] &= \operatorname{tr} [\sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E} \times \mathbf{m}] = -2 \sin \theta. \end{aligned}$$

В результате вместо (2.113) получим

$$-2 \sin \theta \dot{\theta} = -2 \lambda(t) \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = \dot{\theta}(t). \quad (2.114)$$

Подставляя соотношение (2.114) в (2.112), получаем определение (2.109). Итак, левая угловая скорость при поворотах вокруг фиксированной оси совпадает с определением (2.109). Правая угловая скорость

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mathbf{Q}^\top(\theta \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{m} = \dot{\theta} \mathbf{m},$$

т. е. правая и левая угловые скорости в этом случае совпадают. Ранее равенствами (2.79), (2.80) и (2.81) были введены три различных определения угловой скорости. При поворотах вокруг фиксированной оси все три определения приводят к одному и тому же вектору

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\theta}(t) \mathbf{m}. \quad (2.115)$$

Можно только пожалеть, что справедливость соотношений (2.115) исчерпывается поворотами вокруг фиксированной оси. Весьма близким к рассмотренному случаю поворота вокруг фиксированной оси является вращение вокруг фиксированной оси:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t) \mathbf{n}; \quad \mathbf{n} = \text{const}; \quad |\mathbf{n}| = 1. \quad (2.116)$$

Для того чтобы найти ось поворота, необходимо по $\boldsymbol{\omega}(t)$ построить тензор поворота и найти его неподвижный вектор. Иными словами, необходимо решить задачу Дарбу:

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \omega(t) \mathbf{n} \times \mathbf{P}(t); \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \quad (2.117)$$

Введем следующие подстановки:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{P}_0; \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} \equiv \mathbf{K} = \text{const}. \quad (2.118)$$

Подставляя соотношения (2.118) в (2.117) получаем задачу для нового тензора поворота $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$:

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) = \omega(\mathbf{t})\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{t}); \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}. \quad (2.119)$$

Докажем утверждение: производная от тензорной экспоненты $\exp[\varphi(\mathbf{t}) \mathbf{A}]$, где $\mathbf{A} = \text{const}$, равна

$$\frac{d}{dt} \exp[\varphi(\mathbf{t}) \mathbf{A}] = \dot{\varphi} \mathbf{A} \cdot \exp(\varphi \mathbf{A}) = \dot{\varphi} \exp(\varphi \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}. \quad (2.120)$$

Для доказательства (2.120) рассмотрим тензорный ряд, являющийся определением тензорной экспоненты:

$$\exp(\varphi \mathbf{A}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \varphi^m \mathbf{A}^m.$$

Дифференцируя этот ряд по времени и учитывая, что \mathbf{A} — постоянный тензор, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(\varphi \mathbf{A}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\dot{\varphi} \varphi^{m-1}}{(m-1)!} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{m-1} = \\ &= \dot{\varphi} \mathbf{A} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^k \mathbf{A}^k = \dot{\varphi} \mathbf{A} \cdot \exp(\varphi \mathbf{A}) = \dot{\varphi} \exp(\varphi \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Здесь мы перешли к другому индексу суммирования: $k = m - 1$. Обратим внимание на то, что условие $\mathbf{A} = \text{const}$ является весьма существенным. В противном случае при дифференцировании тензорного ряда пришлось бы дифференцировать тензор \mathbf{A} , и ничего похожего на (2.120) не получилось бы. Проблема в том, что тензоры \mathbf{A} и $\dot{\mathbf{A}}$ не коммутируют:

$$\mathbf{A}(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) \neq \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{t}).$$

Обратимся к решению задачи (2.119). Тензор поворота $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ ищем в виде (2.46):

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \exp(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E}) = \exp[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t}) \mathbf{K}], \quad (2.121)$$

где

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t}) = \theta(\mathbf{t}) \mathbf{n}; \quad \mathbf{K} \equiv \mathbf{n} \times \mathbf{E} = \text{const}. \quad (2.122)$$

Дифференцируя (2.121) по времени и учитывая (2.120), получаем

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) = \dot{\theta}(\mathbf{t})\mathbf{K} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{t}).$$

Подставляя это выражение в (2.119), приходим к скалярному уравнению:

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \Rightarrow \theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (2.123)$$

Здесь мы учли начальное условие: $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}$, из которого следует, что $\theta(0) = 0$. Итак, задача Дарбу (2.119) решена, и тензор поворота \mathbf{Q} найден. Ось этого поворота совпадает с осью вращения \mathbf{n} . Исходный тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ согласно (2.118) имеет вид

$$\mathbf{P}(t) = \exp(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}_0 = \exp(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \exp(\boldsymbol{\varphi}_0 \times \mathbf{E}), \quad (2.124)$$

где $\boldsymbol{\varphi}_0$ — вектор начального поворота.

Вектор поворота, отвечающий тензору $\mathbf{P}(t)$, можно найти по формуле сложения векторов поворота (2.76). В результате получим, что неподвижный вектор тензора $\mathbf{P}(t)$ совпадает с осью вращения \mathbf{n} тогда и только тогда, когда вектор начального поворота $\boldsymbol{\varphi}_0$ лежит на оси вращения \mathbf{n} . Если

$$\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\varphi}_0 \neq \mathbf{0},$$

то вектор поворота, отвечающий тензору поворота $\mathbf{P}(t)$, будет иметь переменное во времени направление.

2.12. Связь угловой скорости с вектором поворота

Как отмечалось ранее⁴, с вектором поворота в литературе сложилась необычная ситуация. С одной стороны, хорошо известная теорема Эйлера доказывает, что любой поворот твердого тела можно осуществить как поворот на угол θ вокруг единичного вектора \mathbf{m} . Следовательно, поворот описывается вектором $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{m}$, и этот факт можно найти во многих работах по механике. С другой стороны, в тех же самых работах [24] утверждается, что вектор $\theta\mathbf{m}$ не является настоящим вектором.

Возможно, неоднозначность суждений о векторе поворота — это та причина, по которой он не нашел широкого применения в традиционной динамике твердого тела. Тем не менее именно вектор поворота играет важную роль в динамике твердого тела на упругом основании.

В классической механике линейная дифференциальная форма $\mathbf{v}d\mathbf{t}$ является полным дифференциалом вектора положения, т. е. $\mathbf{v}d\mathbf{t} = d\mathbf{R}$. Это неверно для вращений. Если вектор $\boldsymbol{\omega}$ — это вектор угловой скорости, то линейная

⁴ См. раздел 2.6. (Примеч. ред.)

дифференциальная форма $\boldsymbol{\omega} dt$ не является полным дифференциалом вектора поворота. Однако можно доказать (и это будет сделано далее), что существует тензор-интегратор \mathbf{Z} , который преобразует линейную дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega} dt$ в полный дифференциал вектора поворота $d\boldsymbol{\theta}$. Заметим, что тензор-интегратор \mathbf{Z} играет решающую роль при введении потенциального момента, характеризующего действие упругого основания на твердое тело. Таким образом, тензор-интегратор является важным элементом общей модели твердотельного осциллятора.

Угловая скорость вводится в рассмотрение с помощью уравнения Пуассона:

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}; \quad \mathbf{P}|_{t=0} = \mathbf{P}_0. \quad (2.125)$$

Если тензор поворота задан, то угловая скорость определяется равенством (2.97):

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T)_{\times}. \quad (2.126)$$

Для тензора поворота существует несколько представлений. Одно из них выражалось формулой (2.35):

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}; \quad -\pi < \theta < \pi, \quad (2.127)$$

где угол поворота $\theta(\mathbf{t})$ и неподвижный вектор $\mathbf{m}(\mathbf{t})$ зависят от времени.

Продифференцировав (2.127) по времени и подставив результат в (2.126), можно доказать, что

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \dot{\theta} \mathbf{m} + \sin \theta \dot{\mathbf{m}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}. \quad (2.128)$$

Равенство (2.128) было строго получено в [27]. Однако в несколько другой трактовке это равенство было известно еще Эйлеру [28]. Если вращение происходит вокруг фиксированной оси: $\dot{\mathbf{m}} = \mathbf{0}$, то из (2.128) получаем (2.115).

Если в качестве отсчетного положения выбрать положение в данный момент времени, то получим определение угловой скорости, принятое в некоторых книгах:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \left[\frac{d\theta(\tau - \mathbf{t})}{d\tau} \right]_{\tau=\mathbf{t}} = \dot{\theta}(\mathbf{t}) \mathbf{m}(\mathbf{t}); \quad \theta(0) = 0. \quad (2.129)$$

Выражение (2.129) справедливо только в один момент времени. Поэтому его нельзя дифференцировать по времени. Наконец, для малых поворотов, когда

$$\sin \theta = \theta; \quad 1 - \cos \theta = O(\theta^2),$$

получаем

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\mathbf{m}(t) + \boldsymbol{\theta}(t)\dot{\mathbf{m}}(t) = [\boldsymbol{\theta}(t)\mathbf{m}(t)]', \quad (2.130)$$

где $\boldsymbol{\theta}(t)\mathbf{m}(t)$ — вектор малого поворота.

Выражение (2.130) можно, разумеется, получить непосредственно из представлений (2.57) и (2.126). В самом деле, дифференцируя (2.57), получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E}.$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T = (\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E} \times \boldsymbol{\theta}) = \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{E} + O(\theta^2).$$

Подставляя это выражение в (2.126) и учитывая тождество

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{E})_{\times} = -2\mathbf{a},$$

получаем (2.130). Выражение (2.128) будет удобно во многих случаях, но не всегда. Главный недостаток (2.128) состоит в том, что в него входят производные от угла поворота и неподвижного вектора по отдельности. Часто бывает необходимо выразить угловую скорость непосредственно через производную от вектора поворота $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta}\mathbf{m}$. Вывод этого представления [26] приведем достаточно подробно. Вычисляя след от обеих частей уравнения Пуассона, получаем

$$(\text{tr } \mathbf{P})' = \text{tr}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = -2\frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Принимая во внимание, что

$$\text{tr } \mathbf{P} = 1 + 2 \cos \theta; \quad \text{tr } \dot{\mathbf{P}} = -2 \sin \theta \dot{\theta},$$

из предыдущего равенства получаем

$$\theta \dot{\theta} = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.131)$$

Умножая теперь обе части уравнения Пуассона (2.125) скалярно на вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ и учитывая, что

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}; \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}; \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad (2.132)$$

получаем

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta})' - \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -(\mathbf{P} - \mathbf{E}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

Используя представление (2.41), получаем

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{R} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

В результате из (2.125) следует равенство:

$$\mathbf{R} \cdot \left[\left(\frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\omega} \right] = \mathbf{0}. \quad (2.133)$$

Заметим, что

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \lambda \boldsymbol{\theta}.$$

Следовательно, из (2.133) получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\theta} + \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} \right) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.134)$$

Осталось определить скаляр λ . Для этого умножим (2.134) скалярно на $\boldsymbol{\theta}$ и учтем равенство (2.131):

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \lambda \theta^2 + \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.135)$$

Теперь (2.134) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2 \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad (2.136)$$

где

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2. \quad (2.137)$$

Таким образом, связь (2.136) угловой скорости с производной от вектора поворота является довольно сложной. Обращая (2.136), получаем

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}; \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad (2.138)$$

где

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{R} + \frac{1 - g}{\theta^2} \mathbf{R}^2; \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (2.139)$$

Обратим внимание на то, что $\boldsymbol{\theta}$ в формулах (2.135)–(2.139) и далее можно трактовать как модуль вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$. Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$, определенный равенством (2.139), в дальнейшем будем называть *тензором-интегратором*. Название объясняется тем, что $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ выполняет роль интегрирующего множителя, переводящего линейную дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega} d\mathbf{t}$ в полный дифференциал $d\boldsymbol{\theta}$ вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$. Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ является невырожденным, ибо его определитель не равен нулю:

$$\det \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta^2}{2(1 - \cos \theta)} \neq 0, \quad \theta < \pi. \quad (2.140)$$

Тензор-интегратор обладает рядом полезных свойств, облегчающих его применение. Отметим некоторые из них. Тензор $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ есть изотропная функция вектора поворота

$$\mathbf{Z}(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{S}^T \quad \forall \mathbf{S} : \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{E}. \quad (2.141)$$

Если $\mathbf{S} = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$, то из (2.141) следует

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.142)$$

Кроме того, легко проверить тождество:

$$\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}). \quad (2.143)$$

Используя тождество (2.143), равенство (2.138) можно переписать для правой угловой скорости:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t). \quad (2.144)$$

В терминах вектора поворота левую и правую задачи Дарбу можно переписать в следующих формах:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0; \quad (2.145)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad \boldsymbol{\theta}|_{t=0} = \boldsymbol{\theta}_0. \quad (2.146)$$

Следует обратить внимание на различие, например, в формулировках левой задачи Дарбу (2.125) и (2.145). В принципе эти формулировки эквивалентны. Решив одну из этих задач, мы одновременно решим и другую задачу. На первый взгляд кажется, что формулировка (2.125) значительно проще, чем (2.145). В самом деле, уравнение (2.125) линейно и однородно. Уравнение (2.145) существенно нелинейно и неоднородно. Тем не менее по крайней мере численное решение задачи (2.145) несравнимо проще, нежели решение задачи (2.125). В частности, обратим внимание читателя на следующую возможность. Задачу Дарбу (2.125) можно простой заменой

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{P}_0 \quad (2.147)$$

свести к следующей:

$$\dot{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi}), \quad \mathbf{Q}|_{t=0} = \mathbf{E}. \quad (2.148)$$

Это возможно, поскольку левые угловые скорости для поворотов $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ и $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\varphi})$ совпадают:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T]_{\times} = -\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T]_{\times}.$$

Тогда вместо задачи (2.145) получаем следующую задачу для вектора поворота $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\varphi^2} \boldsymbol{\varphi} \times (\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}); \quad \boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}. \quad (2.149)$$

Преимущество последней задачи по сравнению с (2.145) в том, что, во-первых, здесь простейшее начальное условие; во-вторых, очень часто вектор $\boldsymbol{\varphi}$ можно считать малым. Исходный вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ можно найти по вектору $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\theta}_0$ с помощью формул (2.76). Представления (2.145) и (2.146) можно записать в другой форме:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = g\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta} \dot{\theta} \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0; \quad (2.150)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = g\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta} \dot{\theta} \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \quad (2.151)$$

которая иногда бывает полезной.

Приведенные в этом разделе формулы понадобятся нам в дальнейшем при определении потенциальных моментов.

2.13. Угловая скорость композиции поворотов

В приложениях бывает удобно представлять общий поворот $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ в виде композиции поворотов:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(\mathbf{t})) = \mathbf{Q}_2(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{t})) \cdot \mathbf{Q}_1(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{t})), \quad (2.152)$$

где \mathbf{Q}_1 — первый поворот; \mathbf{Q}_2 — второй поворот.

Напомним, что композицию поворотов нельзя понимать так, что сначала, в течение какого-то интервала времени, производится поворот \mathbf{Q}_1 , а затем, по истечении первого интервала времени, начинает производиться второй поворот \mathbf{Q}_2 . Тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ — это мгновенное действие, происходящее в момент времени \mathbf{t} и состоящее в том, что в момент времени \mathbf{t} тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ поворачивает тело из отсчетного положения в актуальное. В следующий момент времени $\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}$ тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t})$ переводит тело из отсчетного

положения в положение, занимаемое телом в момент времени $\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}$. Истинное изменение ориентации тела в пространстве описывается не тензором поворота, а его изменением (дифференциалом). Это обстоятельство важно осознать. Полезно поэтому провести аналогию с вектором перемещения $\mathbf{u}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{t}).$$

Вектор $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ мгновенно переносит тело из отсчетного положения \mathbf{r} в актуальное положение $\mathbf{R}(\mathbf{t})$. При этом $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ сам по себе не показывает истинного движения тела, которое, тем не менее, может быть восстановлено по вектору \mathbf{u} :

$$d\mathbf{R}(\mathbf{t}) = d\mathbf{u}(\mathbf{t}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{r} + \int_0^{\mathbf{t}} d\mathbf{u}(\mathbf{t}).$$

При этом $d\mathbf{u} = \mathbf{v}d\mathbf{t}$, т. е. линейная дифференциальная форма $\mathbf{v}d\mathbf{t}$ — это полный дифференциал вектора перемещения. Для поворотов ситуация сложнее. Изменение поворота согласно уравнению Пуассона определяется через линейную дифференциальную форму: $\boldsymbol{\omega}d\mathbf{t}$

$$d\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}d\mathbf{t} \times \mathbf{P},$$

но $\boldsymbol{\omega}d\mathbf{t}$ не является полным дифференциалом вектора поворота:

$$\boldsymbol{\omega}d\mathbf{t} \neq d\theta.$$

По существу именно с этим обстоятельством связаны все сложности, возникающие при описании поворотов.

Вернемся, однако, к композиции поворотов (2.152). Все формулы, приведенные для полного поворота \mathbf{P} , можно использовать и для составляющих поворотов \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 . Допустим, нам известны угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ поворотов \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 , соответственно:

$$\dot{\mathbf{Q}}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1; \quad \dot{\mathbf{Q}}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2. \quad (2.153)$$

Как по ним вычислить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ полного поворота \mathbf{P} ? Ответ дает следующая простая теорема.

Теорема. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ полного поворота \mathbf{P} , определенного в виде композиции (2.152), вычисляется по угловым скоростям $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ составляющих поворотов \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 посредством равенства

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_2(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\omega}_1(\mathbf{t}). \quad (2.154)$$

Доказательство (2.154) вполне элементарно и получается после дифференцирования (2.152) по времени:

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \dot{\mathbf{Q}}_2(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q}_1(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{Q}}_1(\mathbf{t}).$$

Заменяя здесь производные от тензоров поворота с помощью уравнения Пуассона (2.153), получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1). \quad (2.155)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{Q}_1) &= \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_1 = \\ &= \mathbf{Q}_2 \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}_2^T \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 = [(\mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1. \end{aligned}$$

Учитывая это тождество и равенство (2.152), вместо (2.155) получаем

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = (\boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{P}.$$

Умножая это равенство скалярно на \mathbf{P}^T справа и вычисляя векторные инварианты от обеих частей получившегося равенства, приходим к формуле (2.154). Доказательство завершено.

В литературе равенство (2.154) (точнее — его аналог) называют *теоремой сложения угловых скоростей*. Как уже неоднократно отмечалось, в литературе используется определение угловой скорости, когда в качестве отсчетного положения используется положение в данный момент времени. При таком описании

$$\mathbf{Q}_2(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t})|_{\boldsymbol{\tau}=\mathbf{t}} = \mathbf{E}$$

и равенство (2.154) переходит в традиционную форму сложения угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_2(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_1(\mathbf{t}). \quad (2.156)$$

Хотя в этом выражении и стоит аргумент \mathbf{t} , тем не менее его нельзя дифференцировать по времени, поскольку здесь \mathbf{t} — один фиксированный момент времени. Автор рекомендует не использовать формулы типа (2.156) и аналогичные ей выражения, апеллирующие к мгновенному состоянию движения. Будучи формально правильными, они служат источником многих недоразумений и практически бесполезны. Кроме того, они находятся в трудно устранимом противоречии с интуитивными представлениями. Например, мы знаем, что повороты не коммутируют. Поэтому их угловые скорости должны входить в формулу сложения неравноправно. Это действительно имеет место в (2.154),

но в (2.156) этот факт сильно замаскирован. В данной книге теорема о сложении угловых скоростей используется исключительно в форме (2.154). Из последней вытекает представление для сложения правых угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \mathbf{Q}_1^T \cdot \boldsymbol{\Omega}_2, \quad (2.157)$$

где

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \mathbf{Q}_1^T \cdot \boldsymbol{\omega}_1; \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = \mathbf{Q}_2^T \cdot \boldsymbol{\omega}_2.$$

Из представлений (2.154) следуют формулы для композиции трех и большего числа поворотов:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1. \quad (2.158)$$

Тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_3 + \mathbf{Q}_3 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_1. \quad (2.159)$$

Ранее мы видели, что угловая скорость в общем случае вычисляется по довольно сложным формулам, представленным в предыдущем разделе. Все они резко упрощаются, если поворот происходит вокруг фиксированной оси. Тогда угловая скорость вычисляется по простейшей формуле:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{m} = \dot{\boldsymbol{\theta}}; \quad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{m} = \text{const}. \quad (2.160)$$

Поэтому часто бывает полезным общий поворот представить в виде композиции поворотов вокруг фиксированных осей. Рассмотрим, например, композицию поворотов

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}), \quad (2.161)$$

где \mathbf{m} и \mathbf{n} — постоянные единичные векторы.

Угловые скорости поворотов $\mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m})$ и $\mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n})$ вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi}(t) \mathbf{m}; \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi}(t) \mathbf{n}. \quad (2.162)$$

Согласно теореме сложения угловых скоростей (2.154)

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{m} + \dot{\psi}(t) \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.163)$$

Выражение (2.163) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \left[\dot{\varphi}(t) \mathbf{m} + \dot{\psi}(t) \mathbf{n} \right], \quad (2.164)$$

которая часто будет использоваться в дальнейшем. Обычно такого рода преобразованиями вообще удается избежать относительно громоздкой операции умножения тензора поворота на вектор. Посмотрим теперь, как усложняются

вычисления, если хотя бы один из поворотов проводить вокруг меняющейся во времени оси. В соответствии с правилом квазикоммутативности поворотов поворот (2.161) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}(\theta) = \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}) = \mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}') \cdot \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}), \quad (2.165)$$

где

$$\mathbf{n}'(t) = \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.166)$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_*$ поворота $\mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}')$ теперь уже должна вычисляться по полной формуле (2.128):

$$\boldsymbol{\omega}_* = \dot{\psi} \mathbf{n}' + \sin \psi \dot{\mathbf{n}}' + (1 - \cos \psi) \mathbf{n}' \times \dot{\mathbf{n}}'. \quad (2.167)$$

Угловая скорость поворота (2.165) согласно (2.154) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_*(t) + \dot{\varphi} \mathbf{Q}_1(\psi \mathbf{n}') \cdot \mathbf{m}. \quad (2.168)$$

Поскольку повороты (2.161) и (2.165) совпадают, то и угловые скорости (2.163) и (2.168) должны тождественно совпадать, что сразу неочевидно.

Можно доказать, что выражения (2.163) и (2.168) приводят к одному и тому же вектору $\boldsymbol{\omega}(t)$.

При вычислении производной от вращающегося вектора следует активно пользоваться уравнением Пуассона. Например, для вектора (2.166)

$$\dot{\mathbf{n}}' = [\mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}]' = \dot{\mathbf{Q}}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = \dot{\varphi} \mathbf{m} \times \mathbf{Q}_2(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}.$$

Здесь использовано уравнение Пуассона. Вспоминая (2.166), окончательно получаем

$$\dot{\mathbf{n}}'(t) = \dot{\varphi}(t) \mathbf{m} \times \mathbf{n}'(t). \quad (2.169)$$

Если вектор $\mathbf{a} = \text{const}$ поворачивается тензором поворота общего вида, то вместо (2.169) получим

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}'(t). \quad (2.170)$$

Если вектор \mathbf{a} меняется во времени и, кроме того, поворачивается тензором поворота, то, разумеется, вместо (2.170) следует использовать более полное выражение:

$$\mathbf{a}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{a}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{a}}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}'(t). \quad (2.171)$$

Часто выражение (2.171) удобно представлять в другой форме. При этом следует вспомнить тождество:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}), \quad (2.172)$$

которое выполняется для любых векторов и любых тензоров поворота.

Вводя в рассмотрение правую угловую скорость

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t),$$

равенство (2.171) переписываем в виде

$$\dot{\mathbf{a}}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot [\dot{\mathbf{a}}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{a}(t)]. \quad (2.173)$$

В литературе формулы типа (2.173) часто трактуют в терминах различного рода наблюдателей. Читатель, уже добившийся более или менее устойчивой визуализации векторных и тензорных объектов, легко сможет самостоятельно интерпретировать смысл формул типа (2.173). Тем не менее в разделе, посвященном описанию относительных движений, мы обсудим и эти трактовки. Здесь же укажем только, что все величины, входящие в (2.173) и другие формулы, заданы в одной и только одной (произвольно выбранной) системе отсчета и, вообще говоря, не нуждаются в каких-то дополнительных трактовках. Замены системы отсчета будут обсуждены в конце этой главы.

Вернемся к вычислению угловой скорости для композиции поворотов. Ранее была доказана теорема (2.61) о представлении произвольного тензора поворота в виде композиции трех поворотов вокруг фиксированных и произвольно выбираемых осей. Теорема (2.154) позволяет без труда вычислить угловую скорость композиции поворотов (2.61):

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}_3(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_2(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}_1(\phi \mathbf{n}), \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{m} \times \mathbf{n}|}. \quad (2.174)$$

Здесь единичные векторы \mathbf{m} и \mathbf{n} выбираются произвольно, но они не зависят от времени. Уравнения Пуассона для поворотов, входящих в (2.174), дают

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}; \quad \dot{\mathbf{Q}}_1 = \dot{\phi} \mathbf{n} \times \mathbf{Q}_1; \quad \dot{\mathbf{Q}}_2 = \dot{\vartheta} \mathbf{e} \times \mathbf{Q}_2; \quad \dot{\mathbf{Q}}_3 = \dot{\psi} \mathbf{m} \times \mathbf{Q}_3.$$

Угловые скорости для составляющих поворотов вычисляются по простейшим формулам. Полная угловая скорость в соответствии с (2.159) определяется выражением

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\vartheta} \mathbf{e}' + \dot{\phi} \mathbf{n}''; \quad (2.175)$$

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}_3(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}; \quad \mathbf{n}'' = \mathbf{Q}_3(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}_2(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (2.176)$$

Уравнение (2.175) носит название кинематического уравнения Эйлера. Оно было получено Эйлером для $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ и единичного вектора \mathbf{e} , ортогонального \mathbf{m} . Величины $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\phi}$ носят названия угловых скоростей прецессии,

нутации и собственного вращения, соответственно. Заметим, что эти названия в общем случае весьма условны, а сами эти величины обретают объективный смысл только при учете специфики как рассматриваемой задачи, так и твердого тела, повороты которого описываются тензором (2.174).

2.14. Скорости и ускорения точек твердого тела

Вся информация о кинематических характеристиках движения точек абсолютно твердого тела содержится в основном уравнении кинематики (2.10):

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q), \quad (2.177)$$

где векторы \mathbf{r}_Q и \mathbf{R}_Q определяют положение полюса Q в отсчетном и актуальном положениях, соответственно; векторы \mathbf{r}_A и \mathbf{R}_A определяют положение произвольно выбранной точки A в отсчетном и актуальном положениях, соответственно; тензор $\mathbf{P}(t)$ определяет поворот абсолютно твердого тела.

Чтобы найти распределение скоростей в абсолютно твердом теле, достаточно продифференцировать (2.177) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q). \quad (2.178)$$

Исключая отсюда производную от тензора поворота с помощью уравнения Пуассона

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t), \quad (2.179)$$

получаем

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q).$$

С учетом уравнения (2.177) этому соотношению можно придать вид

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_Q(t)). \quad (2.180)$$

Равенство (2.180) носит название уравнения Эйлера. Оно позволяет найти скорости всех точек абсолютно твердого тела и допускает ясное геометрическое истолкование для скорости точки A относительно полюса Q (рис. 2.6).

Эта интерпретация упрощается, если полюс Q неподвижен. Тогда в каждый момент времени точка A как бы движется по окружности вокруг оси, натянутой на вектор $\boldsymbol{\omega}$. Следует, впрочем, предостеречь от слишком буквального следования этой интерпретации, поскольку точка A движется по указанной окружности только тогда, когда, во-первых, полюс Q неподвижен и, во-вторых, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ постоянен. При нарушении любого

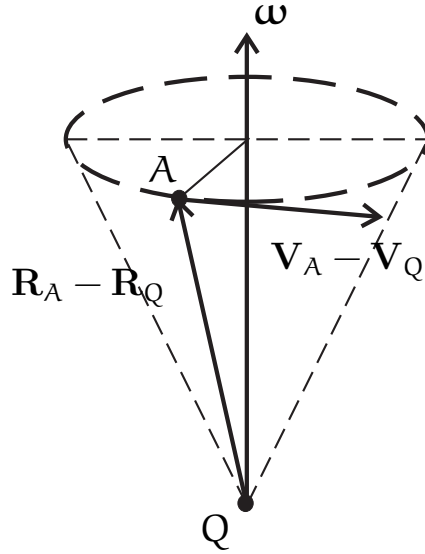


Рис. 2.6. Интерпретация уравнения Эйлера

из этих двух условий фактическое движение точки A происходит по другой траектории, которая может весьма сильно отличаться от упомянутой окружности.

Многие книги по механике используют формулу (2.180) в качестве определения угловой скорости. Такой подход, разумеется, возможен, но при этом природа угловой скорости и ее связь с поворотами тела оказываются скрытыми.

Чтобы получить распределение ускорений в абсолютно твердом теле, достаточно продифференцировать (2.180) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_Q).$$

Исключая отсюда скорости с помощью равенства (2.180), получаем

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q)]. \quad (2.181)$$

Выражение (2.181) можно переписать в другой, но эквивалентной форме:

$$\mathbf{W}_A = \mathbf{W}_Q + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}] \cdot (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_Q). \quad (2.182)$$

Вектор $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ называется вектором угловых ускорений. Тензор второго ранга

$$\mathbf{W} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.183)$$

будем называть *тензором угловых ускорений*. Последний можно выразить через левый тензор спина S_l :

$$\mathbf{W} = \dot{S}_l + S_l^2; \quad S_l = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}. \quad (2.184)$$

Введем еще два часто используемых в литературе понятия. Рассмотрим тело, имеющее неподвижную точку Q , которую выберем в качестве полюса, причем $V_Q = 0$.

Определение. *Прямая*

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q + \frac{\lambda}{\omega(t)} \boldsymbol{\omega}(t), \quad \dot{\mathbf{R}}_Q = 0, \quad (2.185)$$

проходящая через неподвижный полюс Q и натянутая на вектор угловой скорости, называется мгновенной осью вращения.

Скалярный параметр λ , входящий в (2.185), играет роль расстояния, на которое точка A отстоит от полюса Q . Из выражения (2.180) видно, что скорости всех точек, лежащих на мгновенной оси вращения, в данный момент времени равны нулю. Иными словами, если тело имеет неподвижную точку Q , то существует такая прямая (2.185), что в данный момент времени тело как бы вращается вокруг этой неподвижной прямой. Если тело имеет неподвижную точку, то мгновенная ось вращения всегда существует. Можно распространить понятие мгновенной оси вращения и на другие случаи движения, при которых тело не имеет неподвижной точки. Однако такое расширение возможно не для любых движений.

Определение. *Мгновенной осью вращения называется прямая, натянутая на вектор угловой скорости и такая, что скорости точек тела, лежащие в данный момент времени на этой прямой, обращаются в нуль.*

Выясним при каких условиях, налагаемых на движение тела, мгновенная ось вращения существует. По определению мгновенная ось вращения состоит из точек, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Тогда, согласно (2.180) для таких точек

$$V_Q(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_Q(t)) = 0. \quad (2.186)$$

Равенство (2.186) должно быть справедливым для любого выбора полюса Q , т. е. для всех точек тела. Скалярно умножая (2.186) на вектор $\boldsymbol{\omega}(t)$, получаем

$$V_Q(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = 0. \quad (2.187)$$

Поскольку выбор Q произволен, то отсюда следует, что скорости всех точек тела должны быть ортогональны вектору угловой скорости. Этот случай реализуется, например, для так называемых плоских движений твердого тела.

Определение. *Движение абсолютно твердого тела называется плоским, если скорости всех точек этого тела лежат в плоскостях, ортогональных постоянному единичному вектору \mathbf{e} .*

Можно доказать, что при плоском движении угловая скорость тела ортогональна плоскостям, в которых лежат векторы скорости: $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) \mathbf{e}$.

Итак, будем считать, что условие (2.187) выполнено. Тогда (2.186) дает уравнение для нахождения мгновенной оси вращения. Решая это уравнение, получаем

$$\mathbf{R}_A(t) = \mathbf{R}_Q(t) + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_Q + \frac{\lambda}{\omega} \boldsymbol{\omega}(t). \quad (2.188)$$

Выражение (2.188) определяет прямую, проходящую через точку

$$\mathbf{R}_Q(t) + \frac{1}{\omega^2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_Q \quad (2.189)$$

и натянутую на вектор $\boldsymbol{\omega}$. Мгновенная ось вращения при этом движется в пространстве, хотя скорости точек тела, лежащих в данный момент времени на этой оси, равны нулю. При плоских движениях точка (2.189) называется *мгновенным центром скоростей*. Это понятие широко используется в теории машин и механизмов, но здесь мы его обсуждать не будем.

2.15. Шарнир Гука

Рассмотрим задачу, в которой тензор поворота и вообще характер поворотов заранее предсказать довольно трудно, если вообще возможно. В таких случаях необходимо сначала установить, какие необходимые ограничения налагаются на тензор поворота. Только после этого следует принимать решение о выборе представления тензора поворота. Шарнир Гука является подходящим примером.

Шарнир Гука используется для передачи вращения от одного вала к другому. Причем оба вала расположены в одной плоскости, но составляют угол θ между собой. Схематическое изображение шарнира Гука представлено на рис. 2.7, на котором векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} образуют правую ортонормированную тройку. В отсчетном положении входной вал \mathbf{CO} расположен вдоль вектора \mathbf{j} . Вилка \mathbf{BCV}_1 входного вала расположена в плоскости, натянутой на векторы \mathbf{j} и \mathbf{k} . Выходной вал \mathbf{OD} расположен вдоль вектора \mathbf{n} : $|\mathbf{n}| = 1$, который также расположен в вертикальной плоскости, натянутой на \mathbf{j} , \mathbf{k} . Входной и выходной валы пересекаются в точке \mathbf{O} , которая остается неподвижной при вращении валов. Диаметр \mathbf{OA} вилки \mathbf{ADA}_1 выходного вала в отсчетном положении расположен вдоль вектора \mathbf{i} . Ось выходного вала, т. е. вектор \mathbf{n} , ортогональна диаметру \mathbf{OA} вилки \mathbf{ADA}_1 . Входной вал вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, что заставляет вращаться выходной вал с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_3$:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{j}; \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \omega_3 \mathbf{n}; \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta = \text{const}. \quad (2.190)$$

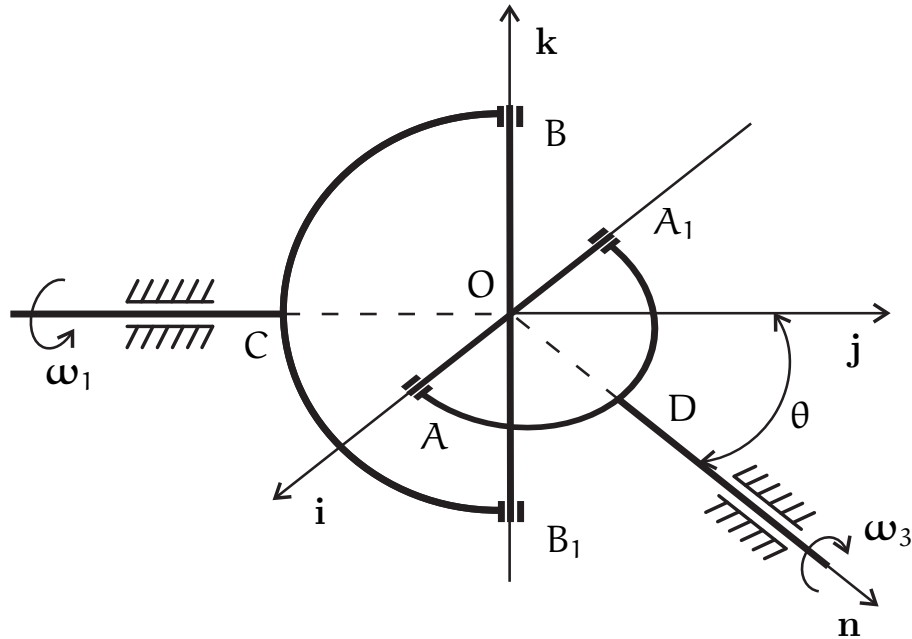


Рис. 2.7. Шарнир Гука

Соединение входного и выходного валов осуществляется с помощью крестовины AOB , которая считается абсолютно твердым телом. Входной вал вращает диаметр BB_1 крестовины. В результате начинает вращаться диаметр AA_1 крестовины, что приводит к вращению выходного вала. Таким образом, шарнир Гука представляет собой сочленение трех абсолютно твердых тел: входного вала с вилкой BCB_1 (тело 1), крестовины ABA_1B_1 (тело 2) и выходного вала с вилкой ADA_1 (тело 3). Все три тела имеют одну и ту же неподвижную точку O . Радиусы крестовин одинаковы: $|OA| = |OB| = l$. Понятно, что движение крестовины и выходного вала полностью определяется геометрическими факторами (в частности, углом θ) и поворотами входного вала. Требуется определить угловую скорость выходного вала, а также тензор поворота крестовины \mathbf{P}_2 и угловую скорость крестовины.

Введем обозначения: $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ — тензоры поворота входного вала, крестовины и выходного вала, соответственно. Оси поворота входного и выходного валов заданы и фиксированы:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{j}); \quad \mathbf{P}_3 = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{n}), \quad (2.191)$$

причем угол поворота входного вала известен:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{j} = \dot{\varphi} \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau. \quad (2.192)$$

Угол поворота выходного вала ψ и его угловая скорость подлежат определению. Будем считать, что начало в системе отсчета выбрано в точке O . Тогда в отсчетном положении материальные векторы \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OB} совпадают с векторами

$$\overrightarrow{OA} \sim \mathbf{r}_A = l\mathbf{i}; \quad \overrightarrow{OB} \sim \mathbf{r}_B = lk. \quad (2.193)$$

В актуальном положении

$$\overrightarrow{OA} \sim \mathbf{R}_A; \quad \overrightarrow{OB} \sim \mathbf{R}_B. \quad (2.194)$$

Для вектора \mathbf{R}_B в соответствии с основным уравнением кинематики

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{r}_B = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r}_B. \quad (2.195)$$

Равенство (2.195) справедливо в силу того, что материальный вектор \overrightarrow{OB} одновременно принадлежит как входному валу, так и крестовине. С учетом (2.191) и (2.193) равенство (2.195) можно переписать в виде

$$\mathbf{Q}(\varphi \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (2.196)$$

Получили первое ограничение, которому должен удовлетворять тензор поворота \mathbf{P}_2 . Аналогичные рассуждения применительно к материальному вектору \overrightarrow{OA} дают

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{r}_A = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{r}_A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}(\psi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{i}. \quad (2.197)$$

Умножая скалярно равенство (2.197) на \mathbf{n} и учитывая, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = 0$, получаем второе ограничение на тензор \mathbf{P}_2 :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (2.198)$$

Таким образом, тензор поворота \mathbf{P}_2 удовлетворяет двум ограничениям: (2.196) и (2.198), которые должны выполняться при всех возможных поворотах крестовины. Всякий тензор поворота зависит от трех параметров. На эти три параметра, какие бы они ни были, наложены два ограничения. Следовательно, только один из упомянутых параметров остается независимым, а два других могут быть выражены через него. Ограничение (2.196) показывает, что тензор \mathbf{P}_2 является двухпараметрическим. Будем искать этот двухпараметрический тензор в следующем виде:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}). \quad (2.199)$$

Легко убедиться, что при любых значениях параметров α и β ограничение (2.196) тождественно выполнено. Потребуем, чтобы тензор (2.199) удовлетворял условию (2.198):

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (2.200)$$

Вспоминая, что

$$\mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}) = (1 - \cos \beta) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \beta \mathbf{E} + \sin \beta \mathbf{k} \times \mathbf{E},$$

получаем

$$\mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = \cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}.$$

Подставляя это соотношение в (2.200) и проводя аналогичные вычисления, получаем равенство:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot (\cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}) = \cos \beta \sin \alpha \sin \theta + \sin \beta \cos \theta = 0,$$

или, в другой форме,

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \theta \sin \alpha. \quad (2.201)$$

Итак, тензор \mathbf{P}_2 имеет вид (2.199), где параметры α и β связаны соотношением (2.201).

Теперь мы должны вернуться к равенству (2.195) и первому из равенств (2.197). Дифференцируя (2.195) по времени и исключая производные от тензоров поворота посредством соответствующих уравнений Пуассона, получаем

$$\dot{\varphi} \mathbf{j} \times \mathbf{R}_B = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}_B.$$

Умножая это равенство векторно на \mathbf{R}_B , получаем

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi} \mathbf{j} + \mathbf{R}_B(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_B)/l^2, \quad (2.202)$$

где

$$l^2 = \mathbf{R}_B \cdot \mathbf{R}_B; \quad \mathbf{R}_B \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Дифференцируя (2.197) по времени, получаем аналогичное равенство для вектора \mathbf{R}_A :

$$\dot{\psi} \mathbf{n} = \boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{R}_A(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_A)/l^2. \quad (2.203)$$

Равенство (2.202) позволяет вычислить угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_2$, а равенство (2.203) позволяет найти угловую скорость выходного вала:

$$\dot{\psi} = \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{n}. \quad (2.204)$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_2$, отвечающая повороту (2.199), вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\alpha} \mathbf{j} + \dot{\beta} \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k}. \quad (2.205)$$

Сравнивая (2.202) и (2.205), получаем

$$\dot{\alpha} \mathbf{j} + \dot{\beta} \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = \dot{\varphi} \mathbf{j} + \mathbf{R}_B(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{R}_B)/l^2.$$

Проецируя это равенство на вектор \mathbf{j} , получаем

$$\dot{\alpha} = \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t) = \varphi(t). \quad (2.206)$$

Здесь и далее мы принимаем начальные условия в виде

$$\alpha(0) = \beta(0) = \varphi(0) = \psi(0) = 0. \quad (2.207)$$

Итак, угол поворота $\alpha(t)$ оказался равным углу поворота $\varphi(t)$ входного вала. Чтобы найти $\dot{\beta}$, достаточно продифференцировать (2.201) по времени. Тогда получим

$$\dot{\beta}(1 + \operatorname{tg}^2 \beta) = -\dot{\varphi} \operatorname{tg} \theta \cos \varphi. \quad (2.208)$$

Здесь учтено равенство (2.206). Исключая из (2.208) угол β с помощью (2.201), получаем

$$\dot{\beta} = -\frac{\operatorname{tg} \theta \cos \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \varphi} \dot{\varphi} = -\frac{\cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \dot{\varphi}. \quad (2.209)$$

Угловая скорость крестовины полностью определена:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\varphi} \left[\mathbf{j} - \frac{\cos \theta \sin \theta \cos \varphi}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} (\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{k}) \right]. \quad (2.210)$$

Таким образом, угловая скорость крестовины определяется относительно сложным выражением. Осталось вычислить угловую скорость выходного вала, которая определяется формулой (2.204). Из последней получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} \dot{\varphi}. \quad (2.211)$$

Отсюда следует, что угловая скорость выходного вала переменна во времени при $\theta \neq 0$, даже если угловая скорость входного вала постоянна. Обратим внимание на сложный характер зависимости угловой скорости выходного вала от углов θ и φ . Пусть, например, скорость входного вала постоянна: $\dot{\varphi} = \omega_1$.

Тогда $\varphi = \omega_1 t$. Рассмотрим теперь моменты времени, такие, что $\omega_1 t = \pi k$. В эти моменты времени согласно (2.211)

$$\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{\cos \theta}. \quad (2.212)$$

При $\theta = \pi/2$ угловая скорость выходного вала становится бесконечно большой. Из общих соображений этот результат кажется сомнительным. Сомнения увеличиваются еще больше при рассмотрении формулы (2.211). Полагая в ней $\theta = \pi/2$, получаем, что $\dot{\psi} = 0$. Здесь мы встречаемся с любопытными особенностями. С чисто математической точки зрения это хотя и не совсем стандартная, но хорошо известная ситуация, когда предел функции двух переменных зависит от направления, по которому вычисляется этот предел. Иными словами, с математической точки зрения ничего особенно удивительного в полученном результате нет. Однако подобные фокусы с физической точки зрения вызывают протест у нашей интуиции. Обычно они указывают на не вполне удовлетворительную постановку задачи. Во всяком случае в данной задаче это именно так. В самом деле, мы допустили, что входной вал может вращаться с заданной угловой скоростью независимо от угловой скорости выходного вала. Это допущение подразумевает, что входной вал вращается двигателем неограниченной мощности⁵, каковых в действительности не существует.

Чтобы яснее осознать необходимость двигателя неограниченной мощности, рассмотрим ситуацию, когда угол θ близок к $\pi/2$: $\theta = \pi/2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Разлагая функции $\sin \varepsilon$ и $\cos \varepsilon$ в ряд по степеням ε и удерживая слагаемые до второго порядка малости включительно, выражение (2.211) переписываем в следующей форме:

$$\dot{\psi} = \frac{2\varepsilon \dot{\varphi}}{2 \sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2\varepsilon \omega_1}{2 \sin^2 \omega_1 t + \varepsilon^2 \cos^2 \omega_1 t}. \quad (2.213)$$

Читателю рекомендуется построить график функции $\dot{\psi}/\omega_1$ на интервале $\pi/2 \leq \omega_1 t \leq 3\pi/2$ при $\varepsilon = 0,001$. При подходе к точке $\omega_1 t = \pi$ угловая скорость выходного вала начинает очень быстро нарастать до бесконечно

⁵ Наличие двигателя ограниченной или неограниченной мощности подразумевает динамическую постановку задачи. По мнению П. А. Жилина, объяснение научных парадоксов (безупречных с математической точки зрения решений, которые вызывают протест у нашей интуиции) надо искать в более сложных постановках задачи, полнее отражающих свойства реального физического процесса. В данном случае речь идет об отказе от чисто кинематической постановки задачи и учета динамических свойств шарнира Гука. В приложении D, например, обсуждаются парадоксы, возникающие в задачах с сухим трением Кулона. Разрешение этих парадоксов П. А. Жилин видит в отказе от модели абсолютно твердого тела и учета способности тела деформироваться. (*Примеч. ред.*)

большого значения. После прохождения этой точки угловая скорость выходного вала начинает столь же быстро уменьшаться. Вообразим теперь, что на выходной вал посажен массивный маховик. Тогда двигатель, подключенный к входному валу, должен почти мгновенно раскрутить этот маховик, а затем почти мгновенно затормозить его. Это было бы возможно только в том случае, если бы двигатель обладал бесконечной мощностью, что практически невозможно.

Если мы хотим использовать двигатель ограниченной мощности, то чисто кинематических рассмотрений уже недостаточно. Необходимо привлекать законы механики. Кроме того, некоторые режимы работы требуют другого конструктивного исполнения вилки выходного вала, но на кинематических соотношениях это не отражается.

2.16. Сложные движения материальной точки и абсолютно твердого тела

В приложениях часто используется так называемая лабораторная система отсчета, в которой производятся разного рода измерения. Вместе с тем лабораторная система отсчета сама движется относительно основной системы отсчета. Последняя в механике и классической физике должна быть инерциальной, ибо в ней и только в ней вводятся такие понятия, как воздействия (силы, моменты и т.д.) и формулируются фундаментальные законы.

Инерциальные системы отсчета будут введены в третьей главе. В кинематике мы должны просто научиться пересчитывать результаты лабораторных измерений в соответствующие результаты, имеющие смысл в основной системе отсчета.

Рассмотрим воображаемую задачу о полете мухи (материальной точки) в салоне самолета, совершающего полет. Лабораторную систему отсчета естественно связать с самолетом, который, в свою очередь, будем рассматривать как абсолютно твердое тело. Выберем какую-либо точку Q , которая фиксирована относительно самолета. Выберем тройку материальных векторов \overrightarrow{QA} , \overrightarrow{QB} , \overrightarrow{QC} , таких, что при $t = 0$ (например, при посадке в самолет в аэропорту) они совпали бы с векторами

$$\mathbf{d}_m : \quad \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n = \delta_{mn}, \quad (2.214)$$

заданными в основной системе отсчета. При этом

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{d}_1; \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{d}_2; \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{d}_3. \quad (2.215)$$

Введем материальные координаты x^1, x^2, x^3 , жестко связанные с самолетом. Тогда положение точки самолета с координатами x^m определяется радиус-вектором

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{d}_1 + x^2 \mathbf{d}_2 + x^3 \mathbf{d}_3 \equiv x^m \mathbf{d}_m. \quad (2.216)$$

Пока самолет стоит на месте, лабораторная система отсчета совпадает с основной системой отсчета, связанной с Землей. Допустим, что по салону летает муха. Пассажир, сидящий в салоне, будет отмечать ее движение вектором

$$\mathbf{r}_f(\mathbf{t}) = x_f^m(\mathbf{t}) \mathbf{d}_m, \quad (2.217)$$

где $x_f^m(\mathbf{t})$ — координаты мухи в момент времени \mathbf{t} .

В дальнейшем индекс f будем опускать и вместо (2.217) писать

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = x^m(\mathbf{t}) \mathbf{d}_m. \quad (2.218)$$

Надеемся, что читатель не спутает векторы (2.216) и (2.218). Однако начинающим лучше все-таки использовать более громоздкое, но более точное обозначение (2.217).

Пусть самолет приходит в движение и взлетает. Для пассажира ничего не изменится, поскольку и материальные векторы \overrightarrow{QA} , \overrightarrow{QB} , \overrightarrow{QC} (а следовательно, и векторы \mathbf{d}_m), и материальные координаты x^m для него останутся неизменными. Движение мухи пассажир будет по-прежнему фиксировать (измерять) с помощью вектора (2.217) или, что то же самое, (2.218). Однако для наблюдателя, неподвижного относительно основной системы отсчета, ситуация радикально изменится. Лабораторная система отсчета для этого наблюдателя, в отличие от пассажира самолета, уже движется. В частности, движутся точка Q и материальные векторы \overrightarrow{QA} , \overrightarrow{QB} , \overrightarrow{QC} . В то же время материальные координаты x^m остаются неизменными как для пассажира, так и для неподвижного наблюдателя.

Пусть материальные векторы \overrightarrow{QA} , \overrightarrow{QB} , \overrightarrow{QC} в момент времени \mathbf{t} в основной (“неподвижной”) системе отсчета занимают положения векторов

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{D}_1(\mathbf{t}); \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{D}_2(\mathbf{t}); \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{D}_3(\mathbf{t}). \quad (2.219)$$

Поэтому с точки зрения неподвижного наблюдателя положение мухи в основной системе отсчета задается вектором

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + x^m(\mathbf{t}) \mathbf{D}_m(\mathbf{t}). \quad (2.220)$$

Введем в рассмотрение тензор поворота⁶

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{D}_m(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{d}_m, \quad (2.221)$$

где по индексу \mathbf{m} подразумевается суммирование от 1 до 3.

Из (2.221) следует, что

$$\mathbf{D}_m(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{d}_m. \quad (2.222)$$

Подставляя (2.222) в (2.220), получаем

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \chi^m(\mathbf{t}) \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{d}_m = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \chi^m(\mathbf{t}) \mathbf{d}_m.$$

Вспоминая (2.218), окончательно получаем

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{t}). \quad (2.223)$$

Сравнивая выражение (2.223) с основным уравнением кинематики абсолютно твердого тела, видим их большое сходство, что, впрочем, следовало ожидать. Роль абсолютно твердого тела в (2.223) выполняет лабораторная система отсчета. Роль полюса выполняет начало \mathbf{Q} в лабораторной системе отсчета. Единственное различие состоит в том, что вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q$, который в основном уравнении кинематики абсолютно твердого тела определял отсчетное положение рассматриваемой точки \mathbf{A} , теперь определяет положение точки, движущейся относительно лабораторной системы отсчета. Аналогия будет видна еще лучше, если уравнение (2.223) переписать в виде

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{r}_Q), \quad (2.224)$$

где метка \mathbf{A} соответствует мухе.

Вектор $\mathbf{r}_A(\mathbf{t})$ определяет положение мухи с точки зрения наблюдателя, неподвижного относительно лабораторной системы отсчета, причем вектор \mathbf{r}_Q не зависит от времени. Вектор $\mathbf{R}_A(\mathbf{t})$ определяет положение той же самой мухи с точки зрения наблюдателя, неподвижного в основной системе отсчета. Подчеркнем, что упоминания о наблюдателях не влекут за собой никаких

⁶ Согласно формулам (1.117), (1.118) любой ортогональный тензор может быть представлен в форме

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}_m \otimes \mathbf{d}^m; \quad \mathbf{D}^m = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}^m,$$

где

$$\mathbf{D}_m \cdot \mathbf{D}^n = \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}^n = \delta_m^n; \quad \mathbf{D}_m \cdot \mathbf{D}_n = \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n.$$

Для ортонормированного базиса взаимный базис совпадает с основным, в результате чего получаются формулы (2.221), (2.222). (*Примеч. ред.*)

формальных следствий. Они важны только для правильной интерпретации. Все векторы, входящие в (2.223) или (2.224), определены в основной (неподвижной) системе отсчета. В дальнейшем строчными буквами будем обозначать величины, наблюдаемые пассажиром в лабораторной системе отсчета. Прописными буквами будем обозначать величины, воспринимаемые наблюдателем в основной системе отсчета.

Для вычисления скорости мухи нужно продифференцировать (2.223) по времени. В результате получим

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{v},$$

где

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (2.225)$$

Исключая из равенства (2.225) вектор $\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}$ с помощью (2.223), получаем

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.226)$$

В учебниках по теоретической механике формулу (2.226) обычно записывают в виде

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_e + \mathbf{V}_r, \quad (2.227)$$

где

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_Q + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q), \quad \mathbf{V}_r = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.228)$$

Вектор \mathbf{V}_e называется *переносной* скоростью, он характеризует скорость той точки лабораторной системы отсчета, в которой в данный момент времени находится муха. Вектор \mathbf{V}_r называется вектором *относительной* скорости и является скоростью мухи относительно лабораторной системы отсчета с точки зрения наблюдателя в основной системе отсчета.

Обратимся к вычислению ускорений. Для этого достаточно продифференцировать (2.226) по времени. Тогда получим

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_Q + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{V} - \mathbf{V}_Q) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{v}}.$$

Исключая отсюда вектор $\mathbf{V} - \mathbf{V}_Q$ с помощью равенства (2.226) и проводя перегруппировку слагаемых, получаем

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_Q + \mathbf{W} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}, \quad (2.229)$$

где

$$\mathbf{W} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.230)$$

Тензор \mathbf{W} называется *тензором угловых ускорений* лабораторной системы отсчета. Он совпадает с тензором угловых ускорений абсолютно твердого тела (см. формулу (2.183)). Вектор \mathbf{w} есть ускорение мухи относительно лабораторной системы отсчета с точки зрения пассажира самолета. Выражение (2.229) часто записывают в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_r, \quad (2.231)$$

где

$$\mathbf{W}_e = \mathbf{W}_Q + \mathbf{W} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q); \quad \mathbf{W}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}; \quad \mathbf{W}_r = \mathbf{P} \cdot \mathbf{w}. \quad (2.232)$$

Вектор \mathbf{W}_e называется *переносным* ускорением и выражает ускорение той точки лабораторной системы отсчета, в которой в данный момент времени находится муха. Вектор \mathbf{W}_c называется *ускорением Кориолиса*. Вектор \mathbf{W}_r называется *относительным* ускорением. В приложениях удобнее работать непосредственно с формулой (2.229).

Выше были рассмотрены сложные движения материальной точки. При этом сложным называлось движение, которое было композицией двух движений: движения материальной точки относительно лабораторной системы отсчета и движения самой лабораторной системы отсчета относительно основной, условно неподвижной, системы отсчета. Аналогичные построения нетрудно распространить на сложные движения абсолютно твердого тела.

Продолжим аналогию с полетом мухи (материальной точки) в салоне самолета. Только вместо мухи будем рассматривать шляпу, которой решили перебрасываться два чрезмерно любознательных пассажира, сидящих в разных концах салона, с целью исследования закономерностей ее полета. При этом их интересовали не только положения шляпы в полете, но и ее ориентация относительно салона самолета.

Лабораторную систему отсчета (ЛСО) жестко свяжем с салоном самолета. Выберем точку Q , фиксированную относительно самолета и тройку материальных векторов \overrightarrow{QA} , \overrightarrow{QB} , \overrightarrow{QC} , которые в отсчетном положении соответствуют векторам

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{d}_1; \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{d}_2; \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{d}_3; \quad \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_s = \delta_{ms}. \quad (2.233)$$

Векторы \mathbf{d}_m определены в основной системе отсчета. Таким образом, лабораторная система отсчета порождается репером

$$\{Q, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$$

и материальными координатами \mathbf{x}^m . Положение точки лабораторной системы отсчета с координатами \mathbf{x}^m определяется заданием вектора

$$\mathbf{x} = \chi^m \mathbf{d}_m. \quad (2.234)$$

Положение этой же точки лабораторной системы отсчета в основной системе отсчета в отсчетный момент времени определяется вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{x} = \mathbf{r}_Q + \chi^m \mathbf{d}_m. \quad (2.235)$$

Вернемся к лабораторной системе отсчета. Основная теорема кинематики абсолютно твердого тела полностью сохраняется в лабораторной системе отсчета. Поэтому

$$\mathbf{X}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{X}_S(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S), \quad (2.236)$$

где точка S есть произвольно выбираемая точка шляпы (полюс); точка A есть рассматриваемая точка шляпы; \mathbf{x}_A и \mathbf{x}_S суть векторы положения точек A и S в отсчетном положении в лабораторной системе отсчета; векторы \mathbf{X}_A и \mathbf{X}_S суть векторы положения точек A и S в актуальном положении в лабораторной системе отсчета; $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ есть тензор поворота шляпы в лабораторной системе отсчета.

Выражение (2.236) определяет движение точки A шляпы, наблюдаемое пассажиром самолета. В основной системе отсчета ситуация выглядит несколько иначе. Положение точки A в основной системе отсчета определяется заданием вектора

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{X}_A(\mathbf{t}), \quad (2.237)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ есть тензор поворота лабораторной системы отсчета в основной системе отсчета.

Аналогичное равенство можно записать для вектора положения полюса S :

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{X}_S(\mathbf{t}). \quad (2.238)$$

Из (2.237) и (2.238) следует равенство

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_S(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot [\mathbf{X}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{X}_S(\mathbf{t})], \quad (2.239)$$

которое, впрочем, можно было написать сразу на основе очевидного равенства

$$|\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_S(\mathbf{t})| = |\mathbf{X}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{X}_S(\mathbf{t})|.$$

Подставляя (2.236) в (2.239), получаем

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_S(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_S). \quad (2.240)$$

Используя (2.235) и (2.238), окончательно получаем

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{X}_S(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S). \quad (2.241)$$

Здесь величины $\mathbf{X}_S(\mathbf{t})$, $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_S$ и $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ фиксируются (измеряются) пассажиром самолета. Величины \mathbf{R}_Q и $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ фиксируются только наблюдателем, неподвижным в основной системе отсчета. По выражению (2.241) нетрудно найти скорости и ускорения точки A относительно основной системы отсчета. В (2.241) полный поворот шляпы выражается как композиция двух поворотов: поворота шляпы относительно лабораторной системы отсчета и дополнительного поворота вместе с лабораторной системой отсчета.

2.17. Относительные повороты

При решении некоторых прикладных задач необходимо использовать понятие поворота одного вращающегося тела относительно другого вращающегося тела. Несмотря на кажущуюся простоту этого вопроса, здесь необходимо соблюдать аккуратность в формулировках. Начнем с простого вопроса: чему равна скорость обратного поворота? Иногда встречается следующее утверждение: “Пусть $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ есть угловая скорость тела. Тогда очевидно, что угловая скорость обратного поворота равна $-\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ ”. Далее высказываются различные соображения в поддержку этого утверждения. Необходимо подчеркнуть, что в подобных вопросах разного рода рассуждения и аргументы неуместны. У нас есть определение угловой скорости. И ответ на поставленный вопрос должен быть получен из этого определения и никак иначе.

Итак, пусть $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ есть тензор поворота. Тогда тензор $\mathbf{P}^\Gamma(\mathbf{t})$ есть тензор обратного поворота. Угловая скорость обратного поворота должна определяться в соответствии с уравнением Пуассона:

$$\dot{\mathbf{P}}^\Gamma = \boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{P}^\Gamma, \quad (2.242)$$

где $\boldsymbol{\omega}_*$ есть искомая угловая скорость обратного поворота.

Транспонируя обе части уравнения (2.242), получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times (-\boldsymbol{\omega}_*) \Rightarrow \boldsymbol{\omega}_* = -\boldsymbol{\Omega}, \quad (2.243)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ есть правая угловая скорость исходного поворота, которая определяется в соответствии с уравнением Пуассона: $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}$.

Таким образом, угловая скорость обратного поворота равна правой угловой скорости исходного поворота, взятой с обратным знаком. С учетом соотношения между левой и правой угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}$, получаем

$$\boldsymbol{\omega}_* = -\mathbf{P}^\Gamma \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (2.244)$$

Утверждение о том что, $\boldsymbol{\omega}_* = -\boldsymbol{\omega}$, справедливо тогда и только тогда, когда вращение происходит вокруг фиксированной оси.

Обратимся к введению относительных поворотов. Пусть даны два абсолютно твердых тела. Выделим в одном из них материальные векторы \overrightarrow{QA} , \overrightarrow{QB} , \overrightarrow{QC} таким образом, чтобы в отсчетном положении выполнялись соотношения

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{d}_1; \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{d}_2; \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{d}_3; \quad \mathbf{d}_k \cdot \mathbf{d}_n = \delta_{kn}. \quad (2.245)$$

В актуальном положении имеем аналогичные соотношения:

$$\overrightarrow{QA} \sim \mathbf{D}_1(t); \quad \overrightarrow{QB} \sim \mathbf{D}_2(t); \quad \overrightarrow{QC} \sim \mathbf{D}_3(t); \quad \mathbf{D}_k(t) \cdot \mathbf{D}_n(t) = \delta_{kn}. \quad (2.246)$$

Для второго тела проводим аналогичные построения, но все вводимые величины снабжаем звездочками. Тензоры поворота рассматриваемых тел определим равенствами

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}_k(t) \otimes \mathbf{d}_k; \quad \mathbf{P}_*(t) = \mathbf{D}_k^*(t) \otimes \mathbf{d}_k^*. \quad (2.247)$$

В этих равенствах, как всегда, подразумевается суммирование от 1 до 3.

Определение. Поворотом тела 1 относительно тела 2 называется поворот, задаваемый тензором поворота

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{D}_k(t) \otimes \mathbf{D}_k^*(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_k(t) = \mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{D}_k^*(t). \quad (2.248)$$

Первое из этих равенств можно переписать в следующей форме:

$$\mathbf{Q}(t) = (\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_k) \otimes (\mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{d}_k^*) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{P}_*^T(t), \quad (2.249)$$

где тензор \mathbf{Q}_0 есть тензор начального поворота, переводящий отсчетное положение тела 2 в отсчетное положение тела 1:

$$\mathbf{Q}_0 = \mathbf{d}_k \otimes \mathbf{d}_k^*. \quad (2.250)$$

Можно выбрать отсчетные положения тел совпадающими. Тогда тензор начального поворота будет равен единичному тензору. Можно также, если это желательно, дать какое-либо другое определение относительного поворота. Важно только, чтобы это определение имело точную математическую формулировку, а не сводилось к чисто интуитивным соображениям. После того как дано определение относительного поворота, нетрудно вычислить относительную угловую скорость.

Определение. Относительной угловой скоростью называется угловая скорость относительного поворота (2.249).

Относительная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_Q$ вычисляется по (2.249) по стандартному правилу вычисления угловой скорости композиции поворотов:

$$\boldsymbol{\omega}_Q(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot (-\mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_*(t)) = \boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{Q}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_*(t). \quad (2.251)$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.243) для угловой скорости обратного поворота.

2.18. Замена систем отсчета

Система отсчета — это основополагающее понятие в физике. Без введения системы отсчета практически все понятия, вводимые в физике, теряют определенность и не могут использоваться в рациональной науке. Тем не менее именно это понятие излагается в литературе либо слишком расплывчато и неопределенно, либо (чаще всего) вообще не обсуждается.

Исходные представления о системе отсчета изложены в первой главе (см. раздел 1.2). Эти представления недостаточны для полного изложения механики, и они будут существенно дополнены в главе, посвященной формулировке фундаментальных законов механики. Собственно именно там и будет введено полное определение инерциальных систем отсчета, относительно которых формулируются фундаментальные законы механики. Однако некоторые дополнительные представления о системах отсчета можно ввести уже сейчас. Прежде всего это относится к замене системы отсчета.

Поскольку система отсчета вводится в достаточной мере произвольно, то любая физическая теория, претендующая на описание объективных закономерностей, должна быть инвариантна относительно замены одной системы отсчета любой другой системой отсчета. При этом необходимо указать точный математический и физический смысл понятия замены системы отсчета.

По определению и по способу введения система отсчета — это рукотворная конструкция, не существующая в Природе. Она необходима для того, чтобы мы были в состоянии писать какие бы то ни было уравнения без утраты их смысла. Системы отсчета не являются моделями “физического пространства”, но без них нельзя построить то, что мы называем физическим пространством.

В частности, математическое время, используемое при введении систем отсчета, не имеет никакого отношения к “реальному” времени, но может использоваться при введении понятия “реальное время”. Заметим, что математическое время нами еще не введено, и пока это понятие является сугубо интуитивным.

Определение. Телом отсчета называется репер

$$\{O, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\} \quad (2.252)$$

с присоединенным к нему множеством точек

$$\mathbf{r} = \chi^k \mathbf{d}_k = \chi^1 \mathbf{d}_1 + \chi^2 \mathbf{d}_2 + \chi^3 \mathbf{d}_3, \quad -\infty < \chi^k < \infty. \quad (2.253)$$

Смысл “векторов” \mathbf{d}_k разъяснен⁷ в разделе 1.2. Там же указано, что движение тела отсчета принципиально не определено, но движения других тел относительно тела отсчета определить можно. Напомним определение системы отсчета.

Определение. Тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.

Можно ввести сколь угодно много различных систем отсчета. Движения одного и того же тела относительно различных систем отсчета выглядят совершенно по-разному. Поэтому описания движений относительно выбранных систем отсчета не носят объективного характера.

Если какая-либо наука претендует на изучение объективной реальности, а рациональная механика является именно такой наукой, то при своем развитии она должна тем или иным способом избавиться от произвола, связанного с невозможностью определить собственное движение системы отсчета. В механике для этой цели используется специальный принцип, который называется принципом материальной объективности или принципом независимости от выбора системы отсчета. О самом этом принципе речь пойдет далее. Заметим только, что применение этого принципа требует умения пересчитывать характеристики, заданные в одной системе отсчета, в характеристики, определенные в другой системе отсчета. Иными словами, необходимо научиться производить замену системы отсчета.

Прежде всего следует отчетливо осознать, что разные системы отсчета — это разные миры, непосредственно между собой не взаимодействующие. Никакие операции между величинами, определенными в разных системах отсчета, невозможны.

Рассмотрим две системы отсчета: S -систему и S_* -систему. Пусть S -система отсчета определена репером (2.252) и координатами (2.253). В дополнение к этим соотношениям необходимо задать положительно определенную симмет-

⁷ В разделе 1.2 вместо репера $\{O, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ использовался репер $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, что по сути одно и то же. (Примеч. ред.)

ричную матрицу⁸:

$$\mathbf{g}_{mn} = \mathbf{d}_m \cdot \mathbf{d}_n = |\mathbf{d}_m| |\mathbf{d}_n| \cos \alpha_{mn}, \quad 0 \leq \alpha_{mn} < \pi, \quad (2.254)$$

где α_{mn} — углы между векторами \mathbf{d}_m и \mathbf{d}_n .

Диагональные компоненты матрицы \mathbf{g}_{mn} задают длины векторов \mathbf{d}_m :

$$|\mathbf{d}_1| = \sqrt{g_{11}}, \quad |\mathbf{d}_2| = \sqrt{g_{22}}, \quad |\mathbf{d}_3| = \sqrt{g_{33}}, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0.$$

Матрица \mathbf{g}_{mn} в значительной мере задается произвольно и определяет масштабы в \mathcal{S} -системе. В правильно построенной физической теории никакие физические законы не должны зависеть от выбора этих масштабов. Вторая система отсчета \mathcal{S}_* вводится совершенно аналогично. Величины, относящиеся к \mathcal{S}_* -системе, будем помечать звездочкой. Таким образом, \mathcal{S}_* -система определяется заданием репера

$$\{\mathbf{O}_*, \mathbf{d}_1^*, \mathbf{d}_2^*, \mathbf{d}_3^*\} \quad (2.255)$$

с присоединенным к нему множеством точек

$$\mathbf{r}_* = \chi_*^k \mathbf{d}_k^* = \chi_*^1 \mathbf{d}_1^* + \chi_*^2 \mathbf{d}_2^* + \chi_*^3 \mathbf{d}_3^*, \quad -\infty < \chi_*^k < \infty \quad (2.256)$$

и фундаментальной матрицей

$$\mathbf{g}_{mn}^* = \mathbf{d}_m^* \cdot \mathbf{d}_n^* = |\mathbf{d}_m^*| |\mathbf{d}_n^*| \cos \alpha_{mn}^*, \quad 0 \leq \alpha_{mn}^* < \pi. \quad (2.257)$$

Будем считать, что обе системы отсчета снабжены одинаковыми часами. Иными словами, преобразование времени пока рассматривать не будем. Как уже отмечалось, мы не в состоянии наблюдать “истинное” движение введенных систем отсчета. Однако движение \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы мы наблюдать можем. Возможно, конечно, и обратное: фиксация движения \mathcal{S} -системы относительно \mathcal{S}_* -системы.

Рассмотрим движущуюся материальную точку \mathbf{A} . Тогда ее движение в рассматриваемых системах отсчета определяется заданием векторов положения

$$\mathbf{R}(t) = \chi^k(t) \mathbf{d}_k, \quad \mathbf{R}_*(t) = \chi_*^k(t) \mathbf{d}_k^*. \quad (2.258)$$

Здесь координаты $\chi^k(t)$ и $\chi_*^k(t)$ являются координатами точки \mathbf{A} в соответствующих системах отсчета. Задача заключается в том, чтобы выяснить, как связаны между собой движения (2.258) точки \mathbf{A} . Проще всего определить движение начала \mathcal{S}_* -системы, т. е. точки \mathbf{O}_* , относительно \mathcal{S} -системы,

⁸ Эта матрица называется фундаментальной матрицей. Понятие фундаментальной матрицы введено в рассмотрение в разделе 1.6 (см. формулу (1.18)). В этом же разделе можно найти описание основных свойств фундаментальной матрицы. (*Примеч. ред.*)

поскольку его мы можем наблюдать непосредственно. Пусть это движение определяется заданием вектора

$$\mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{t}), \quad (2.259)$$

причем оба эти вектора определены в \mathbf{S} -системе. Примем, что в какой-то момент времени, принимаемый за начальный $\mathbf{t} = 0$, векторы \mathbf{d}_k^* совпадают с векторами $\tilde{\mathbf{d}}_k$ в \mathbf{S} -системе:

$$\mathbf{t} = 0: \quad \mathbf{d}_k^* \sim \tilde{\mathbf{d}}_k. \quad (2.260)$$

В актуальный момент времени \mathbf{t} получим аналогичное соотношение:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}: \quad \mathbf{d}_k^* \sim \tilde{\mathbf{D}}_k(\mathbf{t}), \quad (2.261)$$

где векторы $\tilde{\mathbf{D}}_k(\mathbf{t})$ также определены в \mathbf{S} -системе.

Поскольку тело отсчета является абсолютно твердым телом, то существует такой тензор поворота $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$, что справедливо равенство

$$\tilde{\mathbf{D}}_k(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{d}}_k \quad (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = 1). \quad (2.262)$$

Теперь движение точки \mathbf{A} относительно \mathbf{S} -системы можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \chi_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{D}}_k(\mathbf{t}). \quad (2.263)$$

С учетом (2.262) равенство (2.263) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\chi_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{d}}_k), \quad (2.264)$$

где вектор $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ и тензор поворота $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ определяют движение \mathbf{S}_* -системы относительно \mathbf{S} -системы.

Вектор $\chi_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{d}}_k$, входящий в (2.264), описывает в \mathbf{S} -системе движение материальной точки в точно таком виде, как оно происходит в \mathbf{S}_* -системе. Вводя в рассмотрение вектор

$$\tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{t}) = \chi_*^k(\mathbf{t}) \tilde{\mathbf{d}}_k, \quad (2.265)$$

равенство (2.264) переписываем в виде

$$\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{t}). \quad (2.266)$$

Если мы рассматриваем движение двух материальных точек \mathbf{A} и \mathbf{B} , то для каждой из них получим равенства, аналогичные (2.266):

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A(\mathbf{t}), \quad \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_B(\mathbf{t}). \quad (2.267)$$

Из этих равенств следует, что

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B). \quad (2.268)$$

Соотношения (2.266) и (2.268), устанавливая замены системы отсчета, играют важную роль в механике. Они накладывают существенные ограничения на вид используемых в теории физических характеристик. Как это проявляется конкретно, будет показано далее.

Сейчас необходимо обсудить одну особенность замены системы отсчета. В механике существенную роль играют так называемый принцип материальной объективности (или принцип независимости материальных характеристик от выбора системы отсчета) и принцип инвариантности материальных характеристик при наложении жестких движений. Кажется ясным, что замена системы отсчета и наложение жестких движений (движений системы как абсолютно твердого тела) должны приводить к совершенно идентичным результатам. Именно это и следует из сравнения формул (2.223) и (2.266), поскольку по существу между ними нет никакого различия. Тем не менее в литературе [14] между двумя указанными принципами имеется существенное различие. А именно, в то время как в равенстве (2.223) фигурирует тензор поворота, в равенстве (2.266) вместо тензора поворота $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ фигурирует просто ортогональный тензор, определитель которого может равняться как $+1$, так и -1 . Объяснялось это тем, что рассматриваемые системы отсчета могут иметь разные ориентации. Однако ранее было детально показано, что при замене системы отсчета ее ориентация вообще не участвует в рассмотрении, а в выражение (2.266) входит именно тензор поворота. Заменить тензор поворота ортогональным тензором общего вида категорически нельзя. Поэтому традиционную формулировку замены системы отсчета [14, с. 46] следует признать ошибочной.

Выражение (2.266) показывает, как преобразуются трансляционные движения при замене системы отсчета. Теперь мы должны установить, как меняются спинорные движения при замене системы отсчета. Пусть дано движущееся абсолютно твердое тело. Будем рассматривать движение этого тела в двух системах отсчета. В обеих системах отсчета справедлива основная теорема кинематики абсолютно твердого тела. Поэтому

$$\mathbf{R}_A^*(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q^*(\mathbf{t}) + \mathbf{P}_*(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_A^* - \mathbf{r}_Q^*) \quad (2.269)$$

в \mathbf{S}_* -системе и

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q) \quad (2.270)$$

в \mathcal{S} -системе. В выражениях (2.269), (2.270) полюс в теле обозначен буквой \mathcal{Q} . Условимся, что отсчетные положения тела в обеих системах согласованы между собой так, что при $\mathbf{t} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_Q = \tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q \sim \mathbf{r}_A^* - \mathbf{r}_Q^*. \quad (2.271)$$

Понятно, что в другие моменты времени отношение (2.271) уже несправедливо. В частности, забегая немного вперед, в момент времени $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ получим

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q) \sim \mathbf{r}_A^* - \mathbf{r}_Q^*, \quad (2.272)$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ — тензор поворота \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы.

Иными словами, при $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ вектор $\tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q$ уже не является “отпечатком” в \mathcal{S} -системе вектора $\mathbf{r}_A^* - \mathbf{r}_Q^*$, заданного в \mathcal{S}_* -системе.

Вообразим теперь, что \mathcal{S}_* -система неподвижна относительно \mathcal{S} -системы. Тогда “отпечаток” выражения (2.269) в \mathcal{S} -системе, очевидно, имеет вид⁹

$$\tilde{\mathbf{R}}_A(\mathbf{t}) = \tilde{\mathbf{R}}_Q(\mathbf{t}) + \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q), \quad (2.273)$$

где все величины с тильдами определены уже в \mathcal{S} -системе.

Ясно, что, например, вектор $\tilde{\mathbf{R}}_A(\mathbf{t})$ показывает положение точки A не относительно начала в \mathcal{S} -системе, а относительно положения точки O_* в \mathcal{S} -системе. Тензор $\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t})$ показывает поворот тела точно таким, каким его видит наблюдатель, неподвижный относительно \mathcal{S}_* -системы. Поскольку \mathcal{S}_* -система на самом деле движется относительно \mathcal{S} -системы, то ее движение накладывается на движение (2.273). Таким образом,

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A(\mathbf{t}), \quad (2.274)$$

где $\mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t})$ задает движение начала \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы, а тензор поворота $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ задает поворот \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы.

Подставляя (2.273) в (2.274) и учитывая (2.271), получаем

$$\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_A - \tilde{\mathbf{r}}_Q). \quad (2.275)$$

Сравнивая выражение (2.275) с (2.270), видим, что

$$\mathbf{R}_Q(\mathbf{t}) = \mathbf{R}_{O_*}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}_Q(\mathbf{t}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{t}). \quad (2.276)$$

Преобразованиями (2.275)–(2.276) определяется замена системы отсчета. Величины с тильдами в этих выражениях показывают в \mathcal{S} -системе точный слепок того, что видит наблюдатель, неподвижный относительно \mathcal{S}_* -системы.

⁹ Переход от (2.269) к (2.273) называется операцией переноса. (Примеч. ред.)

Важно отчетливо осознать, что замена системы отсчета принципиально не сводится к чисто математическим преобразованиям, но включает в себя неформализуемую операцию переноса объектов, выраженную, например, соответствием (2.271).

Итак, ранее были получены выражения (2.266) и (2.276), связывающие движения в разных системах отсчета. По ним простым дифференцированием можно установить формулы, связывающие скорости и ускорения одного и того же объекта в разных системах отсчета. Дифференцируя (2.266) по времени, получаем

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_O(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_O(\mathbf{t}) \times (\mathbf{R}(\mathbf{t}) - \mathbf{a}(\mathbf{t})) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{t}), \quad (2.277)$$

где $\mathbf{V}_O(\mathbf{t})$ и $\boldsymbol{\omega}_O(\mathbf{t})$ — трансляционная и угловая скорость S_* -системы относительно S -системы; $\mathbf{V}(\mathbf{t})$ — скорость материальной точки в S_* -системе, перенесенная в S -систему.

Дифференцируя (2.277) по времени, находим вектор ускорения

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_O + \dot{\boldsymbol{\omega}}_O \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{a}) + 2\boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{W}}, \quad (2.278)$$

где

$$\mathbf{W} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_O \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_O.$$

Все эти выражения уже хорошо известны и не требуют дополнительных комментариев. Аналогичные рассуждения можно провести и для движений твердого тела (2.269) и (2.270). Для последнего необходимо иметь в виду формулы (2.276). Дифференцируя (2.269) по времени, получаем уравнение Эйлера для S_* -системы. Это уравнение можно записать в двух почти эквивалентных формах. Одна из них представлена с помощью тензора спина:

$$\mathbf{V}_A^*(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_Q^*(\mathbf{t}) + \mathbf{S}_*(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{R}_A^* - \mathbf{R}_Q^*), \quad \mathbf{S}_* = \dot{\mathbf{P}}_* \cdot \mathbf{P}_*^T. \quad (2.279)$$

Другая представлена с помощью вектора угловой скорости:

$$\mathbf{V}_A^*(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_Q^*(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_*(\mathbf{t}) \times (\mathbf{R}_A^*(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_Q^*(\mathbf{t})). \quad (2.280)$$

Существенное различие между (2.279) и (2.280) заключается в том, что при получении (2.279) ориентация S_* -системы не имеет значения, а при переходе от тензора спина к вектору угловой скорости, т. е. при переходе к выражению (2.280), ориентация S_* -системы по необходимости принимается во внимание. Сначала мы воспользуемся выражением (2.279), не требующим

понятия ориентации системы отсчета. При переносе (2.279) в \mathcal{S} -систему необходимо мысленно считать, что обе системы отсчета неподвижны друг относительно друга. Тогда в \mathcal{S} -системе получим

$$\tilde{\mathbf{V}}_A(t) = \tilde{\mathbf{V}}_Q(t) + \tilde{\mathbf{S}}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_A(t) - \tilde{\mathbf{R}}_Q(t)), \quad \tilde{\mathbf{S}} = \dot{\tilde{\mathbf{P}}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T. \quad (2.281)$$

где $\tilde{\mathbf{P}}(t)$ имеет тот же смысл, что и в представлении (2.273).

Выражение (2.281) изображает в \mathcal{S} -системе точно такую же ситуацию, какую видит наблюдатель, неподвижный в \mathcal{S}_* -системе.

Обратимся к рассмотрению движения абсолютно твердого тела в \mathcal{S} -системе. Дифференцируя (2.270) по времени, получаем

$$\mathbf{V}_A(t) = \mathbf{V}_Q(t) + \mathbf{S}(t) \cdot (\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_Q(t)), \quad \mathbf{S} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T. \quad (2.282)$$

Учтем теперь соотношения (2.276). Тогда получим

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{V}_O + \mathbf{S}_O \cdot (\mathbf{R}_Q - \mathbf{R}_{O_*}) + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_Q, \quad \mathbf{S}_Q = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (2.283)$$

Дифференцируя второе из соотношений (2.276) и переходя к тензорам спина, получаем

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{P}}} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{P}}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}^T \cdot \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{S}_Q \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \tilde{\mathbf{P}}.$$

Умножая это уравнение скалярно на \mathbf{P}^T справа, получаем формулу для преобразования спина при замене системы отсчета:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}_O(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\mathbf{S}}(t) \cdot \mathbf{Q}^T(t), \quad (2.284)$$

где \mathbf{S}_Q — тензор спина \mathcal{S}_* -системы относительно \mathcal{S} -системы.

Сравнивая (2.276) и (2.284), видим, что повороты мультипликативны, а спины аддитивны. Теперь уже нетрудно установить закон преобразования угловой скорости при замене системы отсчета. По определению угловой скорости как сопутствующего вектора тензора спина

$$\mathbf{S}_O = \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{E}, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}. \quad (2.285)$$

Подставляя выражения (2.285) в (2.284) и учитывая тождество

$$\mathbf{Q} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}) \times \mathbf{E},$$

получаем

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_O(t) + \mathbf{Q}(t) \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}(t). \quad (2.286)$$

При принятом способе изложения ориентация системы отсчета нам понадобилась только в \mathcal{S} -системе, причем ориентация \mathcal{S}_* -системы не имеет значения. Если бы мы переносили равенство (2.280) из \mathcal{S}_* -системы в \mathcal{S} -систему, то нам пришлось бы учитывать ориентацию обеих систем. В результате, конечно, вновь получили бы (2.286).

Заметим, что до сих пор мы не ограничивали класса допустимых систем отсчета. Для инерциальных систем отсчета будут справедливы ограничения:

$$\mathbf{V}_O(t) = \text{const}, \quad \mathbf{Q}(t) = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_O = \mathbf{0}. \quad (2.287)$$

При этом, например, выражение (2.277) принимает вид

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_O + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(t) = \dot{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{W}}(t). \quad (2.288)$$

Каким образом и для каких целей используются замены систем отсчета в механике, будет кратко обсуждено в следующем разделе.

2.19. Принцип материальной объективности

В основе всей рациональной механики лежит идея об объективном, т. е. не зависящем от нашего воображения, существовании реального мира. Целью рациональной механики является изучение законов, управляющих поведением реальных объектов. В кажущимся противоречии с этим утверждением находится тот факт, что изложение механики мы начинаем с введения систем отсчета, являющихся плодом нашего воображения и не существующих в Природе. Использование систем отсчета аналогично применению лесов при возведении зданий. Леса используются при строительстве, но по его завершении они убираются. В рациональной механике мы вводим в рассмотрение системы отсчета, но наряду с ними вводится специальный принцип, называется принципом материальной объективности, суть которого заключается в требовании, чтобы в окончательных построениях фигурировали только объективные характеристики, не зависящие от выбора системы отсчета.

Определение. Скаляр \mathbf{a} называется объективным, если для произвольно взятых двух систем отсчета, справедливо равенство

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}, \quad \tilde{\mathbf{a}} \sim \mathbf{a}_*, \quad (2.289)$$

где \mathbf{a} и \mathbf{a}_* — значения рассматриваемого скаляра в \mathcal{S} -системе и \mathcal{S}_* -системе соответственно.

Хорошо знакомым примером объективного скаляра является масса тела. Менее знакомым, но не менее важным, примером объективного скаляра является внутренняя энергия тела. Сами эти понятия будут введены позднее. Сейчас мы просто собираемся показать, как работает принцип материальной объективности и к каким следствиям это приводит. Если принять, что масса тела m является объективным скаляром, то она не может зависеть от скорости тела, и это уже теорема, т. е. строго доказываемый на основе материальной объективности факт. Поэтому часто принимаемое в физике утверждение об известной зависимости массы от скорости находится в резком противоречии с принципом материальной объективности. Следует ли отсюда, что нужно отказаться от принципа материальной объективности? Этот вопрос сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Не вдаваясь в детали, просто отмечаем, что отказ от принципа материальной объективности равносителен отказу от признания существования объективных закономерностей природных явлений. Именно так и поступают в современной теоретической физике. В рациональной механике любое нарушение принципа материальной объективности рассматривается как грубейшая ошибка и считается совершенно недопустимым. Хотя сам термин “принцип материальной объективности” возник в механике всего несколько десятилетий тому назад, но на интуитивном уровне этот принцип используется по крайней мере со времен Архимеда. Само собой разумеется, что строгое выполнение принципа материальной объективности является обязательным требованием во всей этой книге. Следует, однако, иметь в виду, что изложенное вовсе не означает, что в механике не используются необъективные характеристики. Например, широко используется понятие кинетической энергии, являющееся примером необъективного скаляра, т. е. кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета. Принцип материальной объективности просто утверждает, что сама по себе кинетическая энергия не имеет объективного характера, а потому в физические законы она может входить только специальным образом, чтобы физический закон отражал бы объективную реальность.

Определение. Вектор \mathbf{a} называется объективным, если при замене системы отсчета он меняется по закону

$$\mathbf{a}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t}), \quad \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) \sim \mathbf{a}_*(\mathbf{t}), \quad (2.290)$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{t})$ и $\mathbf{a}_*(\mathbf{t})$ — значения векторов \mathbf{a} в S -системе и S_* -системе, соответственно.

Например, вектор положения частицы A необъективен, как это видно из (2.267). Напротив, вектор положения частицы A относительно частицы B

объективен, как это видно из (2.268). Вектор скорости частицы A необъективен. Действительно, из (2.267) следует, что

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) = \mathbf{V}_0(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{t}) \times (\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{a}(\mathbf{t})) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \tilde{\mathbf{V}}_A(\mathbf{t}). \quad (2.291)$$

Сравнивая это выражение с (2.290), видим, что вектор $\mathbf{V}_A(\mathbf{t})$ необъективен. Отсюда следует, что сам по себе вектор скорости не может входить ни в один физический закон, используемый в рациональной механике. Из (2.291) видим, что и вектор относительной скорости необъективен, поскольку

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{V}_B(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{t}) \times (\mathbf{R}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_B(\mathbf{t})) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{V}}_A(\mathbf{t}) - \tilde{\mathbf{V}}_B(\mathbf{t})). \quad (2.292)$$

Здесь мы должны уточнить понятие принципа материальной объективности. На самом деле этот принцип используется в механике в двух, притом не равносильных, формах. Различие заключается в допускаемых к сравнению системах отсчета. Обычно в формулировке принципа материальной объективности к сравнению допускаются все мыслимые системы отсчета. Однако при этом нельзя требовать, чтобы все физические законы удовлетворяли этому принципу. Строго говоря, принцип материальной объективности в такой расширенной версии вообще не является обязательным в рациональной механике. Тем не менее для некоторых величин он все же должен выполняться. Строго обязательным для механики является такая формулировка принципа материальной объективности, при которой к сравнению допускаются только инерциальные системы отсчета. В этом случае выполняются ограничения (2.287). Тогда вместо, например, (2.292) получим

$$\mathbf{V}_A(\mathbf{t}) - \mathbf{V}_B(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\tilde{\mathbf{V}}_A(\mathbf{t}) - \tilde{\mathbf{V}}_B(\mathbf{t})), \quad (2.293)$$

т. е. в этом случае вектор относительной скорости уже объективен и потому может входить в формулировки физических законов.

Формулировку принципа материальной объективности, при которой к сравнению допускаются любые системы отсчета, будем называть расширенным принципом материальной объективности. Если к сравнению допускаются только инерциальные системы отсчета, то будем говорить о строгом принципе материальной объективности.

Понятно, что если какая-либо величина (или физический закон) удовлетворяет расширенному принципу объективности, то она заведомо удовлетворяет и строгому принципу объективности. Обратное в общем случае не имеет места.

Для иллюстрации покажем несколько примеров применения принципа материальной объективности, который будем использовать в обеих формулировках. В качестве первого примера рассмотрим понятие массы. Допустим, что

масса материальной точки зависит от ее положения в системе отсчета и скорости, т. е.

$$\mathbf{m} = f(\mathbf{R}(t), \dot{\mathbf{R}}(t)); \quad \mathbf{m}_* = f_*(\mathbf{R}_*(t), \dot{\mathbf{R}}_*(t)), \quad (2.294)$$

где использованы выражения для массы в двух системах отсчета.

При применении принципа материальной объективности необходимо различать значения функции и символы отображения, т. е. в (2.294) не следует писать $\mathbf{m}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$, как это часто делают для упрощения записи. Начнем применять принцип объективности. Прежде всего соотношение (2.294) выражает некое физическое утверждение или, если угодно, физический закон. В данном случае этот закон устанавливает соответствие между числом, называемым массой материальной точки, и движениями материальной точки относительно выбранной системы отсчета. Обсуждаемое соответствие не должно зависеть от выбора системы отсчета. Необходимым, но не достаточным условием этого является утверждение

$$\mathbf{m} = f(\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t)); \quad \mathbf{m}_* = f(\mathbf{R}_*(t), \mathbf{V}_*(t)). \quad (2.295)$$

Различие между (2.294) и (2.295) в том, что в (2.295) использовано *одно и то же отображение в обеих системах отсчета*. На втором шаге мы должны перенести второе из соотношений в \mathcal{S} -систему. Тогда получим

$$\mathbf{m} = f(\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t)); \quad \tilde{\mathbf{m}} = f(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (2.296)$$

Смысл операции переноса указан в предыдущем разделе¹⁰. Наконец, третий и последний шаг, вытекающий из принципа объективности (2.289), ведет к следующему функциональному уравнению:

$$f(\mathbf{R}(t), \mathbf{V}(t)) = f(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (2.297)$$

Теперь мы должны использовать замену системы отсчета. Сначала воспользуемся строгим принципом объективности, в котором к рассмотрению допускаются только инерциальные системы отсчета. Тогда из (2.274) и (2.288) следует

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(t), \quad (2.298)$$

где \mathbf{a} , \mathbf{V}_0 , \mathbf{Q} не зависят от времени, а в остальном произвольны.

Теперь (2.297) принимает вид

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t), \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(t)) = f(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (2.299)$$

¹⁰ См. формулы (2.269)–(2.273) и связанные с ними рассуждения. (*Примеч. ред.*)

Таким образом, отображение f ни в коем случае не может быть произвольным, а должно удовлетворять (2.299) для любых постоянных векторов \mathbf{a} и \mathbf{V}_0 и любого тензора поворота \mathbf{Q} . Покажем технику, позволяющую рассматривать функциональные уравнения типа (2.299). Центральная идея заключается в следующем. Уравнение (2.299) справедливо для любой пары систем отсчета. Рассмотрим теперь непрерывное семейство систем отсчета, т. е. вместо одной \mathcal{S}_* -системы рассмотрим семейство систем отсчета такое, что все системы отсчета отличаются друг от друга только сдвигом начала отсчета, т. е. для них

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau), \quad \mathbf{V}_0 = \text{const}(\tau), \quad \mathbf{Q} = \text{const}(\tau). \quad (2.300)$$

Здесь вектор \mathbf{V}_0 и тензор поворота \mathbf{Q} одинаковы для всего рассматриваемого семейства, характеризуемого параметром τ . Для семейства (2.300) уравнение (2.299) принимает вид

$$f(\mathbf{a}(\tau) + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) = f(\tilde{\mathbf{R}}(t), \tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (2.301)$$

Левая часть равенства (2.301) зависит от параметра семейства τ , а правая часть — не зависит. При этом от τ зависит только первый векторный аргумент отображения f . Дифференцируя (2.301) по τ , получаем¹¹

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{a}(\tau) + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}(t). \quad (2.302)$$

Здесь в правой части стоит нуль, так как правая часть (2.301) не зависит от τ . Примем теперь для $\mathbf{a}(\tau)$ представление

$$\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{a}_0 + \tau \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{b}, \quad (2.303)$$

где \mathbf{a}_0 и \mathbf{b} — произвольные постоянные векторы.

Полагая в (2.302) $\tau = 0$, получаем

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}_0} \cdot \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{a}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}. \quad (2.304)$$

Заметим теперь, что равенство (2.304) должно выполняться для любого вектора \mathbf{b} , причем $\partial f / \partial \mathbf{x}_0$ от вектора \mathbf{b} не зависит. Поэтому (2.304) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}})}{\partial \mathbf{x}_0} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}_0, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}) = \psi(\mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}).$$

¹¹ О дифференцировании скалярной функции по векторному аргументу — см. раздел 1.7. (*Примеч. ред.*)

Итак, масса не может зависеть от вектора положения, но зависимость от вектора скорости все еще не исключена. С учетом уже доказанного функциональное уравнение (2.301) принимает вид

$$\psi(\mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}(t)) = \psi(\tilde{\mathbf{V}}(t)). \quad (2.305)$$

Равенство (2.305) должно выполняться для любого постоянного вектора \mathbf{V}_0 и любого постоянного тензора поворота \mathbf{Q} . Вновь вводя в рассмотрение семейство систем отсчета и проводя выкладки, аналогичные рассмотренным ранее, получаем, что (2.305) справедливо только тогда, когда функция ψ не зависит от векторного аргумента.

Таким образом, использование строгого принципа объективности привело к заключению, что масса тела не зависит от его движения. В этом случае расширенный принцип объективности выполняется автоматически. Так бывает далеко не всегда.

Рассмотрим еще один пример объективного скаляра, а именно рассмотрим внутреннюю энергию системы двух материальных точек. Поскольку понятие внутренней энергии нами еще не вводилось, этот пример мы приводим с целью показать технологию использования принципа объективности на формальном уровне. Внутренняя энергия системы двух материальных точек — это скалярная функция, значениями которой являются объективные скаляры. Внутренняя энергия может зависеть от положений материальных точек и их скоростей. Запишем внутреннюю энергию в двух системах отсчета:

$$\mathcal{U} = f(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B), \quad \mathcal{U}_* = f_*(\mathbf{R}_A^*, \mathbf{R}_B^*, \mathbf{V}_A^*, \mathbf{V}_B^*). \quad (2.306)$$

Проводя те же рассуждения, что и при переходе от соотношений (2.294) к (2.296), получаем

$$\mathcal{U} = f(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B), \quad \tilde{\mathcal{U}} = f(\tilde{\mathbf{R}}_A, \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A, \tilde{\mathbf{V}}_B). \quad (2.307)$$

Требую, чтобы внутренняя энергия была объективным скаляром, приходим к функциональному уравнению:

$$f(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B) = f(\tilde{\mathbf{R}}_A, \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A, \tilde{\mathbf{V}}_B). \quad (2.308)$$

Потребуем, чтобы внутренняя энергия удовлетворяла строгому принципу объективности. Это означает, что векторы $\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B$ связаны с аналогичными величинами с тильдами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A(t) &= \mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A, & \mathbf{V}_A(t) &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_A(t); \\ \mathbf{R}_B(t) &= \mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_B, & \mathbf{V}_B(t) &= \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_B(t). \end{aligned} \quad (2.309)$$

Здесь векторы \mathbf{a} , \mathbf{V}_0 и тензор поворота \mathbf{Q} не зависят от времени. Подставляя (2.309) в (2.308), получаем следующее функциональное уравнение:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A, \mathbf{a} + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_B, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_A, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_B) = \\ = f(\tilde{\mathbf{R}}_A, \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A, \tilde{\mathbf{V}}_B). \end{aligned} \quad (2.310)$$

Рассмотрим семейство систем отсчета, различающихся только векторами \mathbf{a} , т. е. положениями их начал отсчета в \mathcal{S} -системе. Примем, что это семейство характеризуется параметром τ так, что

$$\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{a}_0 + \tau \mathbf{b}, \quad (2.311)$$

где \mathbf{a}_0 и \mathbf{b} — произвольные векторы, не зависящие от τ .

Подставляя (2.311) в (2.310) и дифференцируя обе части получившегося равенства по τ , получаем

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_A} \cdot \frac{d\mathbf{R}_A}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_B} \cdot \frac{d\mathbf{R}_B}{d\tau} = 0. \quad (2.312)$$

Учтем, что в выражениях (2.309) для \mathbf{R}_A и \mathbf{R}_B от параметра τ зависит только вектор \mathbf{a} (см. формулу (2.311)), а следовательно,

$$\frac{d\mathbf{R}_A}{d\tau} = \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{R}_B}{d\tau} = \mathbf{b},$$

и перепишем равенство (2.312) в виде

$$\frac{df}{d\tau} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_A} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_B} \right) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Полагая здесь $\tau = 0$, получаем

$$\left[\frac{\partial f(\mathbf{R}_A^0, \mathbf{R}_B^0, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B)}{\partial \mathbf{R}_A^0} + \frac{\partial f(\mathbf{R}_A^0, \mathbf{R}_B^0, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B)}{\partial \mathbf{R}_B^0} \right] \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (2.313)$$

где

$$\mathbf{R}_A^0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_A, \quad \mathbf{R}_B^0 = \mathbf{a}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_B.$$

Равенство (2.313) должно выполняться для любых векторов \mathbf{b} , причем выражение, стоящее в квадратных скобках, от \mathbf{b} не зависит. Это возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_A} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{R}_B} = \mathbf{0}, \quad (2.314)$$

где нули у векторных аргументов опущены.

Получили, что функция f должна удовлетворять уравнению в частных производных первого порядка. Теория таких уравнений хорошо разработана (см. [29]). Общее решение уравнения (2.314) имеет вид

$$f(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B) = \psi_1(\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B), \quad (2.315)$$

т. е. вместо функции четырех векторных аргументов получили функцию трех векторных аргументов.

Подставляя (2.315) в (2.310), получаем уравнение для функции ψ_1 :

$$\begin{aligned} \psi_1 \left(\mathbf{Q} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B), \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_A, \mathbf{V}_0 + \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{V}}_B \right) = \\ = \psi_1(\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A, \tilde{\mathbf{V}}_B). \end{aligned} \quad (2.316)$$

Равенство (2.316) должно выполняться для любых векторов \mathbf{V}_0 . Повторяя ту же процедуру, что и для вектора \mathbf{a} , получаем, что (2.316) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\psi_1(\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B) = \psi_2(\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B, \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B), \quad (2.317)$$

причем функция двух векторных аргументов ψ_2 должна удовлетворять уравнению

$$\psi_2(\mathbf{Q} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B), \mathbf{Q} \cdot (\tilde{\mathbf{V}}_A - \tilde{\mathbf{V}}_B)) = \psi_2(\tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B, \tilde{\mathbf{V}}_A - \tilde{\mathbf{V}}_B). \quad (2.318)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{R}}_A - \tilde{\mathbf{R}}_B, \quad \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{V}}_A - \tilde{\mathbf{V}}_B, \quad \mathbf{x}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{y}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}. \quad (2.319)$$

В этих обозначениях функциональное уравнение (2.318) принимает вид

$$\psi_2(\mathbf{x}_*, \mathbf{y}_*) = \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.320)$$

Рассмотрим непрерывное семейство систем отсчета, таких, что они различаются тензорами поворота $\mathbf{Q}(\tau)$, где τ — параметр семейства. Тогда переменные \mathbf{x}_* и \mathbf{y}_* зависят от τ , а переменные \mathbf{x} , \mathbf{y} не зависят. Выберем упомянутое семейство систем отсчета так, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{d\mathbf{Q}(\tau)}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{Q}(\tau), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}. \quad (2.321)$$

Тогда при $\tau = 0$ переменные \mathbf{x}_* и \mathbf{y}_* совпадают с переменными \mathbf{x} и \mathbf{y} , соответственно. Дифференцируя (2.320) по τ и учитывая, что правая часть (2.320) от τ не зависит, получаем

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}_*} \cdot \frac{d\mathbf{x}_*}{d\tau} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}_*} \cdot \frac{d\mathbf{y}_*}{d\tau} = 0. \quad (2.322)$$

Исключим отсюда производные от \mathbf{x}_* и \mathbf{y}_* по τ с помощью равенств

$$\frac{d\mathbf{x}_*}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{x}_*, \quad \frac{d\mathbf{y}_*}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{y}_*$$

и перейдем к пределу при $\tau \rightarrow 0$. В результате вместо (2.322) получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}) + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{y}) = 0, \quad (2.323)$$

или в другой форме

$$\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} \times \mathbf{y} \right) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = 0. \quad (2.324)$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}_0$ произволен. Поэтому выражение, стоящее в скобках в (2.324), должно равняться нулю:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (2.325)$$

Таким образом, функция ψ_2 двух векторных аргументов или шести скалярных аргументов удовлетворяет трем скалярным уравнениям в частных производных. Это означает, что на самом деле функция ψ_2 есть функция не более чем трех скалярных аргументов. Покажем технику нахождения этих аргументов. Для этого будем рассматривать уравнение (2.323). Составим характеристическую систему [29, 30] для уравнения (2.323):

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{y}. \quad (2.326)$$

Функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется интегралом системы (2.326), если она сохраняет постоянное значение на решениях этой системы:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{const.}$$

Дифференцируя это соотношение и учитывая, что векторы \mathbf{x} , \mathbf{y} удовлетворяют (2.326), получаем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{y}) = 0.$$

Сравнивая это уравнение с (2.323), видим, что функция $\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является интегралом системы (2.326). Система (2.326) имеет шестой порядок и допускает не более пяти функционально независимых интегралов. Любой другой интеграл системы (2.326) является некоторой функцией упомянутых функционально независимых интегралов. Для системы (2.326) нетрудно указать пять

функционально независимых интегралов. Умножая первое из уравнений системы (2.326) скалярно на \mathbf{x} , получаем первый интеграл:

$$\mathbf{x} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \text{const.}$$

Аналогично получается интеграл $\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \text{const.}$ Если умножить первое уравнение системы (2.326) скалярно на \mathbf{y} , а второе уравнение — на \mathbf{x} , затем сложить получившиеся уравнения, то получим третий интеграл:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \text{const.}$$

Умножив оба уравнения системы (2.326) скалярно на $\boldsymbol{\omega}_0$, получим еще два интеграла:

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \text{const}, \quad \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \text{const.}$$

Итак, нашли пять функционально независимых интегралов

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (2.327)$$

Только три первых интеграла из этого списка не зависят от вектора $\boldsymbol{\omega}_0$, т. е. не зависят от выбора системы отсчета. Поэтому функция ψ_2 зависит только от этих трех интегралов:

$$\psi_2 = \varphi(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Можно убедиться в справедливости последнего утверждения и совершенно формально. Функция ψ_2 , являясь интегралом системы (2.326), может быть выражена через интегралы (2.327):

$$\psi_2 = \psi_3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0). \quad (2.328)$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} &= \frac{\partial \psi_3}{\partial(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})} 2\mathbf{x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} \mathbf{y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} \boldsymbol{\omega}_0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial \psi_3}{\partial(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})} \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})} 2\mathbf{y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial(\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} \boldsymbol{\omega}_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в уравнение (2.325), получаем

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{x}} \times \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{y}} \times \mathbf{y} = \frac{\partial \psi_3}{\partial(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x} + \frac{\partial \psi_3}{\partial(\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Это равенство выполняется для любых векторов $\boldsymbol{\omega}_0$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} = 0, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial (\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)} = 0,$$

т. е. функция ψ_2 не зависит от интегралов $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}_0$ и $\mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\omega}_0$. Окончательно мы получили, что внутренняя энергия системы двух материальных точек является функцией трех скалярных аргументов:

$$\mathcal{U} = f(|\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B|^2, (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B) \cdot (\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B), |\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B|^2). \quad (2.329)$$

Дальнейшего упрощения на основе строгого принципа объективности добиться невозможно. Если же потребовать выполнения расширенного принципа материальной объективности, то можно доказать более сильное утверждение:

$$\mathcal{U} = f(|\mathbf{R}_A(t) - \mathbf{R}_B(t)|^2). \quad (2.330)$$

Именно так обычно и поступают в механике. Хотя это и весьма правдоподобно, но не исключено, что в некоторых случаях (весьма нетрадиционных) все-таки необходимо использовать выражение (2.329).

Принцип материальной объективности будет широко использоваться в последующем изложении. Здесь мы хотели только показать характерные особенности применения этого принципа. Введем еще понятие объективного тензора второго ранга.

Определение. Тензор второго ранга \mathbf{A} объективен, если при замене системы отсчета он преобразуется по закону

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \tilde{\mathbf{A}} \sim \mathbf{A}_*, \quad (2.331)$$

где \mathbf{Q} — тензор поворота системы S_* относительно S -системы.

Примером объективного тензора второго ранга является тензор инерции абсолютно твердого тела.

Глава 3

Фундаментальные законы рациональной механики

3.1. Пространство, время, движения

3.1.1. Тела отсчета. Время. Системы отсчета

Наиболее глубинными представлениями в механике являются представления о пространстве и времени. Долгое время эти представления опирались на чисто интуитивное восприятие этих понятий. В частности, общеизвестны ньютоновские определения абсолютного пространства и времени [31]. Основным в них является постулат об объективном характере пространства и времени. Однако использовать ньютоновские определения в рациональных построениях невозможно, ибо в однородном, лишенном всяких меток пространстве невозможно обнаружить движение, равно как и невозможно дать рациональное истолкование равномерному ходу времени. Все это подробно объясняется самим Ньютоном.

По этой причине в рациональной механике вводятся некие рукотворные конструкции, называемые телами отсчета. Для этого в рассмотрение вводится репер с вершиной, обозначаемой меткой O , и тремя некопланарными “векторами” e_k , т. е. тремя стрелками, сделанными, например, из дерева. Этот репер никак не привязан к неподвижному абсолютному пространству, так как у нас нет возможности сделать это. “Векторы” e_k нельзя назвать настоящими векторами, ибо невозможно определить их направления в абсолютном (неподвижном) пространстве. Более того, невозможно сказать, остаются ли эти направления фиксированными относительно абсолютного пространства или они как-то меняются, но существование “векторов” e_k позволяет ввести в рассмотрение истинные векторы, направление которых относительно “векторов” e_k определяется однозначно.

Итак, ввели репер $\{O, e_1, e_2, e_3\}$. Возьмем дополнительно три одномерных

множества $-\infty \leq x^k \leq \infty$ ($k = 1, 2, 3$), где числа x^k безразмерны, и введем вектор положения

$$\mathbf{r} = x^k \mathbf{e}_k \equiv x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3, \quad -\infty \leq x^k \leq \infty. \quad (3.1)$$

Будем считать, что вектор \mathbf{r} , отвечающий неким фиксированным значениям чисел x^k , определяет точку, фиксированную относительно репера $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_k\}$. Определим скалярное произведение “векторов” \mathbf{e}_k :

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv |\mathbf{e}_m| |\mathbf{e}_n| \cos(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n), \quad (3.2)$$

где числа g_{mn} определены, если мы умеем измерять длины и углы, т. е. имеем соответствующие инструменты.

Числа g_{mn} образуют симметричную положительно определенную матрицу¹. В общем случае числа g_{mn} определяют масштабы длин и углы в теле отсчета. Если числа g_{mn} заданы, то можно определить расстояние между точками \mathbf{A} и \mathbf{B} по формуле

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 = g_{mn} (x_A^m - x_B^m) (x_A^n - x_B^n). \quad (3.3)$$

Числа x_A^k называются координатами точки \mathbf{A} . Вершине репера отвечают координаты $x_A^k = 0$.

Определение. Репер $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_k\}$ с присоединенным к нему множеством точек (3.1) называется телом отсчета.

Сам репер $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_k\}$ называется отсчетным, а числа x_A^k — отсчетными координатами. Ни отсчетный репер, ни отсчетные координаты никогда не меняются, ибо именно они и порождают тело отсчета. Конечно, в теле отсчета можно вводить сколько угодно других систем координат, но это будет рассмотрено далее.

Здесь важно подчеркнуть, что тензоры любого ранга лишены всякого смысла вне тела отсчета и никакие операции между тензорами, заданными в разных телах отсчета, невозможны.

Легко понять, что тело отсчета — это трехмерное евклидово пространство. Невозможно обнаружить движение тела отсчета относительно воображаемого (или истинно существующего) абсолютного пространства, но движение разных тел отсчета друг относительно друга обнаружить можно. Легко обнаружить и движение какого-либо тела относительно тела отсчета. Говоря о

¹ Матрица, составленная из чисел g_{mn} , называется фундаментальной матрицей. Описание основных свойств фундаментальной матрицы можно найти в разделе 1.6. Фундаментальная матрица упоминается также в разделе 2.18, где обсуждается замена системы отсчета. (Примеч. ред.)

движении, мы подразумеваем, что вектор положения материальной точки в данном теле отсчета определяется как функция независимой переменной t , называемой временем. Для измерения времени используется прибор, называемый часами.

Понятие времени — одно из наиболее трудных в науках о Природе. И. Ньютон писал [32, с. 45]: «Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово “время” . . . под ним нужно понимать не время в его формальном значении, а только ту *отличную от времени* величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время». Принять это высказывание можно только на глубоко интуитивном уровне, но никак не на уровне логического мышления. Поэтому к концу XIX в. в механике утвердилась точка зрения, зафиксированная Л. Больцманом: “Взгляд на хронометр дает нам значение той независимой переменной, которую мы называли временем” [33, с. 8].

Конечно, неудовлетворенность подобным определением времени оставалась. Например, в прошлом существовала традиция завершать диссертации списком нерешенных проблем. В 1900 г. П. Боль среди таковых проблем указал следующую: “Желательно было бы ввести время в механику более удовлетворительным образом, чем это делается теперь” [34, с. 198]. Аналогичное требование прозвучало и в знаменитом докладе Д. Гильберта на II Международном конгрессе по математике в Париже (1900) при формулировке им шестой проблемы.

Трудности, возникающие при определении времени, да и многих других понятий механики, наиболее полно были проанализированы во многих работах А. Пуанкаре (см., например, [17, 35]). Удивительно, что эти исследования до их пор либо вообще игнорируются, либо очевидным образом искажаются. Если говорить о времени, то согласно А. Пуанкаре главная проблема в том, что отсутствует гарантия действительного равенства двух равных по выбранным часам интервалов времени, т. е. это проблема ньютоновского равномерного течения времени. Одно из главных интуитивных представлений о свойствах времени заключается в принятии объективного характера понятий прошлого и будущего. Многие убеждены в необратимости течения времени, т. е. в том, что прошлое и будущее никогда не меняются местами. В этом и состоит принцип причинности, принимаемый явно или неявно в механике. Правда, в новейшей физике понятия прошлого и будущего уже относительны и зависят от выбора системы отсчета. Поэтому принцип причинности в новейшей физике не работает. Не вдаваясь в дискуссии по этому вопросу, отмечаем, что данная работа следует классическим традициям.

Определение. Тело отсчета, снабженное часами, называется системой отсчета.

Можно ввести сколько угодно систем отсчета, и пока что все они равноправны. Пусть некая материальная точка движется в выбранной системе отсчета, т. е. ее вектор положения \mathbf{r}_A задан как функция времени $\mathbf{r}_A(\mathbf{t})$. Последняя полностью определяет движение частицы относительно тела отсчета. Однако такое описание не имеет объективного характера, ибо мы не в состоянии понять, что именно движется: частица, тело или и то и другое вместе. Причем степень нашего незнания произвольно велика: любая функция $\mathbf{r}_A(\mathbf{t})$ может трактоваться как движение любой частицы относительно какого-либо тела отсчета. Понятно, что подобное описание движения никого не интересует. Не имеют объективного характера скорость $\dot{\mathbf{r}}_A(\mathbf{t})$ и ускорение $\ddot{\mathbf{r}}_A(\mathbf{t})$ частицы, поскольку помимо неопределенности в истолковании вектора $\mathbf{r}_A(\mathbf{t})$ здесь добавляется неопределенность в выборе времени, ибо время, введенное ранее, определено с точностью до преобразования $\mathbf{t} \rightarrow \varphi(\mathbf{t})$, где $\varphi(\mathbf{t})$ — любое монотонно возрастающее отображение. Согласно изложенному введенные ранее системы отсчета — это совсем не те понятия, на которых базируется (по существу) классическая механика. Нужны какие-то дополнительные постулаты, носящие не логический, а физический (интуитивный) характер. В качестве такого постулата в классической физике используется принцип инерции Галилея.

3.1.2. Принцип инерции Галилея. Инерциальные тела отсчета

Ранее было введено множество тел отсчета, и пока что они все равноправны. Дальнейшее продвижение возможно только при принятии какого-либо принципа. Фундаментальным принципом классической физики, лежащим в основе буквально всех понятий, является принцип инерции Галилея. Отказ от этого принципа разрушает все здание классической механики.

Аксиома А1. Принцип инерции Галилея. *Всякая изолированная (одинокая во всем мире) материальная точка движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.*

Принцип инерции Галилея, конечно, нельзя считать аксиомой в общепринятом смысле этого термина. Действительно, в нем фигурируют такие понятия, как “абсолютное пространство”, “прямолинейность”, “равномерность”. Ни одно из этих понятий не определено и не может быть определено без введения того, что далее называется инерциальной системой отсчета. Поэтому принцип инерции Галилея — это голая идея, не поддающаяся экспериментальной про-

верке, но на этой идее держится вся физика. Нам не дано знать, что такое абсолютное пространство, но аксиома A1 определяет основные свойства абсолютного пространства и позволяет из всего множества тел отсчета отобрать те, которые обладают постулированными в A1 свойствами.

Представим себе, что мы располагаем изолированной частицей, которая при движении оставляет след наподобие следа реактивного самолета. Этот след называется траекторией частицы. Понаблюдаем за движением частицы относительно всех мыслимых тел отсчета. Относительно одних тел отсчета траектория будет просто точкой, относительно других — прямой линией, наконец, относительно третьих траектория будет криволинейной. Эти последние тела исключим из числа претендентов на роль абсолютного пространства.

Запустим теперь вторую пробную частицу (первая уже улетела в бесконечность) так, чтобы хотя бы относительно одного тела отсчета, в котором траектория первой частицы была прямолинейной, траектория второй изолированной частицы была бы прямолинейной и непараллельной траектории первой частицы. Снова наблюдаем за движением частицы и вновь исключим из рассмотрения тела отсчета, относительно которых траектория второй частицы криволинейна. У нас остались тела отсчета двух типов: первый тип включает в себя тела отсчета, относительно которых траектории обеих частиц прямолинейны; второй тип — тела отсчета, относительно которых траектория первой частицы была точкой, а траектория второй — прямая линия, или наоборот.

Для тел отсчета второго типа необходимо провести третье испытание, а именно возьмем одно из таких тел отсчета и проведем в нем плоскость, проходящую через траекторию-точку и содержащую прямолинейную траекторию. Запустим третью частицу так, чтобы ее траектория не лежала в упомянутой плоскости. Исключим из рассмотрения все тела отсчета, в которых траектория третьей частицы криволинейна. Легко понять, что дальнейшие испытания не нужны: любая изолированная частица относительно отобранных тел отсчета будет иметь прямолинейную траекторию или траекторию-точку.

Определение. *Тела отсчета, относительно которых траектория любой изолированной точки (одинокой во всем мире частицы) прямолинейна или является точкой, называются **инерциальными телами отсчета**.*

В определении речь идет о траекториях, т. е. о понятиях, не оперирующих понятием времени. Таким образом, инерциальные тела отсчета образуют трехмерный континуум тел отсчета, обладающих замечательным свойством: траектории всех точек одного инерциального тела отсчета относительно другого инерциального тела отсчета — параллельные прямые. Множество инер-

циальных тел отсчета образует класс эквивалентности, отношение эквивалентности в котором устанавливается принципом инерции Галилея.

Определение. *Множество инерциальных тел отсчета называется абсолютным пространством.*

Не следует удивляться тому, что абсолютное пространство представлено не одним каким-то телом отсчета, а классом эквивалентности. Это достаточно стандартная ситуация в математике. Например, вектор — это не какой-то единичный объект, а класс эквивалентности, состоящий из множества направленных отрезков, имеющих одинаковые длины и одинаковые направления.

3.1.3. Математическое время. Тарировка часов по Галилею

Обратимся к понятию времени — самому сложному понятию в науках о Природе. О реальном времени мы не можем сказать ничего определенного, неизвестна даже его размерность. В пользу далеко не очевидной трехмерности пространства имеется немало весьма серьезных аргументов. В пользу самоочевидной на первый взгляд одномерности времени нет не только серьезных, но и вообще никаких аргументов. А самоочевидность слишком часто подводила людей. Поэтому в механике реальное время не обсуждается, а вводится в рассмотрение *математическое время*, или просто *время*.

Аксиома А2. *Время является непрерывно меняющейся величиной, пробегающей одномерное неограниченное множество (числовую ось); оно направлено (ориентировано) и течет от прошлого к будущему.*

Аксиома А3. *Математическое время существует само по себе и не зависит ни от каких внешних обстоятельств. В частности, оно не зависит от движения и от выбора инерциального тела отсчета (И. Ньютон).*

Для измерения времени применяются часы, т. е. приборы, в основе действия которых лежит какой-либо периодический процесс. Необходимо, однако, иметь гарантию, что этот процесс действительно периодический. Например, мы должны быть уверены в том, что длительности всех минут по обычным часам действительно одинаковы. Единственным гарантом здесь выступает принцип инерции Галилея, утверждающий, что движение изолированной частицы относительно инерциального тела отсчета является (или, лучше сказать, *называется*) равномерным. Это и дает способ тарировки часов.

Определение. *Часы считаются оттарированными в соответствии с принципом Галилея, если за одинаковые по этим часам интервалы времени изолированная частица пролетает одинаковые расстояния в каком-либо (любом) инерциальном теле отсчета.*

Существует мнение, что аксиома АЗ подразумевает существование сигналов, распространяющихся с бесконечной скоростью. Но такое мнение ни на чем не основано. Да, аксиоматикой классической механики *не отрицаются* сигналы с бесконечной скоростью, но такие сигналы *не навязываются* аксиоматикой, в том числе и аксиоматикой для воздействий. Чтобы оттарировать часы в соответствии с принципом инерции Галилея, достаточно разместить их на изолированной частице и отмечать моменты прохождения одинаковых расстояний в инерциальном теле отсчета. На уровне идей это вполне достижимая вещь, а всякая наука строится на уровне идей. Реальность, разумеется, отличается от наших построений и, видимо, никогда не будет уложена в “прокрустово ложе” какой-либо науки будущего.

Чтобы сделать процесс тарировки единообразным во всех инерциальных телах отсчета, можно предложить мысленный эксперимент, в основе которого лежит допущение о равноправности всех инерциальных тел отсчета. Это допущение в немного расширенной версии будет сформулировано в виде отдельного утверждения, известного под названием принципа относительности Галилея. Представим себе, что в каждом теле отсчета неподвижно (относительно данного тела отсчета) закреплен некий прибор, способный испускать, например, фотоны или какие-либо другие частицы. Все эти приборы (или один прибор, последовательно устанавливаемый во всех телах отсчета) считаются идентичными. В момент времени $t = 0$, фиксируемый по каким-то, не обязательно оттарированным, часам, прибор испускает фотон. Измеряется расстояние $r(t)$, пролетаемое к моменту времени t , и вводится абсолютное время $t_a = r(t)/c$, где c — постоянная, имеющая размерность скорости и одинаковая во всех телах отсчета. Введенное определение абсолютного времени можно обратить, и получится универсальная тарировка часов $t = f(ct_a)$. Далее будет использоваться именно абсолютное время t_a , которое будет обозначаться буквой t .

Следует отчетливо понимать, что принятыми аксиомами математическое время введено достаточно жестко. Для того чтобы прояснить это обстоятельство, рассмотрим двумерный мир, наделенный математическим временем (рис. 3.1).

Плоскость xOy — это двумерное пространство. Прямая OP в плоскости xOy — прямолинейная траектория частицы. Ось Ot — ось времени. Плоскость tOP — плоскость, в которой лежит мировая линия частицы, т. е. множество точек, которое пробежала частица в трехмерном пространстве: два пространственных измерения и одно временное измерение. Кривая OB , лежащая в плоскости tOP , — это одна из возможных мировых линий, проекция которой

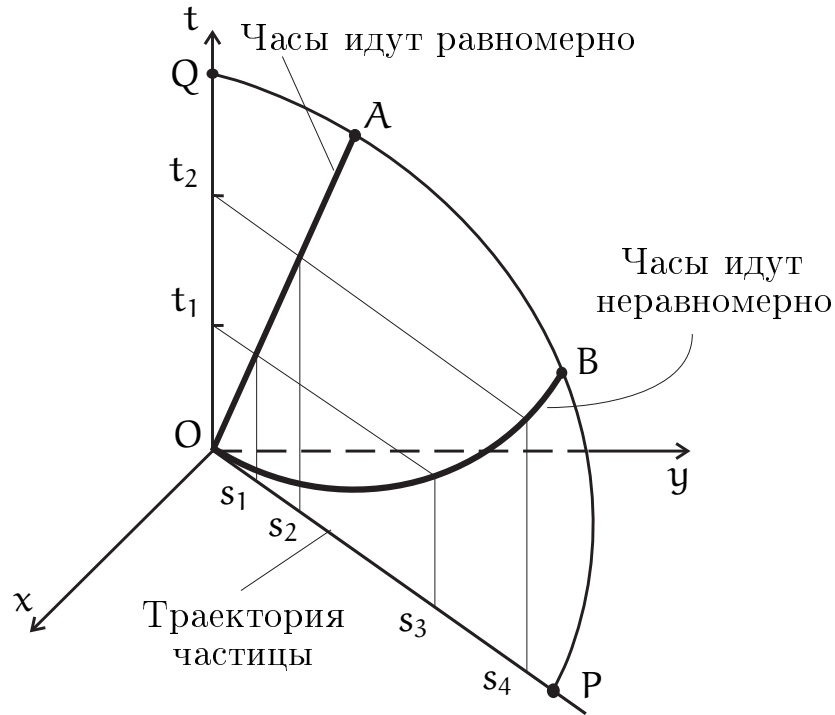


Рис. 3.1. Тарировка часов по Галилею

на пространственную плоскость — траектория-прямая частицы в двумерном пространстве. Уравнение этой прямой имеет вид

$$x = f(t)a, \quad y = f(t)b, \quad y = bx/a. \quad (3.4)$$

Функция $f(t)$ при этом может быть достаточно произвольной. Принцип инерции Галилея требует, чтобы за одинаковые интервалы времени $t_1 - 0 = t_2 - t_1$ пролетались бы одинаковые расстояния $s_3 - 0 = s_4 - s_3$. Если OB — кривая, то это условие не выполнено. Другая возможная мировая линия — это прямая OA . Здесь, очевидно, требование принципа инерции выполнено:

$$t_1 - 0 = t_2 - t_1 \quad \Leftrightarrow \quad s_1 - 0 = s_2 - s_1.$$

Однако прямых типа OA можно провести сколько угодно и не обязательно из начала координат. Поэтому математическое время принципом инерции Галилея вводится с точностью до линейного преобразования

$$t \rightarrow kt + t_0, \quad (3.5)$$

где t_0 определяет выбор начала отсчета времени, а k — выбор единицы измерения времени (масштабный множитель).

Именно этот ограниченный произвол в выборе математического времени мы и имели в виду, говоря о жестко введенном времени.

3.1.4. Инерциальные системы отсчета

Определение. Инерциальное тело отсчета, снабженное часами, оттарированными в соответствии с принципом инерции Галилея, называется инерциальной системой отсчета.

Инерциальных систем отсчета бесконечно много, и все они равноправны, что и фиксируется принципом относительности Галилея.

Аксиома А4. Принцип относительности Галилея. *Все инерциальные системы отсчета равноправны, т. е. не существует физических экспериментов, позволяющих выделить какую-либо одну из них.*

Понятно, что сам по себе принцип относительности не участвует ни в каких построениях. Поэтому называть его аксиомой можно только условно. Принцип относительности просто фиксирует достаточность принципа инерции Галилея. Никакой существенной пользы из принципа относительности Галилея извлечь невозможно, поскольку любая теория, построенная на основе фундаментальных законов механики, будет автоматически удовлетворять этому принципу.

Определение. Абсолютное пространство, снабженное абсолютным временем, есть класс эквивалентности на множестве всех мыслимых систем отсчета, причем отношение эквивалентности устанавливается принципом инерции Галилея.

Приведем цитату из книги К. Труделла [14]: “Система отсчета — это чистый холст, на котором можно рисовать картины природы. Этот холст может быть выбран художником прежде, чем он примется за работу. Холст накладывает некоторые ограничения на искусство художника, но никоим образом не определяет те картины, которые художник будет рисовать”.

Замечание. Для многих книг по физике и механике характерно использование понятия “аксиома” в нетрадиционном для математики смысле. Иногда забывается, что не всякое, даже правильное, утверждение может быть принято в качестве аксиомы, ибо, став аксиомой, это утверждение может превратиться в свою противоположность. Рассмотрим в качестве иллюстрации следующую аксиому.

Аксиома АХ. *Скорость света, испускаемого одним источником, одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Часто думают, что этой аксиомой постулируется одинаковость скорости света во всех введенных ранее инерциальных системах отсчета. Однако это не так. Главная особенность любой аксиомы состоит в том, что ей нельзя навязывать какое-либо мнение, аксиома на все “смотрит” со своей точки зрения.

Поясним на примере. Допустим, имеется сад, в котором растут грушевые и яблоневые деревья. Примем аксиому: “На всех деревьях в саду растут груши”. Понятно, что груши не начнут в силу этой аксиомы расти на яблонях. Просто с точки зрения этой аксиомы яблони перестанут считаться деревьями. Точно так же обстоит дело и с аксиомой АХ. Приняв эту аксиому, необходимо на ранее введенном множестве систем отсчета провести новые испытания и отобрать те из них, которые являются инерциальными с точки зрения аксиомы АХ. Если мы, допустим, знаем утверждение АХ как экспериментально установленный факт, то необходимо построить теорию с помощью каких-то других аксиом так, чтобы утверждение АХ являлось их следствием. Если же утверждение АХ формулировать как аксиому, то это будет просто сужение класса инерциальных систем отсчета до множества инерциальных тел отсчета, имеющих одну точку, в которой расположен источник света. Ведь аксиома А1 продолжает действовать.

3.2. Тела и их динамические структуры

3.2.1. Тела-точки и их размерность

В ньютоновской механике исходным объектом является материальная точка, которая наделяется единственным свойством — массой. Это обстоятельство не позволяет включить, например, электродинамику в рациональную (ньютоновскую) механику², так как материальную точку нельзя наделить зарядом. В эйлеровой механике ситуация резко меняется. В качестве исходного объекта в ней вводится тело-точка, которое реагирует не только на трансляционные, но и на спинорные движения. Относительно тела-точки считается, что оно существует и занимает нулевой объем в теле отсчета. Движение тела-точки определено, если задан его вектор положения $\mathbf{R}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Трансляционную и угловую скорости тела-точки находят по формулам

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \right)_{\times}. \quad (3.6)$$

² Под рациональной наукой понимается метод описания Природы, основанный на первых принципах, представленных в математической форме, и их логических следствиях. Рациональная ньютоновская механика — это наука, основанная на законах Ньютона и их следствиях, выраженных в форме дифференциальных и алгебраических уравнений. Например, лагранжеву механику и гамильтонову механику можно рассматривать как формы представления рациональной ньютоновской механики, поскольку они являются математическими следствиями законов Ньютона. (*Примеч. ред.*)

Аксиома Т1. *Кинетическая энергия тела-точки есть квадратичная форма его скоростей:*

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (3.7)$$

где тензоры второго ранга $m\mathbf{A}$, $m\mathbf{B}$, $m\mathbf{C}$ называются тензорами инерции тела-точки, скалярный множитель m выделен просто для удобства.

Тензоры инерции не зависят от скоростей, но зависят от тензора поворота³.

Представление (3.7) значительно сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Например, кажется, что его можно упростить следующим рассуждением. Рассмотрим чисто трансляционное движение тела-точки. Тогда (3.7) принимает вид: $2K = m\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{V}$. Примем здесь $\mathbf{V} = V\mathbf{n}$ и получим $2K = mV^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{n}$. Учтем теперь, что система отсчета изотропна, т. е. телу-точке безразлично, в каком направлении ему двигаться. Так будет только в том случае, когда выполняется равенство $\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_* \cdot \mathbf{n} = m \cdot \mathbf{A}_* \cdot m$, $\forall m, \mathbf{n}$. Это равенство в свою очередь выполняется только для шарового тензора $\mathbf{A}_* = \alpha \mathbf{E}$, где множитель α можно принять равным единице, так как у нас уже выделен скалярный множитель m . К сожалению, это рассуждение неправильно, и равенство $\mathbf{A}_* = \alpha \mathbf{E}$ можно постулировать, но нельзя доказать.

Примем теперь во внимание, что тензоры инерции должны удовлетворять очевидным равенствам⁴:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0) \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad (3.8)$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0$ — значения тензоров инерции в отсчетном положении, т. е. при тех значениях t_0 , при которых $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{E}$. Формулу (3.8) следует понимать как три формулы для каждого из тензоров в отдельности.

С учетом приведенных рассуждений и (3.8) получаем, что тензор инерции \mathbf{A} равен единичному, а представление (3.7) принимает вид

$$K = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \quad (3.9)$$

где скалярный множитель m называется массой тела-точки.

³ Базисные векторы тензоров инерции тела-точки как бы заморожены в тело-точку. Поэтому тензоры инерции тела-точки поворачиваются вместе с ним аналогично тому, как это происходит с тензорами инерции абсолютно твердых тел. (*Примеч. ред.*)

⁴ Соотношения (3.8), которые постулируются для тензоров инерции тел-точек, аналогичны соотношениям (4.26), (4.27), которые доказываются для тензоров инерции абсолютно твердых тел макроскопических размеров. (*Примеч. ред.*)

Представление (3.9) обладает большой степенью общности. Но нельзя утверждать, что оно является максимально общим. Допустим, например, что тело-точка — это электрон. Тогда все наши рассуждения теряют силу, ибо электрон невозможно заставить совершать чисто трансляционные движения, у него $\boldsymbol{\omega}$ всегда, видимо, отлична от нуля. Правда, здесь никто в настоящее время не может сказать ничего определенного. Необходимы дополнительные исследования. Вероятно, для тяжелых частиц представление (3.9) является приемлемым, но для легких частиц, например для нейтрино, видимо, необходимо пользоваться полным выражением (3.7), где множитель \mathbf{m} лучше не выделять. При использовании (3.7) массой тела-точки удобнее называть величину $\text{tr}(\mathbf{mA})/3$.

В принципе на выражение для кинетической энергии налагаются очень слабые требования: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ и (3.8). Все остальные требования уже не очевидны и должны приниматься с оговорками. Например, казалось бы естественным потребовать от (3.7) положительной определенности. Однако, по-видимому, можно требовать выполнения только более слабого неравенства:

$$\frac{1}{\Delta} \int_t^{t+\Delta} \mathbf{K} dt \geq 0, \quad \forall \mathbf{V}, \boldsymbol{\omega} : |\mathbf{V}| \neq 0, |\boldsymbol{\omega}| \neq 0, \quad (3.10)$$

где Δ — малый интервал времени порядка периода обращения электрона по орбите вокруг ядра.

Для целей данной работы нет необходимости в дальнейших обсуждениях (3.7), ибо нас интересуют только основные структуры.

Определение. Число независимых параметров, определяющих кинетическую энергию тела-точки и не зависящих от движения тела-точки, называется размерностью тела-точки.

Размерность материальной точки равна единице: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, причем единственным параметром является масса. Размерность абсолютно твердого тела⁵ равна четырем: $\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, \mathbf{C} — центральный тензор инерции; параметрами являются масса и три главных центральных момента инерции.

Размерность частиц, необходимых для построения электродинамики, заведомо больше четырех. В общем случае размерность частицы с кинетической

⁵ Согласно основной теореме кинематики абсолютно твердого тела (см. раздел 2.3) актуальное положение абсолютно твердого тела макроскопических размеров полностью определяется заданием радиус-вектора одной его точки и тензора поворота. В этом смысле абсолютно твердое тело аналогично телу-точке. Поэтому можно говорить о размерности абсолютно твердого тела. (Примеч. ред.)

энергией (3.7) равна 12, а тела-точки с кинетической энергией (3.9) — 10.

Определение. Количеством движения \mathbf{K}_1 тела-точки называется линейная форма скоростей:

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{V}} = \mathfrak{m} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (3.11)$$

Определение. Кинетическим моментом \mathbf{K}_2^Q тела-точки, вычисленным относительно опорной точки Q , зафиксированной в данном теле отсчета, называется линейная форма скоростей, вычисляемая по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q &= (\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{V}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \\ &= \mathfrak{m} [(\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь первое слагаемое называется моментом количества движения тела-точки, а второе слагаемое, т. е. величина $\mathfrak{m} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega})$, называется собственным кинетическим моментом, или динамическим спином тела-точки.

Приведем пример воображаемого тела-точки, кинетическая энергия которого определяется выражением

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathfrak{m} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathfrak{q} \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3.13)$$

где \mathfrak{m} — масса тела-точки; \mathbf{J} — момент инерции; \mathfrak{q} — новый параметр, который не встречается в телах-точках, используемых в классической механике⁶.

Иными словами, параметр \mathfrak{q} определяет некое новое свойство частицы, которое условно будем называть зарядом. Этим примером мы хотим подчеркнуть, что новые свойства частиц нельзя вводить голословно, они должны описываться теми или иными параметрами в динамических структурах⁷, которые определяют тело-точку. Например, если мы хотим ввести такие свойства частицы, как “шарм”, “очарование”, “заряд” и так далее, то это должно быть отмечено в динамических структурах частицы. Кинетическая энергия, по определению, является положительно определенной функцией своих аргументов.

⁶ Смысл параметра \mathfrak{q} , так же как и смысл остальных параметров, определяющих тензор \mathbf{B} , пока остается туманным. Решение задач о движении частиц с ненулевым тензором \mathbf{B} под действием различных сил и моментов может показать, какие эффекты позволяет описать учет дополнительных инерционных параметров. Анализ результатов решения подобных задач поможет прояснить физический смысл тензора \mathbf{B} . (*Примеч. ред.*)

⁷ Динамическими структурами называются кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент. (*Примеч. ред.*)

Положительная определенность формы (3.13) обеспечивается условиями:

$$m > 0, \quad mJ - q^2 > 0.$$

Количество движения и кинетический момент тела-точки, обладающего кинетической энергией (3.13), определяются выражениями:

$$\mathbf{K}_1 = m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \times (m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega}) + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega}. \quad (3.14)$$

Как видим, и эти структуры не встречаются в классической механике. Забежав немного вперед, рассмотрим движение этой частицы по инерции в пустоте. При этом количество движения и кинетический момент частицы должны сохранять постоянные значения:

$$\begin{aligned} m\mathbf{V} + q\boldsymbol{\omega} &= m\mathbf{V}_0 + q\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \\ \mathbf{R} \times \mathbf{a} + q\mathbf{V} + J\boldsymbol{\omega} &= q\mathbf{V}_0 + J\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь принято, что $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$. Удобнее рассматривать последнее уравнение, продифференцировав его по времени и исключив из него трансляционную скорость. В результате получим уравнение

$$\left(J - \frac{q^2}{m}\right) \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \frac{qa}{m} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a} = a\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1. \quad (3.16)$$

Решение уравнения (3.16) ищем в виде прецессирующего вектора:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{Q}(\varphi(t) \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (3.17)$$

Подставляя выражение (3.17) в (3.16) и используя уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qa}{q^2 - mJ} \equiv \alpha \quad \Rightarrow \quad \varphi = \alpha t. \quad (3.18)$$

Интегрируя уравнения (3.15), нетрудно найти все искомые характеристики движения:

$$m\mathbf{R}(t) = (a - q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e})t\mathbf{e} + qa^{-1}\mathbf{e} \times \mathbf{Q}(\alpha t\mathbf{e}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 - (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}]. \quad (3.19)$$

Вектор $\mathbf{R}(t)$ показывает, что частица движется по спирали. Если начальные условия подобрать так, чтобы выполнялось равенство

$$a = q\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e},$$

то движение частицы по инерции будет происходить по окружности, как это утверждали древние и, в частности, Пифагор. Для вектора скорости получаем выражение

$$\mathbf{m} \mathbf{V}(t) = \mathbf{Q}(\alpha t \mathbf{e}) \cdot (\alpha \mathbf{e} - q \boldsymbol{\omega}_0). \quad (3.20)$$

Согласно (3.17), (3.20) трансляционная и угловая скорости частицы постоянны по модулю, но переменны по направлению, т. е. движение частицы по инерции остается равномерным. В этом примере следует обратить внимание на то, что в инерциальной системе отсчета движение изолированной частицы (тела-точки) по инерции не обязательно является прямолинейным. Разумеется, речь идет не о классической частице. Но ведь никто не доказал, что, например, электрон является классической частицей (материальной точкой). Этот пример показывает, что в классической механике таятся огромные, еще не изученные возможности. Здесь возможны ситуации, которые с первого взгляда могут показаться неправдоподобными. Тем не менее они не более неправдоподобны, чем те “чудеса”, которые происходят в микромире. Заметим, кстати, что чем глубже мы погружаемся в микромир, тем важнее становится роль спиновых движений. Последние в рассмотренном примере представлены не тензором поворота \mathbf{Q} , а вектором угловой скорости.

Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент исчерпывают список динамических структур тела-точки.

Введем понятие многоспиновой частицы. Здесь мы не будем вдаваться в детали, а ограничимся общим представлением о многоспиновой частице. Пусть дана частица, движение которой определяется заданием ее вектора положения $\mathbf{R}(t)$ и набором независимых тензоров поворота $\mathbf{P}_m(t)$, $m = 0, 1, \dots, n$. При этом частица обладает $n + 1$ спином. Ее можно представить себе как несущее тело, в котором закреплены n роторов, независимо вращающихся относительно несущего тела. Тензор $\mathbf{P}_0(t)$ характеризует поворот несущего тела. Тензоры $\mathbf{P}_m(t)$, $m = 1, 2, \dots, n$, характеризуют абсолютные повороты каждого из роторов. Движение многоспиновой частицы характеризуется набором скоростей:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \boldsymbol{\omega}_m = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}}_m \cdot \mathbf{P}_m^T \right)_{\times}, \quad m = 0, 1, \dots, n.$$

Кинетическая энергия, как всегда, является квадратичной формой скоростей:

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \sum_{m=0}^n \mathbf{B}_m \cdot \boldsymbol{\omega}_m + \frac{1}{2} \sum_{k,m=0}^n \boldsymbol{\omega}_k \cdot \mathbf{C}_{km} \cdot \boldsymbol{\omega}_m.$$

Тензоры \mathbf{B}_m и \mathbf{C}_{km} называются тензорами инерции. Количество движения многоспиновой частицы находят по формуле

$$\mathbf{K}_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \sum_{m=0}^n \mathbf{B}_m \cdot \boldsymbol{\omega}_m.$$

Кинетический момент вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{K}_2^Q = (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \sum_{k=0}^n \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}_k}.$$

Практическое использование этих формул нуждается в дополнительных пояснениях, которые здесь не приводятся, поскольку в данной книге основное внимание будет уделяться эйлеровой механике в ее простейшей форме.

3.2.2. Закрытые и открытые тела. Динамические структуры тел

В механике любое тело рассматривается как совокупность неких первичных тел-точек. Например, в ньютоновской механике всякое тело рассматривается как совокупность материальных точек. Нет оснований отказываться от этой традиции. Однако здесь имеются проблемы, которые до сих пор не получили ясного разрешения. Все было бы очень просто, если бы была возможность ограничиться первичными телами-точками только одного типа, как это и делается в ньютоновской механике. На самом деле ситуация сложнее.

Во-первых, современное состояние науки позволяет утверждать, что от действительно первичных тел-точек, если они вообще существуют, мы еще очень далеки. Во-вторых, первичные тела-точки, из которых современная механика составляет тела, существенно различаются. В-третьих, и это главная проблема, первичные тела-точки в процессе взаимодействий могут не только менять свою структуру, но может меняться и их число. Например, $2n$ атомов водорода (первичные тела одного типа) при взаимодействии с n атомами кислорода (первичные тела-точки другого типа) образуют в результате n молекул воды (первичные тела-точки третьего типа). Таким образом, вместо $3n$ первичных тел-точек мы получили n первичных тел-точек. Причины того, почему молекулу воды нельзя считать просто состоящей из трех тел-точек, будут рассмотрены при обсуждении понятия внутренней энергии. Могут возразить, что рассмотрение подобных трансформаций частиц выходит за рамки рациональной механики и составляет предмет химии. Так это и было до недавнего времени. Однако современные технологии таковы, что многие

сложные физические, химические и механические явления уже нельзя изучать раздельно. Поэтому для их совместного рассмотрения необходимы такие формулировки фундаментальных законов, которые допускают существование сложных явлений, подобных указанным. Тем не менее в данной главе мы будем придерживаться точки зрения, близкой к традиционной. Будем считать, что Вселенная рациональной механики есть множество тел-точек, структура которых определена ранее. Выберем в системе отсчета простую замкнутую поверхность Ляпунова S_t , которая может деформироваться и перемещаться относительно тела отсчета. Считается, что на S_t нет никаких тел-точек, хотя можно и отказаться от этого условия.

Определение. Множество \mathfrak{M}_A тел-точек, находящихся внутри S_t , называется телом A , а множество \mathfrak{M}_A^e тел-точек, находящихся вне S_t , называется окружением тела A и обозначается A^e .

Объемом тела A называется объем, заключенный внутри S_t , поэтому объем тела A не является физической⁸ (объективной) характеристикой тела A .

Определение. Тело A называется закрытым, если оно не обменивается телами-точками со своим окружением; в противном случае тело A называется открытым.

Аксиома Т2. Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела A аддитивны по телам-точкам, составляющим тело A .

Пусть все характеристики i -го тела-точки снабжаются индексом i . Тогда в соответствии с аксиомой **Т2**

$$K(A) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_A} m_i K_i, \quad (3.21)$$

$$K_i = \frac{1}{2} \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i,$$

где K_i называется массовой плотностью кинетической энергии.

Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(A) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_A} m_i \mathbf{K}_{1i}, \quad \mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial K_i}{\partial \mathbf{V}_i} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \quad (3.22)$$

⁸ Любое дискретное множество тел-точек, которое находится внутри поверхности S_t , можно окружить другой поверхностью S_t^* , такой, что в нее не попадут никакие другие тела-точки. Таким образом, внутри поверхностей S_t и S_t^* находится одно и то же тело. Объем, заключенный внутри S_t^* , отличается от объема, заключенного внутри S_t . Следовательно, объем не является объективной характеристикой тела. (Примеч. ред.)

Кинетический момент определяется аналогично:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) &= \sum_{i \in \mathfrak{M}_A} m_i \mathbf{K}_{2i}^Q, \quad \mathbf{K}_{2i}^Q = (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \mathbf{V}_i} + \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i} = \\ &= (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{iQ}) \times (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для сплошных тел все суммы в (3.21)–(3.23) заменяются интегралами:

$$\mathbf{K}(\mathcal{A}) = \int_{(m)} \mathcal{K} \, dm = \int_{(m)} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) dm, \quad (3.24)$$

где величина \mathcal{K} называется массовой плотностью кинетической энергии, тензоры \mathbf{B} , \mathbf{C} — массовые плотности тензоров инерции.

Количество движения определяется выражением

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int_{(m)} \mathcal{K}_1 \, dm, \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3.25)$$

Для кинетического момента имеем аналогичное выражение:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) &= \int_{(m)} \mathcal{K}_2^Q \, dm, \\ \mathcal{K}_2^Q &= (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \\ &= (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В формулах (3.24)–(3.26) величины под знаком интеграла вычисляются в той точке тела, окрестности которой принадлежит бесконечно малая масса dm . К обсуждению тел, составленных из односпиновых частиц, мы еще вернемся при обсуждении понятия квазитвердого тела.

В качестве простейшего примера вычислим динамические структуры абсолютно твердого тела, рассматриваемого в теоретической механике.

Определение. Совокупность тел-точек называется абсолютно твердым телом \mathcal{A} , если выполняются следующие два условия.

Первое: для любых пар точек A_i и A_m , принадлежащих телу \mathcal{A} , и для любых моментов времени t_1 и t_2 справедливы равенства

$$|\mathbf{R}_i(t_1) - \mathbf{R}_m(t_1)| = |\mathbf{R}_i(t_2) - \mathbf{R}_m(t_2)|. \quad (3.27)$$

Второе: тензоры поворота всех тел-точек одинаковы:

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{P}_m(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}), \quad (3.28)$$

причем $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ называется тензором поворота тела \mathcal{A} .

Из (3.27) и требования непрерывности движения вытекает основная теорема кинематики абсолютно твердого тела:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i(\mathbf{t}) &= \mathbf{R}_X(\mathbf{t}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_X), \\ \mathbf{r}_i &= \mathbf{R}_i(\mathbf{t}_0), \quad \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(\mathbf{t}_0), \quad \mathbf{P}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $\mathbf{R}_X(\mathbf{t})$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X , называемой полюсом, зафиксированным в теле \mathcal{A} .

Принимая для тел-точек модель материальной точки

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad K_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{R}}_i(\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{R}}_i(\mathbf{t}),$$

получаем кинетическую энергию, количество движения и кинетический момент тела \mathcal{A} в виде

$$\begin{aligned} K(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \dot{\mathbf{R}}_X + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) &= m \dot{\mathbf{R}}_X + \mathbf{B}_X \cdot \boldsymbol{\omega}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \dot{\mathbf{R}}_X \cdot \mathbf{B}_X + \mathbf{C}_X \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где $\dot{\mathbf{R}}_X$ — скорость полюса; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, отвечающая повороту $\mathbf{P}(\mathbf{t})$; \mathbf{B}_X и \mathbf{C}_X — тензоры инерции тела \mathcal{A} , определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_X &= m (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E} = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot [m (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}), \\ \mathbf{C}_X &= \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \left\{ \sum_i m_i \left[(\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C)^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \otimes (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \right] \right\} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

В (3.30), (3.31) буквой m обозначена масса тела \mathcal{A} , $\mathbf{R}_X(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}_X$, $\mathbf{R}_C(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{r}_C$ — векторы положения полюса и центра масс тела \mathcal{A} :

$$m = \sum_i m_i, \quad \mathbf{R}_C(\mathbf{t}) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{R}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \left(\frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right).$$

Для сплошных сред все суммы заменяются соответствующими интегралами. Если полюс X выбирается в центре масс тела \mathcal{A} , то $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, а тензор \mathbf{C}

называется центральным тензором инерции. В последние 30–40 лет сложилось мнение, что механику сплошных сред нельзя построить на основе “молекулярных” представлений. Это мнение обосновывается различными аргументами. В частности, К. Трусделл и Р. Тупин [14] считают это невозможным, поскольку на микроуровне действуют законы квантовой, а не классической механики. Может быть, это и в самом деле так. Но предположим, что возможности классической механики далеко не исчерпаны. Если для тел-точек рассматривать форму общего вида (3.7), то поведение этих тел-точек совсем не похоже на то, к которому мы привыкли. Не исключено, что использование тел-точек общего вида восстановит дееспособность классической механики и на микроуровне. Что касается перехода к сплошной среде, то здесь необходимо использовать так называемый нестандартный анализ⁹, т. е. вернуться к языку, которым пользовался Л. Эйлер.

3.3. Воздействия

3.3.1. Силы и моменты

Центральной идеей в механике является представление о том, что в инерциальных системах отсчета закрытые тела меняют характер своего движения только в результате влияния других тел. Особенно отчетливо эта идея представлена у Л. Эйлера [36]. Для реализации этой идеи в механике вводятся специальные структуры, называемые воздействиями и являющиеся первичными понятиями. Иногда думают, что первичные понятия не требуют определения. Это заблуждение. На самом деле первичные понятия вводятся определением их свойств. Введение воздействия опирается на аксиому, которая является неким дополнением к принципу инерции Галилея, распространяя его на тела общего вида.

Основная аксиома механики. *В инерциальной системе отсчета изолированное закрытое тело A движется так, что его количество движения и кинетический момент сохраняются неизменными.*

Обычно эту аксиому предпочитают доказывать как теорему, но при этом введение воздействий становится расплывчатым и ведет к неясностям в трактовке сил и моментов.

⁹ Нестандартный анализ — это раздел математической логики. Его развитие началось в 1960 г. с работ Абрахама Робинсона. Принципиальное отличие нестандартного анализа от стандартного состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не как переменные, а просто как очень маленькие, почти равные нулю, постоянные величины. (*Примеч. ред.*)

Аксиома F1. В инерциальной системе отсчета причина изменения количества движения закрытого тела \mathcal{A} обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством полярного вектора и называется силой $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующей на тело \mathcal{A} со стороны его окружения \mathcal{A}^e .

Аксиома F2. В инерциальной системе отсчета причина изменения кинетического момента закрытого тела \mathcal{A} , вычисленного относительно опорной точки Q , обусловлена исключительно наличием других тел, выражается посредством аксиального вектора и называется моментом $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$, действующим на тело \mathcal{A} со стороны его окружения \mathcal{A}^e .

При этом момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, действующий со стороны тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} , вычисляется по правилу:

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \quad (3.32)$$

где \mathbf{R}_Q определяет положение опорной точки Q ; вектор \mathbf{R}_P определяет произвольно выбираемую точку P , называемую точкой приведения (рис. 3.2); вектор $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ называется собственно моментом — он зависит от выбора точки приведения P , но не зависит от выбора опорной точки Q .

Полный момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ по определению не зависит от выбора точки приведения. Силы и моменты сложны для восприятия начинающими. Трудность в том, что силы и моменты выражают совершенно конкретные физические идеи, являющиеся первичными понятиями и не поддающиеся математической формализации, но вполне доступные нам на интуитивном уровне. Ключом к пониманию сил и моментов являются следующие утверждения:

а) сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела \mathcal{B} на изменение положения тела \mathcal{A} ;
 б) момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — это реакция тела \mathcal{B} на повороты тела \mathcal{A} вокруг точки приведения P .

Для того чтобы интуитивно ощутить наличие силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, необходимо выполнить следующую мысленную процедуру: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел \mathcal{A} и \mathcal{B} ; 2) мысленно “заморозить” тело \mathcal{A} и превратить его в абсолютно твердое; 3) мысленно придавать всем точкам \mathcal{A} всевозможные бесконечно малые смещения $\xi \mathbf{e}$, где \mathbf{e} — произвольный единичный вектор. Если тело \mathcal{B} как-то препятствует описанным смещениям тела \mathcal{A} , то сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отлична от нуля. Если существует такое направление \mathbf{e}_* , что тело \mathcal{B} не препятствует смещению тела \mathcal{A} в этом направлении, то проекция $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на \mathbf{e}_* равна нулю.

Для того чтобы ощутить наличие собственно момента $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, необходимо: 1) удалить из Вселенной все тела за исключением тел \mathcal{A} и \mathcal{B} ; 2) мысленно “заморозить” тело \mathcal{A} и превратить его в абсолютно твердое; 3) закре-

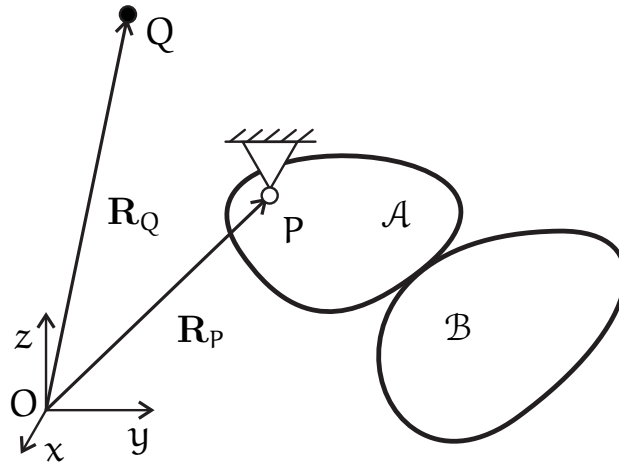


Рис. 3.2. Смысл точки приведения и опорной точки

пить точку приведения в теле отсчета и относительно тела \mathcal{A} , т. е. тело \mathcal{A} и точка P должны составлять абсолютно твердое тело с неподвижной точкой P (рис. 3.2); 4) мысленно поворачивать тело \mathcal{A} вокруг P на всевозможные бесконечно малые векторы поворота $\varphi \mathbf{e}$, где $|\mathbf{e}| = 1$. Если тело \mathcal{B} как-то препятствует описанным поворотам тела \mathcal{A} , то $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отличен от нулевого вектора. Если существует такая ось, проходящая через P и натянутая на \mathbf{e}_{**} , что тело \mathcal{B} не препятствует повороту тела \mathcal{A} вокруг этой оси, то проекция $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ на \mathbf{e}_{**} равна нулю.

Из аксиомы F2 следует, что при изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ остался неизменным. Пусть P и S — две разные точки приведения. Тогда

$$\mathbf{L}^S(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_P) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (3.33)$$

Определение. Пара векторов $\{\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}); \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$ называется воздействием тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} .

Определение. Воздействие тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} называется чисто силовым (или просто силовым), если существует такая точка приведения $\mathbf{R}_P(\mathbf{t})$, что при любых движениях тела \mathcal{A} воздействие тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} определяется заданием пары векторов:

$$\{\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}); (\mathbf{R}_P(\mathbf{t}) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\} \quad (\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}), \quad (3.34)$$

причем такая точка P называется центром силового воздействия.

Во многих книгах по механике центр силового воздействия называют точкой приложения силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Строго говоря, это неправильно, ибо векторы $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — свободные векторы и ни к каким точкам

тела не прилагаются, а центр силового воздействия может находиться вне тела \mathcal{A} .

Отмеченная неточность не так безобидна, как кажется на первый взгляд: говоря о точках приложения, мы внушаем ученику принципиально неверное на интуитивном уровне представление о силе, что помешает ему, если он захочет изучать нетривиальные случаи¹⁰. Указанное дает интуитивно ясное представление о природе понятий сил и моментов. К сожалению, это нельзя просто выучить, только настойчивая практика применения этих понятий ведет к успеху.

Определение. Воздействие тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} называется чисто моментным, если $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}$.

Для первичных понятий невозможно дать определения. В таких случаях даются не определения самих понятий, а перечисляются свойства, органически присущие этим понятиям. Важнейшим свойством сил и моментов, подтвержденным всем ходом развития механики, является их аддитивность как по телам, составляющим тело \mathcal{B} , так и по телам, составляющим тело \mathcal{A} .

Аксиома F3. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивны по отдельным телам \mathcal{C} и \mathcal{D} , составляющим тело $\mathcal{B} = \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$:

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset; \quad (3.35)$$

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{D}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset. \quad (3.36)$$

Вычисление момента $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ подразумевает выбор опорной точки и точки приведения. Опорная точка должна быть одна и та же в обеих частях (3.36). Выбор точки приведения осуществляется произвольно и для каждого из моментов $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C} \vee \mathcal{D})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C})$, $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{D})$ может производиться независимо¹¹.

Аксиома F4. Сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и момент $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивны по отдельным телам \mathcal{C} и \mathcal{D} , составляющим тело $\mathcal{A} = \mathcal{C} \vee \mathcal{D}$:

$$\mathbf{F}(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset; \quad (3.37)$$

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}, \mathcal{B}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{D}, \mathcal{B}), \quad \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} = \emptyset. \quad (3.38)$$

¹⁰ Например, абсолютно твердое тело конечных размеров (не материальная точка) скользит по абсолютно твердой плоской поверхности. В какой точке приложена сила взаимодействия тела и плоскости? Размышление над этим вопросом убеждает в том, что использование понятия точки приложения силы затрудняет постановку задачи. (Примеч. ред.)

¹¹ Формула (3.36) связывает между собой полные моменты. При изменении точки приведения собственно момент меняется так, чтобы полный момент остался неизменным. Именно поэтому выбор точки приведения может производиться независимо. (Примеч. ред.)

Приведенными аксиомами исчерпываются все постулаты, относящиеся к воздействиям в общем случае. Введенные аксиомы не определяют конкретного вида сил и моментов, они только фиксируют их основные свойства.

В литературе часто встречается термин “сила инерции”. Последняя, согласно указанному ранее, может называться силой только весьма условно, ибо “силы” инерции не удовлетворяют главному требованию — они не порождены другими телами, да и вообще не существуют в инерциальной системе отсчета.

Аксиомы аддитивности в книгах по механике часто подменяются так называемым “принципом независимости сил”. Следует иметь в виду, что аддитивность воздействий всеобща, а независимость воздействий, как правило, не имеет места.

3.3.2. Условия равновесия абсолютно твердого тела

В качестве простой иллюстрации применения понятий сил и моментов сформулируем необходимые условия равновесия абсолютно твердого тела.

Утверждение. Если абсолютно твердое тело \mathcal{A} находится в покое (в равновесии), то сила и момент, действующие на тело \mathcal{A} со стороны его окружения \mathcal{A}^e , равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) &= (\mathbf{R}_P - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

При выполнении этих условий абсолютно твердое тело может совершать движение, сохраняющее его количество движения и кинетический момент. Чтобы исключить эти движения, необходимо принять дополнительное требование об отсутствии движения тела в какой-либо момент времени. При практическом использовании условий равновесия целесообразно применять аксиомы аддитивности.

Пример. Дано абсолютно твердое тело \mathcal{A} , к точкам \mathcal{B} и \mathcal{C} которого прикреплены тонкие нити, передающие силы \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_C ; выяснить, при каких ограничениях на силы \mathbf{F}_B и \mathbf{F}_C тело \mathcal{A} находится в равновесии.

Воздействия передаются на тело только посредством нитей, которые примем за тела окружения и обозначим теми же буквами, что и точки их крепления к телу \mathcal{A} . Таким образом, имеем $\mathcal{A}^e = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Аксиома F1 требует, чтобы сила $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ обращалась в нуль. Поэтому

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \equiv \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \quad (3.40)$$

При вычислении момента используем аксиому аддитивности

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C}), \quad (3.41)$$

где Q — выбранная опорная точка; для простоты ее часто совмещают с началом в системе отсчета и опускают символ опорной точки в обозначениях.

При вычислении момента $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ необходимо сначала выбрать точку приведения. Выбирать ее можно произвольно. Если в качестве точки приведения выбрать какую-либо точку P , не совпадающую с точкой закрепления нити \mathcal{B} , то собственный момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ будет отличен от нуля. Действительно, если мы будем поворачивать тело \mathcal{A} вокруг точки P , то нить \mathcal{B} будет препятствовать этому повороту. Это и означает, что $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ отличен от нуля.

Если в качестве точки приведения выбрать точку B , то собственно момент $\mathbf{L}^B(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ будет равен нулю, поскольку нить не сопротивляется изгибу. Аналогичные рассуждения нужно провести и для момента $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Окончательно получаем равенство

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = (\mathbf{R}_B - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}_B + (\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}_C = \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Внешне выражение (3.42) не совпадает с (3.32), но оно легко преобразуется к виду (3.32). При этом нетрудно убедиться, что не существует такой точки приведения, чтобы собственно момент $\mathbf{L}^P(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ равнялся нулю. Это означает, что в рассматриваемом примере внешнее воздействие окружения \mathcal{A}^e на тело \mathcal{A} не является чисто силовым, хотя воздействия от каждой из нитей являются чисто силовыми. Решая систему (3.40), (3.42), получаем

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_C, \quad \mathbf{F}_B = \lambda(\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B), \quad (3.43)$$

где величина λ остается произвольной. Если величина λ положительна, то положение равновесия устойчиво. Если величина λ отрицательна, то положение равновесия неустойчиво, что, разумеется, нужно доказывать отдельно.

3.4. Полная энергия и внутренняя энергия

Энергия — одна из важнейших и наименее разработанных структур в рациональной механике. Даже понятие кинетической энергии, впервые введенное в неотчетливой форме Г. В. Лейбницем, далеко не сразу утвердилось в механике. Позднее понятие энергии было расширено включением в нее потенциалов внутренних и внешних сил. Однако это расширение носило формальный характер, а уравнение баланса энергии являлось следствием законов Ньютона, т. е. не было самостоятельной структурой.

В механике сплошных сред дело обстояло иначе. В 1839 г. Дж. Грин впервые ввел понятие внутренней энергии, которое прочно утвердилось в механике сплошных сред, а уравнение баланса энергии стало независимым от законов движения постулатом.

Наиболее полному анализу понятие энергии подверглось в работах Г. Гельмгольца [37] и А. Пуанкаре [35]. Однако итог этого анализа не вполне удовлетворителен из-за отсутствия ясной физической идеи. Нет ясного понимания концепции энергии и в настоящее время, хотя уже многие факты указывают на центральную роль энергии (не сводящейся к кинетической энергии) при исследовании многих проблем, особенно на микроуровне. В данном случае наша цель — не прояснить концепцию энергии, а подчеркнуть роль энергии как самостоятельной структуры механики.

Кинетическая энергия тела \mathcal{A} есть скалярная мера движения тела относительно выбранного тела отсчета. Сама по себе она не носит объективного характера и в этом смысле мало что определяет. Ясно, что кинетическая энергия далеко не полностью характеризует энергетическое состояние тела. Само существование тел в виде нераспадающихся объектов указывает на присутствие им “нечто”, что может выделяться или поглощаться при распаде тел или их деформации. Это “нечто” можно назвать внутренней энергией, а полную энергию E тела \mathcal{A} представить в виде суммы

$$E(\mathcal{A}) = K(\mathcal{A}) + U(\mathcal{A}). \quad (3.44)$$

Функция $K(\mathcal{A})$ полностью определена. Внутренняя энергия $U(\mathcal{A})$ — новая характеристика тела \mathcal{A} и требует определения. Если внутренняя энергия определена, то и полная энергия тела определена.

Часто различие между кинетической и внутренней энергиями тела \mathcal{A} сводят к простому утверждению, что кинетическая энергия есть часть полной энергии, зависящая от скоростей тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} , а внутренняя энергия есть часть полной энергии, зависящая от взаимных положений тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} . Во многих случаях подобное разделение оказывается приемлемым и не приводит ни к каким неприятностям. Однако принятие этой точки зрения резко сужает область применимости механики и потому совершенно неприемлемо в фундаментальном плане.

Качественное различие понятий кинетической и внутренней энергий состоит в следующем. Кинетическая энергия — это та часть полной энергии, которая зависит от выбора системы отсчета и потому не является физической (объективной) характеристикой тела. Внутренняя энергия — это та часть полной энергии тела, которая не зависит от выбора системы отсчета и связана

с самим телом. Образно говоря, внутренняя энергия как бы “вморожена” в тело и перемещается вместе с ним. Важно подчеркнуть, что здесь речь идет о любых системах отсчета, т. е. инерциальность системы отсчета не подразумевается.

Внутренняя энергия характеризует способность тела запасать энергию внутри самого себя. Например, внутренняя энергия материальной точки постоянна и не меняется при ее движениях. То же самое можно сказать об абсолютно твердом теле. Внутренняя энергия тела, состоящего из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной, с точностью до постоянной величины равна энергии деформации пружины. Это простые примеры. Чтобы прояснить (или запутать) более сложную ситуацию, рассмотрим следующий идеализированный пример.

Допустим, тело \mathcal{A} состоит из $2n$ атомов водорода и n атомов кислорода, причем атомы рассматриваются как материальные точки (в этом и состоит идеализация). Между атомами действуют некие силы, которые потенциальны. Полная энергия этого тела есть сумма кинетических энергий всех атомов и потенциала внутренних сил. Иными словами, внутренняя энергия этого тела равна потенциалу внутренних сил. Однако известно, что два атома водорода объединяются с одним атомом кислорода и образуют молекулу воды, которую, в свою очередь, можно рассматривать как материальную точку (еще одна идеализация). Поэтому тело \mathcal{A} можно рассматривать как состоящее из n тел-точек (молекул воды), между которыми действуют потенциальные силы. В этом случае полная энергия тела \mathcal{A} есть сумма кинетических энергий молекул и потенциала внутренних сил. Понятно, что полные энергии тела \mathcal{A} в обоих случаях должны совпадать, хотя и кинетические энергии, и внутренние энергии тела \mathcal{A} в этих двух подходах будут различаться самым существенным образом. В этом примере мы видим, что разделение полной энергии на кинетическую и внутреннюю не носит абсолютного характера. Отсюда и многочисленные проблемы, связанные с принятием формальных определений для энергии.

Не вдаваясь в дальнейшие обсуждения, сформулируем несколько аксиом относительно энергии, которые показывают направление существующих исследований.

Аксиома Е1. *Внутренняя энергия тела \mathcal{A} зависит только от конфигурации тела \mathcal{A} , т. е. только от векторов положения \mathbf{R}_i и тензоров поворота \mathbf{P}_i тел-точек \mathcal{A}_i , составляющих тело \mathcal{A} :*

$$U(\mathcal{A}) = U(\mathbf{R}_1, \mathbf{P}_1; \mathbf{R}_2, \mathbf{P}_2; \dots; \mathbf{R}_N, \mathbf{P}_N). \quad (3.45)$$

Аксиома Е2. Внутренняя энергия тела \mathcal{A} аддитивна по парам тел-точек, составляющих тело \mathcal{A} :

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \mathcal{U}\left(\bigvee_{i=1}^N \mathcal{A}_i\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k), \quad \varphi_{i,i}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i) = 0. \quad (3.46)$$

Аксиома Е2 часто ставится под сомнение, например, для ионных взаимодействий. Однако на самом деле в физике никогда не анализировались потенциалы вида (3.45). Видимо, аксиома (3.46) необходима для согласования с аксиомами аддитивности воздействий. Следует обратить внимание на тот факт, что внутренняя энергия тела \mathcal{A} , в отличие от его кинетической энергии, неаддитивна по телам, составляющим тело \mathcal{A} .

Аксиома Е3а. Внутренняя энергия тела \mathcal{A} является индифферентным скаляром, т. е. она не зависит от выбора системы отсчета¹².

Аксиома Е3б. Внутренняя энергия тела \mathcal{A} не изменится, если на движение тела \mathcal{A} наложит дополнительное движение тела \mathcal{A} как жесткого целого.

Последние две аксиомы эквивалентны. Следствием аксиом Е1, Е2, Е3а, Е3б являются утверждения:

а) внутренняя энергия тела \mathcal{A} , являющегося системой материальных точек, должна иметь вид

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k}(|\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|); \quad (3.47)$$

б) внутренняя энергия тела \mathcal{A} , состоящего из тел-точек общего вида, должна иметь вид

$$\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k}^N \varphi_{i,k}(\mathbf{P}_i^T \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k); \mathbf{P}_i^T \cdot \mathbf{P}_k). \quad (3.48)$$

Ионные взаимодействия должны описываться внутренней энергией типа (3.48), который никогда не привлекался для этой цели. В качестве примера возможной функции $\varphi_{i,k}$ в (3.47) приведем такую:

$$\varphi(r) = \varphi_0 e^{-r_0/r} \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^m - \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \right], \quad r \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|, \quad (3.49)$$

где φ_0 , r_0 , r_1 , m , n — постоянные, различные, вообще говоря, для разных пар частиц, если последние не однотипны.

¹² О замене системы отсчета — см. раздел 2.18. (Примеч. ред.)

Постоянные $0 < r_0 \ll r_1$ положительны и весьма малы. Если $r_0 = 0$, то (3.49) переходит в потенциал типа Леннард-Джонса, а именно потенциал Ми. Постоянная r_0 имеет порядок радиуса орбиты электрона в атоме. Поэтому при $r_0 \gg r_1$ (3.49) вновь совпадает с потенциалом типа Леннард-Джонса.

На первый взгляд потенциал типа (3.49) кажется странным, так как он допускает “слипание” тел-точек (при $\mathbf{r} \rightarrow 0$ сила взаимодействия обращается в нуль). Но именно это обстоятельство в целом ряде случаев является необходимым. Принципы выбора конкретного вида потенциала довольно сложны для краткого описания, так как они связаны с вопросами существования устойчивых состояний тел и далеки от окончательных решений.

В заключение примем следующее определение.

Определение. Мощностью внешних воздействий на тело \mathcal{A} , состоящее из тел-точек \mathcal{A}_i , называется билинейная форма скоростей и воздействий:

$$N(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}} [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \mathbf{V}_i + \mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) \cdot \boldsymbol{\omega}_i]. \quad (3.50)$$

Обратим внимание на то, что в выражение (3.50) включены силы и моменты, действующие на тело-точку со стороны окружения всего тела \mathcal{A} , а не со стороны \mathcal{A}_i^e , т. е. окружение i -го тела-точки.

Кроме того, под $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ понимается собственно момент, когда в качестве точки приведения выбрана точка, заданная вектором положения \mathbf{R}_i тела-точки \mathcal{A}_i , причем напомним, что $\mathbf{L}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$ не зависит от выбора опорной точки Q .

3.5. Фундаментальные законы механики

Под фундаментальными законами механики понимают два закона динамики Эйлера (уравнение баланса количества движения и уравнение баланса кинетического момента) и два начала термодинамики, к которым относятся уравнение баланса энергии и второе начало термодинамики¹³, не имеющее другого общепринятого наименования. Все эти законы — некие логические утверждения, которые не вытекают из опыта и потому не могут быть опровергнуты опытным путем. Иными словами, фундаментальные законы отнюдь

¹³ Здесь говорится об общепринятой точке зрения на второй закон термодинамики. П. А. Жилин придерживался этой точки зрения в ранний период своей научной деятельности (работы 1965–1980 гг.). В более поздних работах П. А. Жилин в той или иной форме высказывает сомнения относительно фундаментальности второго закона термодинамики. (Примеч. ред.)

не являются законами Природы типа закона всемирного тяготения. Фундаментальные законы — это метод изучения Природы. При дальнейшем развитии механики существующие формулировки фундаментальных законов могут измениться, но не потому что неправильны, а потому что могут быть найдены их более эффективные выражения.

Можно утверждать, что фундаментальные законы механики действуют на всех уровнях — от атомной физики до космологии. Встречающиеся при этом проблемы — следствия неправильного или непоследовательного применения фундаментальных законов.

3.5.1. Уравнение баланса количества движения

Первым фундаментальным законом механики принято называть уравнение баланса количества движения. Первоначально он возник как первый закон статики и применялся еще Архимедом. Применительно к задачам динамики этот закон в частных формулировках применялся Галилеем и Гюйгенсом.

Знаменитым первый фундаментальный закон стал после выхода “Математических начал натуральной философии” (1686) Исаака Ньютона. В науке он утвердился под названием второго закона Ньютона, который и поныне излагается в школьных курсах физики и на базе которого рассмотрено огромное количество важнейших явлений Природы и техники. Точнее говоря, широко употребительным в рациональной механике второй закон Ньютона стал гораздо позднее, а именно после того, как Л. Эйлер [38] придал ему математическую форму. Это произошло через 20 лет после смерти Ньютона. Что же касается мифа о Ньюtone как единственном творце рациональной механики, то он был придуман в книге Э. Маха [5], опубликованной в 1883 г., в которой утверждается, что после Ньютона в механике не было сделано ничего принципиально нового. Ошибочность этого утверждения следует хотя бы из того факта, что Ньютон до конца своей жизни отрицал сохранение количества движения у изолированного тела.

Решающий шаг в формулировке законов динамики был сделан Эйлером [6]¹⁴ в 1776 г. Именно в этой работе Эйлер сформулировал законы механики в виде двух независимых утверждений, которые К. Трусделл предложил [39] называть первым и вторым законами динамики Эйлера. В данной книге поддерживается позиция К. Трусделла и используется именно эта терминология.

Вместе с тем нужно отметить, что форма фундаментальных законов с

¹⁴ Цитируется по работе [7].

развитием механики меняется и, видимо, никогда не обретет окончательный вид. Так происходит из-за того, что с развитием механики меняются наши представления о содержании входящих в фундаментальные законы понятий. Например, понятия количества движения у Декарта, Ньютона и Эйлера одинаковы по смыслу, но различны по формальным признакам. В данной книге используется определение количества движения, по форме отличающееся от определений, приведенных во многих других книгах. Однако суть этого понятия у всех одинакова.

Согласно основной аксиоме механики в инерциальной системе отсчета количество движения изолированного тела сохраняется неизменным. Если тело является материальной точкой, то это утверждение вытекает из принципа инерции Галилея и позволяет ввести в рассмотрение инерциальные системы отсчета. Так что в этом случае основная аксиома не дает ничего нового. Для произвольного тела основная аксиома уже не вытекает из Принципа инерции Галилея и является новым постулатом.

Наблюдение показывает, что, как правило, количество движения тела \mathcal{A} меняется. В механике полагают, что причина этого заключается в наличии других тел во Вселенной. Но тела сами по себе в основных уравнениях рациональной механики не фигурируют. Их наличие моделируется воздействиями и в некоторых случаях потоками количества движения. Следует при этом иметь в виду, что под телами механика понимает не только тела типа твердых, жидких и газообразных тел. Электромагнитное поле и многие другие тонкие состояния материи также являются телами.

Первый фундаментальный закон фиксирует связь между воздействиями (другими телами) и изменением количества движения рассматриваемого тела. При этом первый фундаментальный закон устанавливает баланс между изменением количества движения тела \mathcal{A} и силой, действующей на тело \mathcal{A} . Кроме того, баланс учитывает и возможный подвод количества движения в тело \mathcal{A} .

Уравнение баланса количества движения. Скорость изменения количества движения тела \mathcal{A} равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода количества движения $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ в тело \mathcal{A} :

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (3.51)$$

В приведенной формулировке уравнение баланса количества движения стало использоваться в научной литературе относительно недавно, но у него было много предшественников. Сначала частная форма этого закона применялась Галилеем и Гюйгенсом. Затем появился самый знаменитый в механике

закон, получивший название второго закона Ньютона:

$$(\mathbf{mv})' = \mathbf{F}.$$

Второй закон Ньютона относится к материальной точке, так что на нее действуют только внешние силы. Поэтому не было нужды разделять силы на внешние и внутренние. Следует отметить, что второй закон Ньютоном был сформулирован только на вербальном уровне. Математическая форма второго закона, принятая в настоящее время, видимо, впервые появилась у Маклорена в 1742 г. Эйлер в работах [6, 38] приводит следующую формулировку закона (3.51) для закрытых тел:

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{A}) = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e), \quad \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^n m_k \dot{\mathbf{R}}_k. \quad (3.52)$$

Здесь тело \mathcal{A} составлено из материальных точек. Закрытыми¹⁵ называют тела, которые не обмениваются массой со своим окружением. Для закрытых тел вектор $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ равен нулю. В формулировке (3.52) впервые появляется деление сил на внутренние и внешние, причем явно указывается, что количество движения тела \mathcal{A} меняется только в результате действия на тело внешних сил, а внутренние силы, каковы бы они ни были, не могут изменить количества движения всего тела \mathcal{A} . Именно формулировка (3.52) в настоящее время известна под названием *первого закона динамики Эйлера*.

Наиболее заметное различие между вторым законом Ньютона и первым законом динамики Эйлера состоит в том, что в последнем случае отпадает необходимость в принятии третьего закона Ньютона в качестве дополнительной аксиомы механики.

В дальнейшем предполагается, что *величина $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ аддитивна как по телам, составляющим тело \mathcal{A} , так и по телам окружения \mathcal{A}^e* .

Из первого закона динамики немедленно вытекает одно весьма общее утверждение, являющееся аналогом третьего закона Ньютона. Чтобы доказать это утверждение, разделим тело \mathcal{A} на два отделенных тела \mathcal{B} и \mathcal{C} , т. е. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} = \emptyset$. При этом имеем равенства $\mathcal{B}^e = \mathcal{C} \vee \mathcal{A}^e$ и $\mathcal{C}^e = \mathcal{B} \vee \mathcal{A}^e$.

Запишем первый закон динамики для тел \mathcal{B} и \mathcal{C} :

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e),$$

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{C}) = \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{C}^e) = \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e).$$

¹⁵ Открытые тела начали рассматриваться только в конце XIX века.

Складывая эти два равенства и учитывая равенство (3.51), получаем

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) - \mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{B}). \quad (3.53)$$

Примем допущение

$$\mathbf{k}_1(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{k}_1(\mathcal{C}, \mathcal{B}), \quad (3.54)$$

которое утверждает, что тело \mathcal{B} получает от тела \mathcal{C} в единицу времени ровно столько количества движения, сколько тело \mathcal{C} получает (отдает) его от тела \mathcal{B} . С учетом допущения (3.54) равенство (3.53) дает третий закон Ньютона:

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}). \quad (3.55)$$

Иными словами, сила, действующая на тело \mathcal{B} со стороны тела \mathcal{C} , равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны тела \mathcal{B} на тело \mathcal{C} . Именно в такой форме сформулировал этот закон Ньютон [31]. Тела \mathcal{B} и \mathcal{C} у Ньютона совсем не обязательно являются материальными точками, что прямо следует из рассуждений Ньютона, непосредственно продолжающих формулировку трех законов.

В современных учебниках представлена более узкая форма третьего закона Ньютона. Этот закон формулируют [40] для взаимодействующих материальных точек, добавляя утверждение о том, что силы взаимодействия направлены по прямой, соединяющей материальные точки. Это последнее добавление невозможно распространить на тела общего вида, входящие в (3.55), ибо разных прямых, соединяющих неточечные тела \mathcal{B} и \mathcal{C} , можно провести сколько угодно. Более того, если считать, что силы имеют точку приложения, то равенство (3.55) также теряет смысл. Это является одной из причин того, что в данной книге понятие “точка приложения силы” не используется, а сама сила рассматривается как свободный вектор. В таком случае равенство (3.55) имеет однозначный смысл. Наконец, из равенства (3.55) следует, что сила, действующая на тело \mathcal{B} со стороны самого тела \mathcal{B} , равна нулю, т. е. $\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}$. После формулировки второго закона динамики будет доказано, что в системе материальных точек силы взаимодействия между точками направлены вдоль прямых, соединяющих эти точки. Иными словами, в системе материальных точек внутренние силы *по необходимости являются центральными*. Ничего подобного не имеет места для тел, отличных от материальных точек.

Применительно к закрытой материальной точке уравнение (3.51) есть второй закон Ньютона. Рассмотрим систему материальных точек и запишем пер-

вый закон динамики для каждой из материальных точек, входящих в систему:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m_i \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \right) &= \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e) = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Уравнения (3.56) впервые [41] были сформулированы Л. Эйлером в 1747 г., а затем были воспроизведены в работе [38]. В правой части уравнения (3.56) все силы разделены на два класса: силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)$, действующие между частицами системы и называемые внутренними силами, и силы $\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)$, действующие на выделенную частицу со стороны тел окружения и называемые внешними силами. Влияния внутренних и внешних сил на поведение системы сильно различаются между собой. Поэтому подобная классификация сил оказывается очень удобной и будет в дальнейшем постоянно использоваться. В очень многих случаях внешние силы оказываются заранее известными. Поэтому иногда внешними называют заданные силы. Но в данной книге будет использоваться исключительно первая трактовка, т. е. внешними мы будем называть силы, действующие на частицы системы со стороны тел окружения, независимо от того, заданы эти силы или подлежат дальнейшему определению. Именно такая трактовка внешних сил является наиболее употребительной в механике.

Складывая все уравнения в системе (3.56) и учитывая равенство (3.55), приходим к первому закону динамики (3.51) при $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}$. Еще раз обратим внимание на то, что в формулировку первого закона динамики входят только внешние силы. Таким образом, первый закон динамики заменяет собой все три закона Ньютона, но обладает большей общностью. На базе только первого закона динамики можно исследовать огромное количество важных задач. В частности, он позволяет, при добавлении закона всемирного тяготения, построить теорию движения Луны и планет, т. е. небесную механику. На этом законе базируются многие разделы механики сплошных сред, гидроаэромеханики и т. д. Некоторые задачи, имеющие историческую ценность, будут рассмотрены далее в этой главе. Однако число этих задач будет весьма ограниченным. Значительно большее количество интересных задач читатель может найти в традиционных учебниках механики, например, в [42, 43] и многих других книгах.

Огромные возможности, открываемые первым законом динамики, конечно, впечатляют. Но давно сказано, что недостатки являются продолжением

достоинств. Так и получилось с первым законом динамики. Следствия из него столь значительны, что многие вплоть до настоящего времени полагают, что первый закон динамики — это и есть вся механика. Тем не менее тревожный звонок прозвучал еще в конце XIX века, когда физика стала внедряться в микромир. Механика, базирующаяся только на первом законе и трансляционных движениях, забуксовала и не смогла полноценно описать ни явления электромагнетизма, ни строение атома. Бремя лидерства в исследовании микромира взяла на себя теоретическая физика, методы и дух которой резко отличаются от методов, используемых механикой.

В настоящее время уже ясно, что в микромире главную роль играют спиновые движения, которыми управляет второй закон динамики. Поэтому, несмотря на огромные возможности первого закона динамики, одного этого закона недостаточно для построения полноценной рациональной механики.

Дополнительно подчеркнем следующее обстоятельство. На протяжении многих столетий механика изучала только закрытые тела. Открытые тела казались экзотикой. В XX веке уравнения движения открытых тел стали активно использоваться в теории реактивного движения. В последние два-три десятилетия открытые тела стали интенсивно исследоваться в связи с современными технологиями, в которых разделение чисто механических и физико-химических процессов оказывается недопустимым. Заметим, что в механике открытых тел еще имеется много белых пятен, связанных с отсутствием достоверно установленных принципов построения потоков подвода количества движения в сложных системах в зависимости от различных физико-химических факторов. Тем не менее даже начинающий изучать механику человек должен знать, что механика отнюдь не сводится ко второму закону Ньютона, как это утверждается в школьных, и не только школьных, курсах физики. Именно поэтому в данной книге за основу принимается уравнение баланса количества движения в его наиболее общей форме.

Замечание. Многие физики полагают, что третий закон Ньютона не выполняется в микромире. При этом в третий закон включают и утверждение о центральности сил взаимодействия. Однако в эйлеровой механике третий закон Ньютона без допущения о центральности сил взаимодействия — уже не аксиома, а доказанная теорема, и она не может нарушаться. В следующем подразделе будет доказано, что силы взаимодействия центральны только для системы материальных точек. Поэтому нарушение условия центральности сил в микромире указывает на то, что многие “элементарные частицы” нельзя рассматривать как материальные точки — это многоспиновые частицы.

Важнейшей особенностью фундаментальных законов механики, включая

первый закон динамики, является то, что они принципиально не могут быть ни подтверждены, ни опровергнуты экспериментальными методами. В первый закон входит вектор силы, который не поддается прямому экспериментальному определению, хотя, разумеется, существует много косвенных методов измерения силы. На самом деле силы как таковые в Природе не существуют. Наблюдаемыми и измеряемыми величинами являются движения. Задача механики состоит в определении движений тел. Поскольку в уравнение (3.56) входят два неизвестных вектора \mathbf{R}_i и $\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e)$, то оно не замкнуто, и требуется дополнительное уравнение, связывающее силы с движениями.

Определение. Уравнения, связывающие силы с движениями, называются определяющими и устанавливаются в дополнение к законам динамики.

Хорошим примером является закон всемирного тяготения, открытый Р. Гуком и последовательно развитый И. Ньютоном. Этот закон утверждает, что между любыми двумя точечными телами в Солнечной системе действует сила, определяемая по закону:

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j) = -G \frac{m_i m_j}{R_{ij}^2} \frac{\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j}{R_{ij}}, \quad R_{ij} \equiv |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j|. \quad (3.57)$$

Здесь $G = (6.67259 \pm 0.003) \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$ — гравитационная постоянная.

Закон всемирного тяготения является типичным определяющим уравнением, использование которого в небесной механике позволяет найти траектории движения планет Солнечной системы, которые превосходно согласуются с наблюдениями. Именно поэтому закон всемирного тяготения считается правильным, а вовсе не потому, что некие прямые эксперименты позволяют установить конкретный закон (3.57). Более того, с экспериментальной точки зрения нельзя утверждать, что силы в точности обратно пропорциональны квадрату расстояния. Но с теоретической точки зрения даже незначительное отклонение от закона (3.57) привело бы к катастрофическим последствиям.

Построение определяющих уравнений относится к числу трудных проблем механики. Во многих конкретных случаях проблема определяющих уравнений уже разрешена, но во многих важных для практики случаях она еще ждет своего решения. Часто поступают так. На основе интуитивных соображений формулируют какие-то определяющие уравнения и тем самым получают замкнутую систему уравнений, описывающую механическое поведение рассматриваемой умозрительной системы. Исследуют поведение этой системы. Если оказывается, что поведение умозрительной системы в основных чертах совпадает с наблюдаемым поведением реальной системы, то определяющие уравне-

ния считаются приемлемыми. Если этого нет, то ищут другие определяющие уравнения.

На первый взгляд может показаться, что построение определяющих уравнений основано на произвольных допущениях. Это не так. Фундаментальные законы, особенно третий фундаментальный закон, накладывают довольно жесткие ограничения на определяющие уравнения. Но сейчас мы еще не готовы обсуждать эту проблему, ибо еще не введены необходимые понятия. Определяющие уравнения относятся не только к силам и движениям. Например, при вычислении скорости подвода количества движения в тело также приходится принимать соответствующие определяющие уравнения. К сожалению, в общем случае этот вопрос не разрешен на формальном уровне, хотя во многих приложениях особых проблем не возникает. Поэтому мы ограничимся иллюстративными примерами.

Погрузка движущейся тележки. Пусть по рельсам движется тележка со скоростью $\mathbf{v}(t)$. При этом на тележку насыпается, например, песок. Поэтому масса $m(t)$ тележки с песком меняется во времени. Считаем, что на тележку никакие силы не действуют. Это, в частности, означает, что колея прямолинейна и трение в подшипниках колес отсутствует¹⁶. Нужно найти скорость движения тележки.

Первый закон динамики записывается в виде

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \frac{dm(t)}{dt}\mathbf{u}(t), \quad (3.58)$$

где $dm(t)/dt$ — скорость подвода массы; $\mathbf{u}(t)$ — абсолютная скорость, с которой масса $dm(t)$ подводится к тележке.

Задачу можно немного усложнить. Пусть на тележку насыпается песок двух сортов. Тогда вместо (3.58) получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}(t)] = \rho_1(t)\mathbf{u}_1(t) + \rho_2(t)\mathbf{u}_2(t), \quad \frac{dm(t)}{dt} = \rho_1 + \rho_2, \quad (3.59)$$

где ρ_1, ρ_2 — скорости подвода массы песка первого и второго сортов, соответственно; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — скорости, с которыми упомянутые массы подводятся к тележке.

Движение тележки существенно зависит от подводимого к ней количества движения. Например, если песок подается из неподвижного (падает сверху в

¹⁶ На тележку не действуют никакие силы в направлении движения. Сила тяжести и сила реакции опоры действуют в перпендикулярном направлении и на характер движения не влияют. Поэтому, если задача состоит только в определении движения, а реакция опоры не представляет интереса, эти силы можно не учитывать. (*Примеч. ред.*)

тележку) источника, то $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Если песок подается с вертолета, летящего над тележкой с той же скоростью, то $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. В первом случае скорость тележки будет уменьшаться с ростом ее массы, а во втором — будет сохраняться неизменной. Можно, разумеется, и разгонять тележку, сбрасывая с нее песок с подходящей скоростью (реактивное движение).

Задача Кэйли. Чтобы еще немного пояснить особенности работы с открытыми системами, рассмотрим задачу Кэйли (1857) о падающей цепочке ([43, с. 114]). В задаче требуется исследовать движение нерастяжимой тяжелой цепи, конец которой свешивается с горизонтального стола, тогда как не вступившая еще в движение часть цепи свернута в клубок у самого края стола. Пусть $\rho = \text{const}$ и L — погонная масса и длина цепи, соответственно. В качестве тела \mathcal{A} выбираем свисающую часть цепи, а ее длину обозначим x . Запишем уравнение движения свисающей части цепи:

$$\frac{d}{dt} \left(\rho x \frac{dx}{dt} \right) = \rho g x - F + \frac{d(\rho x)}{dt} \frac{dx}{dt}, \quad (3.60)$$

где в левой части уравнения стоит скорость изменения количества движения свисающей части цепи; в правой части: первое слагаемое — вес свисающей части, второе слагаемое — сила, приложенная к верхнему концу свисающей части, последнее слагаемое — скорость подвода количества движения в свисающую часть цепи.

Отметим, что в уравнении, используемом Кэйли, два последних слагаемых в правой части отсутствуют. Покажем, что так и должно быть. Уравнение (3.60) содержит две неизвестные функции. В качестве дополнительного уравнения запишем уравнение баланса количества движения для части цепи, лежащей на столе:

$$\frac{d}{dt} [\rho (L - x) 0] = F + \frac{d\rho (L - x)}{dt} \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad F = \rho \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (3.61)$$

Подставляя полученное выражение для силы F в уравнение (3.60), приходим к уравнению, использованному Кэйли без должного обоснования. Примем, что в начальный момент времени цепь находилась в покое и свисала ее бесконечно малая часть, т. е. примем следующие начальные условия:

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

Решение задачи имеет вид

$$x = \frac{1}{6} g t^2. \quad (3.62)$$

Здесь опущены необходимые вычисления, поскольку их можно найти в [43]. Учебники по механике останавливаются на выводе закона движения (3.62), но любители парадоксов идут дальше. Выясним, сохраняется ли энергия у движущейся цепи. При $t = 0$ цепь обладала только потенциальной энергией $P_0 = \rho g L^2$. Рассмотрим момент времени t_1 , когда $x = L$, т. е. $t_1 = \sqrt{6L/g}$. В этот момент времени

$$P_1 = \frac{1}{2} \rho g L^2, \quad K_1 = \frac{1}{3} \rho g L^2 \quad \Rightarrow \quad P_1 + K_1 = \frac{5}{6} \rho g L^2 \neq P_0 = \rho g L^2. \quad (3.63)$$

Возникает вопрос: куда пропала энергия $\rho g L^2/6$? Именно в этом усматривается парадокс. Ответ очевиден: эта часть энергии затрачена на мгновенный разгон бесконечно малых частей цепи от нулевой скорости до конечной скорости \dot{x} , т. е. в данной задаче бесконечно малые части цепи испытывают бесконечно большие ускорения.

Менее тривиален вопрос о правильной записи уравнения баланса энергии в этой задаче. Именно в этом пункте возникают наибольшие расхождения и, как следствие, парадоксы. Мы настаиваем, что уравнение баланса энергии должно выполняться во всех случаях, но его правильное написание требует определенной практики. Проверим его выполнение в задаче Кэйли. Массовую плотность внутренней энергии цепи обозначим \mathcal{U} , т. е. бесконечно малая часть цепи dx обладает внутренней энергией $d\mathcal{U} = \rho dx \mathcal{U}$. Поскольку цепь нерастяжима, то массовая плотность внутренней энергии постоянна.

Запишем уравнение баланса энергии для свисающей части цепи:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho x \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} - F \frac{dx}{dt} + \frac{d(\rho x)}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \mathcal{U} \right]. \quad (3.64)$$

Здесь первые два слагаемых в правой части определяют мощность внешних сил, действующих на свисающую часть цепи, а последнее слагаемое определяет скорость подвода энергии в систему. Нетрудно убедиться, что уравнение (3.64) для решения (3.62) тождественно выполняется.

Чтобы яснее ощутить понятие подвода энергии в систему, запишем уравнение баланса энергии для всей цепочки:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho x \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \rho L \mathcal{U} \right] = \rho g x \frac{dx}{dt} + \delta, \quad (3.65)$$

где δ — скорость подвода энергии в цепочку.

Полный подвод энергии в систему на интервале времени $[0, t_1]$ есть интеграл

$$\Delta = \int_0^{t_1} \delta dt = \left[\frac{1}{2} \rho x \dot{x}^2 \right]_0^{t_1} - \left[\frac{1}{2} \rho g x^2 \right]_0^{t_1} = -\frac{1}{6} \rho g L^2, \quad (3.66)$$

где использовано решение (3.62). В данном случае внутри системы происходит потеря энергии, причем энергия “немеханического происхождения” имеет чисто механическую природу. Тем не менее мы говорим, что энергия (3.66) рассеялась в окружающую среду в форме тепла.

Неискушенному в механике открытых систем читателю будет полезно обдумать эту задачу во всех деталях. В частности, следует проследить происхождение и структуру подвода энергии. По аналогии с рассмотренным ранее примером полезно ввести температуру и энтропию, а также дать им толкование. В задачах такого рода очень трудно сформулировать жесткие правила. Только настойчивая практика позволит изучающим с легкостью преодолевать все возникающие проблемы. К сожалению (или к счастью), механика вообще, и механика открытых систем в частности, всегда будет включать в себя элементы искусства и никогда не будет принадлежать сфере чистой математики, как это виделось Лагранжу.

3.5.2. Уравнение баланса кинетического момента

Второй фундаментальный закон механики — это уравнение баланса кинетического момента, или второй закон динамики Эйлера. Этот закон, строго говоря, отсутствует в ньютоновой механике. Тем не менее его частная форма под названием теоремы об изменении кинетического момента используется в современных учебниках и монографиях по механике.

Следует обратить внимание на то, что теорему об изменении кинетического момента можно доказать только для системы материальных точек и только при расширенном толковании третьего закона Ньютона, когда в дополнение к равенству (3.55) принимается условие о том, что силы между материальными точками направлены вдоль соединяющей эти точки прямой. Приложение этой теоремы к выводу, например, уравнений движения абсолютно твердого тела является незаконным¹⁷. Но конечные результаты оказываются верными.

¹⁷ При выводе уравнений движения твердого тела используется предположение о центральности внутренних сил. Это предположение ошибочно. Внутренние силы в твердом теле могут быть нецентрными — см. пример “Иллюстрация неполноты механики Ньютона” в конце данного подраздела. (*Примеч. ред.*)

Причины этого станут понятны после постулирования второго закона динамики.

Уравнение баланса кинетического момента. Скорость изменения кинетического момента тела \mathcal{A} , вычисленного относительно опорной точки Q , равна моменту $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ плюс скорость подвода кинетического момента $\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A})$ в тело \mathcal{A} :

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (3.67)$$

Этот закон для закрытых тел ($\mathbf{k}_2^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}$) был открыт Эйлером [6] и носит название *второго закона динамики Эйлера*. В менее строгой форме Эйлер использовал этот закон еще в 1758 году при выводе уравнений динамики твердого тела.

Как ни странно, но и в настоящее время второй закон динамики Эйлера в качестве фундаментального закона механики не формулируется в существующих учебниках физики и механики. Относить этот закон к разряду теорем, как это считал Лагранж, разумеется, нельзя.

В дальнейшем считается, что величина $\mathbf{k}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e)$ аддитивна как по телам, составляющим тело \mathcal{A} , так и по телам окружения \mathcal{A}^e . Из второго закона динамики вытекает общее утверждение, являющееся продолжением третьего закона Ньютона на моментные взаимодействия. Чтобы доказать это утверждение, разделим тело \mathcal{A} на два отдельных тела \mathcal{B} и \mathcal{C} , т. е. $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Запишем второй закон динамики для тел \mathcal{B} и \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{B}) &= \mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) + \mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) = \\ &= \mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{A}^e), \\ \dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{C}) &= \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{C}^e) + \mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{C}^e) = \\ &= \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{B}) + \mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{A}^e). \end{aligned}$$

Складывая эти два равенства и учитывая равенство (3.67), получаем

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}) - \mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{B}). \quad (3.68)$$

Примем допущение

$$\mathbf{k}_2(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{k}_2(\mathcal{C}, \mathcal{B}).$$

Тогда получаем моментный аналог третьего закона Ньютона:

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{M}^Q(\mathcal{C}, \mathcal{B}). \quad (3.69)$$

Иными словами, момент, действующий на тело \mathcal{B} со стороны тела \mathcal{C} , равен по величине и противоположен по направлению моменту, действующему со стороны тела \mathcal{B} на тело \mathcal{C} . Наконец, из равенства (3.69) следует, что момент, действующий на тело \mathcal{B} со стороны самого тела \mathcal{B} , равен нулю, т. е. $\mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}$.

Применим второй закон динамики Эйлера к системе материальных точек. Для системы материальных точек кинетический момент сводится к моменту количества движения:

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}}_i \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times \left(m_i \dot{\mathbf{R}}_i \right) \dot{.}$$

Исключая отсюда скорость изменения количества движения с помощью уравнения баланса количества движения, получаем

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{i,k=1}^n \mathbf{R}_i \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)] + \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)].$$

Переставляя индексы суммирования в двойной сумме и складывая получившиеся два равенства с учетом равенства (3.55), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k) \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)]. \end{aligned}$$

Но согласно уравнению баланса кинетического момента (3.67)

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e)].$$

Здесь учтено, что на материальную точку собственно моменты не могут действовать, поскольку материальная точка не реагирует на повороты¹⁸. Кро-

¹⁸ Утверждение о том, что на материальную точку не могут действовать собственно моменты, можно доказать следующим образом. Допустим, что это не так, и на материальную точку действует собственно момент \mathbf{L} . Запишем уравнение баланса количества движения и уравнение баланса кинетического момента:

$$(m\dot{\mathbf{R}}) \dot{.} = \mathbf{F}, \quad (\mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}}) \dot{.} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}.$$

Домножая первое уравнение векторно на \mathbf{R} и вычитая из второго уравнения, получаем $\dot{\mathbf{R}} \times m\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{L}$, откуда следует, что $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. (Примеч. ред.)

ме того, скорость подвода кинетического момента есть просто скорость подвода момента количества движения. Сравнивая между собой два последних равенства, получаем

$$\sum_{i,k=1}^n (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k) \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)] = \mathbf{0}.$$

Поскольку в качестве тела \mathcal{A} можно было выбрать любую пару материальных точек, то отсюда получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k) \times [\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)] &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) &= \lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) \gamma_{ik}^{-1} (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k), \end{aligned} \quad (3.70)$$

где $\lambda(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k)$ — произвольная скалярная функция; $\gamma_{ik} = |\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k|$.

Если $\mathbf{k}_1(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = \mathbf{0}$, то сила, действующая со стороны материальной точки \mathcal{A}_k на материальную точку \mathcal{A}_i , направлена по прямой, соединяющей эти точки. Такие силы принято называть центральными. Таким образом, внутренние силы в системе материальных точек по необходимости являются центральными, т. е. направлены по линиям, соединяющим материальные точки. Поэтому в ньютоновой механике систем материальных точек никаких сил, кроме центральных, не существует.

Может показаться, что полученные результаты просто подтверждают справедливость третьего закона Ньютона в его расширенной трактовке. Однако это не так. Действительно, если третий закон Ньютона просто постулируется, то нет ничего особенного в том, что этот постулат может иногда нарушаться и приводить к ограниченности сферы действия механики. В эйлеровой механике расширенная версия третьего закона — уже не постулат, а доказанная теорема, справедливая только для систем материальных точек. Отсюда следуют важные заключения. Например, имеются экспериментально полученные свидетельства, что силы между ионами в кристаллах не являются центральными. Физики трактуют этот факт как ограниченность механики. На самом деле по доказанному ранее следует только то, что ионы нельзя моделировать материальными точками, но ни о какой ограниченности механики речь здесь идти не может.

В рациональной механике второй закон динамики, обычно применяемый под названием теоремы об изменении кинетического момента, находит очень широкое применение. На нем основана, например, теория гироскопических приборов. Только малая часть этих приложений будет описана в данной книге. В данном подразделе в качестве иллюстраций будут рассмотрены некоторые простейшие следствия из второго закона динамики.

Теорема об изменении момента количества движения. В ньютоновой механике систем материальных точек второй закон динамики может быть доказан как теорема. Действительно, примем, что для системы материальных точек справедлив второй закон Ньютона (3.56) в форме, предложенной Л. Эйлером:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(m_i \frac{d\mathbf{R}_i}{dt} \right) &= \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i^e) = \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}^e), \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Кроме того, примем, что справедлив третий закон Ньютона в его расширенном варианте:

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = -\mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_i), \quad (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k) = \mathbf{0}. \quad (3.72)$$

Здесь равенства (3.72) уже следует воспринимать как дополнительные постулаты, ибо считается, что второй закон динамики не принят. Момент количества движения системы материальных точек вычисляется по формуле

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^n (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times m_k \frac{d\mathbf{R}_k}{dt}.$$

Дифференцируя это равенство по времени и учитывая равенства (3.71) и (3.72), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A})}{dt} &= \sum_{k=1}^n (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times m_k \frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_j) + \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n (\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{F}(\mathcal{A}_k, \mathcal{A}^e) \equiv \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Равенство (3.73) известно в механике под названием теоремы об изменении момента количества движения. Внешне эта теорема очень похожа на уравнение баланса кинетического момента (3.67), но, в отличие от (3.67), она справедлива только для систем материальных точек. Тем не менее при традиционном построении ньютоновой механики ее применяют к системам общего вида. С формальной точки зрения это, конечно, неправильно, но это не может

привести к фактическим ошибкам¹⁹ при условии, что моменты, действующие на систему, порождаются силами, действующими на эту систему. Так, например, обстоит дело при выводе уравнений движения абсолютно твердого тела. С кинематической точки зрения абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, если принять дополнительные ограничения (связи), что расстояния между материальными точками системы не меняются в процессе движения. Но теорема об изменении количества движения в этом случае, строго говоря, неприменима, поскольку для твердого тела равенства (3.72) теряют смысл и неправильны²⁰. Тем не менее назовем ли мы равенство (3.73) теоремой и незаконно применим ее к выводу уравнений движения абсолютно твердого тела или скажем, что мы используем постулат (3.67), результирующие уравнения при этом никак не изменятся. Если же на абсолютно твердое тело действуют моменты, не порождаемые силами, то теорема об изменении момента количества движения ничего не дает даже при принятии аксиом (3.72).

Иллюстрация неполноты механики Ньютона. Пусть дано точечное тело массой m , которое будем рассматривать как материальную точку. Пусть это тело присоединено к концу абсолютно твердого безынерционного, т. е. не имеющего массы, стержня. Второй конец стержня закреплен с помощью цилиндрического шарнира в точке, неподвижной в данной инерциальной системе отсчета, и может свободно поворачиваться в плоскости, ортогональной оси цилиндрического шарнира. На точечную массу действует сила тяжести, направленная вертикально вниз. Поэтому вертикальное положение стержня, когда точечная масса находится в нижнем положении, является положением устойчивого равновесия. В рассмотренной системе есть еще одно положение равновесия, когда стержень направлен вертикально вверх, и точечная масса находится в верхнем положении. Это неустойчивое положение равновесия. Исключим это положение равновесия введением упругой пружины, препятствующей отклонению стержня от вертикали. Причем будем считать, что, когда точечная масса находится в нижнем положении, пружина не деформирована и, следовательно, не создает момента. Теперь рассматриваемая система, показанная на рис. 3.3, имеет единственное и притом устойчивое положение равновесия. Если стержень отклонить от вертикали и затем придать ему

¹⁹ Здесь мы видим важную особенность классической механики. Развитие механики ведет к укреплению ее логических основ и расширению ее сферы действия, но не отменяет используемых ею ранее законов.

²⁰ В абсолютно твердом теле внутренние силы не определены и не могут быть определены в принципе.

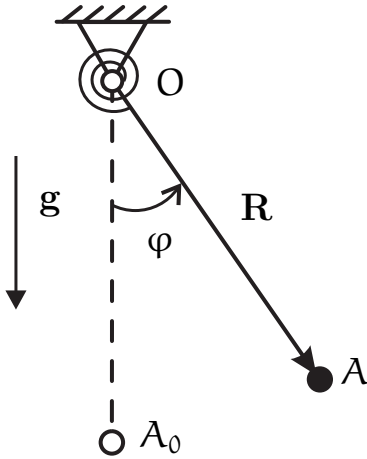


Рис. 3.3. Маятник с упругой опорой

начальную угловую скорость, которая может быть и нулевой, то стержень с точечной массой начнет совершать колебания в вертикальной плоскости. Требуется вывести уравнение движения точечной массы. Введем обозначения: тело \mathcal{A} — точечная масса, тело \mathcal{B} — стержень, тело \mathcal{C} — пружина, тело \mathcal{D} — цилиндрический шарнир, l — длина стержня, $\mathbf{R}(t)$ — вектор положения точечной массы в момент времени t .

Нашей целью является не столько вывод уравнения движения рассматриваемой системы, сколько демонстрация неполноты ньютоновой механики. В частности, будет показано, что теорема об изменении момента количества движения, доказанная в для системы материальных точек, не является заменой второго закона динамики Эйлера для рассматриваемой системы.

Запишем второй закон Ньютона, или, что в рассматриваемом случае одно и то же, первый закон динамики Эйлера для тела \mathcal{A} :

$$m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) - mg\mathbf{k}, \quad (3.74)$$

где \mathbf{k} — единичный орт вертикали, направленный вверх; вектор $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ — сила, действующая на массу со стороны стержня; $-mg\mathbf{k}$ — сила тяжести.

Никакие другие силы на точечную массу не действуют. Запишем первый закон динамики Эйлера для стержня. Поскольку он не обладает массой, то он не имеет количества движения. Поэтому

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) + \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mathbf{0}. \quad (3.75)$$

По определению, пружина реагирует только на поворот стержня, т. е.

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\mathbf{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = \mathbf{0}.$$

Два векторных уравнения (3.74) и (3.75) содержат три неизвестных вектора: $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ и $\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D})$. Иными словами, система оказалась незамкнутой. Ничего не дает нам и теорема об изменении момента количества движения системы. Действительно, умножим обе части каждого из уравнений (3.74) и (3.75) векторно на вектор $\mathbf{R}(t)$ и сложим получившиеся уравнения. В результате получим

$$m \left[\mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) \right]' = -mg \mathbf{R}(t) \times \mathbf{k} + \mathbf{R}(t) \times \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}). \quad (3.76)$$

Уравнение (3.76) по существу не дает нам нового уравнения и потому не позволяет сократить число неизвестных векторов. Ситуация была бы существенно иной, если бы вместо стержня мы рассматривали нить. В таком случае мы бы сказали, что сила $\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ направлена вдоль нити:

$$\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mu \mathbf{R}(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) \times \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mathbf{0}. \quad (3.77)$$

Конечно, условие (3.77) все равно осталось бы просто допущением, но это допущение для нити очевидно по здравому смыслу и потому приемлемо. Более того, оно является еще и правильным²¹, хотя без использования второго закона динамики Эйлера доказать это невозможно. Покажем, что условие (3.77) действительно позволяет вывести уравнение движения маятника. Для этого заметим, что при плоских движениях маятника справедливо равенство

$$\mathbf{R}(t) = l(-\cos \varphi \mathbf{k} + \sin \varphi \mathbf{j}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) = l^2 \dot{\varphi} \mathbf{i},$$

где \mathbf{i} — единичный вектор, ортогональный плоскости движения маятника; \mathbf{j} — единичный горизонтальный вектор, такой, что тройка единичных векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} является правой.

Подставляя последнее равенство в уравнение и используя условие (3.77), получаем уравнение для нахождения угла $\varphi(t)$:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (3.78)$$

Уравнение (3.78) называется уравнением плоских движений математического маятника, а система, состоящая из нити и точечного груза, называется

²¹ Напомним в вольном пересказе знаменитую теорему Геделя [44] о неполноте: *в рамках любой теории, основанной на непротиворечивой системе аксиом, существуют правильные утверждения, которые нельзя доказать на основе принятых аксиом.* В механике эта теорема находит многочисленные подтверждения.

математическим маятником. Уравнение (3.78) справедливо только в том случае, если нить растянута, поскольку нить не сопротивляется сжатию. Условие того, что нить растянута, выражается следующим неравенством:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \cdot \left[m\ddot{\mathbf{R}} + mg\mathbf{k} \right] \leq 0.$$

Здесь было использовано уравнение (3.74). Выражая здесь вектор $\ddot{\mathbf{R}}$ через угол φ , переписываем последнее неравенство в другой форме:

$$l\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi \geq 0. \quad (3.79)$$

Неравенство (3.79) можно переписать в терминах начальных отклонений и скоростей, если воспользоваться интегралом энергии, который для уравнения (3.78) легко найти. Делать это не будем, поскольку нас интересует совсем другой вопрос.

Итак, решение рассматриваемой задачи в рамках механики Ньютона оказывается невозможным. Это и неудивительно, ибо в уравнение баланса количества движения невозможно включить момент, создаваемый пружиной. Теорема об изменении момента количества движения также не может учесть этот момент, поскольку эта теорема выводится из уравнения баланса количества движения. Предположение (3.77) позволяет решить задачу, но для физически другой системы. Пружина, работающая на поворот, не может оказать влияния на нить, которая будет просто изгибаться в точке прикрепления пружины к нити. Между тем, очевидно, что пружина существенно влияет на движение абсолютно твердого стержня и, следовательно, на движение всей рассматриваемой системы. Рассмотрим описанную задачу в рамках механики Эйлера. Тела \mathcal{A} и \mathcal{B} будем рассматривать как единое тело: $\mathcal{E} = \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. В качестве отсчетного положения для тела \mathcal{E} выберем положение, когда точечная масса находится в низшем положении. В качестве полюса в теле выбираем точку в шарнире. Тогда полюс при движении тела \mathcal{E} будет оставаться неподвижным. Тензор инерции тела \mathcal{E} в отсчетном положении вычисляется по формуле²²

$$\Theta = m l^2 (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}).$$

Поскольку тело совершает движения в плоскости, то оно может поворачиваться только вокруг нормали к этой плоскости. При этом тензор поворота дается выражением

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \varphi) \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{i} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{i}.$$

²² О вычислении тензоров инерции твердых тел — см. раздел 4.4. (*Примеч. ред.*)

Второй закон динамики Эйлера для тела \mathcal{E} имеет вид

$$(\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega})' \equiv ml^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) - mg \mathbf{R} \times \mathbf{k}, \quad (3.80)$$

где $\mathbf{M}(\mathcal{E}, \mathcal{C})$ — момент, создаваемый пружиной.

Примем простейшее определяющее уравнение для пружины:

$$\mathbf{M}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) = -c\varphi \mathbf{i}, \quad (3.81)$$

где c — жесткость пружины на поворот; $\varphi = 0$, когда точечная масса находится в низшем положении.

Подставляя (3.81) в (3.80), получаем уравнение для определения угла поворота:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + c\varphi + mg \sin \varphi = 0. \quad (3.82)$$

При $c = 0$ уравнение (3.82) переходит в уравнение (3.78), но остается справедливым без ограничения, выражаемого неравенством (3.79), поскольку стержень выдерживает и сжимающие усилия. Проверим, выполняется ли условие (3.77) в данной задаче. Для этого достаточно применить второй закон динамики Эйлера к безынерционному телу \mathcal{B} и учесть, что его кинетический момент равен нулю. В качестве опорной точки выбираем шарнирно закрепленный конец стержня. При вычислении момента $\mathbf{M}^0(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ точку приведения выбираем в точке сцепления с точечной массой. Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^0(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) &= \mathbf{M}^0(\mathcal{B}, \mathcal{A}) + \mathbf{M}^0(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}) - c\varphi \mathbf{i} = -\mathbf{R} \times \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) - c\varphi \mathbf{i} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Как видим, сила, передаваемая стержнем, при $\varphi \neq 0$ не является продольной, т. е. не направлена вдоль стержня, как в нити. Последнее равенство, строго говоря, не может быть получено в рамках механики Ньютона. Тем не менее если им все же воспользоваться, то теорему об изменении кинетического момента (3.76) можно переписать следующим образом:

$$m \left[\mathbf{R}(t) \times \dot{\mathbf{R}}(t) \right]' = -mg \mathbf{R}(t) \times \mathbf{k} - c\varphi \mathbf{i}.$$

Нетрудно убедиться, что из этого равенства следует уравнение (3.82). Иными словами, второй закон динамики в рассматриваемой задаче можно не использовать, но взамен приходится использовать второй закон статики, который также невозможно доказать в рамках механики Ньютона. Отсюда видим недостаточность законов Ньютона для решения рассматриваемой задачи.

3.5.3. Первое и второе начала термодинамики

В механике дискретных систем не обсуждаются такие понятия, как внутренняя энергия, тепло, температура, энтропия. Поэтому и основные законы термодинамики остаются за рамками классической механики. Вместе с тем в механике сплошных сред законы термодинамики играют весьма важную роль. В результате при переходе от дискретных систем к сплошным средам возникает некий логический разрыв, поскольку приходится вводить понятия, чуждые детерминированной механике дискретных систем. В данной главе общая концепция законов термодинамики не обсуждается. Тем не менее кажется целесообразным ввести основные понятия термодинамики на элементарных примерах механики дискретных систем.

Если бы мы рассматривали только системы с конечным (и не слишком большим) числом степеней свободы, то первых двух законов динамики в совокупности с определяющими уравнениями было бы вполне достаточно для полного анализа всех интересующих нас вопросов. В механике сплошных сред, т. е. систем с бесконечным числом степеней свободы, ситуация оказывается сложнее. Здесь уже невозможно описать состояние среды, пользуясь только понятиями сил и моментов. Дополнительно приходится вводить такие первичные понятия, как внутренняя энергия, тепловая энергия, температура и энтропия. Понятие внутренней энергии можно ввести и в системах с конечным числом степеней свободы, где внутренняя энергия вводится как потенциал внутренних сил. В механике сплошных сред это уже не всегда возможно. Понятия температуры и энтропии знакомы практически всем. Тем не менее их строгое определение наталкивается на серьезные затруднения. В механике сплошных сред эти затруднения до некоторой степени разрешаются формулировкой первого и второго начал термодинамики.

В данной работе мы используем упрощенные формулировки, поскольку наша цель — на простых примерах пояснить такие основные понятия термодинамики, как внутренняя энергия, температура и энтропия²³. В частности,

²³ В этом разделе П. А. Жилин показывает, что метод введения основных понятий термодинамики, принятый в механике сплошных сред, можно использовать применительно к дискретным системам, в том числе к системам, состоящим из очень небольшого числа частиц. Предложенные П. А. Жилиным формулировки являются упрощенными (по сравнению с механикой сплошных сред) только с математической точки зрения. С физической точки зрения данные формулировки — точный аналог тех, которые П. А. Жилин дает для сплошных сред. Поэтому данные формулировки можно рассматривать не только как упрощенный вариант метода механики сплошных сред, но и как расширение термодинамических понятий на механику дискретных систем с небольшим числом частиц. В этом смысле метод П. А. Жилина является уникальным. (*Примеч. ред.*)

понятие энтропии, используемое далее, отличается от известных определений²⁴.

Уравнение баланса энергии, или первый закон термодинамики.

Скорость изменения полной энергии произвольной системы равна мощности внешних воздействий плюс скорость подвода энергии “немеханического происхождения” обычно в форме тепла.

Дать общее и строгое определение понятию энергии “немеханического происхождения” затруднительно. Поэтому ограничимся неопределенным заявлением о том, что энергия “немеханического происхождения” — это та часть энергии, которая подводится не через мощность внешних воздействий. Поясним указанное простейшим примером. Пусть два грузика, соединенные пружиной, могут совершать движения вдоль трубки с осью x . Рассмотрим две похожие ситуации. В первой из них между грузиками и стенками трубки действуют силы вязкого трения. Во втором случае стенки трубки идеально гладкие, но между грузиками вставлен демпфер вязкого трения. Полная энергия системы имеет один и тот же вид в обоих случаях:

$$E = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} c (x_1 - x_2)^2, \quad (3.83)$$

где c — жесткость пружины.

Однако уравнение баланса энергии в этих двух случаях пишется по-разному:

$$1) \quad \dot{E} = -b_1 \dot{x}_1^2 - b_2 \dot{x}_2^2; \quad 2) \quad \dot{E} = -b (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2, \quad (3.84)$$

где постоянные коэффициенты b_1 , b_2 , b называются коэффициентами вязкости.

В первом случае рассеяние энергии происходит за счет мощности внешних сил, причем подвод энергии “немеханического происхождения” отсутствует. Во втором случае мощность внешних сил равна нулю, а рассеяние энергии происходит благодаря подводу (в данном случае — отводу) энергии “немеханического происхождения”. При этом мы часто говорим, что энергия рассеивается в окружающую среду в виде тепла.

Каждое уравнение баланса вводит в рассмотрение новое понятие. В первом законе динамики впервые вводится понятие силы. Во втором законе динамики вводится новое понятие момента, не сводящееся к понятию момента силы. Уравнение баланса энергии вводит в рассмотрение сразу два новых понятия: внутреннюю энергию и скорость подвода энергии в систему. В дальнейшем мы покажем, что и такие понятия, как температура и энтропия, также

²⁴ Энтропия — видимо, одно из наиболее туманных понятий в механике, которое используется во многих смыслах, а иногда и вовсе без смысла.

вводятся посредством специальной математической формулировки уравнения баланса энергии.

Обсуждение уравнения баланса энергии проведем на элементарном примере двух грузиков, соединенных безынерционной пружиной общего вида. Предварительно рассмотрим одну материальную точку. При обычной трактовке подвод энергии “немеханического происхождения” к материальной точке невозможен. Поэтому уравнение баланса энергии для нее имеет простейший вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{U} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}, \quad (3.85)$$

где \mathcal{U} — внутренняя энергия, \mathbf{F} — сила, действующая на материальную точку.

Вычисляя производную по времени в левой части уравнения (3.85) и учитывая первый закон динамики $m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}$, получаем, что внутренняя энергия материальной точки постоянна. Именно поэтому в классической механике внутренняя энергия исключается из рассмотрения. Между прочим в упомянутой постоянной энергии заключаются огромные энергии, например, атомная энергия. Ситуация изменилась бы, если бы мы захотели рассматривать распад одной частицы на несколько новых частиц. В таком случае внутренняя энергия перестала бы быть неизменной. При этом игнорировать скорость подвода энергии уже было бы нельзя.

Рассмотрим теперь тело, состоящее из двух материальных точек, соединенных безынерционной пружиной. Допустим, что внутри этого тела возможны потери энергии, например, из-за наличия демпфера между частицами. Запишем уравнение баланса энергии для рассматриваемого тела:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_1 \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \mathcal{U} \right) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \delta, \quad (3.86)$$

где \mathcal{U} — внутренняя энергия рассматриваемого тела, δ — скорость подвода энергии в систему, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ — внешние силы, действующие на первую и вторую частицы, соответственно.

Подчеркнем, что в силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ не входят внутренние силы. В данном случае внутренние силы — это силы, действующие на частицы со стороны пружины, а также силы внутреннего трения.

Пусть, например, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ — силы трения о внешнюю среду:

$$\mathbf{F}_1 = -b_1 \dot{\mathbf{R}}_1, \quad \mathbf{F}_2 = -b_2 \dot{\mathbf{R}}_2, \quad (3.87)$$

где постоянные величины b_1 и b_2 называются коэффициентами вязкости.

Уравнение баланса энергии (3.86) можно переписать в эквивалентном виде:

$$m_1 \dot{\mathbf{V}}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + m_2 \dot{\mathbf{V}}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \dot{U} = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{V}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{V}_2 + \delta. \quad (3.88)$$

Уравнение (3.88) следует еще немного преобразовать и исключить из него внешние силы, поскольку они ни в какой степени не характеризуют рассматриваемую систему. Для этого выпишем уравнения движения (первый закон динамики) для обеих частиц в отдельности и для всего тела:

$$\begin{aligned} m_1 \dot{\mathbf{V}}_1 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{1i}, & m_2 \dot{\mathbf{V}}_2 &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_{2i}, \\ m_1 \dot{\mathbf{V}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{V}}_2 &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \end{aligned} \quad (3.89)$$

где \mathbf{F}_{1i} , \mathbf{F}_{2i} — внутренние силы, действующие на первую и вторую частицы, соответственно.

Складывая первые два уравнения системы (3.89) и учитывая третье уравнение, получаем

$$\mathbf{F}_{1i} + \mathbf{F}_{2i} = \mathbf{0}. \quad (3.90)$$

Это аналог третьего закона Ньютона. С учетом уравнений (3.89) и (3.90) уравнению баланса энергии (3.88) можно придать следующий вид:

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1i} \cdot (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) + \delta \equiv -\mathbf{F}_{1i} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (3.91)$$

Уравнение (3.91) носит название приведенного уравнения баланса энергии. Его существенное отличие от (3.88) состоит в том, что в него не входят никакие внешние параметры. Поэтому приведенное уравнение баланса энергии характеризует саму рассматриваемую систему и оказывается удобным для дальнейшего анализа.

Но предварительно следует сказать еще несколько слов о понятии внутренней энергии. По определению и по физическому смыслу она не может зависеть от скоростей изменения основных кинематических переменных. Но глубокое противоречие состоит в том, что внутренняя энергия, как правило, *обязана зависеть* от неких относительных скоростей игнорируемых нами переменных²⁵. Например, при деформации кристаллической решетки ее атомы

²⁵ Рассмотрим тело, состоящее из молекул, которые в свою очередь состоят из атомов. Если при моделировании тела учитывается движение каждого атома в отдельности, то в модели нет игнорируемых переменных, и кинетическая энергия тела есть сумма кинетических энергий атомов. Если при моделировании тела молекулы считаются материальными точками, то относительные скорости движения атомов в молекулах не могут попасть в кинетическую энергию. Таким образом, кинетические энергии тела в рассмотренных моделях будут разными. Но полные энергии должны быть одинаковыми. Следовательно, во второй модели внутренняя энергия должна зависеть от относительных скоростей движения атомов в молекулах. (*Примеч. ред.*)

смещаются от положений равновесия, и эти смещения меняют внутреннюю энергию решетки. В то же время известно, что атомы не покоятся в узлах решетки, а совершают быстрые колебания относительно средних положений, которые и воспринимаются нами как положения равновесия при макроскопическом рассмотрении. Представляется очевидным, что внутренняя энергия решетки зависит от скоростей упомянутых колебаний атомов, поскольку именно эти колебания определяют многие механические свойства тела. Если бы мы полностью учли движения атомов, то и в этом случае осталась бы проблема учета движений электронов внутри атома. Даже если бы мы рассматривали систему, состоящую, например, из свободных электронов, то осталась бы проблема учета энергии электромагнитного поля. Таким образом, Вселенная всегда будет оставаться значительно богаче любых рассматриваемых нами моделей. И та часть Вселенной, которая не учитывается в наших моделях, всегда будет взаимодействовать с выделенными системами и влиять на их внутреннюю энергию. Чтобы как-то разрешить это, строго говоря, неустранимое противоречие, можно поступить следующим образом. Будем считать, что плотность внутренней энергии зависит не только от конфигурации тела, т. е. от положений частиц, составляющих тело, в данный момент времени, но и от некоего параметра, называемого энтропией H .

Введение энтропии является попыткой как-то учесть зависимость внутренней энергии от скоростей неучитываемых нами степеней свободы. Всегда ли это возможно? Отрицательный ответ на этот вопрос очевиден. Но замечательно то, что этот прием часто оказывается весьма удовлетворительным с практической точки зрения. Не следует только наделять энтропию некими фундаментальными, вплоть до мистических, свойствами.

Вернемся теперь к приведенному уравнению баланса энергии (3.91). Примем, что внутренняя энергия рассматриваемого тела зависит от векторов положений частиц тела и энтропии. Используя принцип независимости от выбора системы отсчета, нетрудно доказать, что внутренняя энергия рассматриваемого тела есть функция вида

$$U = U(\gamma, H), \quad \gamma \equiv |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2, \quad (3.92)$$

где параметр H будем называть энтропией.

Внутренние силы представим в виде суперпозиции:

$$\mathbf{F}_{1i} = \mathbf{F}_{1e}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, H) + \mathbf{F}_{1d}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dot{\mathbf{R}}_1, \dot{\mathbf{R}}_2, H), \quad (3.93)$$

где индексами e и d обозначены соответственно упругая и диссипативная составляющие силы.

Теперь приведенное уравнение баланса энергии (3.91) можно переписать в виде

$$\dot{U} = -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' - \mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (3.94)$$

Левая часть этого равенства является полной производной по времени от внутренней энергии. Следовательно, и правая часть (3.94) должна быть полной производной. Чтобы получить полную производную, введем в рассмотрение новую неизвестную переменную ϑ , которую в дальнейшем будем называть температурой, посредством равенства

$$\vartheta \dot{H} = -\mathbf{F}_{1d} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \delta. \quad (3.95)$$

Следует подчеркнуть, что равенство (3.95) не требует принятия никаких новых допущений. Правда, остается пока неясным, можно ли назвать введенный параметр ϑ температурой. Проблема в том, что, например, в статистической физике температура вводится посредством вполне определенных рассуждений, которые невозможно увязать с принятым ранее способом введения температуры. В данной работе мы лишены возможности провести детальное обсуждение этого трудного вопроса. Поэтому ограничимся декларацией о том, что принятый способ введения температуры в принципе согласуется с механикой сплошных сред и классической термодинамикой.

Аналог уравнения (3.95) в механике сплошных сред носит название уравнения теплопроводности. Подставив (3.95) в приведенное уравнение баланса энергии (3.94), получим равенства

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -\mathbf{F}_{1e} \cdot (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)' + \vartheta \dot{H} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{F}_{1e} &= 2 \frac{\partial U}{\partial \gamma} (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1), \quad \vartheta = \frac{\partial U}{\partial H}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Последними двумя равенствами определяются сила упругости²⁶, возникающая при деформации пружины, и температура, если считать, что внутренняя энергия системы каким-то образом задана.

Конкретный вид внутренней энергии зависит от физических свойств системы и может быть установлен только на основе интуитивных представлений, включающих в себя знание основных экспериментальных данных. Если энтропию считать не имеющей физической размерности, то температура будет иметь смысл энергии, которую обычно называют тепловой. В общем случае температура есть энергия на единицу энтропии. Если энтропию считать имеющей размерность, то и размерность температуры изменится.

²⁶ Выражение для силы получено с учетом выражения (3.92) и определения производной скалярной функции по векторному аргументу, см. раздел 1.7. (*Примеч. ред.*)

По смыслу своего введения *температура — это энергия движения системы по игнорируемым степеням свободы.*

В рассматриваемом нами примере о двух грузиках, соединенных пружинной и демпфером,

$$\mathbf{F}_{1d} = -\mathbf{b} (\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2),$$

где \mathbf{b} — постоянный коэффициент, называемый коэффициентом вязкости демпфера.

Подставив это выражение в уравнение производства тепла (3.95), получим

$$\vartheta \dot{H} = \mathbf{b} |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 + \delta. \quad (3.97)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (3.97) — это тепло, вырабатываемое в системе в единицу времени, а второе слагаемое в правой части — тепло, излучаемое системой в единицу времени в окружающую среду. Таким образом, вся правая часть уравнения (3.97) — это тепло, накапливаемое телом в единицу времени.

Мощность излучения δ , вообще говоря, уже не определяется только свойствами тела, но зависит также и от свойств (например, температуры) окружающей среды. Определение функции δ — отдельная задача.

Примем, например, следующее определяющее уравнение для мощности излучения:

$$\delta = -\eta \mathbf{b} |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2, \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad (3.98)$$

где коэффициент η показывает, какая часть вырабатываемой в теле мощности излучается в окружающую среду.

Подставив (3.98) в (3.97), получим уравнение для производства тепла в следующем виде:

$$\vartheta \dot{H} = (1 - \eta) \mathbf{b} |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2. \quad (3.99)$$

Заметим, что второе из уравнений (3.84) записано для $\eta = 1$, когда энтропия системы сохраняется постоянной, как это следует из (3.99).

Следует обратить внимание на тот факт, что в правую часть (3.97) не вошли характеристики вязкого трения частиц о внешнюю среду. Упомянутые характеристики входят во внешние силы и потому исключаются из приведенного уравнения баланса энергии. Ситуация может показаться странной, поскольку, как известно, тело нагревается при трении о внешнюю среду. Однако этот нагрев должен учитываться введением некоего механизма внутри материальных точек, чтобы сделать их способными накапливать тепло.

Уравнение (3.99) служит для определения температуры в теле. Но само по себе оно недостаточно, ибо содержит две неизвестные функции: температуру

ϑ и энтропию H . Для замыкания уравнения (3.99) необходимо дополнительное уравнение, связывающее температуру и энтропию. Трудность состоит в том, что энтропия является неизмеряемым параметром. По существу она служит только для того, чтобы правильно определить температуру.

Примем, что параметр ϑ есть температура, измеряемая термометром по некоей выбранной процедуре. Пусть, например, ϑ — измеряемая температура корпуса демпфера. Теперь необходимо сформулировать определяющее уравнение, связывающее температуру ϑ и энтропию H . Подчеркнем, что определяющее уравнение можно формулировать только после определения смысла температуры, например, как измеряемого термометром параметра. Примем простейшее определяющее уравнение для температуры²⁷:

$$\vartheta = \vartheta(H) = c^{-1} H \quad \Rightarrow \quad H = c \vartheta, \quad (3.100)$$

где c — экспериментально определяемый параметр.

Подставляя (3.100) в (3.99), находим температуру:

$$c \vartheta \dot{\vartheta} = (1 - \eta) b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \left[\vartheta_0^2 + \frac{2(1 - \eta)b}{c} \int_0^t |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 dt \right]^{1/2},$$

где ϑ_0 — начальная температура.

Если наблюдаемые экспериментальные данные удастся удовлетворительно описать при подходящем выборе постоянной c , то определяющее уравнение (3.100) можно считать приемлемым. В противном случае необходимо принимать другое определяющее уравнение.

Если принять определяющее уравнение для температуры (3.100) и определяющие уравнения для внешних сил (3.87), то уравнение баланса энергии рассматриваемой системы запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2 - \eta b |\dot{\mathbf{R}}_1 - \dot{\mathbf{R}}_2|^2 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(E + \frac{\eta c \vartheta^2}{2(1 - \eta)} \right) &= -b_1 |\dot{\mathbf{R}}_1|^2 - b_2 |\dot{\mathbf{R}}_2|^2. \end{aligned}$$

Это равенство справедливо только при $\eta \neq 1$. На рассмотренном примере отчетливо видно, что никакого объективного (измеряемого) смысла энтропия сама по себе не имеет. Она служит только для того, чтобы получить приемлемое уравнение для нахождения температуры. Что касается температуры, то

²⁷ Сейчас мы не заботимся о действительном соответствии этого уравнения реальности, а хотим продемонстрировать только идею нахождения температуры.

в данном примере это энергия движения атомов корпуса и масла демпфера, т. е. энергия движения игнорируемых степеней свободы.

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики, в основании которого лежит опытный факт о том, что вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, а потому она полностью определена и, следовательно, может быть переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это некая характеристика состояния не только рассматриваемой системы, но и ее окружения.

Тепло неизбежно излучается из системы, в том числе и в непроявленную, т. е. в не учитываемую нами, Вселенную. При этом следует подчеркнуть, что ни одна из существующих в настоящее время формулировок второго закона термодинамики не может претендовать на тот же уровень фундаментальности, каким обладают законы динамики Эйлера и уравнение баланса энергии. Более того, маловероятно, что в ближайшем будущем удастся выдвинуть такую формулировку второго закона термодинамики, которая будет полноценно отражать всю совокупность идей, связанных с этим законом.

Второе начало термодинамики имеет очень много различных формулировок. В общих чертах второе начало термодинамики утверждает, что в реальности не существует изолированных систем. Иными словами, всякая система неизбежно излучает часть своей энергии в окружающую среду.

Общая формулировка второго закона термодинамики. *Тепловая энергия не может быть полностью переведена в работу и неизбежно частично теряется в виде излучения в окружающую среду.*

Следует иметь в виду, что окружающая среда не имеет границ в пространстве, т. е. “тепловые волны” неизбежно уносят часть тепловой энергии. Фактически в рациональной механике под вторым законом термодинамики понимают совокупность неких утверждений, выражающих интуитивные представления о поведении реальных систем.

Примером представления такого рода является следующее рассуждение. Ранее мы рассматривали две материальные точки, соединенные пружиной. При этом допускалось, что эта система способна существовать сколь угодно долго. Подобное допущение справедливо не всегда. Достаточно вспомнить о существовании радиоактивных элементов и короткоживущих элементарных частиц. В рациональной науке словесные утверждения ничего не значат, ес-

ли они не находят своего отражения в тех или иных математических формулировках. В рассматриваемом случае длительное существование системы возможно тогда и только тогда, когда энергия деформации пружины²⁸ удовлетворяет условию:

$$\frac{1}{2} c |\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|^2 > 0 \quad (\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2) \quad \Rightarrow \quad c > 0.$$

Если $c < 0$, то легко убедиться, что любые бесконечно малые возмущения этой системы приведут к появлению решений, которые неограниченно возрастают во времени, что приведет к взрывному разрушению системы. Если же $c > 0$, то система будет сопротивляться всяким попыткам ее разрушить, т. е. при приложении внешней нагрузки ее внутренняя энергия будет возрастать.

Приведенное здесь рассуждение, конечно, нельзя связывать со вторым законом термодинамики, поскольку оно не связано со взаимоотношением системы с окружающей средой. Однако если не буква, то дух этих рассуждений полностью сохраняется и при формулировке второго закона термодинамики.

Ко второму закону термодинамики относят следующие утверждения.

Первое. *Тепло всегда течет от горячего тела к холодному.* Это утверждение известно под названием нулевого начала термодинамики. Однако его нельзя обосновать без привлечения окружающей среды (электромагнитного поля²⁹). В данной главе потоки тепла не рассматривались.

Второе. *Силы трения не могут совершать положительную работу.* Для рассматриваемой нами системы из этого утверждения следуют неравенства

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b > 0.$$

Третье. *При отсутствии внешних силовых и моментных воздействий всякая система стремится к равновесию с окружающей средой, например, излучает энергию в окружающую среду.* В рассмотренном примере это утверждение равносильно условию:

$$\delta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \eta.$$

Четвертое. *Энтропия всякой системы либо постоянна, либо возрастает с ростом времени.* В рассмотренном примере это утверждение приводит к неравенству:

$$\dot{H} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \eta \leq 1.$$

²⁸ Следующее далее условие достаточно только в линейном приближении.

²⁹ Под окружающей средой П. А. Жилин понимает не только материю, но и поля, т. е. все, что может взаимодействовать с данным телом и куда может рассеиваться энергия. (Примеч. ред.)

Третье и четвертое утверждения в совокупности ведут к неравенству $0 \leq \eta \leq 1$, использованному в (3.98).

Формулировка второго закона термодинамики считается приемлемой, если из нее вытекают следствия, подобные приведенным утверждениям. Подробное изложение истории развития понятия энтропии и различные варианты формулировок второго закона термодинамики можно найти в превосходной книге [45]. Тем не менее далеко не со всеми утверждениями книги [45] можно согласиться.

В настоящее время понятия температуры и энтропии и их объективный смысл окончательно не установлены. Конечно, термометр позволяет³⁰ нам измерить объективно существующую величину, называемую температурой. Мы можем попытаться подобрать такую функцию, называемую энтропией, чтобы измеряемая в эксперименте температура совпадала бы с вводимой в теории. Часто такая попытка оказывается успешной. Что касается энтропии, то ее никто и никогда не измерял.

В данном разделе мы хотели дать только приблизительное представление о втором законе термодинамики.

³⁰ Впрочем, и здесь имеются свои нерешенные проблемы.

Глава 4

Классическая модель твердого тела и модель квазитвердого тела

4.1. Классическая модель абсолютно твердого тела

Вычислим динамические структуры (кинетическую энергию, количество движения и кинетический момент) абсолютно твердого тела, являющегося наряду с материальной точкой одной из основных моделей, рассматриваемых в рациональной механике. В разделе 2.3 показано, что движение абсолютно твердого тела определено, если заданы вектор положения произвольно выбранной точки тела, жестко зафиксированной относительно тела и называемой полюсом, и тензор поворота тела. В этом же разделе доказана основная теорема кинематики абсолютно твердого тела, которая позволяет найти вектор положения $\mathbf{R}(t)$ текущей точки тела:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_X(t) + \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X), \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}(0), \quad \mathbf{r}_X = \mathbf{R}_X(0), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{R}_X(t)$ — вектор положения произвольно выбираемой точки X , называемой полюсом и зафиксированной в теле \mathcal{A} ; $\mathbf{P}(t)$ — тензор поворота тела.

По выражению (4.1) вычисляем распределение скоростей в твердом теле¹:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X) = \mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{R}}_X, \quad \mathbf{S} \equiv -\mathbf{E} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X). \quad (4.2)$$

В рассматриваемом случае кинетическая энергия абсолютно твердого тела может быть вычислена непосредственно. Для этого все тело разделим на бесконечно малые части массой $d\mathbf{m}$. Эти малые части будем рассматривать

¹ Формула (4.2) выводится путем следующих преобразований:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_X(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}(t) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X),$$

в ходе которых использовано уравнение Пуассона (2.95). (*Примеч. ред.*)

как материальные точки, кинетическую энергию которых вычисляем по простейшей формуле:

$$dK(A) = \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}(t).$$

Полную кинетическую энергию находят как интеграл по всей массе тела:

$$\begin{aligned} K(A) &= \frac{1}{2} \int_{(m)} \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) dm = \\ &= \int_{(m)} \left[\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \boldsymbol{\omega} \right] dm. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Подставляя сюда последнее выражение (4.2) и учитывая, что скорость полюса \mathbf{X} и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависят от положения точки в области интегрирования, получаем

$$K(A) = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (4.4)$$

где

$$\mathbf{B}^{(X)} = \int_{(m)} \mathbf{S} dm = m (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E} \quad \left(\mathbf{R}_C = \frac{1}{m} \int_{(m)} \mathbf{R} dm \right), \quad (4.5)$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{(X)} = - \int_{(m)} \mathbf{S}^2 dm = \int_{(m)} \left[|\mathbf{R} - \mathbf{R}_X|^2 \mathbf{E} - (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X) \otimes (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X) \right] dm, \quad (4.6)$$

m — масса всего тела, вектор \mathbf{R} определяет положение элемента dm , вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_X$ определяет скорость полюса.

В выражении (4.5) фигурирует вектор \mathbf{R}_C , который определяет положение центра масс тела. Выражение для кинетической энергии (4.4) показывает, что тензор \mathbf{A} в данном случае равен единичному тензору. Тензор $\mathbf{B}^{(X)}$ вычислен в явном виде и зависит только от выбора полюса и вектора положения центра масс. Если полюс тела выбрать в центре масс, то тензор $\mathbf{B}^{(C)}$ становится нулевым. Тензор $\boldsymbol{\Theta}^{(X)}$ называется эйлеровым тензором инерции². Он также зависит от выбора полюса в теле. Если в качестве полюса выбирается центр масс тела, то тензор $\boldsymbol{\Theta}^{(C)}$ называется центральным тензором инерции. Указание на полюс в обозначении тензоров инерции в дальнейшем будет опускаться в тех случаях, когда это не ведет к недоразумениям.

² Термин “эйлеров тензор инерции” введен П. А. Жилиным. В литературе тензор $\boldsymbol{\Theta}^{(X)}$ называется просто “тензор инерции”. (Примеч. ред.)

Количество движения тела \mathcal{A} вычисляется по формуле³

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) &= \int_{(m)} \dot{\mathbf{R}} \, dm = \int_{(m)} [\mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}] \, dm = \\ &= \int_{(m)} [\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X)] \, dm = m \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Кинетический момент, вычисленный относительно опорной точки Q , определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) &= \int_{(m)} (\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X)) \, dm = \\ &= (\mathbf{R}_X(t) - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Сравнивая полученные выражения (4.4), (4.7) и (4.8) с соответствующими выражениями для односпиновой частицы (3.7), (3.11) и (3.12), видим их внешнее совпадение. Различие только в том, что для абсолютно твердого тела тензоры инерции конкретизированы формулами (4.5) и (4.6). При этом тензор \mathbf{B} для абсолютно твердого тела оказался антисимметричным, в то время как у односпиновой частицы он в принципе может быть любым. В частности, для кинетической энергии (3.13) он был симметричным: $\mathbf{B} = \mathbf{q}\mathbf{E}$. Такие односпиновые частицы в классической механике не рассматривались.

Обсудим различные формы записи кинетической энергии для абсолютно твердого тела. Поскольку тензор инерции (4.6) является симметричным, для его представления можно использовать теорему о спектральном разложении (см. раздел 1.12). В отсчетном положении этот тензор инерции может быть записан в виде спектрального разложения:

$$\boldsymbol{\Theta}_0 = \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \quad (4.9)$$

В актуальном положении тензор инерции также имеет спектральное разложение:

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{P}^T = \Theta_1 \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_1 + \Theta_2 \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{D}_2 + \Theta_3 \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{D}_3, \quad \mathbf{D}_i \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{d}_i. \quad (4.10)$$

В представлении (4.10) векторы \mathbf{D}_i — собственные векторы тензора инерции в актуальном положении. Очевидно, что они являются вращающимися

³ При выводе (4.7) использовались формулы (4.5). (*Примеч. ред.*)

вместе с телом собственными векторами \mathbf{d}_i , которые фиксированы относительно тела. Левую и правую угловые скорости можно представить в виде следующих разложений по главным осям тензоров инерции⁴:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{D}_i, \quad \boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \mathbf{d}_i, \quad \omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{D}_i = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{d}_i = \Omega_i. \quad (4.11)$$

Видим, что координаты левой угловой скорости относительно главных осей тензора инерции в актуальном положении совпадают с координатами правой угловой скорости относительно главных осей тензора инерции в отсчетном положении. Иными словами, положение левой угловой скорости относительно вращающегося тела точно такое же, как и положение правой угловой скорости относительно отсчетного положения тела. Напомним, что модули левой и правой угловых скоростей одинаковы. Подставляя разложения (4.9), (4.10), (4.11) в выражение для кинетической энергии (4.4), получаем

$$K = \frac{m}{2} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Theta_i \omega_i^2 = \frac{m}{2} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Theta_i \Omega_i^2, \quad (4.12)$$

где Θ_i — главные центральные моменты инерции.

Если тело вращается вокруг неподвижной точки, то удобнее пользоваться выражением для кинетической энергии в виде

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Theta_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Theta_i \Omega_i^2,$$

где Θ_i — главные моменты инерции, вычисленные относительно неподвижной точки, т. е. они отличаются от моментов инерции, входящих в (4.12), если неподвижная точка не совпадает с центром масс.

Формула (4.12) дает ясное представление о различии вкладов в кинетическую энергию абсолютно твердого тела трансляционного и спирного движений. Зависимость кинетической энергии от трансляционной скорости является изотропной, т. е. энергия этого движения не зависит от направления трансляционной скорости по отношению к телу, а зависит только от квадрата модуля трансляционной скорости. Зависимость кинетической энергии от спирного движения (угловой скорости) является анизотропной, т. е. энергия спирного движения зависит не только от модуля угловой скорости, но и от

⁴ Здесь учтена формула (2.93), связывающая левую и правую угловые скорости посредством тензора поворота: $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t)$. (Примеч. ред.)

ее направления по отношению к телу. При заданном модуле угловой скорости энергия минимальна, когда вращение происходит вокруг оси с минимальным моментом инерции. Напротив, энергия максимальна, когда вращение происходит вокруг оси с максимальным моментом инерции.

4.2. Квазитвердое тело и его динамические структуры

При определении динамических структур абсолютно твердого тела мы благополучно избежали некоей ошибки, которую мог бы совершить человек, неясно чувствующий различие между трансляционным и спинорным движениями. Трудность в том, что и в трансляционном движении, и в спинорном движении имеет смысл понятие угловой скорости. Именно поэтому и понадобилось вводить специальный термин “спинорное движение” вместо не вполне определенного термина “вращательное движение”. Ниже различие между этими терминами проявится весьма отчетливо. Чтобы проявить это затруднение, рассмотрим пример квазитвердого тела, состоящего из вращающихся частиц, расстояние между которыми не меняется в процессе движения.

Предварительно рассмотрим абсолютно твердое тело на основе способа, отличающегося от подхода предыдущего раздела. Как и в предыдущем разделе, будем исходить из определения кинетической энергии (4.3):

$$K(A) = \frac{1}{2} \int_{(m)} \dot{\mathbf{R}}(t) \cdot \dot{\mathbf{R}}(t) dm.$$

Воспользовавшись кинематическим соотношением (4.2), запишем выражение для массовой плотности кинетической энергии в виде

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (-\mathbf{S}^2) \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.13)$$

С учетом (4.13) выражение для кинетической энергии принимает вид⁵

$$K(A) = \int_{(m)} \mathcal{K} dm = \int_{(m)} \left[\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (-\mathbf{S}^2) \cdot \boldsymbol{\omega} \right] dm. \quad (4.14)$$

Сравнивая выражение (4.14) с выражением (3.24) для кинетической энергии тела, составленного из односпиновых частиц, видим, что они совпадают

⁵ Разумеется, выражение (4.14) совпадает с полученным ранее выражением (4.3). Ключевым моментом, на котором основаны дальнейшие рассуждения, является введение массовой плотности кинетической энергии как квадратичной формы трансляционной и угловой скоростей. (*Примеч. ред.*)

при $\mathbf{B} = \mathbf{S}$ и $\mathbf{C} = -\mathbf{S}^2$. Воспользуемся в таком случае формулами (3.25) и (3.26) соответственно для определения количества движения и кинетического момента. Для количества движения получаем

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \int_{(m)} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{m} = \int_{(m)} [\mathbf{v} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}] d\mathbf{m} = m \mathbf{v} + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (4.15)$$

где тензор \mathbf{B} дается выражением

$$\mathbf{B} = \int_{(m)} \mathbf{S} d\mathbf{m} = m (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E}.$$

Сравнивая выражения (3.30) и (4.15), видим, что оба подхода ведут к одинаковым результатам при вычислении количества движения. Обратимся к вычислению кинетического момента и воспользуемся формулой (3.26). В результате получим

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q &= \int_{(m)} \left[(\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right] d\mathbf{m} = \\ &= \int_{(m)} \left[(\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right] d\mathbf{m} = \\ &= (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \int_{(m)} \left[\mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right] d\mathbf{m} = \\ &= (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + 2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где тензор $\boldsymbol{\Theta}$ определен формулой (4.6).

Сравнивая выражения (4.16) и (4.8), видим, что они не совпадают: произошло удвоение динамического спина. Разумеется, правильным является выражение (4.8). Следовательно, мы совершили какую-то ошибку. Особенно неприятно то, что формально мы сделали все правильно.

Допущенная ошибка имеет не формально-математический характер, а чисто физическую природу: необходимо было использовать не формулу (3.26) для тел из односпиновых частиц, а определение кинетического момента для тела, составленного из бесспиновых частиц, т. е. из материальных точек.

В этом случае вместо (4.16) получили бы

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q &= \int_{(m)} \left[(\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} \right] dm = \\ &= \int_{(m)} \left[(\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + (\mathbf{R} - \mathbf{R}_X) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} \right] dm = \\ &= (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 - \int_{(m)} \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} dm = (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

На этом примере ясно видно, что наличие в выражении для кинетической энергии вектора угловой скорости не является признаком учета спинорных движений. Например, движение материальной точки по окружности можно описать с помощью вектора угловой скорости, но это движение является трансляционным.

Чтобы еще лучше выявить различие между телами, составленными из бесспиновых частиц, и телами, составленными из односпиновых частиц, рассмотрим квазитвердое тело, составленное из вращающихся частиц, расстояния между которыми не меняются в процессе движения. Квазитвердое тело можно представить себе следующим образом. Пусть дано абсолютно твердое тело, которое будем называть несущим. Для наглядности можно представлять себе несущее тело в виде тела, в котором имеется множество маленьких полостей. Пусть в каждой полости установлен миниатюрный гироскоп, центр масс которого неподвижен относительно несущего тела. Гироскоп состоит из вращающегося ротора, закрепленного в специальной конструкции, называемой кардановым подвесом. При вращении ротора его ось может поворачиваться. Если ось ротора закреплена относительно несущего тела, а сам ротор является телом вращения, то распределение массы в таком квазитвердом теле не меняется в процессе движения. *Квазитвердое тело, распределение массы в котором не меняется в процессе движения, называется гиростатом.* Если квазитвердое тело состоит из односпиновых частиц, то более точным образом квазитвердого тела является кристаллическая решетка (безынерционное несущее тело), в узлах которой находятся быстро вращающиеся атомы. На самом деле атом нужно моделировать многоспиновой частицей, но в иллюстративном примере можно ограничиться и односпиновыми атомами, которые в Природе не встречаются.

Итак, рассмотрим тело, состоящее из множества вращающихся частиц. Допустим, что в момент времени $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ положение центра масс типичной

частицы определялось вектором положения \mathbf{r} . Ориентацию этой частицы относительно системы отсчета при $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ определим заданием тензора поворота $\mathbf{P}_0(\mathbf{r})$. Движение частицы определяется заданием вектора положения $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$, причем $\mathbf{R}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = \mathbf{r}$, и тензора поворота $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$, такого, что $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = \mathbf{P}_0(\mathbf{r})$.

Примем теперь, что векторы положений центров масс частиц, составляющих рассматриваемое тело, образуют абсолютно твердое тело, которое будем называть несущим телом. Тогда для векторов положений односпиновых частиц, т. е. для несущего тела, справедлива основная теорема кинематики абсолютно твердого тела:

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{R}_O(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O), \quad (4.17)$$

где в качестве полюса выбрана точка, зафиксированная относительно несущего тела, причем $\mathbf{R}_O(\mathbf{0}) = \mathbf{r}_O$, а тензор $\mathbf{Q}(\mathbf{t})$ определяет поворот несущего тела.

По выражению (4.17) находим трансляционную и угловую скорости несущего тела:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) &= \mathbf{v}_O(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\omega}_Q(\mathbf{t}) \times (\mathbf{R}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) - \mathbf{R}_O(\mathbf{t})), \\ \mathbf{v}_O(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{R}}_O(\mathbf{t}), \quad \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_Q(\mathbf{t}) \times \mathbf{Q}(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}_Q$ — угловая скорость несущего тела.

Угловая скорость частиц определяется по тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$:

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \times \mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{t}). \quad (4.19)$$

Тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ можно представить в виде композиции поворотов:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega}_Q(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\omega}_S(\mathbf{r}, \mathbf{t}), \quad (4.20)$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}_S$ — угловая скорость частицы относительно несущего тела.

Таким образом, мы видим, что движение квазитвердого тела характеризуется двумя угловыми скоростями: угловой скоростью несущего тела $\boldsymbol{\omega}_Q(\mathbf{t})$, которая характеризует трансляционные движения частиц квазитвердого тела, и полем угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{t})$ (или полем относительных угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_S(\mathbf{r}, \mathbf{t})$), характеризующим спинорные движения частиц квазитвердого тела.

Запишем выражение для кинетической энергии квазитвердого тела. Кинетическая энергия любого тела является аддитивной функцией массы этого тела и в соответствии с известной в теории меры теоремой Радона–Никодима может быть представлена интегралом по массе. Иными словами, необходимо

использовать представление (3.24):

$$K(\mathcal{A}) = \int_{(m)} \mathcal{K} \, dm = \int_{(m)} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) dm. \quad (4.21)$$

Если в качестве односпиновых частиц рассматривать микроскопические абсолютно твердые тела, то для массовых плотностей тензоров инерции мы имели бы формулы, отличающиеся от (4.5) и (4.6) тем, что в них интегрирование производилось бы по распределению массы внутри частицы и они были бы разделены на массу частицы. Поскольку для этих частиц в качестве полюса выбран центр масс, то тензор \mathbf{B} в (4.5) равнялся бы нулю. Именно этот случай мы и будем рассматривать далее. Тогда кинетическая энергия квазитвердого тела определяется формулой

$$K(\mathcal{A}) = \int_{(m)} \mathcal{K} \, dm = \int_{(m)} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\Theta}_r \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \right) dm(\mathbf{r}), \quad (4.22)$$

где тензоры $\boldsymbol{\Theta}_r = \boldsymbol{\Theta}_r(\mathbf{r}, t)$ определяют массовую плотность тензоров инерции односпиновых частиц. Для них справедливы представления

$$\boldsymbol{\Theta}_r(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\Theta}_r^0(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{r}, t),$$

где тензоры $\boldsymbol{\Theta}_r^0(\mathbf{r})$ определены в отсчетном положении, т. е. в начальный момент времени.

Задержим внимание на выражении для кинетической энергии (4.22) и на понятии квазитвердого тела. При построении разного рода теорий в рациональной механике широко используется, хотя и в неявной форме, некий принцип, который трудно поддается формализации. Для краткости назовем его принципом телеобъектива.

Принцип телеобъектива. *Всякое тело \mathcal{A} в рациональной механике должно рассматриваться с двух точек зрения. При написании фундаментальных законов и общих структур тела используется взгляд на тело издали, т. е. в кадр телеобъектива входит очень много частиц тела. При этом тело из-за использования малых масштабов воспринимается как нечто единое целое, например видится сплошным. При определении параметров, входящих в общие структуры тела и определяемых микроструктурой тела, нужно рассматривать тело в резко увеличенном виде, когда в кадр телеобъектива входит только одна частица со всеми ее особенностями.*

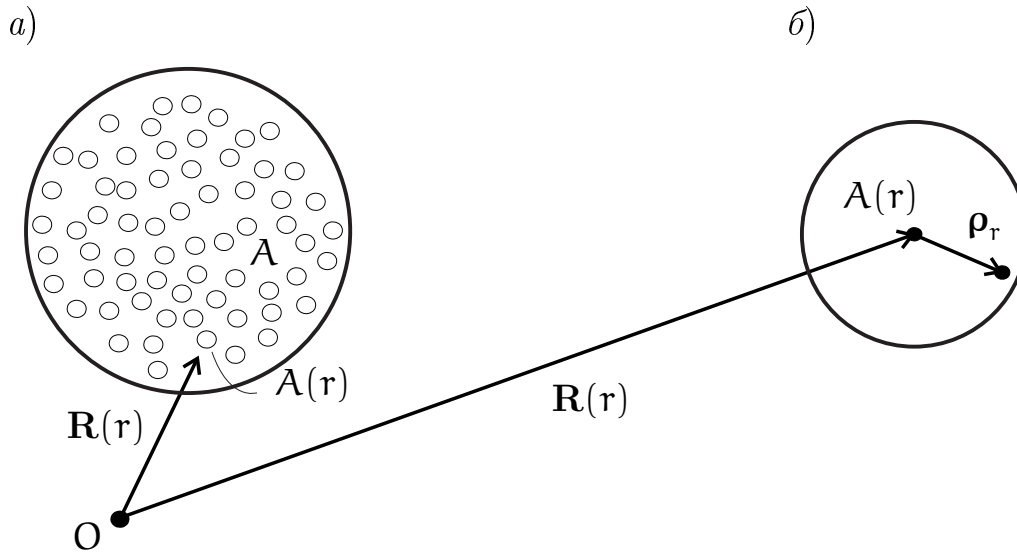


Рис. 4.1. Принцип телеобъектива: *a* — взгляд издалека; *b* — в кадре одна частица

На первый взгляд кажется, что *Принцип телеобъектива* совмещает несовместимое и противоречив в логическом отношении. Но следует иметь в виду, что все плодотворные теории в механике, которые многократно проверены на практике, построены с использованием этого принципа.

Например, при построении общей теории стержней последний рассматривается как одномерная упругая линия, лишенная толщины. Это типичный пример взгляда издалека, при котором стержень воспринимается как линия. При этом оказывается возможным построить полную и замкнутую теорию стержней. Однако в эту теорию будут входить, в частности, такие динамические характеристики, как плотность массы (масса на единицу длины) и тензоры инерции. Для их определения уже необходимо рассматривать стержень как трехмерный объект, т. е. рассматривать стержень с очень близкого расстояния.

Следует также иметь в виду, что увеличение формальной строгости той или иной теории ведет к увеличению ее бесполезности. Абсолютно строгие теории, которые, естественно, не встречаются, абсолютно бесполезны. Искусство ученого-механика и особенно инженера-исследователя состоит в установлении правильного баланса между строгостью и полезностью: необходимо максимизировать строгость теории при сохранении ее полезности.

Проиллюстрируем *принцип телеобъектива* на примере рассматриваемого квазитвердого тела. На рис. 4.1 представлены обе точки зрения. Рис. 4.1, *a* представляет взгляд на квазитвердое тело издалека. На рис. 4.1, *b* изображена одна из односпиновых частиц квазитвердого тела, которая сама является аб-

солютно твердым телом. Ее центральный тензор инерции находится по второй формуле (4.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_r \Theta_r &= -\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \cdot \int_{(\mathbf{m}_r)} \mathbf{S}_r^2 dm \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{r}, t) = \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \cdot \int_{(\mathbf{m}_r)} [\rho_r(\mathbf{x}, 0) \cdot \rho_r(\mathbf{x}, 0) \mathbf{E} - \rho_r(\mathbf{x}, 0) \otimes \rho_r(\mathbf{x}, 0)] d\mathbf{m}_r(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}^\top(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где \mathbf{m}_r — масса частицы, которая в отсчетном положении занимала место \mathbf{r} .

Обратим внимание на то, что интегрирование в (4.23) ведется по массе частицы, а \mathbf{x} есть внутренняя переменная интегрирования, о которой ничего не знает интеграл (4.22). Если все частицы, составляющие квазитвердое тело, одинаковы, то $\mathbf{m}_r = \mathbf{m}_0$, $\rho_r = \rho_0$ и массовая плотность тензоров инерции Θ_r частиц зависит от координаты \mathbf{r} только через тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$.

Итак, пусть кинетическая энергия квазитвердого тела дается выражением (4.22). Количество движения и кинетический момент этого тела вычисляются по формулам (3.25) и (3.26). Количество движения определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) &= \int_{(\mathbf{m})} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} dm = \int_{(\mathbf{m})} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dm = \\ &= \int_{(\mathbf{m})} [\mathbf{v}_O - (\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{R}_O(t)) \times \boldsymbol{\omega}_Q] dm. \end{aligned}$$

Вычисляя последний интеграл, получаем

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m\mathbf{v}_O(t) + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}_Q(t); \quad \mathbf{B} = m(\mathbf{R}_O(t) - \mathbf{R}_C(t)) \times \mathbf{E}.$$

Видим, что количество движения квазитвердого тела в точности совпадает с количеством движения абсолютно твердого тела. Вычислим кинетический момент квазитвердого тела:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) &= \int_{(\mathbf{m})} \left[(\mathbf{R} - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right] dm = \\ &= \int_{(\mathbf{m})} \left[(\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_Q) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} \right] dm + \int_{(\mathbf{m})} \left[(\mathbf{R} - \mathbf{R}_O) \times \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \right] dm = \\ &= (\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1 + \int_{(\mathbf{m})} [(\mathbf{R} - \mathbf{R}_O) \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \Theta_r \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)] dm. \end{aligned}$$

Последний интеграл в этом выражении представляет собой динамический спин квазитвердого тела, который в общем случае упростить невозможно. Примем, что все частицы тела одинаковы и одинаково вращаются:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(t); \quad \Theta_r = \mathbf{P}(t) \cdot \Theta_0 \cdot \mathbf{P}^T(t); \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\omega}(t).$$

При этих условиях кинетический момент квазитвердого тела легко вычисляется и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = & (\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \\ & + \mathbf{v}_O \cdot \mathbf{V} + \Theta \cdot \boldsymbol{\omega}_Q(t) + m\mathbf{P}(t) \cdot \Theta_0 \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Первые три слагаемые в правой части (4.24) дают кинетический момент квазитвердого тела, рассматриваемого как абсолютно твердое тело. Последнее слагаемое дает суммарный динамический микроспин частиц, составляющих квазитвердое тело. Чтобы сравнить вклады каждого из слагаемых, примем, что и само тело, и частицы имеют шарообразную форму. В качестве полюса \mathbf{R}_O выбираем центр инерции тела. Тогда тензоры инерции легко вычисляются и определяются формулами

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}; \quad \Theta = \frac{2}{5} m a^2 \mathbf{E}; \quad \Theta_0 = \frac{2}{5} m b^2 \mathbf{E},$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} — радиусы тела и частицы соответственно, причем $\mathbf{a} \gg \mathbf{b}$.

Следует обратить внимание на то, что тензоры Θ и Θ_0 имеют разные физические размерности, поскольку тензор Θ_0 — массовая плотность спиновой инерции. Теперь кинетический момент (4.24) принимает вид

$$\mathbf{K}_2^Q(\mathcal{A}) = (\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_Q) \times \mathbf{K}_1(\mathcal{A}) + \frac{2}{5} m a^2 \boldsymbol{\omega}_Q(t) + \frac{2}{5} m b^2 \boldsymbol{\omega}(t). \quad (4.25)$$

Если модули угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}_Q(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$ имеют одинаковый порядок, то динамическим микроспином можно пренебречь, и квазитвердое тело по своим динамическим структурам не отличается от абсолютно твердого тела. Если же $|\boldsymbol{\omega}(t)| \gg |\boldsymbol{\omega}_Q(t)|$, то динамическим микроспином пренебрегать нельзя. Видно, что квазитвердое тело переходит в абсолютно твердое тело при $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{0}$, когда односпиновая частица переходит в материальную точку. Таким образом, “парадокс”, указанный в начале этого раздела, нашел свое разрешение.

4.3. Тензоры инерции твердого тела и их свойства

Согласно выражениям (4.5) и (4.6) тензоры инерции абсолютно твердого тела зависят от трех факторов: 1) движения тела; 2) выбора полюса в теле; 3) распределения массы в теле. Только последний фактор является неотъемлемым атрибутом тела, а первые два фактора связаны с внешними обстоятельствами. Важно в явном виде выделить влияние каждого из этих факторов.

Сначала установим вид зависимости тензоров инерции от движения. Для этого достаточно воспользоваться формулами (4.5), (4.6) и основным уравнением кинематики (3.29). Учитывая, что тензор поворота не зависит от точек тела, получаем

$$\mathbf{B}^{(X)}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{B}_0^{(X)} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}); \quad \mathbf{B}_0^{(X)} = m (\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E}, \quad (4.26)$$

где тензор $\mathbf{B}_0^{(X)}$ вычислен в отсчетном положении, которое не зависит от движения и выбирается произвольно; тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ показывает поворот тела относительно отсчетного положения; векторы \mathbf{r}_X и \mathbf{r}_C задают положения полюса и центра масс в отсчетном положении.

Аналогичные формулы справедливы и для эйлерова тензора инерции:

$$\begin{aligned} \Theta^{(X)}(\mathbf{t}) &= \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \Theta_0^{(X)} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}); \\ \Theta_0^{(X)} &= - \int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) dm(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Тензоры инерции $\mathbf{B}_0^{(X)}$ и $\Theta_0^{(X)}$ не зависят от движения и являются характеристиками рассматриваемого тела, но они по-прежнему зависят от выбора полюса в теле. Атрибутом тела является его центр масс. Если последний выбрать в качестве полюса, то тензор $\mathbf{B}_0^{(C)}$ обращается в нулевой тензор, а эйлеров тензор инерции $\Theta_0^{(C)}$ в этом случае называется центральным тензором инерции, который может служить паспортной характеристикой тела. Посмотрим, как меняется эйлеров тензор инерции при замене полюса. Наряду с полюсом X рассмотрим другой полюс Y . Тогда

$$\begin{aligned} \Theta_0^{(X)} &= - \int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X - \mathbf{r}_Y + \mathbf{r}_Y) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X - \mathbf{r}_Y + \mathbf{r}_Y) dm = \\ &= (\mathbf{r}_Y - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{B}_0^{(X)} + \mathbf{B}_0^{(Y)} \times (\mathbf{r}_Y - \mathbf{r}_X) + \Theta_0^{(Y)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Особый интерес представляет случай, когда полюс Y совпадает с центром масс тела:

$$\Theta_0^{(X)} = -\mathbf{m}(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_X) - \int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) dm. \quad (4.29)$$

Последнее слагаемое в правой части выражения (4.29) — центральный тензор инерции, вычисленный относительно центра масс C . Чтобы выяснить смысл первого слагаемого в правой части равенства (4.29), рассмотрим частный случай твердого тела. Пусть абсолютно твердое тело состоит из безмассового стержня, длина \mathbf{l} которого равна $|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_X|$, и прикрепленной к одному концу стержня сосредоточенной массы \mathbf{m} . Свободный конец стержня закреплен с помощью сферического шарнира в точке \mathbf{r}_X . В отсчетном положении конец стержня с массой \mathbf{m} расположен в точке \mathbf{r}_C . Эйлеров тензор инерции рассмотренного тела в отсчетном положении вычисляется по формуле (4.27), в которой интегрирование по массе должно пониматься в смысле интеграла Стильтьеса [46]:

$$\Theta_0 = -\mathbf{m} \mathbf{l}^2 \mathbf{e} \times \mathbf{E} \times \mathbf{e} = \mathbf{m} \mathbf{l}^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_X) \mathbf{l}^{-1}. \quad (4.30)$$

Таким образом, эйлеровы тензоры инерции $\Theta_0^{(X)}$ и $\Theta_0^{(C)}$, вычисленные относительно полюсов X и C , т. е. относительно точек \mathbf{r}_X и \mathbf{r}_C соответственно, связаны между собой простой зависимостью:

$$\Theta_0^{(X)} = \mathbf{m} \mathbf{l}^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \Theta_0^{(C)}, \quad (4.31)$$

где единичный вектор \mathbf{e} направлен от точки \mathbf{r}_X к точке \mathbf{r}_C ; \mathbf{l} — расстояние между этими точками: $\mathbf{l} = |\mathbf{r}_X - \mathbf{r}_C|$.

Это представление можно переписать в актуальной конфигурации

$$\Theta^{(X)} = \mathbf{m} \mathbf{l}^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}') + \Theta^{(C)}, \quad \mathbf{e}' \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}. \quad (4.32)$$

Представления (4.31) и (4.32) в некоторых книгах по механике [47] называют *теоремой Гюйгенса–Штейнера*.

Вернемся к выражению для кинетической энергии абсолютно твердого тела (4.4) и перепишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} K = & \frac{\mathbf{m}}{2} \left(\mathbf{v} + \frac{1}{\mathbf{m}} \mathbf{B}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) \cdot \left(\mathbf{v} + \frac{1}{\mathbf{m}} \mathbf{B}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\Theta^{(X)} - \frac{1}{\mathbf{m}} (\mathbf{B}^{(X)})^T \cdot \mathbf{B}^{(X)} \right) \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть смысл величин, входящих в это выражение:

$$\mathbf{v} + \frac{1}{m} \mathbf{B}^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} + (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_C,$$

где \mathbf{v}_C — скорость центра масс.

Для тензора инерции, входящего во второе слагаемое в кинетической энергии, получим

$$\begin{aligned} \Theta^{(X)} - \frac{1}{m} (\mathbf{B}^{(X)})^T \cdot \mathbf{B}^{(X)} &\equiv \\ \equiv \Theta^{(X)} + m (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{R}_X - \mathbf{R}_C) &= \Theta^{(C)}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где тензор $\Theta^{(C)}$ — центральный тензор инерции.

Подставляя выражение (4.33) и предыдущее равенство в формулу для кинетической энергии, получаем

$$K = \frac{m}{2} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \Theta^{(C)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{m}{2} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \Theta_0^{(C)} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (4.34)$$

где использован левый вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega} \equiv \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}$, а тензор $\Theta_0^{(C)}$ — центральный тензор инерции, вычисленный в отсчетном положении.

В представлении (4.34) легко узнается частный случай теоремы Кенига. На первый взгляд кажется, что выражение (4.34) проще, чем выражение (4.4), но это не всегда так. Например, при вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в качестве полюса удобно выбирать именно неподвижную точку. Тогда скорость полюса $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ и выражение (4.4) принимает совсем простой вид:

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \Theta^{(X)} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \Theta_0^{(X)} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (4.35)$$

где тензор инерции вычислен относительно неподвижной точки X .

Введем в рассмотрение важное понятие момента инерции относительно оси, натянутой на единичный вектор \mathbf{n} и проходящей через ту точку тела, относительно которой вычислен тензор инерции:

$$J_n^{(X)} \equiv \mathbf{n} \cdot \Theta^{(X)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}_0 \cdot \Theta_0^{(X)} \cdot \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{n}_0. \quad (4.36)$$

В выражении (4.36) вектор \mathbf{n}_0 определяет фиксированную материальную ось в теле в отсчетном положении, а вектор \mathbf{n} определяет ту же материальную ось в актуальной конфигурации, т. е. вектор \mathbf{n} вращается вместе с телом.

Физический смысл момента инерции сразу же усматривается из выражения для кинетической энергии, например, (4.35). Действительно, представим вектор угловой скорости в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{m}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{m}_0; \quad \mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}_0,$$

где единичный вектор \mathbf{m} определяет мгновенную ось вращения.

Тогда кинетическая энергия (4.35) принимает вид

$$K = \frac{1}{2} J_{\mathbf{m}}^{(X)} \omega^2, \quad J_{\mathbf{m}}^{(X)} \equiv \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(X)} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \cdot \boldsymbol{\Theta}_0^{(X)} \cdot \mathbf{m}_0. \quad (4.37)$$

Отличие момента инерции $J_{\mathbf{m}}^{(X)}$ в (4.37) от момента $J_{\mathbf{n}}^{(X)}$ в (4.36) состоит в том, что $J_{\mathbf{m}}^{(X)}$ вычисляется относительно той материальной оси в теле, которая в данный момент времени совпадает с мгновенной осью вращения. Поэтому, в отличие от момента инерции $J_{\mathbf{n}}^{(X)}$, момент инерции $J_{\mathbf{m}}^{(X)}$ зависит от времени, поскольку в разные моменты времени он вычисляется относительно разных осей в теле. Тем не менее из выражения (4.37) следует, что момент инерции определяет инерционность тела по отношению к спинорному движению точно так же, как масса определяет инерционность тела по отношению к трансляционному движению. Однако здесь имеется существенная разница: масса тела не зависит от движения, а момент инерции $J_{\mathbf{m}}^{(X)}$ зависит от движения, т. е. зависит от времени.

Из определения момента инерции следует, что он зависит от точки, относительно которой вычисляется тензор инерции. Особое значение имеет центральный момент инерции, который вычисляется по формуле (4.36) при выборе полюса совпадающим с центром масс:

$$J_{\mathbf{n}}^{(C)} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(C)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\Theta}_0^{(C)} \cdot \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{n}_0.$$

Изменение момента инерции при изменении полюса сразу же следует из определения момента инерции (4.36) и формулы (4.32). После скалярного умножения уравнения (4.32) на вектор \mathbf{n} слева и справа, получим

$$J_{\mathbf{n}}^{(X)} = J_{\mathbf{n}}^{(C)} + m D^2, \quad D^2 = l^2 \sin^2 \alpha, \quad (4.38)$$

где D — расстояние между осями, натянутыми на единичный вектор \mathbf{n} и проходящими через полюса X и C ; α — угол между векторами \mathbf{n} и $\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_X$; l есть расстояние $|\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_X|$.

Выражение (4.38) фигурирует в учебниках по механике под названием **теоремы Гюйгенса–Штейнера**⁶. Нетрудно получить связь между момен-

⁶ Формулировка теоремы Гюйгенса–Штейнера в виде (4.38), очевидно, является частным случаем более общей формулировки в виде представлений (4.31) и (4.32). (*Примеч. ред.*)

тами инерции относительно параллельных осей, проходящих через произвольно выбираемые полюса X и Y . Для этого достаточно записать выражение (4.38) для полюса Y и исключить из него с помощью (4.38) центральный момент инерции. В результате получим

$$J_n^{(X)} = J_n^{(Y)} + m (D_1^2 - D_2^2),$$

где D_1 и D_2 — расстояния от осей, проходящих через полюса X и Y , соответственно, до центра масс.

Как уже отмечалось, работать с величинами, зависящими от движения, не очень удобно. Вместе с тем в соответствии с формулами (4.27) вместо тензора инерции в актуальном положении можно изучать эйлеров тензор инерции в отсчетном положении. Именно так мы и будем поступать далее. Эйлеров тензор инерции в отсчетном положении, вычисленный относительно произвольно выбранного полюса X , определен второй из формул (4.27). Как видно из определения, этот тензор симметричен и неотрицательно определен. Перепишем выражение для эйлерова тензора инерции в эквивалентном виде⁷:

$$\Theta_0 = \int_{(m)} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_X|^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X)) dm. \quad (4.39)$$

Покажем, что этот тензор действительно неотрицательно определен:

$$\mathbf{a} \cdot \Theta_0 \cdot \mathbf{a} = \int_{(m)} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_X|^2 a^2 (1 - \cos^2 \alpha) dm \geq 0, \quad \forall \mathbf{a}: \mathbf{a} \neq \mathbf{0},$$

где α — угол между векторами \mathbf{a} и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_X$.

Как известно, любой симметричный тензор второго ранга допускает спектральное разложение (см. раздел 1.12):

$$\Theta_0 = \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \quad \mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_k = \delta_{ik}. \quad (4.40)$$

Оси, натянутые на собственные векторы \mathbf{d}_k и пересекающиеся в точке \mathbf{r}_X , называются главными осями инерции. Собственные числа Θ_k называются главными моментами инерции. Они вычисляются относительно главных

⁷ При переходе от формулы (4.27) к формуле (4.39) использовалось тождество

$$\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{E},$$

справедливое для любых векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . (Примеч. ред.)

осей инерции. Главные моменты инерции тела будем нумеровать так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 \leq \Theta_1 \leq \Theta_2 \leq \Theta_3. \quad (4.41)$$

Если все главные моменты инерции тела различны, то собственные диады $\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i$ определяются однозначно. Если два главных момента инерции совпадают, то однозначно находится только та собственная диада, которая соответствует некратному собственному числу. Пусть, например, $\Theta_1 = \Theta_2 \leq \Theta_3$. Тогда вместо (4.41) получим

$$\Theta_0 = \Theta_1 (\mathbf{E} - \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \quad (4.42)$$

Такой тензор называется трансверсально-изотропным с осью изотропии, натянутой на вектор \mathbf{d}_3 . Объяснение смысла подобного названия будет дано в следующем разделе. Если все три главных момента инерции совпадают, то тензор инерции приобретает совсем простой вид:

$$\Theta_0 = \Theta_1 \mathbf{E}. \quad (4.43)$$

Тензор вида (4.43) называется изотропным или шаровым.

Помимо неотрицательности тензор инерции обладает еще одним замечательным свойством. Главные моменты инерции вычисляются по тензору инерции следующим образом:

$$\Theta_i = \mathbf{d}_i \cdot \Theta_0 \cdot \mathbf{d}_i \quad \Rightarrow \quad \Theta_i = \int_{(m)} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_X|^2 (1 - \cos^2 \alpha_i) dm, \quad (4.44)$$

где α_i — угол между векторами \mathbf{d}_i и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_X$.

Составим комбинацию:

$$\Theta_i + \Theta_j - \Theta_k = 2 \int_{(m)} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_X|^2 \cos^2 \alpha_k dm \geq 0, \quad i \neq j \neq k \neq i.$$

Таким образом, получили неравенства

$$\Theta_1 + \Theta_2 \geq \Theta_3, \quad \Theta_2 + \Theta_3 \geq \Theta_1, \quad \Theta_1 + \Theta_3 \geq \Theta_2. \quad (4.45)$$

Из неравенств (4.45) следует, что тензор инерции может иметь не более одного нулевого момента инерции⁸. Более того, при одном нулевом главном

⁸ Либо три нулевых момента инерции, как у материальной точки. (*Примеч. ред.*)

момента инерции два других момента инерции обязаны совпадать между собой. Примером тензора инерции такого рода является тензор (4.30).

Главные моменты инерции являются объективными характеристиками тела и не зависят от движения тела. Через главные моменты инерции легко вычислить момент инерции относительно произвольной оси, натянутой на единичный вектор \mathbf{n} и проходящей через полюс, т. е. через точку тела, относительно которой вычисляется тензор инерции. Получим очевидную формулу:

$$\begin{aligned}\Theta_{(\mathbf{n})} &= \mathbf{n} \cdot \Theta_0 \cdot \mathbf{n} = \Theta_1 \cos^2 \alpha_1 + \Theta_2 \cos^2 \alpha_2 + \Theta_3 \cos^2 \alpha_3, \\ \mathbf{n} &= \cos \alpha_1 \mathbf{d}_1 + \cos \alpha_2 \mathbf{d}_2 + \cos \alpha_3 \mathbf{d}_3.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Из равенств (4.46) и (4.41) следуют минимаксные свойства главных моментов инерции:

$$\Theta_1 \leq \Theta_{(\mathbf{n})} \leq \Theta_3.$$

Следует обратить внимание на то, что зависимость тензора инерции от выбора полюса, относительно которого он вычисляется, является весьма серьезным фактором. Например, центральный тензор инерции шара из однородного материала является шаровым. Но тензор инерции того же шара, вычисленный относительно точки, отличной от центра масс, будет уже трансверсально-изотропным.

Теорема. Для любого тела существует такой полюс, относительно которого тензор инерции является трансверсально-изотропным, причем ось изотропии совпадает с главной осью центрального тензора инерции, отвечающей наибольшему моменту инерции.

Доказательство. Рассмотрим центральный тензор инерции $\Theta^{(C)}$. Представим его в виде спектрального разложения (4.40).

Выберем теперь другой полюс и вычислим соответствующий ему тензор инерции Θ_* . Между тензорами $\Theta^{(C)}$ и Θ_* существует связь, установленная формулой (4.31):

$$\Theta_* = m\mathbf{l}^2(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3,\tag{4.47}$$

где \mathbf{e} направлен от центра масс к новому полюсу; \mathbf{l} — расстояние от центра масс до нового полюса.

Выберем теперь новый полюс так, чтобы вектор \mathbf{e} совпадал бы с вектором \mathbf{d}_2 . Тогда вместо (4.47) получим

$$\Theta_* = (\Theta_1 + m\mathbf{l}^2)\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + (\Theta_3 + m\mathbf{l}^2)\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.\tag{4.48}$$

Сославшись на неравенства (4.41), выберем величину l так, чтобы выполнялось равенство:

$$\Theta_1 + ml^2 = \Theta_2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{\frac{\Theta_2 - \Theta_1}{m}}.$$

Подставляя это значение l в равенство (4.48), получаем утверждение теоремы:

$$\begin{aligned} \Theta_* &= \Theta_2 (\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + (\Theta_3 + ml^2) \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 = \\ &= \Theta_2 \mathbf{E} + (\Theta_3 - \Theta_1) \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \end{aligned}$$

Ранее было введено понятие центрального тензора инерции абсолютно твердого тела. Центральный тензор инерции вычислен относительно центра масс тела и может служить паспортной характеристикой тела. Посмотрим на центральный тензор инерции с другой точки зрения, а именно будем искать такой полюс в теле, относительно которого тензор инерции обладает минимальными моментами инерции. В отсчетном положении выберем единичный вектор \mathbf{k} , который будем считать фиксированным. Вычислим момент инерции тела относительно оси, натянутой на вектор \mathbf{k} и проходящей через полюс \mathbf{r}_X :

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_X) &= -\mathbf{k} \cdot \left[\int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) dm(\mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{k} = \\ &= \mathbf{k} \cdot \left[\int_{(m)} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_X|^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X)) dm(\mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{k} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Наряду с полюсом \mathbf{r}_X рассмотрим другой полюс $\mathbf{r}_X + \mathbf{y}$, отстоящий от полюса \mathbf{r}_X на вектор \mathbf{y} . Вычислим момент инерции относительно нового полюса:

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_X + \mathbf{y}) &= -\mathbf{k} \cdot \left[\int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X - \mathbf{y}) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X - \mathbf{y}) dm(\mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{k} = \\ &= J_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_X) + m (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})^2) + \\ &+ \mathbf{k} \cdot \left[\int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) dm(\mathbf{r}) \times \mathbf{E} \times \mathbf{y} \right] \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k} \cdot \left[\mathbf{y} \times \mathbf{E} \times \int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) dm(\mathbf{r}) \right] \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Выберем полюс \mathbf{r}_X так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_X) dm(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_X = \frac{1}{m} \int_{(m)} \mathbf{r} dm(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{r}_c.$$

Теперь предыдущее равенство принимает вид

$$J_k(\mathbf{r}_c + \mathbf{y}) = J_k(\mathbf{r}_c) + m (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{y})^2) \geq J_k(\mathbf{r}_c),$$

причем знак равенства достигается либо при $\mathbf{k} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$, либо при $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Выражение (4.3) справедливо при любом выборе вектора \mathbf{y} . Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Момент инерции тела, вычисленный относительно произвольной оси, принимает минимальное значение, когда в качестве полюса выбирается центр масс тела.

Эта теорема находит приложение на практике при динамическом определении центра масс. Введем еще несколько понятий, которые используются как в теоретических построениях, так и в прикладных вопросах. Прежде всего речь идет о понятии радиуса инерции. Момент инерции имеет размерность *масса на квадрат длины*. Поэтому его можно представить в следующем виде:

$$J_k(\mathbf{r}_X) = m \rho_k^2 = m \kappa_k^{-2}, \quad \kappa_k = \rho_k^{-1},$$

где вводимая по определению величина ρ_k называется радиусом инерции, а величина κ_k — модулем инерции [47].

Наконец, центробежным моментом инерции называется [40, 47] величина

$$\Theta_{mn} = -\mathbf{m} \cdot \Theta_0 \cdot \mathbf{n}, \quad |\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

В произвольном ортогональном базисе \mathbf{d}_i ($\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j = \delta_{ij}$) тензор инерции имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta_0 = & \Theta_{11} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 - \Theta_{12} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_2 - \Theta_{13} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_3 - \\ & - \Theta_{21} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_{22} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 - \Theta_{23} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_3 - \\ & - \Theta_{31} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_1 - \Theta_{32} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_{33} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \quad \Theta_{ij} = \Theta_{ji}, \end{aligned}$$

где координаты Θ_{11} , Θ_{22} , Θ_{33} — осевые моменты инерции; координаты Θ_{ij} — центробежные моменты инерции.

4.4. Теория симметрии

и вычисление тензоров инерции твердых тел

Симметрия — одно из важнейших и древнейших представлений как в искусстве, так и в науке. Аргументы, основанные на соображениях симметрии,

всегда считались весьма убедительными и достоверными, поскольку с аргументами такого рода легко соглашается наша интуиция. Приложения теории симметрии в физике чрезвычайно обширны, а сама теория симметрии по праву занимает одно из центральных мест в любой рациональной науке. В данном разделе описываются простейшие приложения теории симметрии к определению тензоров инерции.

Введем в рассмотрение понятие о группе симметрии тензора второго ранга. При этом достаточно подробно будем рассматривать только полярные⁹ тензоры второго ранга, каковым и является тензор инерции.

Введем понятие ортогонального преобразования тензоров разных рангов. Пусть дан ортогональный тензор \mathbf{Q} .

Определение. Ортогональными преобразованиями скаляра g , вектора \mathbf{a} и тензора второго ранга \mathbf{A} называются соответственно величины

$$g' \equiv (\det \mathbf{Q})^\alpha g; \quad \mathbf{a}' \equiv (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{A}' \equiv (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad (4.50)$$

где $\alpha = 0$ для полярных объектов, $\alpha = 1$ для аксиальных объектов.

Для полярных объектов вводимое определение ортогонального преобразования совпадает с общепринятым. Для аксиальных объектов оно было впервые введено в работе [48]. Для иллюстрации естественности вводимого определения ортогонального преобразования аксиальных объектов рассмотрим два простых примера.

Пусть векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} полярны. Рассмотрим аксиальный скаляр

$$f = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Тогда ортогональное преобразование скаляра f можно определить непосредственно:

$$\begin{aligned} f' &= \mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}') = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \cdot [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c})] = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}^T) \cdot [(\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\det \mathbf{Q}) f. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тождество (1.105):

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

В результате пришли к частному случаю определения (4.50).

Типичным примером аксиального вектора является векторное произведение двух полярных векторов. В этом случае также возможно дать определение ортогонального преобразования непосредственно на основе определения

⁹ О полярных и аксиальных тензорах — см. раздел 1.4. (Примеч. ред.)

ортогонального преобразования полярных векторов:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}.$$

Аналогично можно объяснить определение ортогональных преобразований для тензоров любого ранга [48].

Введем важное физическое понятие симметрии объектов. Интуитивное представление о симметриях тел имеется практически у каждого человека. Но в рациональной науке эти интуитивные представления должны быть однозначно определены в математической форме. Например, физической операции зеркального отражения, осуществляемой с помощью реального зеркала, должна соответствовать математическая операция, в которой реальному зеркалу должен соответствовать однозначно определенный математический объект. Реальному зеркалу соответствует плоскость, совпадающая с плоскостью зеркала, которую обычно определяют заданием вектора единичной нормали \mathbf{n} . Математический объект, точно соответствующий реальному зеркалу, действительно существует и определяется заданием тензора второго ранга:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}; \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}; \quad \det \mathbf{Q} = -1. \quad (4.51)$$

Если тензором зеркального отражения (4.51) подействовать на вектор \mathbf{a} , то получим вектор $\mathbf{a}_* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$. Проекции векторов \mathbf{a} и \mathbf{a}_* на плоскость, ортогональную вектору \mathbf{n} , совпадают, а проекции этих векторов на вектор \mathbf{n} равны между собой по модулю, но противоположны по знаку.

Еще одним важным представлением о симметрии является симметрия тел относительно разного рода поворотов. Например, шар не меняется при произвольных поворотах вокруг своего центра. Этому представлению также отвечает вполне определенный математический объект, называемый тензором поворота, который в соответствии с теоремой Эйлера (см. раздел 1.16) может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}) &\equiv (1 - \cos \varphi) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E}; \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T &= \mathbf{E}; \quad \det \mathbf{Q} = +1, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где единичный вектор \mathbf{m} определяет прямую, называемую осью поворота, а угол φ называется углом поворота.

Действие тензора поворота (4.52) на вектор \mathbf{a} сводится к повороту этого вектора вокруг оси поворота на угол φ . Замечательным является тот факт, что любой элемент симметрии тела может быть представлен в виде композиции тензоров типа (4.51) и (4.52). Таким образом, симметрии тел описываются тензорами второго ранга.

Определение. Группами симметрии скаляра g , вектора \mathbf{a} и тензора второго ранга \mathbf{A} называются соответственно множества ортогональных решений¹⁰ уравнений

$$g' = g; \quad (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}; \quad (\det \mathbf{Q})^\alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^\top = \mathbf{A}, \quad (4.53)$$

где скаляр g , вектор \mathbf{a} и тензор второго ранга \mathbf{A} считаются заданными, а ортогональные тензоры \mathbf{Q} подлежат определению.

Смысл введенного определения вполне ясен. Если ортогональное преобразование рассматриваемого объекта совпадает с исходным объектом, то ортогональный тензор, входящий в это преобразование, называется элементом симметрии данного объекта. Очевидно, что множество элементов симметрии объекта действительно образует группу¹¹. В самом деле, это множество не пусто, поскольку единичный тензор является элементом (тривиальным) симметрии любого объекта. Обратный элемент также существует для любого элемента симметрии. Осталось только убедиться, что если тензоры \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 являются элементами симметрии, то и их композиция $\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1$ является элементом симметрии, т. е. принадлежит к рассматриваемому множеству. Покажем это на примере тензора второго ранга \mathbf{A} . Пусть тензоры \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 являются элементами симметрии тензора \mathbf{A} , т. е. пусть они удовлетворяют уравнениям

$$(\det \mathbf{Q}_1)^\alpha \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^\top = \mathbf{A}; \quad (\det \mathbf{Q}_2)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_2^\top = \mathbf{A}. \quad (4.54)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{Q}_3)^\alpha \mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_3^\top &= (\det \mathbf{Q}_2)^\alpha (\det \mathbf{Q}_1)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^\top \cdot \mathbf{Q}_2^\top = \\ &= (\det \mathbf{Q}_2)^\alpha \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_2^\top = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Здесь мы дважды использовали уравнения (4.54) и убедились, что тензор \mathbf{Q}_3 принадлежит к множеству элементов симметрии. Таким образом, множество элементов симметрии обладает всеми признаками, позволяющими называть это множество группой.

Опишем группы симметрии скаляров, векторов и симметричных тензоров второго ранга. Для скаляров непосредственно из определения следует, что группа симметрии абсолютного скаляра совпадает с полной ортогональной группой, а группа симметрии аксиального скаляра совпадает с собственно ортогональной группой.

¹⁰ Ортогональное решение уравнения — это ортогональный тензор, который является решением данного уравнения. (*Примеч. ред.*)

¹¹ Основные определения из теории групп см. в разделе 1.15. (*Примеч. ред.*)

Группа симметрии полярного вектора \mathbf{a} состоит из тензоров поворота вокруг \mathbf{a} и зеркальных отражений от плоскостей, параллельных \mathbf{a} , т. е. из тензоров (4.52) при $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и тензоров (4.51) при $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$.

Группа симметрии аксиального вектора \mathbf{a} состоит из тензоров поворота вокруг \mathbf{a} и зеркальных отражений от плоскостей, ортогональных \mathbf{a} , т. е. из тензоров поворота (4.52) при $\mathbf{m} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и тензоров зеркальных отражений (4.51) при $\mathbf{n} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$. При экспериментальной проверке этого факта с помощью зеркала следует вспомнить, что прообразом аксиального вектора является спин-вектор, а зеркало ничего “не знает” о соглашении об ориентации, которое существует только в наших головах. Поэтому при работе с зеркалом следует использовать не аксиальный вектор, а его прообраз (спин-вектор). Таким образом, группы симметрии полярных и аксиальных векторов существенно различны.

Группа симметрии симметричного полярного тензора второго ранга, все собственные числа которого различны, состоит из зеркальных отражений от плоскостей, ортогональных собственным векторам этого тензора.

Здесь это понятие используется применительно к эйлерову тензору инерции, который является полярным тензором второго ранга.

Определение. Группой симметрии тензора инерции Θ называется множество ортогональных решений уравнения

$$\mathbf{Q} \cdot \Theta \cdot \mathbf{Q}^T = \Theta. \quad (4.55)$$

В определении (4.55) и до конца этого раздела тензоры инерции рассматриваются в отсчетном положении. Если тензор инерции задан, то нетрудно найти его группу симметрии. Например, для шарового тензора инерции

$$\mathbf{Q} \cdot \Theta \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (\Theta \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = \Theta \mathbf{E} = \Theta \quad \forall \mathbf{Q}: \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}.$$

Иными словами, группой симметрии шарового тензора является полная ортогональная группа. Знание даже отдельных элементов симметрии у тензора инерции позволяет получить важную информацию о его структуре.

Пример. Допустим, что тензор инерции имеет одну плоскость зеркальной симметрии. Тензор зеркального отражения от плоскости, ортогональной единичному вектору \mathbf{n} , имеет вид

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T; \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{n}.$$

Поскольку этот тензор по условию является элементом симметрии тензора инерции, то справедливо равенство (4.55):

$$(\mathbf{E} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \Theta \cdot (\mathbf{E} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \Theta. \quad (4.56)$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор \mathbf{n} , получаем

$$(\mathbf{E} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\Theta \cdot \mathbf{n}) = -(\Theta \cdot \mathbf{n}) \quad \Rightarrow \quad \Theta \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}.$$

Иными словами, если тензор инерции обладает зеркальной плоскостью симметрии, то вектор, ортогональный этой плоскости, является собственным вектором тензора инерции, а ось, ортогональная плоскости зеркальной симметрии, является главной осью тензора инерции. Допустим теперь, что тензор инерции обладает еще одной плоскостью зеркальной симметрии, ортогональной единичному вектору \mathbf{m} , такому, что $\mathbf{m} \times \mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. Тогда вектор \mathbf{m} также является собственным вектором тензора инерции. Таким образом, имеем два равенства:

$$\Theta \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}; \quad \Theta \cdot \mathbf{m} = \mu \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu) \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Здесь возможны два варианта.

Первый вариант. Если $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, то $\lambda = \mu$. Тогда легко убедиться, что любой вектор, являющийся линейной комбинацией векторов \mathbf{m} и \mathbf{n} , является собственным вектором тензора инерции. Это означает, что имеется несчетное множество плоскостей зеркальной симметрии, пересекающихся по одной прямой, которая, в свою очередь, является главной осью тензора инерции. Этот факт вытекает из следующего рассуждения. Выберем пару ортогональных векторов \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , лежащих в плоскости, натянутой на векторы \mathbf{m} и \mathbf{n} . Тогда тензоры

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{E} - 2\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1; \quad \mathbf{Q}_2 = \mathbf{E} - 2\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2; \quad \mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_1 = -(\mathbf{E} - 2\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3),$$

где $\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2$, также являются элементами симметрии тензора инерции, а вектор \mathbf{d}_3 является собственным вектором тензора инерции.

По теореме о спектральном разложении тензора второго ранга (см. раздел 1.12), получим

$$\Theta = \lambda(\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2) + \lambda_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 = \lambda(\mathbf{E} - \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3) + \lambda_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \quad (4.57)$$

Тензоры такого строения называются трансверсально-изотропными с осью изотропии, натянутой на вектор \mathbf{d}_3 . Название объясняется тем, что тензор (4.57) не меняется при произвольных поворотах вокруг оси изотропии \mathbf{d}_3 . Иными словами, тензор поворота

$$\mathbf{Q} = (1 - \cos \varphi) \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3 + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{d}_3 \times \mathbf{E}$$

принадлежит к группе симметрии тензора инерции.

Вот такие удивительные следствия вытекают из существования у тензора инерции двух неортогональных между собой плоскостей зеркальной симметрии.

Второй вариант. Если $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$, то λ уже не обязан равняться μ . В этом случае из существования двух плоскостей зеркальной симметрии следует только то, что тензор инерции обязан иметь вид

$$\Theta = \lambda \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mu \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \lambda_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \quad (4.58)$$

Но эйлеров тензор инерции является симметричным тензором второго ранга. Для него справедлива теорема о спектральном разложении [22], из которой следует, что любой тензор второго ранга, и тензор инерции в частности, имеет, как минимум, три плоскости зеркальной симметрии. Заметим, что теорема о спектральном разложении никак не связана с соображениями симметрии, но она, в более узкой трактовке, может быть получена на основании соображений симметрии. В отличие от соображений симметрии при доказательстве теоремы о спектральном разложении не использовалось допущение, что у тензора имеются какие-либо плоскости симметрии.

С учетом важности умения использовать соображения симметрии приведем прямое построение полученных представлений. Итак, пусть тензор инерции имеет одну плоскость зеркальной симметрии, ортогональную единичному вектору \mathbf{n} . Введем в рассмотрение ортонормированную тройку векторов \mathbf{d}_k , такую, что $\mathbf{n} = \mathbf{d}_1$. Любой тензор второго ранга, не обязательно симметричный, может быть представлен в виде разложения:

$$\begin{aligned} \Theta = & \Theta^{11} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta^{12} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{13} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_3 + \Theta^{21} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_1 + \\ & + \Theta^{22} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{23} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_3 + \Theta^{31} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta^{32} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{33} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \end{aligned}$$

По условию тензор

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} - 2 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1$$

должен принадлежать к группе симметрии тензора Θ . Следовательно, поскольку

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_1 = -\mathbf{d}_1; \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_2; \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_3,$$

при замене \mathbf{d}_1 на $-\mathbf{d}_1$ тензор Θ не должен меняться. Так будет тогда и только тогда, когда

$$\Theta^{12} = \Theta^{21} = \Theta^{13} = \Theta^{31} = 0.$$

Тензор Θ принимает вид

$$\Theta = \Theta^{11} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta^{22} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{23} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_3 + \Theta^{32} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{33} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$

Пусть теперь тензор зеркального отражения $\mathbf{E} - 2\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2$ от плоскости, ортогональной вектору \mathbf{d}_2 , также принадлежит группе симметрии тензора Θ . Это возможно только при условии, что

$$\Theta^{23} = \Theta^{32} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta = \Theta^{11}\mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta^{22}\mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta^{33}\mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$

Итак, если полярный тензор второго ранга обладает двумя ортогональными плоскостями зеркальной симметрии, то он симметричен и обладает по крайней мере тремя ортогональными между собой плоскостями зеркальной симметрии. Если этот тензор обладает еще одной плоскостью зеркальной симметрии, ортогональной единичному вектору \mathbf{m} , лежащему в плоскости, натянутой на векторы \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , и не совпадающему ни с одним из этих векторов, то такой тензор обязан быть трансверсально-изотропным с координатами $\Theta^{11} = \Theta^{22}$. Наконец, если имеется еще одна плоскость зеркальной симметрии, ортогональная вектору \mathbf{n} , который не ортогонален плоскости, натянутой на векторы \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 , и не лежит в этой плоскости, то такой тензор обязан быть шаровым, или, что то же самое, изотропным. Итогом всего изложенного является следующая теорема.

Теорема. *Если полярный тензор второго ранга обладает двумя неортогональными между собой плоскостями симметрии, то он является трансверсально-изотропным с осью изотропии, являющейся линией пересечения плоскостей симметрии. Если полярный тензор второго ранга обладает тремя не ортогональными между собой плоскостями симметрии, то он является изотропным.*

Как было показано ранее, соображения симметрии дают очень много информации о строении рассматриваемого тензора. Эти соображения легко воспринимаются интуицией и способствуют ясной визуализации, в частности, тензора инерции. Проблема, однако, в том, что интуиция ничего не знает о тензоре инерции, ибо в Природе такого объекта самого по себе не существует. Тензор инерции возник в результате принятого способа описания (моделирования) природных объектов. Поэтому может показаться, что все приведенные рассуждения повисают в воздухе, ибо мы лишены возможности увидеть какие-бы то ни было элементы симметрии тензора инерции. Здесь нам на помощь приходит совершенно замечательный и чрезвычайно важный в физике принцип Кюри–Неймана.

Принцип Кюри–Неймана. *Группа симметрии причины является подгруппой группы симметрии следствия.*

Применительно к тензорам инерции речь идет о следующем. Тензор инерции абсолютно твердого тела является характеристикой этого тела, т. е. след-

ствием свойств тела. Тело является причиной, а его тензор инерции является следствием, вытекающем из строения самого тела. Вот на этом этапе и вступает в действие интуиция. Мы видим реальное тело и знаем о распределении массы внутри этого тела. Поэтому мы в состоянии увидеть (интуитивно ощутить) элементы симметрии реального тела. По *принципу Кюри–Неймана* мы можем утверждать, что эти элементы симметрии обязательно принадлежат группе симметрии следствия, т. е. тензора инерции. Вместе с тем *принцип Кюри–Неймана* не утверждает, что группа симметрии следствия совпадает с группой симметрии причины, первая может быть значительно шире второй. Например, реальное тело может вообще не обладать плоскостями зеркальной симметрии. Но тензор инерции согласно теореме о спектральном разложении обязательно обладает тремя плоскостями зеркальной симметрии, ортогональными собственным векторам тензора инерции.

Обратимся к вычислению тензоров инерции конкретных тел и посмотрим, чем нам помогут соображения симметрии.

Центральный тензор инерции полого шара из однородного материала. Рассмотрим шар радиуса \mathbf{a} с концентрической полостью радиуса \mathbf{b} . Шар выполнен из равномерно распределенного однородного материала. Масса шара равна \mathbf{m} . Эйлеров тензор инерции вычисляется по формуле (4.27):

$$\begin{aligned} \Theta &= - \int_{(\mathbf{m})} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \, d\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \\ &= \int_{(\mathbf{m})} (|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^2 \mathbf{E} - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c)) \, d\mathbf{m}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.59)$$

В принципе можно вычислить этот интеграл и найти тензор инерции. Но мы поступим иначе. У рассматриваемого шара любая плоскость, содержащая центр шара, является плоскостью зеркальной симметрии. Таким образом, реальный шар обладает несчетным множеством плоскостей зеркальной симметрии, включая тройки неортогональных между собой плоскостей. По *принципу Кюри–Неймана* эти плоскости должны принадлежать к плоскостям зеркальной симметрии следствия, т. е. тензора инерции. Это возможно только для изотропного тензора инерции. Иными словами, тензор инерции полого шара имеет вид

$$\Theta = \Theta \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \text{tr } \Theta = 3\Theta. \quad (4.60)$$

Чтобы найти тензор инерции, достаточно вычислить только одно число — момент инерции Θ . Для этого нет нужды вычислять тензорный ин-

теграл (4.59). Достаточно вычислить скалярный интеграл:

$$\operatorname{tr} \Theta = 2 \int_{(m)} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^2 dm(\mathbf{r}) = 2 \int_{(m)} \rho^2 dm(\rho) = 3\Theta, \quad \rho \equiv |\boldsymbol{\rho}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|. \quad (4.61)$$

Осталось вычислить интеграл по массе. Поступим следующим образом. Объем полого шара равен $4\pi(\mathbf{a}^3 - \mathbf{b}^3)/3$. Следовательно, массовая плотность равна $3m/4\pi(\mathbf{a}^3 - \mathbf{b}^3)$. Весь объем, занятый телом, разделим на тонкие концентрические слои толщины $d\rho$. Масса одного слоя вычисляется по формуле

$$dm(\rho) = \frac{3m}{4\pi(\mathbf{a}^3 - \mathbf{b}^3)} 4\pi\rho^2 d\rho = \frac{3m}{(\mathbf{a}^3 - \mathbf{b}^3)} \rho^2 d\rho.$$

Используя этот результат, формулу для момента инерции (4.61) переписываем в виде одномерного интеграла:

$$\begin{aligned} 3\Theta &= \frac{6m}{(\mathbf{a}^3 - \mathbf{b}^3)} \int_b^a \rho^4 d\rho = \frac{6m}{5(\mathbf{a}^3 - \mathbf{b}^3)} (\mathbf{a}^5 - \mathbf{b}^5) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Theta &= \frac{2m(\mathbf{a}^4 + \mathbf{a}^3\mathbf{b} + \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}\mathbf{b}^3 + \mathbf{b}^4)}{5(\mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2)}. \end{aligned}$$

Для сплошного шара при $\mathbf{b} = 0$ получаем $\Theta = 2m\mathbf{a}^2/5$.

Тензор инерции шара относительно полюса, не совпадающего с центром шара. При вычислении этого тензора мы должны воспользоваться теоремой Гюйгенса–Штейнера (4.31). В данном случае она принимает вид

$$\Theta^{(X)} = m\mathbf{l}^2(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \Theta^{(C)} = m\mathbf{l}^2(\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \frac{2}{5}m\mathbf{a}^2\mathbf{E}, \quad (4.62)$$

где \mathbf{l} — расстояние от полюса до центра шара; \mathbf{e} — единичный вектор, направленный от полюса к центру шара или наоборот.

Тензор инерции шара с шаровой, но не концентрической полостью. Рассмотрим шар с шаровой полостью, центр которой не совпадает с центром основного шара. Радиус шара равен \mathbf{a} , радиус полости равен \mathbf{b} . Пусть m — масса шара с полостью. Вычислим тензор инерции шара с полостью относительно центра основного шара. Это, разумеется, уже не центральный тензор инерции. Начало системы отсчета поместим в центр основного шара.

По определению эйлерова тензора инерции

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_{(m)} (|\mathbf{r}|^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, d\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \\ &= \int_{(m+m_1)} (|\mathbf{r}|^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, d\mathbf{m}(\mathbf{r}) - \int_{(m_1)} (|\mathbf{r}|^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, d\mathbf{m}(\mathbf{r}),\end{aligned}\quad (4.63)$$

где m_1 — масса дополнительного материала, необходимого для заполнения полости.

Первый интеграл в правой части выражения (4.63) дает центральный тензор инерции шара без полости. Вторым интегралом дает тензор инерции сплошного шара массой m_1 относительно центра основного шара. Оба тензора инерции мы уже умеем вычислять. Первый тензор инерции задается формулой (4.60), а второй тензор инерции определяется формулой (4.62). Поэтому выражение (4.63) окончательно принимает вид

$$\Theta = \frac{2}{5}(m + m_1)a^2 \mathbf{E} - \left(\frac{2}{5}m_1 b^2 \mathbf{E} + m_1 l^2 (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \right),$$

где l — расстояние между центрами основного шара и полости; \mathbf{e} — направление от центра шара к центру полости.

Центральный тензор инерции однородного кругового цилиндра.

Рассмотрим сплошной цилиндр радиуса a и высотой h . Очевидно, что у него есть две неортогональные плоскости зеркальной симметрии, пересекающиеся по оси цилиндра. Это означает, что его тензор инерции является трансверсально-изотропным с осью изотропии, совпадающей с осью цилиндра. Общий вид такого тензора определяется выражением

$$\Theta = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad \lambda = \mathbf{e} \cdot \Theta \cdot \mathbf{e}, \quad \lambda + 2\mu = \text{tr } \Theta. \quad (4.64)$$

Чтобы найти тензор инерции, достаточно вычислить осевой λ и экваториальный μ моменты инерции. Начало системы отсчета расположим в центре масс цилиндра. Вектор положения типичной точки цилиндра представим в виде разложения:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + z\mathbf{e}, \quad |\mathbf{r}|^2 = |\boldsymbol{\rho}|^2 + z^2, \quad z = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}, \quad 0 \leq |\boldsymbol{\rho}| \leq a, \quad -h/2 \leq z \leq h/2.$$

Подставляя определение эйлерова тензора инерции (4.59) в формулы для моментов инерции (4.64), получаем

$$\lambda = \int_{(m)} |\boldsymbol{\rho}|^2 \, d\mathbf{m}(\mathbf{r}), \quad \lambda + 2\mu = 2 \int_{(m)} |\mathbf{r}|^2 \, d\mathbf{m}(\mathbf{r}) = 2\lambda + 2 \int_{(m)} z^2 \, d\mathbf{m}(\mathbf{r}). \quad (4.65)$$

При вычислении осевого момента весь цилиндр представим как совокупность концентрических слоев малой толщины. Масса этого слоя вычисляется по формуле

$$dm(\mathbf{r}) = \frac{m}{\pi a^2 h} 2\pi \rho h d\rho = \frac{2m\rho}{a^2} d\rho, \quad \rho \equiv |\boldsymbol{\rho}|.$$

Тогда осевой момент инерции определяется одномерным интегралом:

$$\lambda = \int_{(m)} \rho^2 dm(\mathbf{r}) = \frac{2m}{a^2} \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{ma^2}{2}.$$

При вычислении экваториального момента инерции область, занятую цилиндром, удобно разбить на цилиндры высотой dz . Масса такого цилиндра

$$dm(\mathbf{r}) = \frac{m}{\pi a^2 h} \pi a^2 dz = \frac{m}{h} dz.$$

Теперь экваториальный момент инерции согласно (4.64) вычисляется посредством интеграла:

$$2\mu - \lambda = 2 \frac{m}{h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{mh^2}{6} \Rightarrow \mu = \frac{mh^2}{12} + \frac{ma^2}{4}.$$

Таким образом, центральный тензор инерции кругового цилиндра имеет вид

$$\Theta = \frac{ma^2}{2} \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \left(\frac{mh^2}{12} + \frac{ma^2}{4} \right) (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}).$$

Если радиус цилиндра устремить к нулю, то выражение (4.4) дает центральный тензор инерции тонкого стержня. Если принять $\lambda = \mu$, то центральный тензор инерции цилиндра становится шаровым. Для этого достаточно принять $h = \sqrt{3}a$. Если, кроме того, принять $a = \sqrt{4/5}R$, то центральный тензор инерции цилиндра совпадает с центральным тензором инерции шара радиусом R и массой m .

Центральный тензор инерции однородного параллелепипеда. Вычислим центральный тензор инерции однородного параллелепипеда со сторонами \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Начало системы отсчета разместим в центре масс. Здесь также имеются три плоскости зеркальной симметрии, но они взаимно ортогональны. Поэтому тензор инерции параллелепипеда имеет более сложный вид:

$$\Theta = \int_{(m)} (|\mathbf{r}|^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dm(\mathbf{r}) = \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3,$$

где векторы \mathbf{d}_k параллельны ребрам параллелепипеда.

Вектор \mathbf{r} представим в виде разложения:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{d}_1 + y\mathbf{d}_2 + z\mathbf{d}_3;$$

$$-a/2 \leq x \leq a/2; \quad -b/2 \leq y \leq b/2; \quad -c/2 \leq z \leq c/2.$$

Для моментов инерции получаем

$$\Theta_1 = \mathbf{d}_1 \cdot \Theta \cdot \mathbf{d}_1 = \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm(\mathbf{r});$$

$$\Theta_2 = \mathbf{d}_2 \cdot \Theta \cdot \mathbf{d}_2 = \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm(\mathbf{r});$$

$$\Theta_3 = \mathbf{d}_3 \cdot \Theta \cdot \mathbf{d}_3 = \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm(\mathbf{r}).$$

Здесь также достаточно вычислить три одномерных интеграла. Вычислим, например, интеграл по массе от функции x^2 :

$$\int_{(m)} x^2 dm(\mathbf{r}) = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{m}{abc} bc dx = \frac{ma^2}{12}.$$

Аналогично вычисляются и два остальных интеграла. Окончательно для центрального тензора инерции параллелепипеда получим

$$\Theta = \frac{m(b^2 + c^2)}{12} \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \frac{m(a^2 + c^2)}{12} \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \frac{m(b^2 + a^2)}{12} \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3.$$

Обратим внимание на то, что не следует торопиться с переходом от интегрирования по массе к интегрированию по объему. При интегрировании по массе следует активно использовать аддитивность тензора инерции по массе тела. Особенно важно полностью учитывать это обстоятельство при вычислении тензоров инерции составных тел.

4.5. Динамические уравнения Эйлера

Уравнения вращения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной точки были выведены Л. Эйлером в 1758 г., т. е. до открытия им второго закона динамики как независимого постулата механики. При выводе он опирался на теорему об изменении момента количества движения, хотя в то время эта

теорема так не называлась, но использовалась. Но при наличии гениального ума можно и неправильными методами получать надежные и правильные результаты. Обычным людям лучше пользоваться правильными методами.

Рассмотрим абсолютно твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной точки. Последнюю выберем в качестве полюса в теле. Тогда кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент тела вычисляются по формулам (4.4), (3.30) и (4.8), соответственно. Кинетическая энергия может быть записана в двух эквивалентных формах:

$$K(\mathcal{A}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (4.66)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ — левая и правая угловые скорости тела, соответственно; тензор инерции $\boldsymbol{\Theta}$ вычислен относительно неподвижной точки тела в отсчетном положении.

Для количества движения получим представление:

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = m \frac{d\mathbf{R}_C(t)}{dt} = m \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}_C(t), \quad \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_c, \quad (4.67)$$

где вектор \mathbf{r}_c определяет положение центра масс тела относительно неподвижной точки в отсчетном положении, а вектор \mathbf{R}_C определяет положение центра масс относительно неподвижной точки в актуальном положении.

При вычислении кинетического момента тела в качестве опорной точки выбираем неподвижную точку. Тогда получаем следующее выражение:

$$\mathbf{K}_2(\mathcal{A}) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (4.68)$$

Обратимся к вычислению сил и моментов, действующих на тело \mathcal{A} . При этом воспользуемся аксиомами аддитивности. В результате получим

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{Q} + \int_{(m)} \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathcal{A}^e) dm(\mathbf{r});$$

$$\mathbf{M}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{L} + \int_{(m)} [\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathcal{A}^e) + \mathbf{R}(\mathbf{r}) \times \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathcal{A}^e)] dm(\mathbf{r}),$$

где $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathcal{A}^e)$ — массовая плотность внешней силы, действующей на точку тела, определяемую в отсчетном положении вектором \mathbf{r} ; вектор $\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathcal{A}^e)$ — массовая плотность момента, действующего на точку \mathbf{r} ; векторы \mathbf{Q} и \mathbf{L} — силовая и моментная реакции опоры (сферического шарнира), фиксирующей неподвижную точку тела. Если опора не сопротивляется повороту тела вокруг нее, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$.

Запишем первый закон динамики для рассматриваемого тела с учетом указанных формул:

$$[\mathbf{m} \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}_C(t)]' = \mathbf{Q} + \int_{(m)} \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathcal{A}^e) d\mathbf{m}(\mathbf{r}).$$

Это уравнение позволяет вычислить реакцию \mathbf{Q} в опоре, если угловая скорость тела известна. Для определения угловой скорости тела необходимо воспользоваться вторым законом динамики, который можно представить в двух формах: через левую (истинную) и правую угловые скорости тела. В терминах левой угловой скорости второй закон динамики имеет вид

$$[\mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}]' = \mathbf{M}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (4.69)$$

Второй закон динамики в форме (4.69) удобен при рассмотрении свободных вращений тела при $\mathbf{M}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}$. Чтобы записать второй закон динамики в терминах правой угловой скорости, нужно воспользоваться вторым из представлений (4.68) и следующей формулой:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_2(\mathcal{A}) &= \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + (\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega} = \\ &= \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{P} \cdot \left(\Theta \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались правым уравнением Пуассона. С учетом этого выражения второй закон динамики (3.67) для закрытого тела можно переписать в виде

$$\Theta \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (4.70)$$

Уравнение (4.70) — это тензорная запись динамических уравнений Эйлера, которые у Эйлера и в книгах по механике представлены в проекциях на главные оси инерции. Приведем и эту форму динамических уравнений Эйлера. Пусть векторы \mathbf{d}_k — собственные векторы тензора инерции Θ , который задан в отсчетном положении, т. е. векторы \mathbf{d}_k не зависят от времени. Тогда векторы $\mathbf{D}_k = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_k$ будут собственными векторами тензора инерции $\mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t)$ в актуальном положении. Спектральные разложения тензоров инерции в отсчетном и актуальном положениях имеют соответственно вид

$$\Theta = \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3;$$

$$\mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t) = \Theta_1 \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{D}_1 + \Theta_2 \mathbf{D}_2 \otimes \mathbf{D}_2 + \Theta_3 \mathbf{D}_3 \otimes \mathbf{D}_3.$$

Кроме того, существуют очевидные формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{D}_k(\mathbf{t}) \otimes \mathbf{d}_k &\Rightarrow \boldsymbol{\omega}_k \equiv \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{D}_k = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{d}_k \equiv \Omega_k \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \omega_k \mathbf{D}_k; \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega_k \mathbf{d}_k. \end{aligned}$$

Получили, что проекции левой угловой скорости на вращающиеся собственные векторы тензора инерции равны проекциям правой угловой скорости на неподвижные собственные векторы тензора инерции в отсчетном положении. Проецируя левую часть уравнения (4.70) на векторы \mathbf{d}_k , т. е. умножая их скалярно на векторы \mathbf{d}_k , получаем

$$\mathbf{d}_k \cdot \left(\boldsymbol{\Theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} \right) = \Theta_k \dot{\Omega}_k + \sum_{s,m=1}^3 e_{skm} \Theta_s \Omega_s \Omega_m,$$

где суммирование по повторяющемуся индексу k не производится.

Проецируя правую часть уравнения (4.70) на векторы \mathbf{d}_k , получаем

$$\mathbf{d}_k \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{D}_k \cdot \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) \equiv M_k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e).$$

В координатном виде динамические уравнения Эйлера (4.70) имеют вид

$$\Theta_k \dot{\Omega}_k + \sum_{s,m=1}^3 e_{skm} \Theta_s \Omega_s \Omega_m = M_k(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) \quad (\text{не суммировать по } k), \quad (4.71)$$

где e_{skm} — символ Риччи, или символ перестановки¹².

В развернутом виде уравнения (4.71) записываются так:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\Omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2) \Omega_2 \Omega_3 &= M_1(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e), ; \\ \Theta_2 \dot{\Omega}_2 + (\Theta_1 - \Theta_3) \Omega_1 \Omega_3 &= M_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e); \\ \Theta_3 \dot{\Omega}_3 + (\Theta_2 - \Theta_1) \Omega_1 \Omega_2 &= M_3(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Уравнения (4.72) в книгах по механике называют динамическими уравнениями Эйлера, поскольку именно в такой форме они впервые появились у Эйлера. Заметим, что во времена Эйлера ни векторное, ни тем более тензорное исчисление еще не были разработано. Как ни удивительно, но Эйлер фактически знал эти разделы математики. Практически все исследования по

¹² Символы Риччи e_{skm} связаны с символами Леви-Чивиты $\varepsilon_{skm} = (\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_m$ соотношениями $\varepsilon_{skm} = \varepsilon \sqrt{g} e_{skm}$, где g — определитель матрицы, составленной из чисел $g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n$, значение ε определяется так: $\varepsilon = +1$ если тройка векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — правая и $\varepsilon = -1$ если тройка векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — левая. (*Примеч. ред.*)

динамике абсолютно твердого тела основаны на использовании динамических уравнений Эйлера в форме (4.72).

Приведем еще одну форму динамических уравнений Эйлера. Поскольку тензор инерции невырожден, т. е. его определитель отличен от нуля, то он допускает построение обратного тензора. Напомним тождество (1.105), которое имеет место для симметричных невырожденных тензоров:

$$(\Theta \cdot \mathbf{a}) \times (\Theta \cdot \mathbf{b}) = (\det \Theta) \Theta^{-1} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}.$$

Умножая обе части равенства (4.70) на тензор Θ^{-1} слева и учитывая тождество (1.105), а также тот факт, что $\det \Theta = \Theta_1 \Theta_2 \Theta_3$, получаем [49] уравнение:

$$\dot{\Omega} + \frac{1}{\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3} (\Theta \cdot \Omega) \times (\Theta^2 \cdot \Omega) = \Theta^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e). \quad (4.73)$$

В некоторых случаях уравнение (4.73) оказывается более удобным, нежели другие формы динамических уравнений Эйлера. Обратимся, например, к утверждению И. Ньютона [31]: “Волчок, коего части вследствие взаимного сцепления отвлекают друг друга от прямолинейного движения, не перестает равномерно вращаться поскольку это вращение не замедляется сопротивлением воздуха”. Эту цитату можно истолковать как утверждение о вращении с постоянной по модулю угловой скоростью. Выясним, возможны ли такие вращения, если они происходят не вокруг главных осей инерции, т. е. не являются перманентными. Для этого примем, что $\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{A}^e) = \mathbf{0}$. Умножим уравнение (4.73) скалярно на правый вектор угловой скорости и получим

$$\frac{1}{2}(\Omega \cdot \Omega) \cdot = \frac{(\Theta_3 - \Theta_1)(\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3} \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3, \quad \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \neq 0. \quad (4.74)$$

Последнее неравенство — это условие, что вращения не являются перманентными. Из уравнения (4.74) следует, что вращение будет происходить равномерно, т. е. с постоянной по модулю угловой скоростью, тогда, когда два главных момента инерции у тела совпадают. Другие варианты вращений с постоянной по модулю угловой скоростью возникают, когда $\Omega_i = 0$, $\Omega_j \Omega_k \neq 0$, $i \neq j \neq k \neq i$. Такие вращения также не являются перманентными. Волчком обычно называют тело вращения, т. е. тело с трансверсально-изотропным тензором инерции, два собственных числа которого совпадают между собой. Иными словами, для волчка утверждение Ньютона оказывается правильным, если, конечно, равномерность понимать в указанном смысле. Воистину, Великие часто оказываются правыми даже тогда, когда они ошибаются.

Глава 5

Движение динамически симметричного твердого тела

5.1. Свободные вращения твердого тела: случай Эйлера

Если на тело не действуют никакие внешние воздействия, то говорят, что тело движется по инерции или совершает свободные движения. В этом случае два закона динамики Эйлера выражают основную аксиому механики. Первый закон динамики утверждает, что центр масс тела движется равномерно и прямолинейно. Этот факт легко воспринимается и известен каждому школьнику. Второй закон утверждает постоянство кинетического момента тела. Но как при этом будет вращаться и поворачиваться тело? На этот вопрос не ответит не только школьник, он труден даже для специалиста. Последнему придется провести некоторые, причем не очень простые, вычисления прежде, чем он скажет, как именно будет вращаться тело. Уже этот факт показывает, что включение спинорных движений в сферу действия механики влечет за собой значительные усложнения. Это, конечно, печально, но это необходимость, продиктованная самой Природой. Без учета спинорных движений электричество, магнетизм и вообще микромир останутся для теории тайной за семью печатями.

Пусть дано абсолютно твердое тело с тензором инерции Θ , вычисленным в отсчетном положении. В качестве последнего выберем положение тела в начальный момент времени $t = 0$. Пусть в начальный момент времени угловая скорость тела определялась заданным вектором ω_0 . Пусть, наконец, при $t > 0$ тело предоставлено самому себе и движется по инерции. Требуется найти повороты и вращения рассматриваемого тела при $t > 0$. Для ответа на этот вопрос требуется найти решение уравнения (4.69), которое при свободном движении принимает вид

$$[\mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}] \cdot = \mathbf{0}. \quad (5.1)$$

Но уравнение (5.1) содержит две неизвестные функции: вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$ и тензор поворота $\mathbf{P}(t)$. Поэтому к уравнению (5.1) необходимо добавить уравнение Пуассона (2.125), связывающее повороты и вращения. Проинтегрировав (5.1), приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) &= \mathcal{L} = \text{const}; \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t); \\ \mathbf{P}(0) &= \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь постоянный вектор \mathcal{L} имеет смысл собственного кинетического момента (динамического спина) тела \mathcal{A} .

Для тензора инерции общего вида задача (5.2) имеет довольно сложное решение, которое было построено Эйлером и представлено в книгах по механике под названием случая Эйлера в динамике твердого тела. Полное решение будет изложено в главе, посвященной динамике абсолютно твердого тела. Задача (5.2) резко упрощается, если два или три главных момента инерции совпадают. В простейшем случае тензор инерции является шаровым: $\boldsymbol{\Theta} = \Theta \mathbf{E}$. Задача (5.2) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0; \quad \dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{P}(t); \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}_0 t \mathbf{m}).$$

Шаровой тензор инерции устраняет различие в свойствах трансляционных и спинорных движений. Единственное отличие в том, что в первом случае при движении по инерции постоянной является трансляционная скорость, а во втором — постоянна угловая скорость тела.

Рассмотрим вращение тела с трансверсально-изотропным тензором инерции. В отсчетном положении тензор инерции тела \mathcal{A} имеет вид

$$\boldsymbol{\Theta} = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (5.3)$$

где λ, μ — осевой и экваториальный моменты инерции тела \mathcal{A} , соответственно.

Первое уравнение (5.2) можно переписать в обращенной форме:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathcal{L}. \quad (5.4)$$

Решение уравнения (5.4) совместно с уравнением Пуассона позволяет найти угловую скорость и повороты тела \mathcal{A} . Разумеется, к этим уравнениям должны быть добавлены начальные условия:

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (5.5)$$

Здесь мы приняли, что в качестве отсчетного положения тела \mathcal{A} выбрано его начальное положение. Нетрудно убедиться, что уравнение (5.4) допускает

интеграл, который выражает закон сохранения энергии спинорного движения. Подчеркнем, что его нельзя называть законом сохранения вращательного движения, поскольку, например, в задаче о движении тела \mathcal{A} вокруг центра притяжения энергия вращательного движения складывается из энергии спинорного движения и энергии трансляционного движения вокруг центра притяжения. Энергия спинорного движения вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_S &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathcal{L}.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Вычисляя производную по времени от энергии \mathcal{E}_S и учитывая уравнения Пуассона и (5.4), немедленно убеждаемся, что энергия спинорного движения \mathcal{E}_S сохраняется неизменной:

$$\begin{aligned}2\dot{\mathcal{E}}_S &= (\mathcal{L} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathcal{L} - \mathcal{L} \cdot \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathcal{L}) = \\ &= (\mathcal{L} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathcal{L}) = 0.\end{aligned}$$

Всякий тензор поворота выражается через три параметра, например, через углы Эйлера. Общая теорема о представлении тензора поворота через три параметра и выражается равенством (2.61). Закон сохранения энергии спинорного движения $\mathcal{E}_S = \text{const}$ показывает, что три упомянутых параметра должны удовлетворять одному скалярному равенству (5.6). В результате тензор поворота, тождественно удовлетворяющий закону сохранения энергии спинорного движения, может быть выражен через два произвольных параметра. Введем обозначение

$$\mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{m}(t)) \equiv (1 - \cos \varphi) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{m} \times \mathbf{E} \quad (5.7)$$

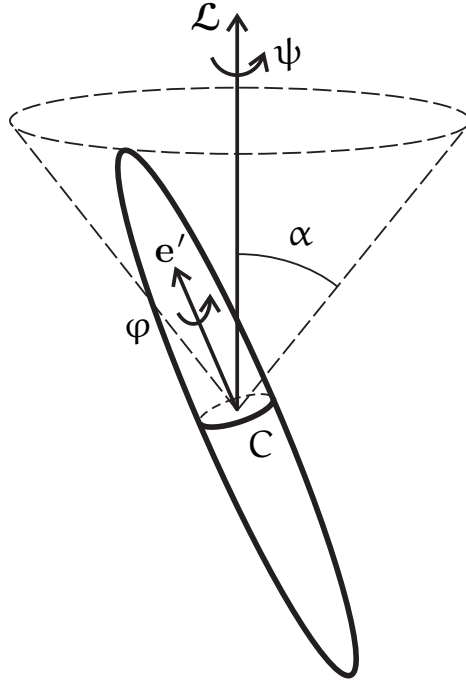
для поворота на угол φ вокруг вектора \mathbf{m} . Тогда искомым двухпараметрический тензор поворота может быть выражен в виде композиции:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}); \quad \mathbf{m} \equiv \mathcal{L}/|\mathcal{L}| = \text{const}, \quad (5.8)$$

где угол собственного вращения φ задает вращение вокруг оси изотропии \mathbf{e} тела \mathcal{A} , а угол прецессии ψ задает прецессию тела \mathcal{A} вокруг постоянного вектора динамического спина \mathcal{L} .

Подстановка (5.8) в (5.6) дает

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_S &= \frac{1}{2} \mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \\ &= \mathcal{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T(\varphi\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}^T(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathcal{L} = \\ &= \mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathcal{L} = \text{const}.\end{aligned}\quad (5.9)$$

Рис. 5.1. Регулярная прецессия; $\alpha = \widehat{e'(t), \mathcal{L}}$

Здесь учтены очевидные тождества:

$$\mathcal{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) = \mathcal{L}; \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) = \mathbf{e}; \quad \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T(\varphi \mathbf{e}) = \Theta^{-1}.$$

Таким образом, двухпараметрическое представление тензора поворота (5.8) сохраняет энергию спинорного движения при любых значениях углов φ и ψ . Вычисляя по теореме о сложении угловых скоростей (2.154) угловую скорость композиции поворотов (5.8), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\varphi} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot (\dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\varphi} \mathbf{e}). \quad (5.10)$$

Но подставляя представление (5.8) в уравнение (5.4), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P}(t) \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \mathcal{L} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathcal{L} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0. \quad (5.11)$$

Сравнивая выражения (5.10) и (5.11), приходим к уравнению

$$\dot{\psi} \mathcal{L} + \dot{\varphi} \mathbf{e} = \mathbf{l} \boldsymbol{\omega}_0; \quad \mathbf{l} = \sqrt{\mu^2 \omega_0^2 + (\lambda^2 - \mu^2) (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0)^2}, \quad (5.12)$$

где \mathbf{l} — модуль вектора \mathcal{L} .

При вычислении \mathbf{l} использовалось последнее уравнение (5.5) и выражение для тензора инерции (5.3).

Решение уравнения (5.12) находится элементарно¹ и имеет вид

$$\psi = \frac{t\mathfrak{l}}{\mu}, \quad \varphi = \frac{t(\mu - \lambda)}{\mu}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0) = \frac{t(\mu - \lambda)}{\lambda\mu}(\mathbf{e} \cdot \mathcal{L}). \quad (5.13)$$

Таким образом, ось тела \mathcal{A} прецессирует вокруг вектора динамического спина с постоянной скоростью прецессии $\dot{\psi}$ и вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ вокруг собственной оси, причем угол между осью тела и вектором его динамического спина сохраняется неизменным (рис. 5.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' &= \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(t)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{e}' \cdot \mathcal{L} = \mathbf{e} \cdot \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Движение такого рода в динамике твердого тела называют регулярной прецессией.

5.2. Движение твердого тела в центральном поле тяготения

Пусть в начале инерциальной системы отсчета расположено точечное тело массой M . Пусть в поле тяготения этого тела движется абсолютно твердое тело \mathcal{A} массой m . С физической точки зрения эта задача близка к движению электрона в кулоновом поле ядра, но при этом нам пришлось бы ввести дополнительные понятия, которые пока вводить преждевременно. Поэтому рассмотрим более привычную постановку задачи. Будем рассматривать абсолютно твердое тело, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между центром масс тела и точечным телом, расположенным в начале системы отсчета. Тензор инерции тела \mathcal{A} считается трансверсально-изотропным и в отсчетном положении имеет вид (5.3).

Количество движения и кинетический момент тела \mathcal{A} определяются выражениями

$$\mathbf{K}_1 = m\dot{\mathbf{R}}(t), \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t), \quad (5.15)$$

где $\mathbf{R}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ — вектор положения центра масс тела \mathcal{A} и тензор поворота тела \mathcal{A} , соответственно; $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела \mathcal{A} , которая связана с тензором поворота тела \mathcal{A} уравнением Пуассона (2.80).

¹ Рассматриваются проекции (5.12) на векторы \mathcal{L} и \mathbf{e} . При проецировании на вектор $\mathcal{L} \times \mathbf{e}$ обе части уравнения (5.12) обращаются в нуль. (*Примеч. ред.*)

В качестве опорной точки при вычислении кинетического момента выбрано начало в системе отсчета. Запишем теперь первые два закона динамики для тела \mathcal{A} .

Уравнение баланса количества движения:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{R}}) = -G \frac{Mm}{R^3} \mathbf{R}, \quad (5.16)$$

где G — универсальная гравитационная постоянная.

Уравнение (5.16) имеет четыре интеграла движения (один скалярный и один векторный). Скалярный интеграл называется интегралом энергии трансляционного движения. Он получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (5.16) на вектор $\dot{\mathbf{R}}$ и имеет вид

$$\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} - G \frac{mM}{R} \equiv \mathcal{E}_T = \text{const}, \quad (5.17)$$

где \mathcal{E}_T будем называть энергией трансляционного движения тела \mathcal{A} .

Векторный интеграл, называемый законом сохранения момента количества движения или интегралом площадей, получается после векторного умножения обеих частей уравнения (5.16) на вектор \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{H} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (5.18)$$

Из последнего равенства видно, что траектория центра масс тела \mathcal{A} лежит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{H} и называемой плоскостью эклиптики. Решение задачи (5.16) – (5.18) нетрудно построить, но здесь оно опускается.

Уравнение баланса кинетического момента имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{R}(t) \times m\dot{\mathbf{R}}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) \right) = \mathbf{0}.$$

Отсюда с учетом интеграла (5.18) получаем еще один векторный интеграл, фиксирующий сохранение динамического спина тела \mathcal{A} . В результате приходим к задаче (5.2) о спинорном движении твердого тела, решение которой построено ранее (см. (5.8), (5.10), (5.13), (5.14)).

Применим теперь полученные результаты к описанию вращения Земли. Это справедливо при пренебрежении влиянием Луны и гравитационным моментом от Солнца. Как известно, моменты инерции Земли различаются весьма незначительно:

$$\lambda \simeq 1,0033 \mu.$$

К сожалению, автор не знаком с деталями наблюдений по изучению вращения Земли и потому не в состоянии судить о степени их точности. Много

полезных сведений о движении Земли можно найти в книге [50]. Поскольку вектор динамического спина постоянен, то он фиксирован относительно плоскости эклиптики. Считается [50], что ось Земли также фиксирована относительно плоскости эклиптики и составляет с ней угол $66^{\circ}33'$. Согласно (5.14) одновременная фиксация и динамического спина, и оси Земли возможна тогда и только тогда, когда вектор динамического спина направлен строго по оси Земли. В таком случае

$$\mathcal{L} = \lambda \boldsymbol{\omega}; \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e} = \text{const}; \quad l = |\mathcal{L}| = \lambda \omega_0, \quad (5.19)$$

и различие между углами прецессии ψ и собственного вращения φ теряет смысл. Физически интерпретируема только сумма этих углов, равная, конечно, величине $t\omega_0$. Но имеются сведения о том, что скорость вращения Земли не постоянна, а ось Земли слегка колеблется. Обычно это объясняется тем, что Земля не может считаться абсолютно твердым телом. Но в дополнение к этому объяснению существует и другая причина, по которой ось Земли может колебаться.

Действительно, допустим, что направление динамического спина немного отличается от направления оси Земли. В этом случае ось Земли будет прецессировать вокруг вектора динамического спина, и, следовательно, будет немного меняться угол между осью Земли и плоскостью эклиптики. Модуль вектора угловой скорости будет оставаться постоянным, но сам вектор угловой скорости будет также прецессировать вокруг вектора динамического спина. При этом смена суток на Земле определяется не вращением Земли вокруг собственной оси, а прецессией ее оси вокруг вектора динамического спина, как это видно из формул (5.13).

Замечание. Сохранение динамического спина элементарных частиц, очевидно, должно играть огромную роль в квантовой физике, если бы она учитывала в явном виде спинорные движения. Обсуждение проблем квантовой физики, разумеется, выходит за рамки данной книги, но можно обратить внимание на следующее обстоятельство. Одной из важнейших и наиболее мистических формул в квантовой физике является формула для кванта энергии, или энергии фотона [51]. Эта знаменитая формула имеет вид: $E = \hbar \omega$, где \hbar — постоянная Планка. На первый взгляд эта формула решительно не согласуется с классической механикой, ибо в ней энергия зависит от скорости линейно, а не квадратично. Обратим, однако, внимание на формулу для энергии спинорного движения (5.6):

$$2 \mathcal{E}_S = \mathcal{L} \cdot \boldsymbol{\omega}(t).$$

Она также линейно зависит от угловой скорости и внешне похожа на формулу для кванта энергии, особенно когда направления угловой скорости и динамического спина совпадают.

5.3. Реакция в опоре свободно вращающегося тела

Рассмотрим абсолютно твердое тело, одна точка которого неподвижно закреплена, и никакие силы, кроме силовой реакции в опоре, на тело не действуют. Эта задача мало отличается от рассмотренной выше, но мы хотим обратить внимание на одну ее особенность. Запишем уравнения движения.

Уравнение баланса количества движения:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{\mathbf{R}}) = \mathbf{F}, \quad (5.20)$$

где вектор \mathbf{R} определяет положение центра масс относительно неподвижной точки; сила \mathbf{F} — реакция в неподвижной точке.

Уравнение (5.20) служит для нахождения реакции в опоре. По основной теореме кинематики твердого тела

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}, \quad (5.21)$$

где вектор \mathbf{r} задает положение центра масс тела в отсчетном положении.

Для нахождения тензора поворота \mathbf{P} необходимо записать второй закон динамики:

$$(\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathcal{L} = \text{const}, \quad (5.22)$$

где тензор инерции Θ вычислен относительно неподвижной точки и является трансверсально-изотропным.

Решение задачи (5.22) при заданных начальных условиях ничем не отличается от решения (5.8)–(5.13). Подставив (5.21) в (5.20) и используя решение задачи о спиновом движении (5.8)–(5.13), вычислим реакцию в опоре:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot [\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\psi} (\mathbf{e} \otimes \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}_0 \otimes \mathbf{e})] \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}. \quad (5.23)$$

В выражении (5.23) использованы обозначения, принятые в (5.8)–(5.13). Как видим, реакция в опоре вычисляется по довольно сложной формуле, причем ее направление меняется во времени и не совпадает с направлением вектора \mathbf{R} , определяющего положение центра масс. Вообразим теперь, что мы в состоянии измерять реакцию опоры и наблюдать вращательное движение

тела. Допустим также, что мы ничего не знаем о втором законе динамики Эйлера. Возьмем два тела с одинаковыми тензорами инерции и зададим для них одинаковые начальные условия. В этом случае наблюдаемые движения этих двух тел будут совершенно одинаковыми. В то же время измеряемые реакции опор у этих тел могут быть совершенно разными, поскольку реакции зависят от положения центра масс в теле. Но центры масс у тел с одинаковыми тензорами инерции могут находиться в различных точках тела, причем движение центров масс неконтролируемо. Если бы мы были физиками, то заявили бы, что эксперимент решительно опровергает классическую механику, ибо наблюдаемые движения не определяют измеряемые силы. Для объяснения этого факта мы начали бы придумывать вероятностные трактовки. Здесь нет никакого преувеличения. В этом может убедиться каждый, кто не поленится заглянуть в книги по атомной физике, которые насыщены заявлениями “о решительном разрыве с классической механикой”. Причем оснований для этого ничуть не больше, чем в приведенном примере.

5.4. Быстро вращающийся гироскоп

Абсолютно твердое тело с трансверсально-изотропным тензором инерции, вращающееся вокруг неподвижной точки, называют гироскопом [40]. В технике гироскопы находят очень широкое применение и обычно являются телами вращения. Но нередко [47] гироскопом называют тело с произвольным тензором инерции, и даже не обязательно вращающимся вокруг неподвижной точки. Так что термин “*гироскоп*” не является однозначно определенным и применяется в разных смыслах. Начальные понятия о гироскопах читатель может найти в учебнике [40], а более детальные сведения — в книге [47]. Кроме того, по гироскопам существует обширная литература. Описание приложений не входит в цели главы, посвященной обсуждению фундаментальных законов механики, но при изложении второго закона динамики не упомянуть гироскопы совершенно невозможно, тем более что гироскопы особенно ярко демонстрируют принципиальные различия между спинорными и трансляционными движениями. Далее будет рассмотрена простейшая из возникающих здесь задач. К сожалению, обсуждению поведения гироскопа мы вынуждены предпослать относительно длинное решение задачи о быстро вращающемся гироскопе. При этом не будут использоваться подходы, типичные для динамики твердого тела. Здесь уместно процитировать известного специалиста по теории гироскопов К. Магнуса [47, с. 117]: “Много усилий было затрачено на поиски таких случаев, для которых было бы возможно точное решение

нелинейных уравнений движения. Как бы ни были привлекательны для математика достигнутые при этом результаты, приходится, однако, констатировать, что с физической точки зрения или с точки зрения чисто гироскопической техники они почти (или даже совсем) не представляют интереса². Поэтому далее будет представлено приближенное, но с очень высокой степенью точности, решение, причем оно будет найдено в явной форме и выражено через элементарные функции. Сравнивая полученное далее решение с результатами, представленными в книгах² по динамике твердого тела, необходимо соблюдать известную осторожность. В частности, при их получении использовалось представление тензора поворота через углы Эйлера, которые в данной задаче неудобны. Здесь используется другое представление тензора поворота.

Итак, рассмотрим тело с трансверсально-изотропным тензором инерции, который вычислен относительно неподвижной точки и в отсчетном положении определен выражением

$$\Theta = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (5.24)$$

где \mathbf{e} — единичный вектор, задающий ось изотропии; λ и μ — осевой и экваториальный моменты инерции, соответственно.

Будем считать, что начало системы отсчета расположено в точке \mathbf{O} , а центр масс расположен на оси симметрии:

$$\mathbf{r}_C = l \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C = l \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{e},$$

где l — расстояние от неподвижной точки до центра масс; \mathbf{r}_C и \mathbf{R}_C — векторы положения центра масс в отсчетном и актуальном положениях, соответственно; \mathbf{P} — тензор поворота тела.

Введем обозначение:

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C(t) = l \mathbf{e}'(t).$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с тензором поворота \mathbf{P} уравнением Пуассона:

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \quad (5.25)$$

Вектор кинетического момента \mathcal{L} тела \mathcal{A} вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot [\lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e})] \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= [\lambda \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}' + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e}' \otimes \mathbf{e}')] \cdot \boldsymbol{\omega} = \mu \boldsymbol{\omega} + (\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}') \mathbf{e}'. \end{aligned} \quad (5.26)$$

² Даже терминология не всегда совпадает. Используемая в данной книге терминология близка к таковой в учебнике [40], но сильно отличается от принятой в книге [47].

Второй закон динамики Эйлера дает уравнения движения тела \mathcal{A} :

$$[\boldsymbol{\omega} + \eta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}']^\cdot = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}'; \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad \nu \equiv \frac{mgl}{\mu}, \quad (5.27)$$

где \mathbf{k} — орт вертикали; m — масса тела; g — ускорение свободного падения.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{E}; \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}. \quad (5.28)$$

Система уравнений (5.25), (5.27) с начальными условиями (5.28) дает классическую постановку задачи в случае Лагранжа [40, 52]. Решение этой задачи в полном объеме будет изложено в главе, посвященной динамике твердого тела. Здесь рассматривается частный случай, когда $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{e}$. Кроме того, модуль начальной угловой скорости ω_0 будет считаться достаточно большим. Более точный смысл этого утверждения будет указан позднее. Вычислим проекцию уравнения (5.27) на орт \mathbf{e}' . При этом учтем равенство

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{e}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^\cdot - \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^\cdot - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^\cdot.$$

С учетом этого равенства проекция уравнения (5.27) на орт \mathbf{e}' дает

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')^\cdot = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}' = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = \omega_0. \quad (5.29)$$

Иными словами, проекция угловой скорости на вращающуюся ось симметрии остается неизменной и находится по начальным условиям (5.28). Интеграл (5.29) впервые был получен Лагранжем, и потому его принято называть интегралом Лагранжа. Теперь уравнение (5.27) переписывается в форме

$$(\boldsymbol{\omega} + \eta \omega_0 \mathbf{e}')^\cdot = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}'$$

и с учетом равенства $\dot{\mathbf{e}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$ принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} + \eta \omega_0 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}'. \quad (5.30)$$

Для уравнения (5.30) нетрудно получить еще два интеграла. Классические подходы существенно опираются на эти интегралы, но в излагаемом далее решении они практически не используются. Укажем только, что один из них называется интегралом энергии и получается после скалярного умножения обеих частей уравнения (5.30) на вектор $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_0 + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = \text{const}. \quad (5.31)$$

Интеграл энергии (5.31) в совокупности с интегралом Лагранжа утверждает постоянство суммы кинетической и потенциальной энергий тела. Из интеграла энергии (5.31) следует, что

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = (\cos \alpha - \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}') \frac{2mgl}{\mu\omega_0^2}; \quad \cos \alpha = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}.$$

С учетом того, что

$$-1 \leq \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' \leq 1,$$

из последнего равенства немедленно следуют неравенства

$$-(1 - \cos \alpha) \frac{2mgl}{\mu\omega_0^2} \leq \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \leq (1 + \cos \alpha) \frac{2mgl}{\mu\omega_0^2}.$$

А из этого неравенства следует, что для быстро вращающегося гироскопа, т. е. при $\frac{2mgl}{\mu\omega_0^2} \ll 1$, модуль угловой скорости почти не отличается от модуля

начальной угловой скорости. Смысл параметра $\frac{2mgl}{\mu\omega_0^2}$ понятен: это отношение максимальной потенциальной энергии гироскопа, когда центр масс находится в верхнем положении, к удвоенной начальной кинетической энергии гироскопа. Для быстро вращающегося гироскопа это отношение является малым. Если бы угловая скорость была постоянной, то из интеграла энергии следовало бы

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' \equiv \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e},$$

где использовано стандартное для этой книги обозначение:

$$\mathbf{Q}(\gamma \mathbf{m}) \equiv (1 - \cos \gamma) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \gamma \mathbf{E} + \sin \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{E}.$$

Иными словами, если бы модуль угловой скорости был постоянным, то ось гироскопа совершала бы чистую прецессию вокруг орта вертикали с угловой скоростью прецессии $\dot{\psi} \mathbf{k}$. На самом деле угловая скорость не постоянна, а угол между вертикалью и осью гироскопа меняется, но меняется незначительно. Поэтому тензор поворота нужно искать в виде композиции трех поворотов:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}); \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{\sin \alpha}; \quad |\vartheta| \ll 1, \quad (5.32)$$

где углы ψ , ϑ и φ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно.

По основной теореме о представлении тензора поворота (2.61) представление (5.32) без допущения о малости угла нутации справедливо всегда. Для быстро вращающегося гироскопа вектор нутации $\vartheta = \vartheta \mathbf{p}$ мал по модулю. Поэтому можно использовать аппроксимацию для малых углов:

$$\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) = \mathbf{E} + \vartheta \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{E} + \vartheta \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}). \quad (5.33)$$

Вычисляя угловую скорость для поворота (5.33), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\vartheta} + \dot{\varphi} \vartheta \times \mathbf{e}). \quad (5.34)$$

Нетрудно установить следующие формулы:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} \vartheta \times \mathbf{e} + \\ &+ \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \times \mathbf{e} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \dot{\vartheta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times (\vartheta \times \mathbf{e})); \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}' &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\dot{\psi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times (\vartheta \times \mathbf{e}) + \dot{\vartheta} \times \mathbf{e}); \\ \mathbf{k} \times \mathbf{e}' &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot [\mathbf{k} \times \mathbf{e} + \mathbf{k} \times (\vartheta \times \mathbf{e})]. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (5.30), приходим к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} &\underline{\ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{e}} + \ddot{\vartheta} + \ddot{\varphi} \vartheta \times \mathbf{e} + (-\dot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{k} - \eta \omega_0 \mathbf{e}) \times \dot{\vartheta} + \\ &+ \underline{(\dot{\psi} \dot{\varphi} + \eta \omega_0 \dot{\psi} - \nu) \mathbf{k} \times \mathbf{e}} + (\dot{\psi} \dot{\varphi} + \eta \omega_0 \dot{\psi} - \nu) \mathbf{k} \times (\vartheta \times \mathbf{e}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Подчеркнутые слагаемые в уравнении (5.35) должны быть малыми и иметь порядок $O(\vartheta)$. Этого можно добиться, если принять, что

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \beta; \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \gamma; \quad \beta \sim O(\vartheta); \quad \gamma \sim O(\vartheta). \quad (5.36)$$

Причем величины с индексом 0 должны удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}_0 \mathbf{k} + \ddot{\varphi}_0 \mathbf{e} + (\dot{\psi}_0 \dot{\varphi}_0 + \eta \omega_0 \dot{\psi}_0 - \nu) \mathbf{k} \times \mathbf{e} &= \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_0 &= \omega_0; \quad \dot{\psi}_0 = \frac{\nu}{(1 + \eta) \omega_0} = \frac{\mu \nu}{\lambda \omega_0}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Здесь использовано начальное условие для $\dot{\varphi}_0$. Не следует думать, что функции β и γ должны быть малыми по сравнению с $\dot{\varphi}_0$ и $\dot{\psi}_0$, соответственно. В представлении (5.36) это не предполагается. В частности, функции γ и

$\dot{\psi}_0$ будут иметь одинаковый порядок малости. Из равенств (5.37) видим, что скорость прецессии $\dot{\psi}_0$ для быстро вращающегося гироскопа мала, но угол прецессии ψ_0 не мал, поскольку он нарастает во времени по линейному закону. Подставляя выражения (5.36) и (5.37) в уравнение (5.35) и отбрасывая в нем величины $O(\beta\vartheta)$ и $O(\gamma\vartheta)$ второго порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}\mathbf{k} + \dot{\beta}\mathbf{e} - \frac{\dot{\vartheta}}{\sin\alpha} \left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\mathbf{e} - \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\mathbf{k} \right) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) + \\ + \left(\frac{\ddot{\vartheta}}{\sin\alpha} + \frac{\lambda\omega_0}{\mu}\gamma + \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\beta \right) \mathbf{k} \times \mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Проекция уравнения (5.38) на орт \mathbf{k} дает

$$\dot{\gamma} + \dot{\beta}\cos\alpha = \frac{\lambda\omega_0}{\mu}\dot{\vartheta}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma + \beta\cos\alpha = \frac{\lambda\omega_0}{\mu}\vartheta\sin\alpha + \mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — произвольная постоянная.

Проекция уравнения (5.38) на орт \mathbf{e} дает

$$\dot{\gamma}\cos\alpha + \dot{\beta} = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\dot{\vartheta}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma\cos\alpha + \beta = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\vartheta\sin\alpha + \mathbf{b},$$

где \mathbf{b} — произвольная постоянная.

Наконец, проекция уравнения (5.38) на орт $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$ дает

$$\ddot{\vartheta} + \sin\alpha \left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu}\gamma + \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}\beta \right) = 0. \quad (5.39)$$

Для определения постоянных \mathbf{a} и \mathbf{b} необходимо использовать начальные условия для угловой скорости. Поскольку начальные углы равны нулю, то выражение (5.34) дает

$$\begin{aligned} \omega_0\mathbf{e} = \left(\dot{\psi}\mathbf{k} + \dot{\phi}\mathbf{e} + \dot{\vartheta} \right) \Big|_{t=0} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \beta(0) = 0; \quad \gamma(0) = -\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}; \quad \dot{\vartheta}(0) = 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Используя условия (5.40), получаем

$$\mathbf{a} = -\frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}; \quad \mathbf{b} = -\frac{\mu\nu\cos\alpha}{\lambda\omega_0}.$$

Исключая в уравнении (5.39) функции β и γ , получаем уравнение для определения угла нутации:

$$\ddot{\vartheta} + \omega_*^2\vartheta = \nu\sin\alpha; \quad \vartheta(0) = 0; \quad \dot{\vartheta}(0) = 0, \quad (5.41)$$

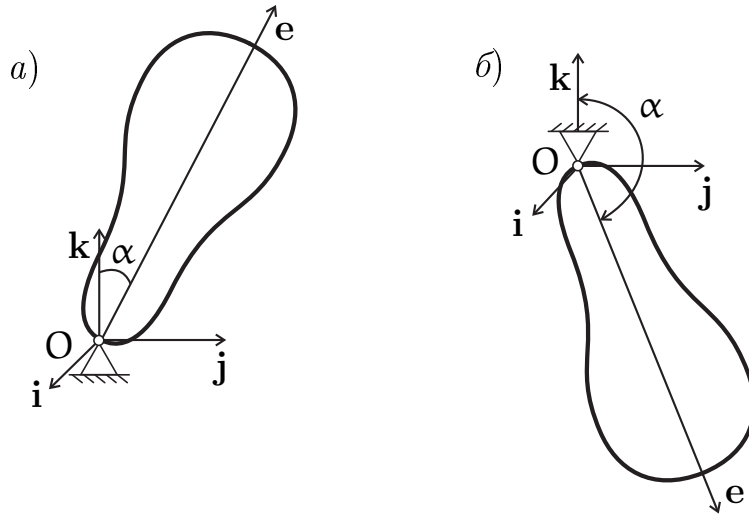


Рис. 5.2. Гироскоп: *a* — опертый в нижней точке; *b* — подвешенный

где

$$\omega_*^2 \equiv \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{\mu^2} \left(1 - 2 \frac{\mu^2 \nu}{\lambda^2 \omega_0^2} \cos \alpha + \frac{\mu^4 \nu^2}{\lambda^4 \omega_0^4} \right).$$

В этом выражении последнее слагаемое в скобках имеет порядок $O(\vartheta^2)$. Поскольку величины порядка $O(\vartheta^2)$ ранее отбрасывались, то и здесь ее необходимо отбросить. В итоге получаем

$$\omega_*^2 \equiv \frac{\lambda^2 \omega_0^2}{\mu^2} \left(1 - 2 \frac{\mu^2 \nu}{\lambda^2 \omega_0^2} \cos \alpha \right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 \omega_0^2 > 2 \nu \mu^2 \cos \alpha. \quad (5.42)$$

Последнее неравенство в (5.42) является необходимым критерием применимости полученного решения при всех \mathbf{t} . Если оно нарушено, то полученное решение правильно только при малых \mathbf{t} и не представляет никакого интереса. В этом случае нужно использовать более общий подход, который будет изложен в главе, посвященной задачам динамики твердого тела.

Таким образом, получаем окончательное выражение для угла нутации:

$$\vartheta(\mathbf{t}) = \frac{\nu \sin \alpha}{\omega_*^2} (1 - \cos \omega_* \mathbf{t}), \quad (5.43)$$

где частота нутационных колебаний ω_* определена формулой (5.42).

Выражение (5.42) показывает, что для гироскопа, опертого в нижней точке [47], т. е. при $\alpha < \pi/2$ (рис. 5.2, *a*), частота нутационных колебаний немного меньше, чем частота нутационных колебаний подвешенного гироскопа, т. е. при $\alpha > \pi/2$ (рис. 5.2, *b*). Окончательные выражения для скорости собствен-

ного вращения и скорости прецессии имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t) &= \omega_0 - \frac{\nu}{\omega_*^2} \left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu} \cos \alpha - \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0} \right) (1 - \cos \omega_* t); \\ \dot{\psi}(t) &= \frac{\nu}{\omega_*^2} \left(\frac{\lambda\omega_0}{\mu} - \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0} \cos \alpha \right) (1 - \cos \omega_* t).\end{aligned}\tag{5.44}$$

Подчеркнутое слагаемое в (5.44) следует отбросить как выходящее за пределы точности принятого метода решения задачи. Отметим, что для быстро вращающихся гироскопов, которые используются в технике, формулы (5.43) и (5.44) являются практически точными. Наиболее показательным является случай, когда при $t = 0$ ось гироскопа была направлена горизонтально, т. е. $\alpha = \pi/2$, $\cos \alpha = 0$. Тогда вместо выражений (5.43) и (5.44) получим

$$\begin{aligned}\vartheta(t) &= \frac{\mu^2\nu}{\lambda^2\omega_0^2} \left(1 - \cos \frac{\lambda\omega_0 t}{\mu} \right); & \dot{\vartheta}(t) &= \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0} \sin \frac{\lambda\omega_0 t}{\mu}; \\ \dot{\phi}(t) &= \omega_0; & \dot{\psi}(t) &= \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0} \left(1 - \cos \frac{\lambda\omega_0 t}{\mu} \right).\end{aligned}\tag{5.45}$$

Сравним полученное решение с решением, представленным в [40] и полученным на основе приближенной теории быстро вращающегося гироскопа. Оно имеет вид

$$\dot{\vartheta}(t) = 0; \quad \dot{\phi}(t) = \omega_0; \quad \dot{\psi}(t) = \frac{\mu\nu}{\lambda\omega_0}.$$

Видим, что эти формулы совпадают с осредненными по периоду нутационных колебаний скоростями, определяемыми формулами (5.45).

Если бы гироскоп вращался вокруг своего центра масс ($\nu = 0$, см. формулу (5.27)), то он обладал бы только вращением вокруг собственной оси, причем скорость собственного вращения сохраняла бы свое направление в пространстве. Если $\nu \neq 0$, то на гироскоп действует внешний момент, направленный по вектору $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. На первый взгляд кажется, что ось гироскопа должна поворачиваться также вокруг вектора $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. Но так было бы только в том случае, если бы скорость собственного вращения равнялась бы нулю. Если $\omega_0 \neq 0$, то ось гироскопа начинает прецессировать вокруг вектора \mathbf{k} . Более точно для оси гироскопа получим выражение

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e} + \vartheta \times \mathbf{e}) \simeq \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

Последнее выражение и показывает, что ось гироскопа прецессирует вокруг вектора \mathbf{k} с переменной и малой по сравнению с ω_0 скоростью. Но угол

прецессии нарастает во времени, и потому происходит уход оси гироскопа от первоначально заданного направления на сколь угодно большой угол. В то же время ось гироскопа практически не выходит из горизонтальной плоскости, поскольку угол нутации пренебрежимо мал при всех временах. То обстоятельство, что вращающееся тело при дополнительном воздействии на него моментом, начинает поворачиваться вокруг оси, ортогональной моменту, кажется удивительным. Но это далеко не единственный факт, вызывающий удивление при первоначальном изучении спинорных движений твердых тел.

5.5. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки: случай Лагранжа

Случаем Лагранжа называют задачу о вращении твердого тела с трансверсально-изотропным тензором инерции в однородном поле тяготения. Центр масс тела расположен на оси симметрии тензора инерции. С формально-математической точки зрения решение этой задачи известно очень давно и приведено во многих книгах и учебниках. Тем не менее известное решение трудно поддается ясному физическому истолкованию и неоправданно сложно описывает некоторые простые типы движения. Приведем новую форму решения задачи.

5.5.1. Общая постановка задачи

Рассмотрим абсолютно твердое тело \mathcal{A} , которое может совершать вращательное движение вокруг точки O , принадлежащей телу \mathcal{A} и неподвижной в системе отсчета. Будем считать, что тензор инерции тела \mathcal{A} , вычисленный относительно точки O , трансверсально изотропен и имеет вид (5.24):

$$\Theta = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}),$$

где λ и μ — осевой и экваториальный моменты инерции тела, соответственно; \mathbf{e} — орт оси симметрии тензора инерции в отсчетном положении.

Введем в рассмотрение тензор поворота тела $\mathbf{P}_*(t)$ и орт оси симметрии тензора инерции в актуальном положении:

$$\mathbf{e}'(t) = \mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{e}. \tag{5.46}$$

Будем считать, что начало в системе отсчета расположено в точке O и центр масс расположен на оси симметрии:

$$\mathbf{r}_C = l \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_C(t) = \mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{r}_C = l \mathbf{P}_* \cdot \mathbf{e} \equiv l \mathbf{e}',$$

где \mathbf{l} — расстояние от неподвижной точки до центра масс; \mathbf{r}_C и \mathbf{R}_C — векторы положения центра масс в отсчетном и актуальном положениях, соответственно.

Угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega}_*$ связана с тензором поворота \mathbf{P}_* уравнением Пуассона:

$$\dot{\mathbf{P}}_* = \boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{P}_*. \quad (5.47)$$

Вектор кинетического момента \mathcal{L} тела \mathcal{A} вычисляется по формуле³

$$\mathcal{L} = \mu \boldsymbol{\omega}_* + (\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}'.$$

Второй закон динамики Эйлера дает уравнения движения тела \mathcal{A} :

$$[\boldsymbol{\omega}_* + \eta(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')\mathbf{e}']^\cdot = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \eta \equiv \frac{\lambda - \mu}{\mu}, \quad \nu \equiv \frac{mgl}{\mu}, \quad (5.48)$$

где \mathbf{k} — орт вертикали; m — масса тела; g — ускорение свободного падения.

Начальные условия имеют вид

$$\mathbf{P}_*(0) = \mathbf{E}; \quad \boldsymbol{\omega}_*(0) = \boldsymbol{\omega}_*^0. \quad (5.49)$$

Система уравнений (5.47), (5.48) с начальными условиями (5.49) дает классическую постановку задачи для случая Лагранжа [52]. Решение этой задачи зависит от пяти параметров: двух скалярных параметров η и ν и одного векторного параметра $\boldsymbol{\omega}_*^0$. Но зависимость решения от параметра η является несущественной, и от нее легко избавиться. Для этого предварительно вычислим проекцию уравнения (5.48) на орт \mathbf{e}' . При этом учтем равенство

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_* \cdot \mathbf{e}' = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')^\cdot - \boldsymbol{\omega}_* \cdot \dot{\mathbf{e}}' = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')^\cdot - \boldsymbol{\omega}_* \cdot (\boldsymbol{\omega}_* \times \mathbf{e}') = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')^\cdot.$$

С учетом этого равенства проекция уравнения (5.48) на орт \mathbf{e}' дает

$$(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}')^\cdot = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{e}' = a_* = \text{const}. \quad (5.50)$$

Иными словами, проекция угловой скорости на вращающуюся ось симметрии остается неизменной и находится по начальным условиям (5.49). Интеграл (5.50) принято называть интегралом Лагранжа.

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_* = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(-\eta a_* t \mathbf{e}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_* = \boldsymbol{\omega} - \eta a_* \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\omega} - \eta a_* \mathbf{e}'; \\ \mathbf{e}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(-\eta a_* t \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

³ Вывод этой формулы в точности повторяет вывод формулы (5.26). (Примеч. ред.)

Здесь использовано обозначение $\mathbf{Q}(-\eta \mathbf{a}_* t)$ для поворота на угол $-\eta \mathbf{a}_* t$ единичного вектора \mathbf{e} (см. представление Эйлера для тензора поворота (1.123)). При вычислении угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_*$ использовалась теорема об угловой скорости композиции поворотов (см. раздел 2.13).

Подставляя выражение (5.51) в уравнение (5.48) и присоединяя к результату уравнение Пуассона, приходим к следующей системе⁴:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}', \quad \dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}. \quad (5.52)$$

К системе (5.52) необходимо добавить начальные условия

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \quad (\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \boldsymbol{\omega}_*^0 + \eta \mathbf{a}_* \mathbf{e}). \quad (5.53)$$

Задача (5.52), (5.53) немного проще исходной, поскольку ее решение зависит от четырех параметров: скаляра ν и вектора $\boldsymbol{\omega}_0$. Именно эта задача будет анализироваться далее. В литературе приводится решение задачи (5.52), (5.53) в ее исходной постановке (5.47)–(5.49) на основе представления тензора поворота через углы Эйлера (2.71):

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}); \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = 0; \quad |\mathbf{p}| = 1. \quad (5.54)$$

Другие представления в известной автору литературе не использовались. Более того, в литературе не дается никаких обоснований в пользу использования именно углов Эйлера. В следующем подразделе будет использовано другое представление тензора поворота, которое диктуется самим решением задачи, а не принимается заранее. Получаемое при этом решение значительно проще поддается наглядной интерпретации, нежели при использовании углов Эйлера.

5.5.2. Формальное решение задачи Лагранжа

Формальное решение рассматриваемой задачи (5.52), (5.53) опирается на факт существования трех очевидных первых интегралов.

Первый интеграл получается в результате проецирования первого уравнения (5.52) на орт \mathbf{e}' и называется [53] интегралом Лагранжа:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{e}' = 0 &\Rightarrow (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')' - \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')' - \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')' = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{a} = \text{const.} \end{aligned}$$

⁴ При выводе первого уравнения (5.52) использовался также интеграл Лагранжа (5.50). (Примеч. ред.)

Второй интеграл получается в результате проецирования первого уравнения (5.52) на орт \mathbf{k} и называется интегралом площадей:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k})' = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{b} = \text{const.}$$

Наконец, последний интеграл — это интеграл энергии. Он получается в результате проецирования первого уравнения (5.52) на вектор $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \nu \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}') = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})' + \nu \mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})' + \nu \mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \text{const.} \end{aligned}$$

Итак, три интеграла задачи (5.52), (5.53) определяются выражениями

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{a} \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e}; \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{b} \equiv \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k}; \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} + \nu \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{H}, \quad (5.55)$$

где величины \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{H} — постоянные, определяемые по начальным условиям.

Осталось выписать проекцию первого уравнения (5.52) на вектор $\mathbf{k} \times \mathbf{e}'$. После несложных преобразований

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}') = -\mathbf{k} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}') = -\mathbf{k} \cdot [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}')' - \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}'] = \\ = -\mathbf{k} \cdot [\ddot{\mathbf{e}}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}')] = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}')'' - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}') + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}')(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

с учетом интегралов (5.55) указанная проекция записывается в виде

$$\ddot{\chi} + \omega^2 \chi - \nu \chi^2 + \nu - \mathbf{a}\mathbf{b} = 0; \quad \chi = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'; \quad \omega^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (5.56)$$

После исключения квадрата модуля угловой скорости с помощью интеграла энергии уравнение (5.56) можно записать в другой форме:

$$\ddot{\chi} + 2\mathbf{H}\chi - 3\nu\chi^2 + \nu - \mathbf{a}\mathbf{b} = 0; \quad \chi = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}'. \quad (5.57)$$

С формальной точки зрения решение уравнения (5.57) легко строится в эллиптических функциях и здесь не приводится. Будем считать, что функция $\chi(\mathbf{t})$ известна. Задача состоит в том, чтобы через нее выразить все остальные неизвестные. Интегралы (5.55) дают проекции угловой скорости на орты \mathbf{e}' и \mathbf{k} . Вычислим скалярное произведение:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}') = -\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}') = -\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{e}}' = -\dot{\chi}. \quad (5.58)$$

Примем векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k} \times \mathbf{e}'$$

в качестве базиса. Тогда векторы взаимного базиса⁵ вычисляются по формулам

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{k} - \chi \mathbf{e}'}{1 - \chi^2}; \quad \mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}' - \chi \mathbf{k}}{1 - \chi^2}; \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}'}{1 - \chi^2}.$$

Теперь для вектора угловой скорости получим выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{b} - \alpha \chi}{1 - \chi^2} \mathbf{k} - \frac{\dot{\chi}}{1 - \chi^2} \mathbf{k} \times \mathbf{e}' + \frac{\mathbf{a} - \beta \chi}{1 - \chi^2} \mathbf{e}', \quad \mathbf{e}' \equiv \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{e}. \quad (5.59)$$

Выражение (5.59) еще не дает полного представления об угловой скорости, поскольку содержит неопределенный вектор \mathbf{e}' , зависящий от тензора поворота. Подчеркнем, что в использованных построениях конкретное представление для тензора поворота не имело значения. Поэтому можно в принципе использовать любое представление для тензора поворота. Однако выражение (5.59) дает ясное представление о том, какая должна быть структура тензора поворота. А именно угловая скорость (5.59) отвечает тензору поворота вида

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\phi \mathbf{e}); \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}|} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}}{\sin \gamma_0}; \quad \cos \gamma_0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}, \quad (5.60)$$

где углы ψ , ϑ , ϕ будем называть углами прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно.

Если векторы \mathbf{k} и \mathbf{e} совпадают, то в качестве вектора \mathbf{p} можно выбрать произвольный единичный вектор, ортогональный вектору \mathbf{k} . Нетрудно установить связь между углом γ и углом нутации ϑ . Действительно,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \cos \gamma = \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} = \cos(\gamma_0 + \vartheta) \quad \Rightarrow \quad \gamma = \gamma_0 + \vartheta. \quad (5.61)$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$\mathbf{k} \times \mathbf{e}' = \sin(\gamma_0 + \vartheta) \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}. \quad (5.62)$$

С учетом равенств (5.61) и (5.62) выражение для угловой скорости (5.59) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{b} - \alpha \chi}{1 - \chi^2} \mathbf{k} - \frac{\dot{\chi} \sin \gamma}{1 - \chi^2} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} + \frac{\mathbf{a} - \beta \chi}{1 - \chi^2} \mathbf{e}'. \quad (5.63)$$

Но угловую скорость можно вычислить по тензору поворота (5.60) с учетом теоремы сложения угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p} + \dot{\phi} \mathbf{e}'. \quad (5.64)$$

⁵ О взаимном базисе — см. раздел 1.6. (*Примеч. ред.*)

Из сравнения выражений (5.63) и (5.64) получаем уравнения для определения углов прецессии и собственного вращения:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{b - a \cos \gamma}{\sin^2 \gamma}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{a - b \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \Rightarrow \frac{d(\psi + \varphi)}{dt} = \frac{a + b}{1 + \cos \gamma}. \quad (5.65)$$

Что касается равенства

$$\dot{\vartheta} = -\frac{\dot{\chi} \sin \gamma}{1 - \chi^2} = \dot{\gamma},$$

то оно выполняется тождественно в силу (5.61).

Таким образом, если решение уравнения (5.57) найдено, то углы прецессии и собственного вращения находятся квадратурами (5.65). Разумеется, к уравнению (5.57) необходимо присоединить начальные условия:

$$\mathbf{t} = 0: \quad \chi(0) = \cos \gamma_0; \quad \dot{\chi}(0) = -\boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) \equiv -\mathbf{c}. \quad (5.66)$$

Последнее условие немедленно следует из равенства (5.63), если его записать при $\mathbf{t} = 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\mathbf{c} = 0$. Это означает, что отсчетное положение тела выбрано так, что начальная угловая скорость лежит в плоскости, натянутой на векторы \mathbf{k} и \mathbf{e} .

С формально-математической точки зрения задача полностью решена в том смысле, что она сведена к квадратурам. Однако приемлемость полученного решения с физической точки зрения еще предстоит выяснить.

5.5.3. Регулярная прецессия

Регулярная прецессия традиционно вызывает интерес, поскольку это наиболее простой и наглядный вид движения твердого тела. Регулярной прецессией называют движение тела, при котором некая материальная прямая, т. е. прямая, составленная из одних и тех же точек тела, вращается вокруг заданного в пространстве и неизменного во времени вектора \mathbf{k} так, что угол между указанной материальной прямой и вектором \mathbf{k} постоянен во времени. В случае Лагранжа в качестве материальной прямой выбираем ось тела вращения, а в качестве вектора \mathbf{k} — орт вертикали. При регулярной прецессии угол между ними сохраняется неизменным:

$$\chi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \text{const} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}); \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}.$$

Для угловой скорости отсюда следует выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\varphi} \mathbf{e}) \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{e}).$$

В этом случае уравнение (5.52) принимает совсем простой вид:

$$\ddot{\psi} \mathbf{k} + \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0; \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0; \quad \dot{\varphi}_0 \dot{\psi}_0 = \nu. \quad (5.67)$$

Последнее из этих условий налагает ограничение на начальную скорость, которая должна иметь вид:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\psi}_0 \mathbf{k} + \dot{\varphi}_0 \mathbf{e} = \dot{\varphi}_0 \left(\mathbf{e} + \frac{\nu}{\dot{\varphi}_0^2} \mathbf{k} \right).$$

При этом угловая скорость также прецессирует вокруг орта вертикали:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0.$$

На первый взгляд кажется, что полученное решение справедливо при произвольном значении угла между осью тела и вертикалью. Однако это не так. Действительно, из формул (5.65) и (5.67) следует, что

$$\frac{(\mathbf{b} - \mathbf{a} \cos \gamma)(\mathbf{a} - \mathbf{b} \cos \gamma)}{\sin^4 \gamma} = \nu. \quad (5.68)$$

Уравнение (5.68) сводится к уравнению 4-й степени относительно $\cos \gamma$. Анализ этого уравнения здесь не приводится, поскольку он осуществляется стандартными методами.

5.5.4. Обсуждение формального решения

Сомнения в физической приемлемости полученного решения связаны со следующим фактом. Известно [22, 27], что один и тот же тензор поворота допускает несчетное множество различных представлений. Каждому из этих представлений отвечает единственный набор трех параметров типа углов ψ , ϑ , φ , использованных ранее. Если для всех начальных данных используется одно и то же представление тензора поворота, то это означает, что вся область начальных данных покрыта одной координатной картой. В принципе это возможно, но обычно даже в простейших случаях такая карта будет иметь полюса, т. е. полученное решение будет либо содержать неопределенности типа $0/0^6$, либо приводить к разрывным решениям. Кстати, есть примеры, в которых, например, углы Эйлера выражаются функциями времени, имеющими разрывы первого рода, т. е. скачки, хотя все наблюдаемые величины, например угловые скорости, оказываются непрерывными функциями

⁶ Эти неопределенности делают невозможным использование полученных формул для компьютерных вычислений.

времени. В качестве иллюстрации сошлемся на шестую главу, где для случая Эйлера показано, что вся область начальных данных разбивается на две подобласти, каждую из которых нужно покрывать своей картой. Только в этом случае получаются решения, пригодные для практического использования. В приводимом в литературе решении для случая Эйлера используется одна карта. В результате при компьютерных расчетах по приводимым в книгах формулам получаются совершенно неправильные результаты. Задача (5.52), (5.53) внешне выглядит чрезвычайно простой. Тем не менее движения, совершаемые телом в этом случае, могут существенно различаться по своему типу. Поэтому кажется маловероятным, чтобы единственное представление тензора поворота (5.60) было бы удовлетворительным при всех начальных данных.

Тензор поворота часто удобно представлять в виде композиции поворотов вокруг неких фиксированных осей, которые в принципе выбирают произвольно [22, 27]. Выбор осей поворота определяет систему параметров (систему координат), через которые выражается изучаемый поворот тела. Однако далеко не при всяком выборе осей поворота вводимая система координат оказывается целесообразной. Важность правильного выбора осей поворота покажем на простейшем примере. Рассмотрим поворот вокруг фиксированной оси \mathbf{n} , т. е. тензор поворота $\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{n})$. Попытаемся представить этот поворот через углы Эйлера:

$$\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{n}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{m}), \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0,$$

где единичные ортогональные между собой векторы \mathbf{m} и \mathbf{e} могут выбираться произвольно.

Воспользовавшись теоремой Эйлера о представлении тензора поворота, нетрудно получить нелинейную систему, позволяющую в принципе выразить параметры ψ , ϑ , φ через параметр α . Но проще для этой цели использовать равенство угловых скоростей:

$$\dot{\alpha} \mathbf{n} = \dot{\psi} \mathbf{m} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{e} + \dot{\varphi} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}.$$

В скалярной форме эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta &= \cos \beta_1 \dot{\alpha}; & \dot{\vartheta} &= (\cos \beta_2 \cos \psi + \cos \beta_3 \sin \psi) \dot{\alpha}; \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta &= (\cos \beta_2 \sin \psi - \cos \beta_3 \cos \psi) \dot{\alpha}, \end{aligned} \tag{5.69}$$

где углы β_i введены следующим образом:

$$\mathbf{n} = \cos \beta_1 \mathbf{m} + \cos \beta_2 \mathbf{e} + \cos \beta_3 \mathbf{m} \times \mathbf{e}; \quad \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \beta_3 = 1.$$

Систему (5.69) можно переписать в более компактной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} + \dot{\varphi} \cos \vartheta &= \cos \beta_1 \dot{\alpha}; & \dot{\vartheta} &= \sin \beta_1 \cos \sigma \dot{\alpha}; \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta &= \sin \beta_1 \sin \sigma \dot{\alpha}; & \sigma &\equiv \psi - \gamma, \end{aligned} \tag{5.70}$$

где γ определяется формулами

$$\cos \gamma = \frac{\cos \beta_2}{\sin \beta_1}; \quad \sin \gamma = \frac{\cos \beta_3}{\sin \beta_1}, \quad \text{если } \beta_1 \neq 0; \quad \gamma = 0, \quad \text{если } \beta_1 = 0.$$

Систему (5.70), в свою очередь, можно переписать в другом виде:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\alpha} \cos \vartheta = \cos \beta_1; \quad \frac{d\vartheta}{d\alpha} = \sin \beta_1 \cos \sigma; \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} \sin \vartheta = \sin \beta_1 \sin \sigma. \tag{5.71}$$

В такой записи хорошо видно, что все искомые переменные являются функциями угла α и постоянных $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Системы (5.70) или (5.71) достаточно сложны для решения, но эта сложность отнюдь не связана с характером движения, а обусловлена исключительно выбором представления тензора поворота. Разумеется, в рассматриваемом случае никаких проблем не возникает, если изначально принять, что $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, т. е. распорядиться возможностью выбирать углы $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Например, можно принять $\beta_1 = 0, \beta_2 = \pi/2, \beta_3 = \pi/2$. В таком случае система (5.71) решается элементарно.

В реальных задачах ситуация сложнее. Всякая задача зависит от набора параметров, включая начальные данные. Всю область параметров можно разбить на подобласти. В каждой из этих подобластей нужно искать собственное представление для тензора поворота. Именно это и сделано в шестой главе для случая Эйлера. В полученном формальном решении это не сделано, и вся область параметров покрыта одной картой. Поэтому в общем случае полученное формальное решение может оказаться неудобным для практического применения. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим частные случаи задачи Лагранжа.

Плоские движения — физический маятник. Рассмотрим частный случай начальных данных:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = 0; \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{5.72}$$

В таком случае согласно (5.65) производные углов прецессии и собственного вращения обращаются в нуль. Следовательно, эти углы — константы. В силу начальных условий они равны нулю. При этом тело поворачивается вокруг фиксированной оси, натянутой на вектор $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$. Иными словами, мы

имеем дело с физическим маятником. Посмотрим, во что превращается в этом случае формальное решение:

$$\chi = \cos \gamma \quad \Rightarrow \quad \dot{\chi} = -\sin \gamma \dot{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\chi} = -\sin \gamma \ddot{\gamma} - \cos \gamma \dot{\gamma}^2.$$

Кроме того, согласно (5.63) $\omega^2 = \dot{\gamma}^2$. Подставляя эти выражение в уравнение (5.56), получаем уравнение физического маятника:

$$\ddot{\gamma} - \nu \sin \gamma = 0. \quad (5.73)$$

Стандартный вид уравнения физического маятника получается с помощью замены $\gamma = \pi + \vartheta$. Уравнение (5.73), как известно, упростить нельзя. Таким образом, представление тензора поворота в виде (5.60) в рассматриваемом случае оказывается наилучшим. Надо полагать, что оно будет оставаться приемлемым и при малых значениях величин \mathbf{a} , \mathbf{b} . Видимо, представление (5.60) является удовлетворительным, когда $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ и не мало, но $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ или близко к нулю: $|\mathbf{a}| \ll |\mathbf{b}|$. В последнем случае ось тела прецессирует вокруг вектора \mathbf{k} , причем скорость прецессии знакопостоянна: $\text{sign } \dot{\psi} = \text{sign } \mathbf{b}$.

Свободные вращения. Для физического маятника главную роль играло поле тяготения. Теперь рассмотрим другую крайность: пусть поле тяготения отсутствует, т. е. $\nu = 0$. В таком случае задача (5.52), (5.53) имеет совсем простое решение⁷:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{m} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\omega_0 t \mathbf{m}), \quad |\mathbf{m}| = 1. \quad (5.74)$$

Тело совершает повороты вокруг фиксированной оси, натянутой на вектор $\boldsymbol{\omega}_0$, причем ось тела прецессирует вокруг вектора \mathbf{m} с постоянной скоростью ω_0 :

$$\mathbf{e}' = (1 - \cos \omega_0 t) \cos \alpha \mathbf{m} + \cos \omega_0 t \mathbf{e} + \sin \omega_0 t \mathbf{m} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = \cos \alpha \quad (5.75)$$

Качественное рассмотрение этого частного случая задачи Лагранжа на основе углов Эйлера подробно обсуждается в книге [54]. Выясним, насколько хорошо этот случай описывается формальным решением, построенным ранее. При $\nu = 0$ интеграл энергии (5.55) показывает, что угловая скорость постоянна по модулю, а уравнение (5.56) и начальные условия (5.66) принимают вид

$$\ddot{\chi} + \omega^2 \chi = \mathbf{a}\mathbf{b}; \quad \chi(0) = \cos \gamma_0; \quad \dot{\chi}(0) = -\mathbf{c}. \quad (5.76)$$

⁷ Об определении тензора поворота при постоянной угловой скорости — см. раздел 2.11. (Примеч. ред.)

Уравнения (5.76) легко интегрируются в элементарных функциях. Для иллюстрации рассмотрим конкретные начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{e} = \omega_0 \cos \alpha; & \mathbf{b} &= \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{k} = \omega_0 \cos(\alpha + \gamma_0); \\ \mathbf{c} &= \boldsymbol{\omega}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) = 0, \end{aligned} \quad (5.77)$$

где $\mathbf{m} \cdot \mathbf{e} \equiv \cos \alpha$.

Решение задачи (5.76), (5.77) имеет вид

$$\chi = \cos \alpha \cos(\alpha + \gamma_0) + \sin \alpha \sin(\alpha + \gamma_0) \cos \omega_0 t. \quad (5.78)$$

Не составляет большого труда по формулам (5.65) и (5.78) вычислить углы прецессии и собственного вращения, но далее для наглядности будем считать, что угол α мал, т. е. начальная угловая скорость почти совпадает с начальным направлением оси симметрии. В этом случае выражение (5.78) можно упростить, отбрасывая слагаемые порядка $O(\alpha^2)$:

$$\chi = \cos \gamma_0 - \alpha \sin \gamma_0 (1 - \cos \omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \alpha (1 - \cos \omega_0 t). \quad (5.79)$$

Из (5.79) следует, что угол нутации — величина первого порядка малости. Выражения (5.65) также упрощаются и принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\alpha \omega_0 \cos \omega_0 t}{\sin \gamma_0}; & \dot{\varphi} &= \omega_0 \left[1 + \frac{\alpha \cos \omega_0 t}{\operatorname{tg} \gamma_0} \right] \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \psi &= -\alpha \frac{\sin \omega_0 t}{\sin \gamma_0}; & \varphi &= \omega_0 t + \frac{\alpha \sin \omega_0 t}{\operatorname{tg} \gamma_0}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Итак, в рассматриваемом случае ось симметрии совершает регулярную прецессию вокруг вектора \mathbf{m} (см. формулы (5.75)). Именно это простейшее движение и описывают относительно сложные формулы (5.78)–(5.80). Сами по себе эти формулы не имеют никакого смысла, если не помнить о представлении тензора поворота (5.60), т. е. об осях, вокруг которых происходит вращение. Конечно, формулы (5.60) и (5.78)–(5.80) позволяют увидеть истинное движение тела, но представление (5.77) несравнимо проще для восприятия. Если бы использовались углы Эйлера, то описание движения оказалось бы еще сложнее, чем приведенное.

5.6. Качение тяжелого конуса по плоскости без трения

Рассмотрим конус, лежащий на горизонтальной плоскости и имеющий неподвижную точку O в вершине (рис. 5.3). Примем, что центр масс C конуса

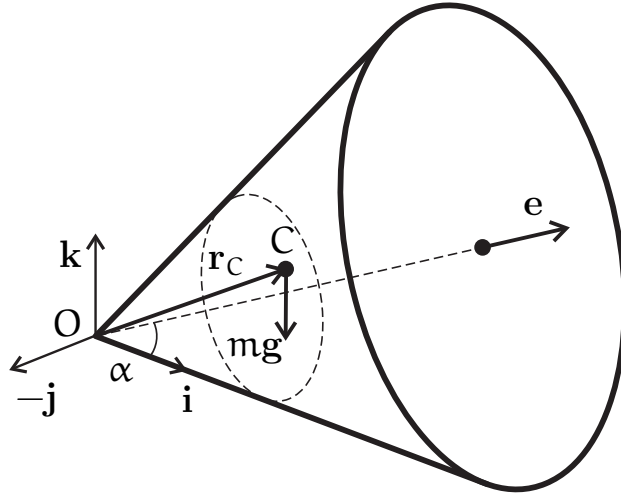


Рис. 5.3. Качение тяжелого конуса по плоскости

в общем случае не лежит на оси вращения конуса. Начало системы отсчета расположим в точке O . В качестве отсчетного выберем положение, изображенное на рис. 5.3. Требуется исследовать движение конуса при условии, что он не отрывается от горизонтальной плоскости.

Тензор инерции конуса в отсчетном положении имеет вид

$$\Theta = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (5.81)$$

где единичный вектор \mathbf{e} задан на оси конуса в отсчетном положении.

При движении конус может поворачиваться вокруг собственной оси и вокруг оси, проходящей через O в направлении \mathbf{k} . Поэтому тензор поворота можно представить в виде

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}). \quad (5.82)$$

Этому повороту отвечает угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}(t) \mathbf{k} + \dot{\varphi}(t) \mathbf{e}'; \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}. \quad (5.83)$$

Первый закон динамики Эйлера в данной задаче записывается в виде

$$m \ddot{\mathbf{R}}_C = -mg \mathbf{k} + \mathbf{R} + \mathbf{N}; \quad \mathbf{R}_C = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{r}_C. \quad (5.84)$$

Здесь вектор \mathbf{R} моделирует реакцию в опоре O и может быть любым, вектор \mathbf{N} моделирует реакцию плоскости. Для того чтобы судить о характере реакции \mathbf{N} нужно отбросить закрепление в точке O и мысленно слегка подвигать конус в различных направлениях. Поскольку трение отсутствует,

то плоскость не препятствует смещению вдоль осей \mathbf{i} и \mathbf{j} , но препятствует смещению вдоль \mathbf{k} . Это означает, что

$$\mathbf{N} = N \mathbf{k}, \quad N > 0. \quad (5.85)$$

Последнее неравенство показывает, что плоскость не удерживает конус. Теперь мы видим, что от горизонтальных смещений конус удерживает только опора. Вертикальная реакция в опоре при этом остается неопределенной, поскольку уравнение (5.84) позволяет найти только полную реакцию $\mathbf{R} + \mathbf{N}$. К полному определению реакции мы вернемся позднее. Второй закон динамики Эйлера дает

$$[\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}]' = mg \mathbf{k} \times \mathbf{r}_C + \mathbf{M}, \quad (5.86)$$

где вектор \mathbf{M} определяет моментную реакцию горизонтальной плоскости.

Используя формулы (5.81) и (5.83), получаем

$$\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = Q(\psi \mathbf{k}) \cdot (\lambda \dot{\varphi} \mathbf{e} + \mu \dot{\psi} \mathbf{k}). \quad (5.87)$$

Нетрудно установить вид реактивного момента \mathbf{M} . Действительно, горизонтальная плоскость не препятствует повороту конуса вокруг \mathbf{k} и вокруг оси конуса в актуальном положении \mathbf{e}' . Поэтому проекции \mathbf{M} на \mathbf{k} и \mathbf{e}' равны нулю. В результате вектор \mathbf{M} принимает вид

$$\mathbf{M} = M \mathbf{e}' \times \mathbf{k} = MQ(\psi \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{k}). \quad (5.88)$$

Подставляя (5.87) и (5.88) в (5.86) и проводя очевидные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} & Q(\psi \mathbf{k}) \cdot (\lambda \dot{\varphi} \mathbf{e} + \mu \dot{\psi} \mathbf{k})' + Q(\psi \mathbf{k}) \cdot [\dot{\psi} \mathbf{k} \times (\lambda \dot{\varphi} \mathbf{e} + \mu \dot{\psi} \mathbf{k})] = \\ & = mg Q(\psi \mathbf{k}) \cdot [\mathbf{k} \times Q(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}_C] + MQ(\psi \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Умножая это уравнение на $Q^T(\psi \mathbf{k})$ слева, окончательно получаем

$$\lambda \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \mu \ddot{\psi} \mathbf{k} + \lambda \dot{\varphi} \dot{\psi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} = mg \mathbf{k} \times Q(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}_C + M \mathbf{e} \times \mathbf{k}. \quad (5.89)$$

Вектор \mathbf{r}_C представим в виде

$$\mathbf{r}_C = Q(\beta \mathbf{e}) \cdot (a \mathbf{e} - b \mathbf{k}); \quad a^2 - 2ab \sin \alpha + b^2 = l^2; \quad a > 0; \quad b > 0, \quad (5.90)$$

где l — расстояние от опоры O до центра масс; β — заданный угол, причем при $\beta = 0$ центр масс находится в наинишем из всех возможных положений.

С учетом (5.90) получаем

$$\mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{r}_C = \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{e} - b \sin \gamma (\mathbf{e} - \sin \alpha \mathbf{k}); \quad \gamma = \varphi + \beta. \quad (5.91)$$

Подставляя (5.91) в уравнение (5.89), получаем окончательное уравнение движения:

$$\lambda \ddot{\varphi} \mathbf{e} + \mu \ddot{\psi} \mathbf{k} + \lambda \dot{\varphi} \dot{\psi} \mathbf{k} \times \mathbf{e} = (mga - M) \mathbf{k} \times \mathbf{e} - mgb \sin \gamma (\mathbf{e} - \sin \alpha \mathbf{k}). \quad (5.92)$$

Векторное уравнение (5.92) эквивалентно трем скалярным:

$$\lambda \ddot{\varphi} = -mgb \sin \gamma; \quad \mu \ddot{\psi} = mgb \sin \alpha \sin \gamma; \quad (5.93)$$

$$\lambda \dot{\varphi} \dot{\psi} = mga - M. \quad (5.94)$$

Первое уравнение из (5.93) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\lambda \ddot{\gamma} + mgb \sin \gamma = 0; \quad \gamma = \varphi + \beta; \quad \beta = \text{const}. \quad (5.95)$$

Уравнение (5.95) — это уравнение математического маятника. Из него можно найти угол собственного вращения φ . Умножая первое уравнение из (5.93) на $\sin \alpha$ и складывая его со вторым уравнением, приходим к просто интегрируемому уравнению, из которого находим угол прецессии ψ :

$$\psi(t) = -\frac{\lambda \sin \alpha}{\mu} \varphi(t) + \omega t; \quad \omega = \text{const}, \quad (5.96)$$

где постоянная ω определяется по начальным условиям, кроме того, в (5.96) принято, что при $t = 0$ углы φ и ψ обращаются в нуль.

Наконец, уравнение (5.94) позволяет вычислить моментную реакцию плоскости M , которая должна быть положительной. В принципе задачу можно считать решенной, поскольку интегрировать уравнение (5.95) мы умеем. Задача сильно упрощается, если центр масс находится на оси конуса, т. е. $\mathbf{b} = 0$. В этом случае по (5.95) и (5.96) получим

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_1 = \text{const}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\lambda \sin \alpha}{\mu} \omega_1 + \omega = \text{const}, \quad (5.97)$$

где ω и ω_1 определяются по начальным условиям.

Из (5.94) и (5.97) находим

$$M = mgl + \frac{\lambda^2 \sin \alpha}{\mu} \omega_1^2 - \lambda \omega_1 \omega. \quad (5.98)$$

Отсюда следует, что при $\omega_1 \omega < 0$ безотрывное движение конуса возможно при любых значениях угловых скоростей ω_1 и ω . Если же $\omega_1 \omega > 0$, то полученное решение справедливо только при выполнении неравенств

$$0 < \omega < \frac{mgl}{\lambda\omega_1} + \frac{\lambda \sin \alpha}{\mu} \omega_1, \quad \omega_1 > 0; \quad 0 > \omega > \frac{mgl}{\lambda\omega_1} + \frac{\lambda \sin \alpha}{\mu} \omega_1, \quad \omega_1 < 0.$$

Критическое значение ω соответствует $M = 0$:

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{mgl}{\lambda\omega_1} + \frac{\lambda \sin \alpha}{\mu} \omega_1.$$

При этом наличие горизонтальной плоскости никак не сказывается на движении конуса, и ее вообще можно убрать. Опрокидывающий момент, создаваемый силой тяжести, полностью уравновешивается гироскопическим моментом.

Еще один любопытный случай ($\mathbf{b} \neq 0$) получается при следующих начальных условиях:

$$t = 0: \quad \varphi = \psi = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega_1; \quad \dot{\psi} = 0, \quad (5.99)$$

где угловая скорость собственного вращения мала по модулю.

Примем также, что угол начального отклонения центра масс от вертикали, т. е. угол β , мал. В этом случае уравнение (5.95) можно линеаризовать. Тогда получим следующее уравнение:

$$\ddot{\gamma} + \kappa^2 \gamma = 0, \quad \kappa^2 = mgb/\lambda. \quad (5.100)$$

Общее решение уравнения (5.100) можно записать в виде

$$\gamma = A \cos(\kappa t + \delta), \quad A > 0, \quad (5.101)$$

где A — амплитуда; κ — частота колебания; δ — начальная фаза. Они находятся по начальным условиям (5.99). В результате получаем

$$\varphi + \beta = \sqrt{\beta^2 + \omega^2/\kappa^2} \cos(\kappa t + \delta); \quad \text{tg } \delta = -\omega_1/\kappa\beta. \quad (5.102)$$

Таким образом, угол собственного вращения φ меняется по гармоническому закону с частотой κ . Угол прецессии ψ определяется равенством (5.96) и последним из начальных условий (5.99):

$$\psi(t) = \frac{\lambda \sin \alpha}{\mu} [\beta + \omega_1 t - A \cos(\kappa t + \delta)]. \quad (5.103)$$

Таким образом, угол прецессии не мал, так как он нарастает во времени. Поскольку угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_1$ мала по модулю, то ось конуса медленно прецессирует вокруг \mathbf{k} . Поскольку мы рассматриваем движение конуса по идеально гладкой плоскости, т. е. при отсутствии трения, то единственной причиной прецессии является гироскопический момент. Моментная реакция плоскости находится по (5.98) и в данном случае не зависит от движения конуса:

$$M = mgl.$$

Впрочем, направление моментной реакции меняется во времени.

5.7. Движение гантели по плоскости без трения: качение с верчением

Пусть на горизонтальной плоскости, натянутой на векторы \mathbf{i} и \mathbf{j} , расположены два одинаковых шара из однородного материала. Поле силы тяжести действует по нормали, т. е. вдоль вектора \mathbf{k} , к горизонтальной плоскости. Шар 1 катится по горизонтальной плоскости без проскальзывания так, что центр его масс движется вдоль вектора \mathbf{j} со скоростью $\mathbf{V}_1 = v\mathbf{j}$. Шар 2 в это время покоится. В момент времени $t = 0$ шар 1 касается шара 2 и жестко сцепляется с ним. При $t > 0$ оба шара образуют гантель и далее движутся вместе как абсолютно твердое тело. Требуется исследовать это движение и, в частности, вычислить реакции, действующие на шары со стороны горизонтальной плоскости. Описанная ситуация в разные моменты времени изображена на рис. 5.4 (вид сверху). Сформулированная задача не вполне стандартна. Фактически здесь в момент времени $t = 0$ происходит касательный удар. В таких случаях следует соблюдать осторожность при формулировке условий соударения, играющих роль начальных условий.

В качестве опорной точки выберем положение, в котором находится точка соприкосновения шаров C в момент времени $t = 0$. Все рассмотрения следует проводить отдельно для моментов времени $t < 0$, момента времени $t = 0$ и моментов времени $t > 0$. При $t < 0$ шар 1 движется со скоростью $\mathbf{V}_1 = v\mathbf{j}$. Тензор поворота, очевидно, имеет вид: $\mathbf{Q}(\varphi\mathbf{i})$. Отсутствие проскальзывания дает связь $\dot{\varphi} = -v/R$, где R — радиус шара. Запишем количество движения и кинетический момент системы двух рассматриваемых шаров при $t < 0$. Понятно, что эти величины совпадают с таковыми для шара 1, поскольку шар 2 находится в покое:

$$\mathbf{K}_1 = mv\mathbf{j}; \quad \mathbf{K}_2^O = \mathbf{R}_{C_1} \times mv\mathbf{j} + \Theta_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \quad (5.104)$$

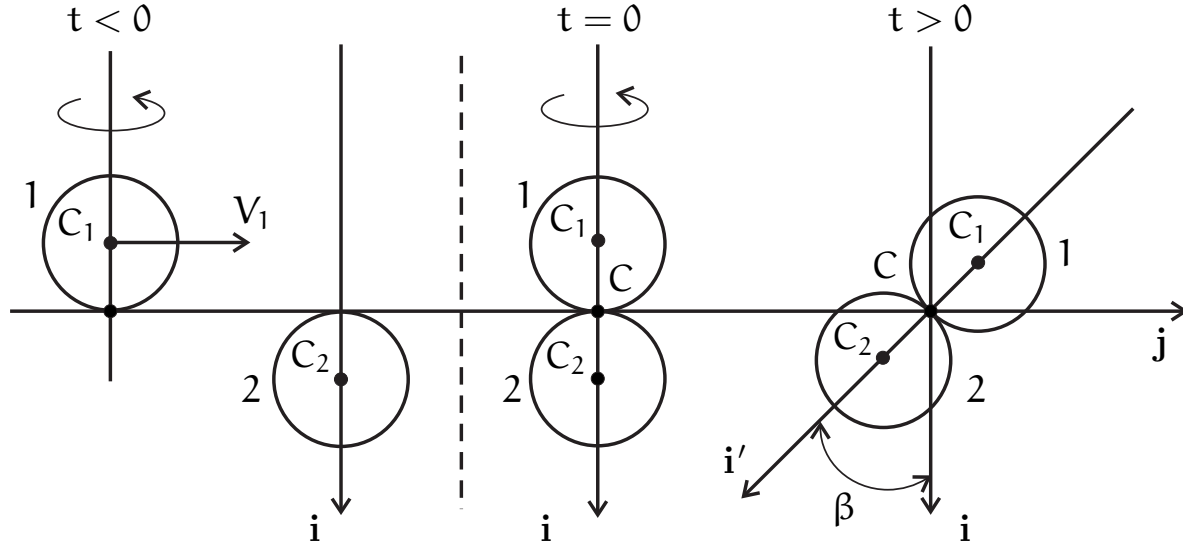


Рис. 5.4. Качение с верчением по плоскости (вид сверху)

где Θ_1 — центральный тензор инерции шара 1, ω_1 — его угловая скорость. В данном случае справедливы равенства

$$\Theta_1 = \frac{2}{5}mR^2 \mathbf{E}; \quad \omega_1 = \dot{\varphi} \mathbf{i} = -\frac{v}{R} \mathbf{i}. \quad (5.105)$$

Кроме того, вектор \mathbf{R}_{C_1} задается выражением

$$\mathbf{R}_{C_1} = y \mathbf{j} - R \mathbf{i}. \quad (5.106)$$

С учетом (5.105) и (5.106) выражения (5.104) принимают вид ($t < 0$)

$$\mathbf{K}_1 = mv \mathbf{j}; \quad \mathbf{K}_2^0 = -mvR \mathbf{k} - \frac{2}{5}mvR \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}. \quad (5.107)$$

Аналогичные рассуждения необходимо провести при $t > 0$. Здесь уже два шара объединились в одно целое и образуют гантель, которая движется как абсолютно твердое тело. Центр масс гантели \mathbf{C} находится в точке соприкосновения шаров. В качестве отсчетного положения, выберем положение гантели при $t = 0$ (см. рис. 5.4).

Центральный тензор инерции гантели в отсчетном положении имеет вид

$$\Theta = \lambda \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}), \quad \lambda = \frac{4}{5}mR^2, \quad \mu = \frac{14}{5}mR^2. \quad (5.108)$$

Тензор поворота гантели можно представить в виде композиции поворотов вокруг фиксированных осей:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{i}). \quad (5.109)$$

Угловая скорость этого поворота

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta} \mathbf{k} + \dot{\alpha} \mathbf{i}', \quad \mathbf{i}' = \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}. \quad (5.110)$$

Тензор инерции в актуальном положении определяется формулой

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T = \lambda \mathbf{i}' \otimes \mathbf{i}' + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{i}' \otimes \mathbf{i}'). \quad (5.111)$$

Вектор положения центра масс гантели при $t > 0$ имеет вид

$$\mathbf{R}_C = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V}_C = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j}. \quad (5.112)$$

Запишем количество движения и кинетический момент гантели при $t > 0$:

$$\mathbf{K}_1 = 2m \mathbf{V}_C; \quad \mathbf{K}_2^0 = \mathbf{R}_C \times 2m \mathbf{V}_C + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (5.113)$$

Сформулируем начальные условия при $t = 0$:

$$t = 0: \quad \mathbf{R}_C = 0; \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{E} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0. \quad (5.114)$$

Начальные условия для скоростей сформулировать сложнее. Допустим, что реакции, действующие со стороны горизонтальной плоскости на гантель, ограничены, т. е. ни при каких t они не принимают бесконечных по модулю значений. В таком случае (и только в таком случае!) количество движения и кинетический момент системы двух шаров (при $t < 0$ шары раздельны, при $t > 0$ шары объединены в гантель) должны быть непрерывны. В частности, при $t = 0$ условия непрерывности записываются в виде

$$\mathbf{K}_1|_{t=-0} = \mathbf{K}_1|_{t=+0}; \quad \mathbf{K}_2^0|_{t=-0} = \mathbf{K}_2^0|_{t=+0}. \quad (5.115)$$

Значения при $t \rightarrow -0$ вычисляются на основе выражений (5.107), а значения при $t \rightarrow +0$ вычисляются по выражениям (5.113) с учетом условий (5.114). Таким образом, выражения (5.115) переписываются в виде

$$t = 0: \quad mv \mathbf{j} = 2m \mathbf{V}_C; \quad -mvR \mathbf{k} - \frac{2}{5}mvR \mathbf{i} = \mu \dot{\beta} \mathbf{k} + \lambda \dot{\alpha} \mathbf{i}.$$

Отсюда получаем начальные условия для скоростей:

$$t = 0: \quad \mathbf{V}_C = \frac{v}{2} \mathbf{j}; \quad \dot{\beta} = -\frac{5v}{14R}; \quad \dot{\alpha} = -\frac{v}{2R}. \quad (5.116)$$

Только теперь мы можем приступить к решению задачи. При $t > 0$ записываем первый закон динамики Эйлера:

$$(2m \mathbf{V}_C)' = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - 2mg) \mathbf{k},$$

где P_1 и P_2 — нормальные реакции, действующие на шары 1 и 2, соответственно. Из этого уравнения получаем

$$P_1 + P_2 = 2mg; \quad V_C = \text{const.} \quad (5.117)$$

Используя начальные условия, получаем

$$V_C = \frac{1}{2}vj \Rightarrow R_C = \frac{vt}{2}j. \quad (5.118)$$

Второй закон динамики Эйлера формулируется так:

$$(\mathbf{R}_C \times 2m \mathbf{V}_C + \mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot = \mathbf{R}_{C_1} \times P_1 \mathbf{k} + \mathbf{R}_{C_2} \times P_2 \mathbf{k} - \mathbf{R}_C \times 2mg \mathbf{k},$$

где векторы

$$\mathbf{R}_{C_1} = \mathbf{R}_C - R\mathbf{i}' - R\mathbf{k}, \quad \mathbf{R}_{C_2} = \mathbf{R}_C + R\mathbf{i}' - R\mathbf{k} \quad (5.119)$$

определяют точки приложения реакций к шару 1 и 2, соответственно.

Теперь второй закон динамики можно переписать в виде

$$\mu \ddot{\beta} \mathbf{k} + \lambda \ddot{\alpha} \mathbf{i}' + \lambda \dot{\alpha} \dot{\beta} \mathbf{k} \times \mathbf{i}' = R(P_2 - P_1) \mathbf{i}' \times \mathbf{k}.$$

Отсюда получаем

$$\dot{\beta} = \text{const}; \quad \dot{\alpha} = \text{const}; \quad \lambda \dot{\alpha} \dot{\beta} = R(P_1 - P_2). \quad (5.120)$$

Используя начальные условия (5.116), получаем

$$\dot{\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{v}{R}; \quad \dot{\beta} = -\frac{5}{14} \frac{v}{R}; \quad P_1 - P_2 = \frac{mv^2}{7R}. \quad (5.121)$$

Последнее равенство в системе (5.121) совместно с уравнением (5.117) позволяет вычислить реакции

$$P_1 = mg + \frac{mv^2}{14R}; \quad P_2 = mg - \frac{mv^2}{14R}. \quad (5.122)$$

Полученное решение (5.122) справедливо только до тех пор, пока обе реакции положительны. Если реакция отрицательна, то горизонтальная плоскость удерживает гантель от отрыва, чего она сделать не может. Следовательно, гантель оторвется от плоскости. Поэтому решение (5.122) справедливо только при выполнении неравенства

$$mg \geq mv^2/14R \Rightarrow v \leq \sqrt{14gR}.$$

При $v = \sqrt{14gR}$ получаем

$$P_1 = 2mg; \quad P_2 = 0.$$

Иными словами, гантель в этом случае будет иметь только одну точку опоры — точку касания шара 1 с горизонтальной плоскостью.

Глава 6

Свободное вращение несимметричного твердого тела: случай Эйлера–Пуансо¹

6.1. Постановка задачи

Задача о свободном вращении твердого тела — это первая задача динамики твердого тела, для которой удалось построить точное аналитическое решение. Впервые она была изучена Леонардом Эйлером. Позднее Пуансо предложил знаменитую геометрическую интерпретацию для демонстрации реального вращения тела. В современной литературе задача о свободном вращении твердого тела называется случаем интегрируемости Эйлера–Пуансо. Несмотря на столь длинную историю этой задачи, до настоящего времени не проведен полный анализ классического решения, описание которого приводится во всех учебниках по динамике твердого тела. Классическое решение позволяет найти вращения, т. е. угловые скорости тела, при этом определение углов поворота нельзя признать удовлетворительным. Причина в том, что применение углов Эйлера — не лучший метод решения обсуждаемой задачи. Во-первых, углы Эйлера, как правило, дают представление, достаточно сложное для интерпретации. Во-вторых, представление поворотов через углы Эйлера создает трудности для численной реализации. По указанным причинам полезно рассмотреть альтернативный подход к анализу задачи Эйлера–Пуансо, основанный на концепции тензора поворота. Задача Эйлера–Пуансо позволяет во всех деталях увидеть, как работает тензор поворота. Представленное в этой главе решение кажется слишком длинным по сравнению с классическим. Однако следует обратить внимание на то, что значительная часть главы посвящена ответу на вопрос: почему мы должны выбрать тензор пово-

¹ Материал этой главы основан на статье [49]: P. A. Zhilin. A new approach to the analysis of free rotations of rigid bodies (Z. angew. Math. Mech. (ZAMM). Vol. 76. 1996. P. 187–204). Статья написана на английском языке. Перевод Е. А. Ивановой. (*Примеч. ред.*)

рота в предлагаемой форме, а точнее, в одной из трех предлагаемых форм в зависимости от соотношения инерционных характеристик и начальных условий?

Рассмотрим твердое тело, центр масс которого неподвижен в некоторой инерциальной системе отсчета. Внешние силы и моменты отсутствуют. Положение тела в момент времени $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ будем называть отсчетным положением. Положение тела в данный момент времени $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ будем называть актуальным положением. Последнее можно определить тензором поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, при этом отсчетное положение соответствует тензору поворота $\mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$. Центральный тензор инерции тела при $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ задается его спектральным разложением:

$$\Theta = \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3,$$

где величины $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ — главные моменты инерции. Далее будем считать, что они удовлетворяют соотношениям

$$0 < \Theta_1 \leq \Theta_2 \leq \Theta_3; \quad \Theta_1 < \Theta_3; \quad \Theta_3 \leq \Theta_1 + \Theta_2.$$

Векторы \mathbf{d}_k — собственные векторы тензора Θ в момент времени $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. В актуальном положении центральный тензор инерции можно представить в форме

$$\Theta^{(\mathbf{t})} = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^3 \Theta_k \mathbf{D}_k \otimes \mathbf{D}_k, \quad \mathbf{D}_k = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{d}_k.$$

Собственный кинетический момент тела \mathcal{L} и его кинетическая энергия K определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{t}) &= \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}); \\ 2K &= \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \cdot \mathcal{L}(\mathbf{t}), \end{aligned} \tag{6.1}$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ — левый вектор угловой скорости.

С использованием правого вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})$ можно записать

$$\mathcal{L}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}); \quad \mathbf{h} \equiv 2K = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}) \cdot \Theta \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}).$$

Инерциальная система отсчета выбрана так, чтобы центр масс тела в ней покоился, и, следовательно, его количество движения обращалось бы в нуль. В качестве полюса в теле выбран центр масс. При этих условиях второй закон динамики Эйлера принимает вид

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \mathcal{L} = \text{const}, \tag{6.2}$$

где $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$ связаны левым уравнением Пуассона (2.80).

Таким образом, получили три первых интеграла. Обычно они не используются, поскольку кроме угловых скоростей они содержат повороты. Однако в представленном далее решении эти интегралы играют важную роль.

6.2. Перманентные вращения твердого тела

Трансляционные движения тела по инерции являются простейшим видом движения, в этом случае центр масс тела движется прямолинейно и равномерно. Именно это движение рассматривает Ньютон в качестве иллюстрации своего первого закона. Но сразу же вслед за этим примером Ньютон пишет [31]: “Волчок, коего части вследствие взаимного сцепления отвлекают друг друга от прямолинейного движения, не перестает равномерно вращаться, поскольку это вращение не замедляется сопротивлением воздуха”. Таким образом, Ньютон полагал, что вращение твердого тела является простой иллюстрацией первого закона и вполне аналогично трансляционному движению. Различие состоит только в том, что постоянной сохраняется угловая скорость тела. Так ли это? Чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим так называемые перманентные вращения, т. е. вращения с постоянной угловой скоростью. Поскольку в силу второго закона динамики при отсутствии внешнего момента кинетический момент тела сохраняется, получим равенство

$$\mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{n}. \quad (6.3)$$

При перманентных вращениях угловая скорость остается постоянной, т. е. $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0$. Отсюда следует (см. раздел 2.11), что тензор поворота можно представить в виде

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}_0 t \mathbf{n}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}_0 t \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\omega}_0 t \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_0.$$

Используя этот результат, уравнение (6.3) переписываем в следующем виде:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}_0 t \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \lambda \boldsymbol{\omega}_0. \quad (6.4)$$

Первое равенство в (6.4) показывает, что вектор $\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\omega}_0$ является неподвижным вектором тензора поворота $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}_0 t \mathbf{n})$. Второе равенство в (6.4) следует из того факта, что неподвижный вектор тензора поворота находится с точностью до произвольного множителя. Но второе равенство в (6.4) показывает, что вектор угловой скорости должен быть собственным вектором тензора инерции. Итак, свободные, т. е. в отсутствие внешних воздействий,

перманентные вращения твердого тела возможны тогда и только тогда, когда вращения происходят вокруг одной из главных осей инерции тела. Если волчок вращается вокруг одной из своих главных осей инерции, то Ньютон прав, но этот факт никак не может служить иллюстрацией первого закона Ньютона.

6.3. Новый метод исследования свободного вращения несимметричного твердого тела

В задаче Эйлера–Пуансо легко находятся четыре первых интеграла основных уравнений. Три из них хорошо известны: они выражают постоянство вектора кинетического момента тела. Четвертый интеграл выражает постоянство кинетической энергии. Далее приведем представление этого интеграла непосредственно через повороты, а не через угловые скорости. Использование такой формы интеграла энергии помогает построить наиболее удобное представление тензора поворота, дающее ясную картину движения тела. Окончательно задача сводится к интегрированию простого дифференциального уравнения первого порядка, решение которого представляет собой монотонно возрастающую функцию. Все остальные величины выражаются через эту функцию. Важной особенностью предлагаемого решения является то, что оно позволяет увидеть повороты тела без интегрирования основного уравнения, при условии, что даны начальные условия.

Далее мы покажем, что существует три и только три типа вращений. Два из них — устойчивые вращения, третий — неустойчивое вращение. Для данного тела тип вращения определяется только начальными условиями. Фактически третий тип вращения — это сепаратриса между двумя устойчивыми типами вращений. При некоторых условиях устойчивые вращения в определенные моменты времени могут оказаться очень близкими. Таким образом, тело может перепрыгнуть из одного устойчивого решения в другое. Например, тело, вращающееся вокруг оси наименьшего момента инерции, может изменить это вращение, так что оно начнет вращаться вокруг оси наибольшего момента инерции. Конечно, чтобы это произошло, нужны малые возмущения, действующие на тело.

Используя теорему о представлении тензора поворота (2.61), тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ можно искать в форме

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{n}), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{p} \times \mathbf{n})/|\mathbf{p} \times \mathbf{n}|, \quad (6.5)$$

где единичные векторы \mathbf{p} и \mathbf{n} заранее не известны, но они не зависят от времени.

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$, соответствующий тензору поворота (6.5), определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \dot{\psi} \mathbf{p} + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{p}) \cdot \mathbf{e} + \dot{\varphi} \mathbf{Q}(\psi \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \quad (6.6)$$

Подстановка выражений (6.5) и (6.6) в уравнение (6.2) приводит к уравнению для определения углов ψ , ϑ и φ . Для того чтобы найти эти углы, необходимо выбрать единичные векторы \mathbf{p} и \mathbf{n} . Этот выбор не является простой формальностью. Он важен, поскольку определяет возможность получения решения в простейшей форме.

Таким образом, прежде всего мы должны указать единичные векторы \mathbf{p} и \mathbf{n} . Для того чтобы сделать этот выбор с учетом специфики задачи, воспользуемся специальной формой интеграла энергии. Перепишем уравнение (6.2) в форме

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\top}(\mathbf{t}) \cdot \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \text{const}. \quad (6.7)$$

Заметим, что из уравнений (6.1), (6.7) следует

$$\mathbf{h} \equiv 2\mathbf{K} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\top}(\mathbf{t}) \cdot \mathcal{L}. \quad (6.8)$$

Покажем, что кинетическая энергия постоянна, т. е. величина \mathbf{h} , определенная выражением (6.8), является первым интегралом уравнения (6.7):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}} &= \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\top} \cdot \mathcal{L} + \mathcal{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{P}}^{\top} \cdot \mathcal{L} = \\ &= \mathcal{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\top} \cdot \mathcal{L} - \mathcal{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot (\mathbf{P}^{\top} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathcal{L} = \\ &= \mathcal{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathcal{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h} = \text{const}. \end{aligned}$$

Интеграл энергии (6.8) содержит тензор поворота, но не содержит угловых скоростей. В такой форме этот интеграл никогда не использовался. Однако именно эта форма интеграла энергии позволяет найти наиболее удобную форму тензора поворота. Кроме того, интеграл (6.8) имеет ясный геометрический смысл: свободные вращения тела происходят таким образом, что сохраняет постоянное значение обратный момент инерции² относительно оси, натянутой на вектор \mathcal{L} и проходящей через центр масс.

² Обратным моментом инерции называется координата обратного тензора инерции. Обратный тензор инерции в актуальной конфигурации имеет вид: $\mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\top}(\mathbf{t})$. Доказательство этого факта основано на свойствах тензора поворота. Соответственно обратный момент инерции относительно оси, натянутой на вектор \mathcal{L} , вычисляется по формуле: $(\mathcal{L}/|\mathcal{L}|) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{P}^{\top}(\mathbf{t}) \cdot (\mathcal{L}/|\mathcal{L}|)$. Поскольку $|\mathcal{L}| = \text{const}$ и выражение (6.8) сохраняет постоянное значение, обратный момент инерции относительно оси, натянутой на вектор \mathcal{L} , также сохраняет постоянное значение. (*Примеч. ред.*)

6.4. Преобразование интеграла энергии

В общем случае тензор поворота может быть выражен через три параметра. Интеграл энергии — это соотношение, связывающее между собой указанные параметры. Поэтому только два из трех параметров являются независимыми. Следовательно, три вращения тела фактически представляют собой двухпараметрическое движение. Таким образом, необходимо найти общую форму двухпараметрического тензора поворота, сохраняющего кинетическую энергию. Введем в рассмотрение единичный вектор $\mathbf{m}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{l}\mathbf{m}(\mathbf{t}) \equiv \mathcal{L} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{t}) \cdot \mathcal{L} = \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{l} \equiv |\mathcal{L}| > 0. \quad (6.9)$$

С учетом (6.9) интеграл энергии (6.8) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}(\mathbf{t}) &= \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{l}^2} \equiv \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{l}^2} \mathbf{m} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{m} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{m}(\mathbf{t}) \cdot \left(\mathbf{\Theta}^{-1} - \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{l}^2} \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{t}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) определяет направление прямых, проходящих через центр масс тела. Если эти прямые известны, то с помощью (6.9) можно установить структуру тензора поворота. Геометрический смысл прямых (6.10) очевиден: это набор проходящих через центр масс осей, относительно которых обратные моменты инерции тела одинаковы. Прямые (6.10) определяют собой поверхность, неподвижную в пространстве. Нетрудно указать уравнение этой поверхности. Вектор $\mathbf{m}(\mathbf{t})$ можно представить в координатной форме

$$\mathbf{m}(\mathbf{t}) = x_m \mathbf{d}_1 + y_m \mathbf{d}_2 + z_m \mathbf{d}_3, \quad x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = 1, \quad (6.11)$$

где x , y , z — координатные оси, натянутые на неподвижные в пространстве векторы \mathbf{d}_k . Введем в рассмотрение спектральное разложение

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Theta}^{-1} - \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{l}^2} \mathbf{E} = \\ &= \left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{l}^2} \right) \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \left(\frac{1}{\Theta_2} - \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{l}^2} \right) \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \left(\frac{1}{\Theta_3} - \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{l}^2} \right) \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Предположим, что справедливы неравенства

$$\mathbf{l}^2 - \mathbf{h}\Theta_1 > 0, \quad \mathbf{l}^2 - \mathbf{h}\Theta_3 < 0. \quad (6.13)$$

Это означает, что мы исключили перманентные вращения³, рассмотренные в разделе 6.2. С учетом (6.11)–(6.13), уравнение (6.10) можно переписать в виде

$$\left(\frac{h}{l^2} - \frac{1}{\Theta_3}\right) z_m^2 = \left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{h}{l^2}\right) x_m^2 + \left(\frac{1}{\Theta_2} - \frac{h}{l^2}\right) y_m^2. \quad (6.14)$$

Тип поверхности (6.14) существенно зависит от знаков коэффициентов уравнения (6.14). Коэффициенты $h\Theta_3 - l^2$ и $l^2 - h\Theta_1$ всегда положительны. Знак коэффициента при переменной y_m^2 определяется знаком величины

$$\sigma \equiv l^2 - \Theta_2 h, \quad (6.15)$$

зависит от начальных условий и может быть любым. Существует три различных случая, а именно:

$$\text{a) } \sigma = 0, \quad \text{b) } \sigma > 0, \quad \text{c) } \sigma < 0. \quad (6.16)$$

Эти случаи должны исследоваться отдельно. Для последующего анализа параметр σ , определяемый формулой (6.15), удобно представить в форме

$$\sigma = \left(1 - \frac{\Theta_2}{\Theta_3}\right) l_3^2 - \left(\frac{\Theta_2}{\Theta_1} - 1\right) l_1^2, \quad l_k \equiv \mathcal{L} \cdot \mathbf{d}_k. \quad (6.17)$$

Как будет видно из дальнейшего, вращения тела в случаях (6.16) существенно отличаются друг от друга.

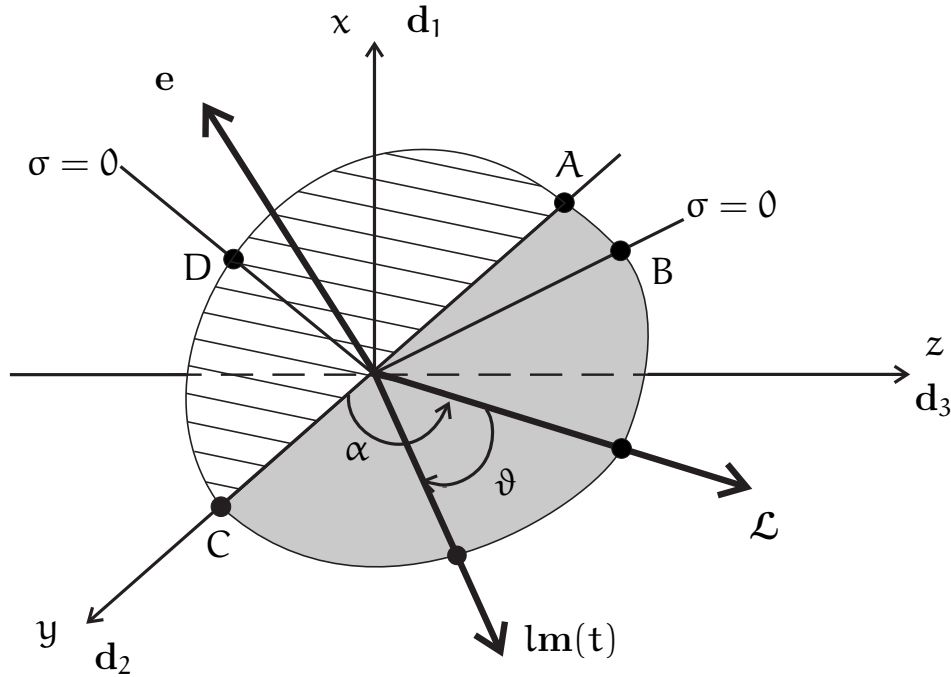
6.5. Решения задачи для трех типов вращения тела

6.5.1. Первый тип вращения тела

Если параметр σ равен нулю, то поверхность (6.14) распадается на две плоскости:

$$\begin{aligned} x_m &= \sqrt{\frac{\Theta_1}{\Theta_3} \frac{\Theta_3 h - l^2}{l^2 - \Theta_1 h}} z_m \equiv \sqrt{\frac{\Theta_1}{\Theta_3} \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_2 - \Theta_1}} z_m; \\ x_m &= -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\Theta_3} \frac{\Theta_3 h - l^2}{l^2 - \Theta_1 h}} z_m \equiv -\sqrt{\frac{\Theta_1}{\Theta_3} \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_2 - \Theta_1}} z_m. \end{aligned} \quad (6.18)$$

³ Нетрудно убедиться в том, что при перманентных вращениях вокруг оси наименьшего момента инерции, т. е. когда $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{d}_1$, имеет место равенство $l^2 - h\Theta_1 = 0$, а при перманентных вращениях вокруг оси наибольшего момента инерции, т. е. когда $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{d}_3$, имеет место равенство $l^2 - h\Theta_3 = 0$. Таким образом, предполагая справедливость неравенств (6.13), мы исключаем перманентные вращения вокруг осей наименьшего и наибольшего моментов инерции. (*Примеч. ред.*)

Рис. 6.1. Случай $\sigma = 0$

Эти плоскости являются характеристиками тела. Вектор $\mathbf{m}(t)$ должен принадлежать одной из этих плоскостей в любой момент времени⁴ — см. рис. 6.1, на котором изображены части плоскостей (6.18).

Предполагается, что вектор \mathcal{L} принадлежит первой из плоскостей (6.18). В момент времени $t > 0$ вектор $\mathbf{m}(t)$ представляет собой результат поворота вектора \mathcal{L} тензором поворота $\mathbf{P}^T(t)$. Очевидно, что вектор \mathcal{L} должен быть повернут вокруг нормали к плоскости, в которой он расположен. Единичный вектор нормали \mathbf{e} к этой плоскости можно найти следующим образом⁵:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{d}_2 \times \mathcal{L}}{|\mathbf{d}_2 \times \mathcal{L}|} \equiv (\mathbf{d}_2 \times \mathcal{L}) / \sqrt{l^2 - l_2^2}.$$

Поворот на угол ϑ вокруг вектора \mathbf{e} определяется тензором поворота $\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e})$. Всегда можно дополнить этот поворот поворотом вокруг вектора

⁴ Вектор $\mathbf{m}(t)$ принадлежит поверхности (6.14). В данном случае поверхность (6.14) распадается на две плоскости (6.18), которые не пересекаются между собой. Поэтому если в начальный момент времени вектор $\mathbf{m}(t)$ принадлежит одной из этих плоскостей, то, в силу непрерывности движения, в любой момент времени он будет принадлежать той же плоскости. (*Примеч. ред.*)

⁵ Плоскости (6.18) содержат ось y и, соответственно, вектор \mathbf{d}_2 . Одной из этих плоскостей принадлежит вектор \mathcal{L} . Таким образом, есть два вектора, лежащие в плоскости. Векторное произведение этих векторов определяет направление, ортогональное плоскости. (*Примеч. ред.*)

$\hat{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L}/l$, поскольку $\mathbf{Q}(\psi\hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L}$. Таким образом, если параметр σ равен нулю, для тензора поворота следует использовать представление

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_2 \times \mathcal{L}) / \sqrt{l^2 - l_2^2}, \quad \hat{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L}/l. \quad (6.19)$$

Вектор $\mathbf{m}(t)$ принимает вид

$$l\mathbf{m}(t) = \mathbf{P}^T \cdot \mathcal{L} = \mathbf{Q}^T(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathcal{L} = \frac{1}{\sin \alpha} (l \sin \vartheta \mathbf{d}_2 + \sin(\alpha - \vartheta)\mathcal{L}), \quad (6.20)$$

где использовано следующее обозначение — см. рис. 6.1:

$$\sin \alpha = \sqrt{l^2 - l_2^2}/l, \quad \cos \alpha = l_2/l.$$

Левый вектор угловой скорости, соответствующий тензору поворота (6.19), вычисляется в соответствии с формулой (2.154):

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi}\hat{\mathcal{L}} + \dot{\vartheta}\mathbf{Q}(\psi\hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{e}.$$

С учетом этого выражения уравнение (6.7) можно переписать в форме

$$\dot{\psi}\hat{\mathcal{L}} + \dot{\vartheta}\mathbf{Q}(\psi\hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(\psi\hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \Theta^{-1} \cdot l\mathbf{m}(t).$$

Домножив последнее уравнение слева на тензор \mathbf{P}^T , получим

$$\dot{\psi}\mathbf{m}(t) + \dot{\vartheta}\mathbf{e} = l\Theta^{-1} \cdot \mathbf{m}(t).$$

Так как векторы \mathbf{m} и \mathbf{e} ортогональны, из уравнения (6.19) следует

$$\dot{\psi} = l\mathbf{m} \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{m} = h/l, \quad \dot{\vartheta} = l\mathbf{e} \cdot \Theta^{-1} \cdot \mathbf{m}, \quad (6.21)$$

где учтен интеграл энергии. Воспользовавшись формулой (6.20), получим

$$l\Theta^{-1} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{l \sin \vartheta}{\Theta_2} \mathbf{d}_2 + \sin(\alpha - \vartheta)\boldsymbol{\omega}_0 \right), \quad \Theta^{-1} \cdot \mathcal{L} = \boldsymbol{\omega}_0 \equiv \boldsymbol{\omega}(0).$$

Теперь второе уравнение (6.21) принимает вид

$$\dot{\vartheta} = \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin \alpha} \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 \equiv -\frac{1}{2}\gamma \sin(\alpha - \vartheta), \quad \gamma \equiv -2\frac{\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0}{\sin \alpha}. \quad (6.22)$$

Решения уравнений (6.21) и (6.22) имеют вид

$$\psi(t) = \frac{ht}{l} = \frac{lt}{\Theta_2}; \quad \cos(\alpha - \vartheta) = \frac{1 + \cos \alpha - (1 - \cos \alpha)e^{\gamma t}}{1 + \cos \alpha + (1 - \cos \alpha)e^{\gamma t}}. \quad (6.23)$$

Здесь использованы начальные условия $\psi(0) = 0$, $\vartheta(0) = 0$. Решение (6.23) зависит от параметра γ ,

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_3} \right) \frac{l_1 l_3}{\sin \alpha} \Rightarrow \gamma = - \left(\frac{1}{\Theta_1} - \frac{1}{\Theta_3} \right) \frac{2l_1 l_3}{\sin \alpha}.$$

Знак γ определяется начальными условиями. Если $l_1 l_3 > 0$, то $\gamma < 0$. Тогда при $t \rightarrow \infty$ экспоненты в формуле (6.23) затухают и $\cos(\alpha - \vartheta)$ достигает 1. В этом случае вектор \mathcal{L} принадлежит первой плоскости из (6.18), как это показано на рис. 6.1. Угол ϑ стремится к α . В этом случае можно легко представить себе вращение тела. Для того, чтобы это сделать, запишем выражение для вектора $\mathbf{D}_2(t) \equiv \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{d}_2$, соответствующего среднему моменту инерции Θ_2 :

$$\mathbf{D}_2(t) = \frac{\sin \vartheta}{l \sin \alpha} \mathcal{L} + \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin \alpha} \mathbf{Q} \left(\frac{lt}{\Theta_2} \hat{\mathcal{L}} \right) \cdot \mathbf{d}_2.$$

В момент времени $t = 0$ вектор $\mathbf{D}_2(0)$ совпадает с вектором \mathbf{d}_2 . Когда $t > 0$, вектор $\mathbf{D}_2(t)$, вращающийся вокруг вектора \mathcal{L} , асимптотически приближается к вектору \mathcal{L} . При больших t тело совершает перманентные вращения вокруг оси с моментом инерции Θ_2 .

Нет необходимости обсуждать этот случай более подробно, поскольку можно легко доказать, что вращение тела при $\sigma = 0$ неустойчиво. Это означает, что если вектор \mathcal{L} не принадлежит плоскости (6.18) в точности (а в реальности точная принадлежность вектора плоскости невозможна), то вращение тела будет значительно отличаться от (6.23). Фактически случай $\sigma = 0$ является сепаратрисой между устойчивыми вращениями, которые будут построены далее.

6.5.2. Второй тип вращения тела

Если параметр σ , определенный формулой (6.15), является положительной величиной, то коэффициент при переменной y_m^2 равен плюс единице. Исключим координату $z_m^2 = 1 - x_m^2 - y_m^2$ из уравнения (6.14), которое в результате примет вид

$$\frac{x_m^2}{a^2} + \frac{y_m^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = \frac{\Theta_1(h\Theta_3 - l^2)}{l^2(\Theta_3 - \Theta_1)}, \quad b^2 = \frac{\Theta_2(h\Theta_3 - l^2)}{l^2(\Theta_3 - \Theta_2)}. \quad (6.24)$$

Уравнение (6.24) — это уравнение цилиндрической поверхности с эллиптическим поперечным сечением. Кривая, которую описывает конец вектора $\mathbf{m}(t)$ — это линия пересечения поверхности (6.24) и единичной сферы

$x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = 1$. Покажем, что полуоси эллипса (6.24) меньше 1. Для этого обратим внимание на соотношение

$$h\Theta_3 - l^2 = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} l_1^2 + \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_2} l_2^2.$$

Для полуосей \mathbf{a} и \mathbf{b} получим:

$$a^2 = \frac{1}{l^2} \left(l_1^2 + \frac{\Theta_1 \Theta_3 - \Theta_2}{\Theta_2 \Theta_3 - \Theta_1} l_2^2 \right) < \frac{1}{l^2} (l_1^2 + l_2^2) < 1,$$

$$b^2 = \frac{1}{l^2} \left(\frac{\Theta_2 \Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1 \Theta_3 - \Theta_2} l_1^2 + l_2^2 \right) = \frac{1}{l^2} \left(l_1^2 + l_2^2 + \frac{\Theta_3(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_2)} l_1^2 \right) < 1.$$

Подчеркнутое слагаемое меньше l_3^2 , что обусловлено соотношением (6.17) и тем фактом, что $\sigma > 0$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_2(\Theta_3 - \Theta_1)} < 1. \quad (6.25)$$

Это соотношение является характеристикой тела и не зависит от начальных условий. С использованием уравнения (6.24) координаты x_m , y_m и z_m можно выразить через угол $\gamma(\mathbf{t})$:

$$x_m = a \cos \gamma, \quad y_m = b \sin \gamma, \quad z_m = \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \gamma - b^2 \sin^2 \gamma}. \quad (6.26)$$

Для координаты z_m выбран знак “+”, но это не имеет значения. Очевидно, что выполняются неравенства

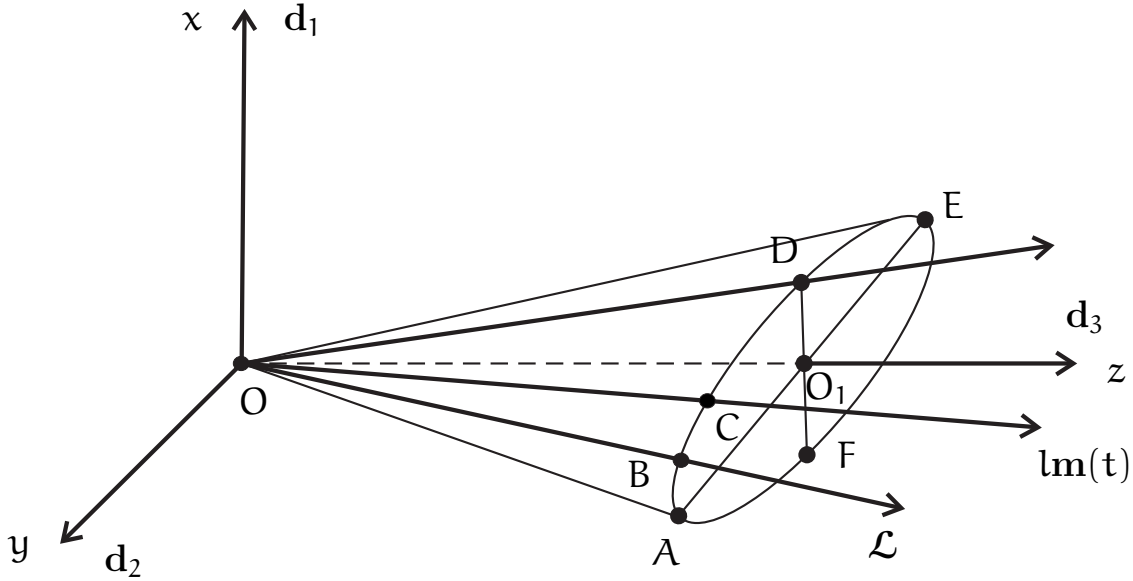
$$\sqrt{1 - b^2} \equiv z_{\min} \leq z_m \leq z_{\max} \equiv \sqrt{1 - a^2}.$$

Для того чтобы получить ясное представление о поворотах тела при $\sigma > 0$, перепишем уравнение (6.14) в форме

$$z^2 = (1 - a^2) \frac{x^2}{a^2} + (1 - b^2) \frac{y^2}{b^2}. \quad (6.27)$$

Это уравнение конической поверхности с эллиптическим поперечным сечением. Рассмотрим сечение поверхности (6.27) плоскостью $z = z_{\min} = \sqrt{1 - b^2}$, т. е. рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a_1^2 = \frac{1 - b^2}{1 - a^2} a^2 < a^2. \quad (6.28)$$

Рис. 6.2. Случай $\sigma > 0$

Здесь координаты x , y больше не являются координатами конца вектора $\mathbf{m}(t)$. Конус (6.27) изображен на рис. 6.2, где эллипс (6.28) — это эллипс ADEFA с полуосями \mathbf{a}_1 и \mathbf{b} и расстояниями $OO_1 = \sqrt{1 - b^2}$, $OA = OE = 1$. Все допустимые векторы $\mathbf{m}(t)$ во все моменты времени t принадлежат конической поверхности (6.27). Концы двух из них, а именно $\mathbf{m} = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{m} = \overrightarrow{OE}$ расположены на эллипсе (6.28). Другие векторы $\mathbf{m}(t)$ касаются эллипса (6.28) — см. рис. 6.2. Вектор кинетического момента \mathcal{L} также является касательным к этому эллипсу и принадлежит конической поверхности (6.27), поскольку $\mathbf{m}(0) = \hat{\mathcal{L}}$.

Теперь становится понятно, как определить структуру тензора поворота (6.5). Прежде всего, ясно, что в качестве вектора \mathbf{p} в формуле (6.5) должен быть выбран вектор $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/l$. Действительно, если это так, то

$$\mathcal{L} \cdot \mathbf{P} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) = \mathcal{L} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{n}) \quad (6.29)$$

и угол прецессии $\psi(t)$ уходит из интеграла энергии (6.8). Таким образом, энергия будет сохраняться для любого значения угла ψ . Угол нутации ϑ и угол собственного вращения φ связаны соотношением (6.8).

Тензор поворота $\mathbf{Q}^\top(\varphi \mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}^\top(\vartheta \mathbf{e})$ должен переводить вектор \mathcal{L} в вектор $\mathbf{m}(t)$ — см. рис. 6.2. Это можно сделать за два шага (рис. 6.3).

На рис. 6.3 показаны три эллипса. Эллипс ADEFA представляет собой сечение конуса (6.27) плоскостью $z = z_{\min} = \sqrt{1 - b^2}$, т. е. он является эллипсом (6.28). Эллипс $A_1D_1E_1F_1A_1$ — это сечение конуса (6.27) плоскостью

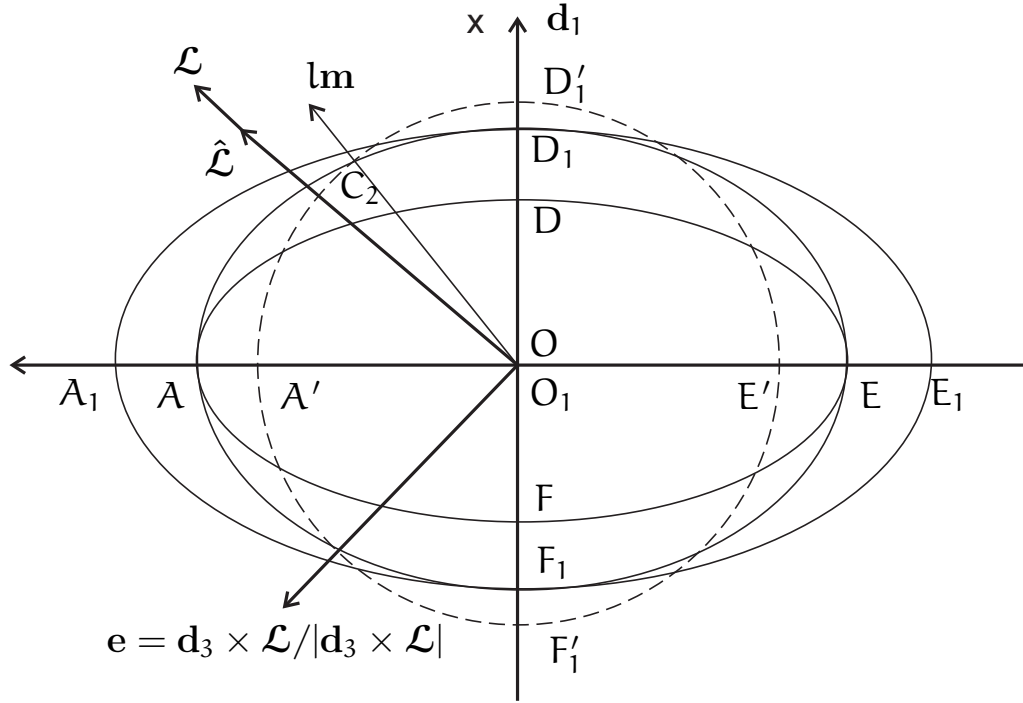


Рис. 6.3. Определение поворота

$z = z_{\max} = \sqrt{1 - a^2}$, т. е. это эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad b_1^2 = \frac{1 - a^2}{1 - b^2} b^2 > b^2.$$

Эллипс AD_1EF_1A представляет собой эллипс (6.24). Вектор $\mathbf{lm}(t)$ принадлежит конусу (6.27) и пересекает все три эллипса. Пусть точка C_2 будет точкой пересечения вектора $\mathbf{lm}(t)$ с эллипсом AD_1EF_1A . Построим конус с вершиной в нуле, поперечное сечение которого представляет собой окружность радиуса O_1C_2 . Окружность $A'C_2D'E'F'A'$ — представляет собой сечение этого кругового конуса плоскостью $z = z_*$, где $z_{\min} < z_* < z_{\max}$. Теперь мы можем реализовать два указанных выше шага. На первом шаге мы поворачиваем вектор \mathcal{L} на угол ϑ вокруг оси \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{d}_3 \times \mathcal{L}}{|\mathbf{d}_3 \times \mathcal{L}|} = (\mathbf{d}_3 \times \mathcal{L}) / \sqrt{l^2 - l_3^2}.$$

В результате вектор \mathcal{L} станет вектором \mathcal{L}' :

$$\mathcal{L}' = \mathbf{Q}^T(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathcal{L}.$$

Вектор \mathcal{L}' принадлежит круговому конусу. На втором шаге мы поворачиваем вектор \mathcal{L}' вокруг оси \mathbf{d}_3 . В результате этого поворота вектор \mathcal{L}' будет

скользить вдоль кругового конуса до совпадения с вектором $\mathbf{lm}(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{lm}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}^\top(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathcal{L}' = \mathbf{Q}^\top(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{Q}^\top(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathcal{L}.$$

Таким образом, вектор \mathbf{n} в формуле (6.29) — это вектор \mathbf{d}_3 . Теперь форма тензора поворота определена:

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3). \quad (6.30)$$

Углы ϑ и φ связаны между собой соотношением, которое может быть найдено путем следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\mathbf{t}) &= \hat{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{t}) = \hat{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left(\sin \vartheta \mathbf{d}_3 + \sin(\alpha - \vartheta) \hat{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3) \right), \end{aligned} \quad (6.31)$$

где

$$\sin \alpha = \sqrt{l^2 - l_3^2}/l, \quad \cos \alpha = l_3/l \quad (l_k \equiv \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}_k). \quad (6.32)$$

Координаты x_m , y_m , z_m вектора $\mathbf{m}(\mathbf{t})$, определяемые уравнением (6.31), имеют вид:

$$\begin{aligned} x_m &= \sin(\alpha - \vartheta) \cos(\beta - \varphi), \\ y_m &= \sin(\alpha - \vartheta) \sin(\beta - \varphi), \quad z_m = \cos(\alpha - \vartheta), \end{aligned} \quad (6.33)$$

где

$$\sin \beta = l_2 / \sqrt{l^2 - l_3^2}, \quad \cos \beta = l_1 / \sqrt{l^2 - l_3^2}.$$

Из формул (6.26) и (6.33) следует

$$\operatorname{tg}(\beta - \varphi) = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \gamma, \quad \cos(\alpha - \vartheta) = \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \gamma - b^2 \sin^2 \gamma}. \quad (6.34)$$

Итак, найдено двухпараметрическое представление тензора поворота, сохраняющее энергию. Заметим, что выполнение условий $\varphi(0) = 0$ и $\vartheta(0) = 0$ должно обеспечиваться единственным значением угла $\gamma_0 = \gamma(0)$. Таким образом, есть два уравнения для γ_0 :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \gamma_0, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - a^2 \cos^2 \gamma_0 - b^2 \sin^2 \gamma_0}. \quad (6.35)$$

Нетрудно показать, что эти уравнения являются совместными. Сейчас мы уже можем приступить к решению уравнения (6.7). Процедура построения решения упростится, если переписать уравнение (6.7) через правый вектор

угловой скорости и вектор $\mathbf{m}(\mathbf{t})$. Воспользовавшись формулами (2.93) и (6.30), получим

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \dot{\varphi} \mathbf{d}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}^\top(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{P}^\top \cdot \hat{\mathcal{L}}.$$

С учетом последнего соотношения уравнение (6.7) приводится к виду

$$\dot{\varphi} \mathbf{d}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{Q}^\top(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{e} + \dot{\psi} \mathbf{m} = \mathbf{l} \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}. \quad (6.36)$$

Воспользовавшись равенством

$$\mathbf{Q}^\top(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{l^2 - l_3^2}} (\mathbf{d}_3 \times \mathbf{Q}^\top(\varphi \mathbf{d}_3) \cdot \mathcal{L}) = \frac{1}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_3 \times \mathbf{m},$$

полученным с учетом тождества (2.92), перепишем уравнение (6.36) в виде

$$\dot{\varphi} \mathbf{d}_3 + \frac{\dot{\vartheta}}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_3 \times \mathbf{m} + \dot{\psi} \mathbf{m} = \mathbf{l} \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}. \quad (6.37)$$

Это основное уравнение, которое мы должны решить. Первый интеграл уравнения (6.37) известен. Это означает, что только два из трех скалярных уравнений (6.37) независимы. Проекция (6.37) на векторы \mathbf{d}_3 и $\mathbf{m}(\mathbf{t})$ дают

$$\dot{\varphi} - \left(\dot{\psi} - \frac{l}{\Theta_3} \right) z_m = 0, \quad \dot{\varphi} z_m + \dot{\psi} = \frac{h}{l}; \quad z_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{d}_3 = \cos(\alpha - \vartheta).$$

Полезно выписать эти уравнения в другой форме:

$$\dot{\psi} = \frac{l}{\Theta_3} + \frac{h\Theta_3 - l^2}{l\Theta_3} \frac{1}{1 - z_m^2} > 0, \quad \dot{\varphi} = -\frac{h\Theta_3 - l^2}{l\Theta_3} \frac{z_m}{1 - z_m^2} < 0. \quad (6.38)$$

Из первого уравнения (6.34) следует

$$(1 - z_m^2) \dot{\varphi} = -ab\dot{\gamma}.$$

С учетом последнего уравнения второе уравнение из (6.38) можно переписать в виде

$$\dot{\gamma} = \omega_* \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma} > 0, \quad (6.39)$$

где

$$\omega_* \equiv \frac{l}{\Theta_3} \sqrt{(1 - a^2) \frac{(\Theta_3 - \Theta_1)(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_1 \Theta_2}}, \quad k^2 = \frac{b^2 - a^2}{1 - a^2} < 1.$$

Начальное условие для угла γ следует из (6.35). Решение уравнения (6.39) можно легко построить в терминах эллиптических функций. Однако качественный анализ не требует никакого интегрирования. Рассмотрим рис. 6.2. Форма эллипса ADEFA определяется только свойствами тела — см. формулу (6.25). Начальные условия определяют расширение эллипса. Если $h\theta_3 - l^2 = 0$, то эллипс вырождается в точку ($\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$) и мы имеем перманентное вращение вокруг оси $\mathbf{d}_3 = \mathbf{D}_3(\mathbf{t})$: $\varphi = \vartheta = 0$, $\dot{\psi} = l/\Theta_3$. Когда величина $h\theta_3 - l^2$ возрастает, полуоси \mathbf{a} и \mathbf{b} растут с одинаковой скоростью. Полный поворот тела представляет собой композицию двух поворотов, первый из которых определяется тензором поворота $\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{d}_3)$, а второй определяется тензором поворота $\mathbf{Q}(\psi\hat{\mathcal{L}})$. Смысл первого поворота заключается в следующем. Тело вращается таким образом, что эллипс ADEFA, неподвижный относительно тела, поворачивается в своей плоскости, касаясь вектора \mathcal{L} , неподвижного в пространстве. Этот поворот происходит в направлении движения часовой стрелки, так как $\dot{\varphi} < 0$, и в то же время тело поворачивается вокруг неподвижного вектора $\mathbf{d}_3 \times \mathcal{L}$ для того, чтобы обеспечить контакт с вектором \mathcal{L} . Угол между векторами \mathcal{L} и $\mathbf{D}_3(\mathbf{t})$ изменяется во времени. Скорость этого вращения также изменяется: она максимальна, когда точка контакта совпадает с концом наименьшего диаметра эллипса, и она минимальна, когда точка контакта совпадает с концом наибольшего диаметра эллипса. В положении, показанном на рис. 6.2, угловая скорость первого поворота убывает и принимает минимальное значение, когда точка A эллипса приходит в соприкосновение с вектором \mathcal{L} . После этого угловая скорость будет возрастать и примет максимальное значение, когда точка F эллипса коснется вектора \mathcal{L} , и т. д. Из уравнения (6.39) следует, что

$$\omega_* \sqrt{1 - k^2} \leq \dot{\gamma}(\mathbf{t}) \leq \omega_*.$$

Второй поворот, называемый прецессией, накладывается на поворот, описанный выше. Он представляет собой вращение вокруг вектора \mathcal{L} . Угловая скорость этого вращения, т. е. $\dot{\psi}$, положительна и не постоянна: она принимает максимальное значение при $z_m = z_{\max}$ и становится минимальной когда $z_m = z_{\min}$. После того, как функция $\gamma(\mathbf{t})$ определена, все характеристики вращения тела можно выразить через эту функцию. В качестве примера, опустив громоздкие преобразования, приведем окончательную формулу для модуля угловой скорости:

$$|\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})|^2 = |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})|^2 = \frac{l^2}{\Theta_3^2} + \frac{h\theta_3 - l^2}{\Theta_3^2} \left(\frac{\Theta_1 + \Theta_3}{\Theta_1} - \frac{\Theta_3(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_1\Theta_2} \sin^2 \gamma \right).$$

В заключение этого раздела отметим, что решение уравнения (6.39) можно представить в форме ряда

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \omega_a t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\omega_a t)}{n \cosh(n\pi K'/K)},$$

где

$$\omega_a = \frac{\pi\omega_*}{2K}, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \gamma}}.$$

Этот ряд достаточно хорошо сходится при $0 \leq k^2 \leq 0.98$, поскольку даже для $k^2 = 0.98$ имеем $K'/K = 0.4707$.

6.5.3. Третий тип вращения тела

Единственное важное отличие этого случая от описанного выше состоит в том, что первый поворот тела происходит вокруг оси \mathbf{d}_1 , а не вокруг оси \mathbf{d}_3 . Если $\sigma = l^2 - h\Theta_2 < 0$, коэффициент при y_m^2 в уравнении (6.14) отрицателен. Исключив координату $x_m^2 = 1 - y_m^2 - z_m^2$ из уравнения (6.14), получим

$$\frac{y_m^2}{c^2} + \frac{z_m^2}{d^2} = 1, \quad c^2 = \frac{\Theta_2(l^2 - h\Theta_1)}{l^2(\Theta_2 - \Theta_1)}, \quad d^2 = \frac{\Theta_3(l^2 - h\Theta_1)}{l^2(\Theta_3 - \Theta_1)}, \quad \frac{d^2}{c^2} < 1.$$

Введем в рассмотрение угол $\gamma(t)$, такой, что

$$x_m = \sqrt{1 - d^2 \cos^2 \gamma - c^2 \sin^2 \gamma}, \quad y_m = c \sin \gamma, \quad z_m = d \cos \gamma. \quad (6.40)$$

Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ можно представить в форме

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_1), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_1 \times \mathcal{L}) / \sqrt{l^2 - l_1^2}. \quad (6.41)$$

Углы ϑ и φ связаны некоторым соотношением. Для того, чтобы найти это соотношение, необходимо выразить вектор $\mathbf{m}(t) = \mathbf{P}^T \cdot \hat{\mathcal{L}}$ через углы ϑ и φ :

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\sin \vartheta \mathbf{d}_1 + \sin(\alpha - \vartheta) \hat{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_1) \right),$$

где

$$\sin \alpha = \sqrt{l^2 - l_1^2} / l, \quad \cos \alpha = l_1 / l.$$

Проекции вектора $\mathbf{m}(t)$ на единичные векторы \mathbf{d}_k имеют вид

$$\begin{aligned} x_m &= \cos(\alpha - \vartheta), & y_m &= \sin(\alpha - \vartheta) \sin(\beta + \varphi), \\ z_m &= \sin(\alpha - \vartheta) \cos(\beta + \varphi), \end{aligned} \quad (6.42)$$

где

$$\sin \beta = l_2 / \sqrt{l^2 - l_1^2}, \quad \cos \beta = l_3 / \sqrt{l^2 - l_1^2}.$$

Из соотношений (6.40) и (6.42) следует

$$\operatorname{tg}(\beta + \varphi) = \frac{c}{d} \operatorname{tg} \gamma, \quad \cos(\alpha - \vartheta) = \sqrt{1 - d^2 \cos^2 \gamma - c^2 \sin^2 \gamma}. \quad (6.43)$$

Правый вектор угловой скорости, соответствующий тензору поворота (6.41), вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\varphi} \mathbf{d}_1 + \frac{\dot{\vartheta}}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_1 \times \mathbf{m} + \dot{\psi} \mathbf{m}.$$

Уравнение (6.7) принимает вид

$$\dot{\varphi} \mathbf{d}_1 + \frac{\dot{\vartheta}}{\sin(\alpha - \vartheta)} \mathbf{d}_1 \times \mathbf{m} + \dot{\psi} \mathbf{m} = l \boldsymbol{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{m}(t).$$

Из этого уравнения следует, что

$$\dot{\varphi} + \left(\dot{\psi} - \frac{l}{\Theta_1} \right) x_m = 0, \quad \dot{\varphi} x_m + \dot{\psi} = \frac{h}{l},$$

или, в другой форме,

$$\dot{\psi} = \frac{l}{\Theta_1} - \frac{l^2 - h\Theta_1}{l\Theta_1} \frac{1}{1 - x_m^2} > 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{l^2 - h\Theta_1}{l\Theta_1} \frac{x_m}{1 - x_m^2} > 0. \quad (6.44)$$

Положительность $\dot{\varphi}$ очевидна. Положительность $\dot{\psi}$ является следствием неравенств

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &\geq \frac{l}{\Theta_1} - \frac{l^2 - h\Theta_1}{l\Theta_1} \frac{1}{1 - (x_m^2)_{\max}}, \\ 1 - x_m^2 &= d^2 \cos^2 \gamma + c^2 \sin^2 \gamma = d^2 + (c^2 - d^2) \sin^2 \gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{\psi} &\geq \frac{l}{\Theta_1} - \frac{l^2 - h\Theta_1}{l\Theta_1} \frac{1}{d^2} = \frac{l}{\Theta_3} > 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение из (6.43) приводится к виду

$$(1 - \chi_m^2) \dot{\varphi} = c d \dot{\gamma}.$$

С учетом последнего уравнения второе уравнение из (6.44) переписывается в форме

$$\dot{\gamma}(t) = \omega_* \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma},$$

где

$$\omega_* \equiv \frac{l}{\Theta_1} \sqrt{(1 - d^2) \frac{(\Theta_2 - \Theta_1)(\Theta_3 - \Theta_1)}{\Theta_2 \Theta_3}}, \quad k^2 = \frac{c^2 - d^2}{1 - d^2} < 1.$$

Начальное условие для функции $\gamma(t)$ следует из уравнений (6.43) и начальных условий $\vartheta(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$:

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{d}{c} \operatorname{tg} \beta, \quad \gamma_0 \equiv \gamma(0). \quad (6.45)$$

Если функция $\gamma(t)$ известна, то можно найти все характеристики вращения тела. Например,

$$|\boldsymbol{\omega}(t)|^2 = |\boldsymbol{\Omega}(t)|^2 = \frac{l^2}{\Theta_1^2} - \frac{l^2 - h\Theta_1}{\Theta_1^2} \left(\frac{\Theta_1 + \Theta_3}{\Theta_3} + \frac{\Theta_1(\Theta_3 - \Theta_2)}{\Theta_2 \Theta_3} \sin^2 \gamma \right).$$

С формальной точки зрения случаи $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ почти одинаковы. Однако вращение тела в случае $\sigma > 0$ существенно отличается от вращения тела в случае $\sigma < 0$.

6.5.4. Обсуждение результатов

Для того чтобы понять и предсказать поведение тела, нет необходимости строить полное решение задачи. Достаточно знать вид тензора поворота тела:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_1), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_1 \times \mathcal{L}) / \sqrt{l^2 - l_1^2}, \quad \sigma < 0; \quad (6.46)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_2 \times \mathcal{L}) / \sqrt{l^2 - l_2^2}, \quad \sigma = 0; \quad (6.47)$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{d}_3), \quad \mathbf{e} = (\mathbf{d}_3 \times \mathcal{L}) / \sqrt{l^2 - l_3^2}, \quad \sigma > 0. \quad (6.48)$$

Угол прецессии ψ и угол собственного вращения φ изменяются монотонно во всех случаях ($\dot{\varphi} = 0$, если $\sigma = 0$). Изменение угла нутации ϑ при $\sigma > 0$ или $\sigma < 0$ имеет осциллирующий характер. Вращения тела в случае $\sigma = 0$

неустойчивы. Вращения тела в случаях $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ являются устойчивыми. Однако последнее утверждение корректно только в линейном приближении. Если значение σ очень мало ($0 < |\sigma| \leq \varepsilon \ll 1$), анализ устойчивости в линейном приближении становится бесполезным с практической точки зрения. Рассмотрим следующие начальные условия ($\varepsilon > 0$):

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}}, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = \frac{(\sqrt{2} - \varepsilon) l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}}, \quad \sigma < 0; \quad (6.49)$$

$$l_1 = \frac{l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} + \varepsilon)^2}}, \quad l_2 = 0, \quad l_3 = \frac{(\sqrt{2} + \varepsilon) l}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} + \varepsilon)^2}}, \quad \sigma > 0. \quad (6.50)$$

При малых значениях $\varepsilon > 0$ условия (6.49) и (6.50) становятся очень близкими. Несмотря на это, вращения тела в этих случаях существенно различаются. Кроме того, вполне возможно, что тело перепрыгнет из “устойчивого” решения (6.46), соответствующего условиям (6.49), в другое “устойчивое” решение (6.48), которое соответствует условиям (6.50). В первом случае тело вращалось вокруг оси наименьшего момента инерции, но после такого прыжка оно начнет вращаться вокруг оси наибольшего момента инерции. Для того чтобы это произошло, нужны только очень малые возмущения, действующие на тело. Таким образом, если мы хотим чтобы тело действительно совершало устойчивое вращение, нам нужно избегать случая малых значений σ .

6.6. Сравнение с классическим решением

Классическое решение строится в два этапа. На первом этапе определяется правая угловая скорость. На втором этапе, в результате решения правой задачи Дарбу, определяются углы Эйлера.

Выразим вектор кинетического момента \mathcal{L} через правый вектор угловой скорости $\mathbf{\Omega}(t)$:

$$\mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega} = \text{const}. \quad (6.51)$$

Продифференцировав (6.51) по времени, после несложных преобразований получим (см., например, [54]):

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{\Theta} \cdot \dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\Theta} \cdot \dot{\mathbf{\Omega}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{\Omega} = 0. \quad (6.52)$$

Уравнения (6.52) — это классические уравнения Эйлера. С учетом тождеств (1.105), (2.172):

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) &= (\det \mathbf{A}) (\mathbf{A}^T)^{-1} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ \mathbf{P} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}),\end{aligned}$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} — произвольные векторы, \mathbf{A} — невырожденный тензор второго ранга, \mathbf{P} — тензор поворота, уравнение (6.52) можно переписать в форме

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \frac{1}{\Theta_1 \Theta_2 \Theta_3} (\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \times (\boldsymbol{\Theta}^2 \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0}. \quad (6.53)$$

Уравнение (6.53) было выведено в [13]. Достоинство уравнений (6.52) и (6.53) состоит в том, что они не содержат поворотов. Если все собственные значения тензора $\boldsymbol{\Theta}$ различны и вектор $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})$ не является собственным вектором $\boldsymbol{\Theta}$, тогда векторы $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})$, $\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})$ и $\boldsymbol{\Theta}^2 \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})$ линейно независимы. Уравнение (6.53), сначала умноженное скалярно на $\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}$, а затем на $\boldsymbol{\Theta}^2 \cdot \boldsymbol{\Omega}$, дает два первых интеграла:

$$\mathfrak{h} = 2\mathfrak{K} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{const}, \quad \mathfrak{l}^2 = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^2 \cdot \boldsymbol{\Omega} = \text{const}. \quad (6.54)$$

Кроме того, уравнение (6.53), умноженное скалярно на вектор $\boldsymbol{\Omega}$, дает уравнение для $\Omega^2 = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}$:

$$(\Omega^2) \cdot = 2A\Omega_1\Omega_2\Omega_3, \quad A = \frac{(\Theta_3 - \Theta_1)(\Theta_3 - \Theta_2)(\Theta_2 - \Theta_1)}{\Theta_1\Theta_2\Theta_3} > 0, \quad (6.55)$$

где $\Omega_k = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{d}_k$, единичные векторы \mathbf{d}_k — собственные векторы тензора $\boldsymbol{\Theta}$.

Уравнение (6.55) показывает, что вращение тела с постоянной по величине угловой скоростью $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{t})|$ возможно только в двух случаях: а) в случае перманентных вращений, когда только одна проекция Ω_k отлична от нуля, т. е. $\boldsymbol{\Omega}$ — собственный вектор тензора $\boldsymbol{\Theta}$; и б) если два или три собственных значения тензора $\boldsymbol{\Theta}$ одинаковы. Уравнения (6.54) удовлетворяются, если принять

$$\begin{aligned}\Omega_1^2 &= \Omega_{10}^2 + \alpha(\Omega^2 - \Omega_0^2), & \Omega_2^2 &= \Omega_{20}^2 - \beta(\Omega^2 - \Omega_0^2), \\ \Omega_3^2 &= \Omega_{30}^2 + \gamma(\Omega^2 - \Omega_0^2),\end{aligned} \quad (6.56)$$

где

$$\alpha = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{A\Theta_3}, \quad \beta = \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{A\Theta_2}, \quad \gamma = \frac{\Theta_3 - \Theta_2}{A\Theta_1}, \quad \Omega_0 \equiv \Omega \Big|_{t=0}.$$

Подставляя выражения (6.56) в уравнение (6.55), получаем уравнение для величины Ω . Решение этого уравнения можно представить через эллиптические функции — см. [55].

Представленное выше изложение классического решения является стандартным. Сейчас необходимо сформулировать начальные условия для правой угловой скорости $\mathbf{\Omega}(\mathbf{t})$. Часто предполагается, что начальное условие для $\mathbf{\Omega}(\mathbf{t})$ не зависит от начального положения тела, однако это не так. В момент времени $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ известно значение левой угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\omega}_0$, т. е. известна истинная угловая скорость. Соотношение (2.93) дает

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{0}) \equiv \mathbf{\Omega}_0 = \mathbf{P}_0^T \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \mathbf{P}_0 \equiv \mathbf{P}(\mathbf{0}).$$

Если в качестве отсчетного выбрано начальное положение тела, то $\mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{E}$. В этом случае вектор $\mathbf{\Omega}(\mathbf{t})$ содержит три произвольных параметра (вектор $\boldsymbol{\omega}_0$). Если отсчетное положение выбирается априорно и не совпадает с начальным положением тела, то $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{E}$. В этом случае вектор $\mathbf{\Omega}(\mathbf{t})$ зависит от шести произвольных параметров (вектор $\boldsymbol{\omega}_0$ и тензор поворота \mathbf{P}_0). Для того, чтобы найти тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, нужно решить правую задачу Дарбу:

$$\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \times \mathbf{\Omega}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{P}_0. \quad (6.57)$$

Решение задачи (6.57) не добавляет новых произвольных параметров. Таким образом, общее решение, например, левый (истинный) вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$ будет содержать шесть произвольных параметров, и все они содержатся в векторе $\mathbf{\Omega}(\mathbf{t})$.

Рассмотрим два различных подхода к решению задачи (6.57). Первый подход основан на представлении тензора поворота через углы Эйлера и содержит классическое решение как частный случай. Второй подход является новым.

Представим тензор поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$ через углы Эйлера:

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}_3),$$

где $\mathbf{e}_3 = \hat{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L}/l$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ и \mathbf{e}_1 представляют собой единичные векторы, причем вектор \mathbf{e}_1 расположен в плоскости, натянутой на векторы \mathcal{L} и $\boldsymbol{\omega}_0$, и кроме того $\mathbf{e}_1 \cdot \mathcal{L} = 0$, $\mathbf{e}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = 0$.

Фактически, нет необходимости решать задачу Дарбу (6.57), поскольку она уже частично решена. Действительно, умножив (6.57) слева на вектор \mathcal{L} , получим

$$(\mathcal{L} \cdot \mathbf{P})' = (\mathcal{L} \cdot \mathbf{P}) \times \mathbf{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \Theta \cdot \dot{\mathbf{\Omega}} = (\Theta \cdot \mathbf{\Omega}) \times \mathbf{\Omega},$$

где использовано выражение (6.51). Вектор $\mathcal{L} \cdot \mathbf{P} = \Theta \cdot \mathbf{\Omega}$ уже известен. Воспользовавшись представлением тензора поворота через углы Эйлера, получим

$$\Theta \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{P}^T \cdot \mathcal{L} = l \sin \vartheta (\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2) + l \cos \vartheta \mathbf{e}_3. \quad (6.58)$$

Из уравнения (6.58) получаем:

$$l \sin \vartheta \sin \varphi = \mathbf{e}_1 \cdot \Theta \cdot \Omega, \quad l \sin \vartheta \cos \varphi = \mathbf{e}_2 \cdot \Theta \cdot \Omega, \quad l \cos \vartheta = \mathbf{e}_3 \cdot \Theta \cdot \Omega, \quad (6.59)$$

откуда следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = (\mathbf{e}_1 \cdot \Theta \cdot \Omega) / (\mathbf{e}_2 \cdot \Theta \cdot \Omega), \quad \cos \vartheta = (\mathbf{e}_3 \cdot \Theta \cdot \Omega) / l. \quad (6.60)$$

Чтобы найти угол прецессии ψ , нужно воспользоваться уравнением (6.57), которое можно переписать в форме

$$\Omega(\mathbf{t}) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta} (\cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2) + \dot{\psi} (\Theta \cdot \Omega) / l. \quad (6.61)$$

Из этого уравнения следует

$$\dot{\psi} = \frac{h - l \cos \vartheta \Omega_3}{l^2 \sin^2 \vartheta}, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad (\Omega_k = \Omega \cdot \mathbf{e}_k). \quad (6.62)$$

Пока мы не фиксировали отсчетное положение тела. Далее рассмотрим два случая выбора отсчетного положения.

1. Отсчетное положение совпадает с начальным положением тела. В этом случае получим:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{E} \Rightarrow \vartheta(0) = 0, \quad \varphi_0 + \psi_0 = 0, \quad \omega_0 = \Omega_0, \quad \Theta \cdot \Omega_0 = \mathcal{L}. \quad (6.63)$$

При $\mathbf{t} \rightarrow 0$ величины $\mathbf{e}_1 \cdot \Theta \cdot \Omega$ и $\mathbf{e}_2 \cdot \Theta \cdot \Omega$ стремятся к нулю⁶, но $\mathbf{e}_3 \cdot \Theta \cdot \Omega / l$ стремится к 1. Нетрудно видеть, что при $\mathbf{t} \rightarrow 0$ уравнения (6.59) обращаются в тождества. Из (6.60) следует, что $\vartheta \rightarrow 0$ при $\mathbf{t} \rightarrow 0$. Однако, из уравнения (6.60) очень трудно определить значение φ_0 . Рассмотрим уравнение (6.61) в момент времени $\mathbf{t} = 0$:

$$\omega_0 = \Omega_0 = (\dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0) \mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta}_0 (\cos \varphi_0 \mathbf{e}_1 - \sin \varphi_0 \mathbf{e}_2).$$

Из последнего уравнения видно, что $\varphi_0 = 0$, поскольку в общем случае $\mathbf{e}_2 \cdot \omega_0 = 0$ и $\dot{\vartheta}_0 \neq 0$. Из (6.63) следует, что $\psi_0 = 0$. Это означает, что числитель выражения (6.60) стремится к нулю быстрее, чем знаменатель. Нетрудно видеть, что числитель выражения (6.62) имеет второй порядок малости при $\mathbf{t} \rightarrow 0$. Действительно,

$$h = \omega \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{P} \cdot \Omega = l (\cos \vartheta \Omega_3 + \sin \vartheta (\cos \varphi \Omega_2 + \sin \varphi \Omega_1)), \quad (6.64)$$

$$\Omega_{20} = \Omega_0 \cdot \mathbf{e}_2 = \omega_0 \cdot \mathbf{e}_2 = 0.$$

⁶ Тензор поворота представлен через углы Эйлера, причем в качестве отсчетного выбрано положения тела, при котором $\mathbf{e}_3 = \hat{\mathcal{L}} \equiv \mathcal{L} / l$. Рассматривается случай, когда отсчетное положение совпадает с начальным. Следовательно, в начальный момент времени \mathcal{L} сонаправлен с \mathbf{e}_3 , а проекции \mathcal{L} на \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 равны нулю. (*Примеч. ред.*)

Таким образом, получили выражения (6.60) и (6.62) для определения углов Эйлера ψ , ϑ и φ . Они неудобны для практических вычислений, но их можно использовать.

2. Отсчетным является положение тела, когда собственный вектор \mathbf{d}_3 тензора Θ совпадает с вектором \mathcal{L} . Этот случай представлен в большинстве книг — см., например, [52, 55]. При данных условиях $\mathbf{e}_k = \mathbf{d}_k$ и уравнения (6.59), (6.60) принимают вид

$$l \sin \vartheta \sin \varphi = \Theta_1 \Omega_1, \quad l \sin \vartheta \cos \varphi = \Theta_2 \Omega_2, \quad l \cos \vartheta = \Theta_3 \Omega_3; \quad (6.65)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = (\Theta_1 \Omega_1) / (\Theta_2 \Omega_2), \quad \cos \vartheta = (\Theta_3 \Omega_3) / l. \quad (6.66)$$

Здесь возникает множество вопросов. Во-первых, трудно найти угол φ . Действительно, из уравнения (6.55) следует, что величины Ω_1 и Ω_2 в некоторые моменты времени должны обращаться в ноль. Это означает, что функции $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ будут разрывными функциями времени. Тот же факт следует из соотношений (6.65). Действительно, если записать (6.65) в начальный момент времени, то должны получиться тождества в отношении шести скалярных параметров, а именно углов ψ_0 , φ_0 , ϑ_0 и трех проекций вектора $\boldsymbol{\omega}_0$. Это действительно так? Никто не показал этого. В любом случае, нужно быть очень осторожными при использовании выражений (6.66) и уравнения (6.62).

Рассмотрим другой путь построения тензора поворота $\mathbf{P}(t)$. При этом подходе углы Эйлера не используются. Вектор $\mathbf{m}(t) = \Theta \cdot \Omega / l$ считается известным. Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ представляется в форме

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{L}}) \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathcal{L}}}{|\mathbf{m} \times \hat{\mathcal{L}}|} \equiv \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathcal{L}}}{|\sin \alpha|}, \quad (6.67)$$

где

$$\cos \alpha = \mathbf{m}(t) \cdot \hat{\mathcal{L}} = \Omega(t) \cdot \Theta^2 \cdot \Omega_0 / l^2, \quad \alpha(0) = 0. \quad (6.68)$$

Угол $\alpha(t)$ известен. Нетрудно показать, что выполняется неравенство

$$0 \leq \alpha(t) < \pi.$$

Пусть вектор $\boldsymbol{\omega}_*(t)$ — левая угловая скорость тензора поворота $\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{b})$:

$$\boldsymbol{\omega}_*(t) = \dot{\alpha}(t) \mathbf{b}(t) + \sin \alpha \dot{\mathbf{b}} + (1 - \cos \alpha) \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}.$$

Левая угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ тензора поворота (6.67) равна:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\psi} \hat{\mathcal{L}} + \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{L}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_*. \quad (6.69)$$

Напомним, что $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} = \mathfrak{h}$. Из уравнения (6.69) следует

$$\dot{\psi} = \frac{\mathfrak{h}}{l} - \boldsymbol{\omega}_* \cdot \hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}} = \frac{\mathfrak{h} + \boldsymbol{\Omega}(t) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}}{l(1 + \cos \alpha)}, \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (6.70)$$

Для того, чтобы получить уравнение (6.70), нужно проделать следующую последовательность преобразований:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_* \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} &= (1 - \cos \alpha)(\mathbf{b} \times \dot{\mathbf{b}}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}}) \right) \cdot \dot{\mathbf{b}} = \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (\mathbf{m} - \cos \alpha \hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}}) \cdot \dot{\mathbf{b}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{b}} = -\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{b} = \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{m}) \cdot (\mathbf{m} \times \hat{\boldsymbol{\mathcal{L}}}) = \frac{\mathfrak{h} \cos \alpha - \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}}{l(1 + \cos \alpha)}. \end{aligned}$$

Решение (6.67), (6.68) и (6.70) содержит шесть произвольных параметров. Углы $\alpha(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции времени.

6.7. Заключительные замечания

Успех решения многих задач динамики твердого тела зависит от подходящего выбора представления тензора поворота. Существует много различных путей. Наиболее популярный путь — представление тензора поворота через углы Эйлера. Наш собственный опыт показывает, что в большинстве случаев углы Эйлера — не самый лучший инструмент. Единственное исключение составляет движение тела при малых углах нутации. В этом случае применение углов Эйлера ведет к очень простым решениям. Разумеется, вместо углов Эйлера можно использовать и другой набор параметров. Главное — каким образом это делать. Если параметры выбираются априорно, нахождение хорошего решения можно считать большим везением. Цель проведенного выше анализа задачи Эйлера–Пуансо заключалась в том, чтобы показать, что набор основных параметров должен выбираться в процессе решения задачи. Именно для этого нужны теоремы, подобные теореме о представлении тензора поворота (2.61). Тензор поворота является инструментом, необходимым для того, чтобы сохранить свободу выбора основных параметров.

Задача Эйлера–Пуансо является простейшей задачей динамики твердого тела. При решении большинства других задач у нас нет шансов найти что-нибудь, подобное первым интегралам. Означает ли это, что тензор поворота в таких задачах бесполезен? Мы уверены, что это не так. В качестве примера можно привести один важный (но не самый важный) случай. Во многих

задачах микрополярных сплошных сред, динамики гироскопических систем, динамики центрифуг и ультрацентрифуг и т. д., мы имеем дело с вращением при малых углах нутации. При использовании традиционных методов динамики твердого тела для сколь угодно малых углов нутации получаются нелинейные уравнения, при условии, что другие углы Эйлера не малы. Применение тензора поворота и различных тензорных тождеств позволяет существенно упростить задачу. Кратко укажем путь, как сделать это. Примем представление тензора поворота через углы Эйлера (2.71):

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\psi(\mathbf{t})\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta(\mathbf{t})\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(\mathbf{t})\mathbf{m}), \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{m} = 0, \quad |\vartheta(\mathbf{t})| \ll 1. \quad (6.71)$$

Если угол $|\vartheta(\mathbf{t})|$ мал, то можно использовать выражение

$$\mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) = \mathbf{E} + \vartheta\mathbf{e} \times \mathbf{E} + \mathcal{O}(\vartheta^3)$$

и переписать (6.71) в форме

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t}) \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\beta(\mathbf{t})\mathbf{m}), \quad (6.72)$$

где

$$\beta(\mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{t}) + \psi(\mathbf{t}), \quad \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t}) = \vartheta(\mathbf{t})\mathbf{Q}(\psi(\mathbf{t})\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0.$$

Обычно величины ψ , φ , β не малы, но вектор $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t})$ мал, так как $|\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t})| = |\vartheta(\mathbf{t})| \ll 1$. Из (6.71) и (6.72) следует

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta}\mathbf{m} + \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \beta\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{m}.$$

Теперь можно линеаризовать основные уравнения относительно малого вектора $\boldsymbol{\gamma}$ и построить решение. Подчеркнем, что линейное уравнение можно вывести только для малого вектора $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t})$, а не для малого угла $\vartheta(\mathbf{t})$. Уравнение для $\vartheta(\mathbf{t})$ всегда будет нелинейным. Если вектор $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{t})$ известен, легко находится угол прецессии $\psi(\mathbf{t})$:

$$\dot{\psi}(\mathbf{t}) = \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}) / (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}).$$

Угол $\varphi(\mathbf{t})$ можно найти, когда ψ и β известны. Обычно $\beta(\mathbf{t})$ находится без каких-либо затруднений.

Глава 7

Твердотельный осциллятор¹

7.1. Твердотельный осциллятор в механике и физике

Известна роль, которую играет обычный нелинейный осциллятор в ньютоновской механике. Благодаря этой модели началось исследование многих физических явлений и развитие ряда методов нелинейной механики. В эйлеровской механике аналогичную роль играет твердое тело на упругом основании общего вида. Такую систему мы будем называть “твердотельным осциллятором”. Важность введения твердотельного осциллятора отмечалась многими авторами. Однако, общий случай этой модели в литературе не только не исследован, но даже и не описан. Частные случаи твердотельного осциллятора, безусловно, рассматривались. Например, при анализе ядерного магнитного резонанса, а также в многочисленных работах прикладного характера. В указанных случаях углы поворота считались малыми.

Модель твердотельного осциллятора может найти применение в континуальной механике, в частности, в механике микрополярных сред. В настоящее время, две огромные области механики — механика сплошных сред и динамика твердого тела — существуют независимо друг от друга. Динамика твердого тела, возможно, не нуждается в методах механики сплошных сред. Однако, то же самое нельзя сказать в отношении механики сплошных сред. Это стало очевидным в конце XIX века, когда начали интенсивно развиваться теории стержней и оболочек, теория континуума Коссера, теория жидких кристаллов, теория ферромагнитных сред и другие континуальные теории, включающие в себя идеи динамики твердого тела. В теории жидких кристал-

¹ Материал этой главы основан на двух статьях П. А. Жилина [56, 57]: “Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании” (Труды XXIV летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. СПб., 1997. С. 90–122), “Rigid body oscillator: a general model and some results” (Acta Mechanica. Vol. 142. 2000. P. 169–193). Последняя статья написана на английском языке. Перевод Е. А. Ивановой. (*Примеч. ред.*)

лов каждая точка среды является твердым телом, в теории микрополярного континуума каждая точка среды представляет собой гириостат со несколькими внутренними роторами. Таким образом ясно, что эти теории не могут быть построены без привлечения основных идей динамики твердого тела. В линейных теориях никаких проблем нет: механика сплошной среды и динамика твердого тела используют одинаковый язык. Однако во многих случаях повороты частиц среды не являются малыми, и возникает необходимость рассматривать нелинейную динамику. В нелинейных теориях различие между методами динамики твердого тела и механики сплошных сред является существенным. Динамика твердого тела в классическом изложении использует матричные и кватернионные методы [58], которые не подходят для целей механики сплошных сред. Собственно говоря, единственным языком, который может быть использован в механике сплошных сред, является тензорное исчисление. Таким образом, если мы собираемся применить методы динамики твердого тела в механике сплошных сред, необходимо описывать динамику твердого тела на языке тензорного исчисления.

Для построения модели твердотельного осциллятора требуется три элемента: вектор поворота, тензор-интегратор и потенциальный момент. Два из них рассмотрены в главе, посвященной кинематике спинорных движений, потенциальный момент вводится в следующем разделе. Представленные в этой главе уравнения движения твердотельного осциллятора необычны для динамики твердого тела. Они имеют простую структуру, но содержат нелинейность сложного вида. Эти уравнения могут быть интересным объектом исследования для теории нелинейных дифференциальных уравнений. Далее рассмотрен ряд примеров и, в частности, показано, что в простейшем случае задача динамики твердотельного осциллятора допускает точное решение.

7.2. Консервативный момент

Ниже дается определение упругой энергии через потенциальную функцию $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$, где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор поворота, причем эта функция интерпретируется как упругая энергия основания. Вместе с тем, в нелинейной теории упругости понятие упругой энергии имеет однозначно определенное значение. Таким образом, необходимо показать, что нет никакого противоречия между двумя указанными концепциями.

Итак, основание считается упругим телом. Граница основания — это поверхность $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 \cup \mathbf{S}_3$, где часть поверхности \mathbf{S}_1 жестко закреплена, часть \mathbf{S}_2 представляет собой свободную поверхность, а часть \mathbf{S}_3 — это поверх-

ность контакта между основанием и абсолютно твердым телом. Сформулируем уравнение баланса энергии для системы “основание плюс твердое тело”:

$$\dot{\mathbf{K}} + \dot{\mathbf{U}} = 0. \quad (7.1)$$

Поскольку основание считается безынерционным, функция \mathbf{K} — это кинетическая энергия только твердого тела. Функция \mathbf{U} — это суммарная внутренняя энергия. Поскольку внутренняя энергия твердого тела имеет постоянное значение, функция \mathbf{U} , фактически, представляет собой упругую энергию (или энергию деформации) основания. Правая часть уравнения (7.1) равна нулю в силу того, что мощность внешних воздействий отсутствует.

Теперь запишем уравнение баланса энергии только для твердого тела. Внешние силы, действующие на твердое тело, порождают напряжения, действующие на части границы \mathbf{S}_3 . Таким образом, можно записать

$$\dot{\mathbf{K}} = - \int_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}_3} \mathbf{N}(\mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{P}) \cdot \dot{\mathbf{R}}(\mathbf{P}) dS(\mathbf{P}), \quad (7.2)$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{P})$ — радиус-вектор точки контакта \mathbf{P} на поверхности \mathbf{S}_3 ; вектор \mathbf{N} — внешняя единичная нормаль к поверхности \mathbf{S}_3 ; тензор $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений Коши. Согласно основной теореме кинематики твердого тела

$$\mathbf{R}(\mathbf{P}) = \mathbf{R}(\mathbf{Q}) + \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot (\mathbf{r}(\mathbf{P}) - \mathbf{r}(\mathbf{Q})), \quad (7.3)$$

где \mathbf{Q} — опорная точка, $\mathbf{r}(\mathbf{P})$ и $\mathbf{r}(\mathbf{Q})$ — векторы положения точек \mathbf{P} и \mathbf{Q} в отсчетной конфигурации. Из уравнения (7.3) следует:

$$\mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{Q}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) \times [\mathbf{R}(\mathbf{P}) - \mathbf{R}(\mathbf{Q})]. \quad (7.4)$$

Подставив выражение (7.4) для $\dot{\mathbf{R}}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{P})$ в уравнение (7.2), получим

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{Q}) + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (7.5)$$

где сила \mathbf{F} и момент \mathbf{M} вычисляются по формулам

$$\mathbf{F} = - \int_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}_3} \mathbf{N}(\mathbf{P}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{P}) dS(\mathbf{P}),$$

$$\mathbf{M} = - \int_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}_3} [\mathbf{R}(\mathbf{P}) - \mathbf{R}(\mathbf{Q})] \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{P}) dS(\mathbf{P}).$$

Приняв во внимание (7.1), уравнение (7.5) можно переписать в виде

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{Q}) + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{R}(\mathbf{Q}), \boldsymbol{\theta}), \quad (7.6)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор поворота твердого тела, а значит и поверхности \mathcal{S}_3 . Действительно, поскольку поверхность \mathcal{S}_3 — это поверхность контакта между основанием и абсолютно твердым телом, эта поверхность движется вместе с твердым телом, т. е. поворачивается как жесткое целое и ее вектор поворота совпадает с вектором поворота твердого тела.

Введем понятие консервативного момента, необходимость в котором возникает во многих задачах, но которое, видимо, до сих пор не было введено в общем случае.

Определение. Момент $\mathbf{M}(\mathbf{t})$ называется потенциальным или консервативным, если существует такая скалярная функция $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$, зависящая только от вектора поворота, что выполняется равенство²

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\dot{\mathcal{U}}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (7.7)$$

Заметим, что определение (7.7) является частным случаем формулы (7.6) и получается из последней если точка Q неподвижна. Таким образом, потенциал \mathcal{U} в выражении (7.7) можно считать упругой энергией основания при условии, что твердое тело вращается вокруг неподвижной точки.

С учетом соотношения $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}$ (см. формулу (2.138)), равенство (7.7) можно переписать в форме

$$\left(\mathbf{M} + \frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (7.8)$$

Это равенство должно выполняться для любого вектора $\boldsymbol{\omega}$, что возможно если, и только если

$$\mathbf{M} = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}, \quad (7.9)$$

где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$ — произвольная функция векторов $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

Определение. Консервативный момент \mathbf{M} называется позиционным, если он зависит только от вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$ в данный момент времени. Выражение для позиционного момента $\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta})$ имеет вид

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}. \quad (7.10)$$

² О вычислении производной скалярной функции по вектору см. в разделе 1.7. (Примеч. ред.)

Замечание. Включение в определение консервативного момента слагаемого, зависящего от скорости, оправдывается следующими обстоятельствами. 1. Именно выражение (7.9) следует из определения (7.8). 2. Включение слагаемого $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}$ не препятствует сохранению энергии. 3. Включение этого слагаемого, где $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega})$ следует понимать как функционал от векторов поворота и угловой скорости, дает возможность частично учесть инерционные свойства упругого основания.

Для практических целей важными оказываются частные случаи потенциала $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$. Рассмотрим два примера. Если потенциальная функция имеет вид изотропной функции вектора поворота³

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{U}(\theta^2) = \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}),$$

то из выражений (7.10) и (2.139) следует, что

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \frac{d\mathcal{U}(\theta^2)}{d(\theta^2)} \boldsymbol{\theta}.$$

Если потенциальная функция имеет простейшую форму $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{C}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}$, где $\mathbf{C} = \text{const}$, $\mathbf{k} = \text{const}$, $|\mathbf{k}| = 1$, то для момента получается достаточно сложное выражение:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{C}\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{C} \left(\mathbf{k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}) \right), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}.$$

Определение. Потенциал $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$ называется *трансверсально-изотропным* с осью изотропии \mathbf{k} , если равенство

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{U}[\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}] \quad (7.11)$$

выполняется для любого тензора поворота $\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k})$.

Найдем общий вид трансверсально-изотропного потенциала. Для этого рассмотрим непрерывно дифференцируемое семейство тензоров поворота $\mathbf{Q}(\alpha(\tau)\mathbf{k})$, где τ — параметр семейства. Для любого из этих тензоров должно удовлетворяться уравнение (7.11). Продифференцируем (7.11) по параметру τ и учтем, что левая часть равенства (7.11) не зависит от τ . Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{U}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{U}}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot \frac{d\boldsymbol{\theta}'}{d\tau} = 0, \quad \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{Q}(\alpha(\tau)\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (7.12)$$

³ Строго говоря, при переходе к другому аргументу, должно меняться обозначение функции, т. е. следует писать $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = F(\theta^2)$. Однако в книгах по механике при изменении аргументов функции для самой функции обычно сохраняется прежнее обозначение. (Примеч. ред.)

Используя уравнение Пуассона (2.95), получаем

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}'}{d\tau} = \frac{d\alpha}{d\tau} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}'. \quad (7.13)$$

Подставляя это выражение в (7.12) и принимая

$$\alpha|_{\tau=0} = 0, \quad \left. \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} \neq 0, \quad (7.14)$$

приходим к выводу⁴, что трансверсально-изотропный потенциал должен удовлетворить условию

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} = \varphi \mathbf{k} + \psi \boldsymbol{\theta}, \quad (7.15)$$

где φ и ψ — некоторые скалярные функции. Умножая последнее равенство скалярно на $d\boldsymbol{\theta}$, получаем

$$dU = \frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \varphi d(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2} \psi d(\boldsymbol{\theta}^2).$$

Из последнего равенства видим, что трансверсально-изотропный потенциал есть функция двух аргументов

$$U(\boldsymbol{\theta}) = U(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^2). \quad (7.16)$$

В случае трансверсально-изотропного потенциала, выражение для момента имеет вид

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \frac{\partial U}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} - \frac{\partial U}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k}. \quad (7.17)$$

Отметим очевидные тождества, справедливые для любого вектора \mathbf{a} :

$$(\mathbf{E} - \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})) \cdot \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{E} - \mathbf{Q}^T) \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot \boldsymbol{\theta} = 0, \quad \mathbf{a}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}.$$

⁴ Подставляя выражение (7.13) во второе уравнение (7.12), получаем уравнение

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}'} \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}') \frac{d\alpha}{d\tau} = 0, \quad \boldsymbol{\theta}' = \mathbf{Q}(\alpha(\tau) \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\theta},$$

которое должно выполняться при любых α , в том числе и при $\alpha(0) = 0$. Полагая $\tau = 0$, приходим к уравнению

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} \cdot (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}) \left. \frac{d\alpha}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0,$$

из которого при выполнении второго условия (7.14) следует первое уравнение (7.15). (*Примеч. ред.*)

С учетом этих тождеств, а также тождества $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}$ и равенства (7.17), имеем

$$(\mathbf{E} - \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\theta})) \cdot \mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}.$$

Умножив это равенство скалярно на \mathbf{k} , получим

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{M} = 0. \quad (7.18)$$

Последнее равенство справедливо для любого трансверсально-изотропного потенциала. В случае изотропного потенциала, равенство (7.18) справедливо для любого вектора. Иногда равенство (7.18) имеет очень важное значение — см., например, раздел 7.7.

7.3. Метод возмущений на множестве тензоров поворота

Поскольку возмущенные тензоры поворота не должны выходить за пределы собственно ортогональной группы, то это налагает определенные ограничения на всю технику метода возмущений. Существует несколько способов возмущения тензоров поворота. Один из них изложен в [59]. Здесь будет использована другая техника, основанная на том факте, что векторы поворота являются элементами линейного пространства и на их возмущения никаких ограничений не налагается.

Тензоры поворота подчиняются ограничениям

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = +1. \quad (7.19)$$

Возмущенный тензор поворота \mathbf{Q}_ε также должен подчиняться этим ограничениям. В отличие от тензоров поворота, векторы поворота не имеют ограничений, подобных (7.19). Таким образом, возмущенный вектор поворота можно определить как

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (7.20)$$

где $\boldsymbol{\theta}_0$ — невозмущенный вектор поворота, а вектор $\boldsymbol{\varphi}$ называется первой вариацией вектора поворота.

Возмущенный тензор поворота можно найти, воспользовавшись формулами (2.39)–(2.41):

$$\mathbf{Q}_\varepsilon = \exp \mathbf{R}_\varepsilon = \exp (\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \mathbf{E}). \quad (7.21)$$

Тогда уравнения (7.19) удовлетворяются тензором \mathbf{Q}_ε при любых векторах $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$. Параметр ε следует рассматривать как независимую переменную.

В таком случае, по аналогии с угловыми скоростями, можно ввести в рассмотрение левую и правую скорости возмущения, соответственно $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ и $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{Q}_\varepsilon = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \mathbf{Q}_\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \mathbf{Q}_\varepsilon = \mathbf{Q}_\varepsilon \times \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{Q}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon. \quad (7.22)$$

Возмущенные угловые скорости находятся из уравнений Пуассона (2.80), (2.81):

$$\dot{\mathbf{Q}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \times \mathbf{Q}_\varepsilon, \quad \dot{\mathbf{Q}}_\varepsilon = \mathbf{Q}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Q}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon. \quad (7.23)$$

Выписывая условия интегрируемости (7.22) и (7.23), приходим к уравнениям структуры Картана⁵:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \dot{\boldsymbol{\eta}}_\varepsilon + \boldsymbol{\eta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon - \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon. \quad (7.24)$$

Для скоростей возмущения имеем формулы аналогичные (2.145), (2.146):

$$\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon = \mathbf{Z}^{-\text{T}}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-\text{T}} \cdot \boldsymbol{\varphi}. \quad (7.25)$$

Согласно уравнениям (2.145), (2.146), возмущенные угловые скорости находятся по формулам

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}_\varepsilon^{-\text{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon.$$

Если невозмущенный вектор поворота $\boldsymbol{\theta}_0$ не зависит от времени (положение равновесия), то

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon^{-1} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{Z}_\varepsilon^{-\text{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (7.26)$$

Пусть дана функция $f(\varepsilon, \mathbf{t})$. Величина

$$f^*(\mathbf{t}) = \left. \frac{\partial f(\varepsilon, \mathbf{t})}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \quad (7.27)$$

называется первой вариацией функции $f(\varepsilon, \mathbf{t})$.

Для первых вариаций тензора поворота и левых скоростей согласно (7.22), (7.24), (7.25) и (7.26) получим

$$\mathbf{Q}^* = \boldsymbol{\eta}_0 \times \mathbf{Q}_0, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{Z}_0^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0, \quad (7.28)$$

где индексом 0 отмечены невозмущенные величины, $\boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$.⁶

⁵ Вывод уравнений структуры Картана можно найти в десятой главе — см. раздел 10.2. (Примеч. ред.)

⁶ Строго говоря, вектор $\boldsymbol{\eta}_0$ нельзя назвать невозмущенной величиной — он характеризует скорость возмущения. Именно поэтому данное обозначение приведено отдельно. (Примеч. ред.)

Аналогичные формулы справедливы для правых скоростей:

$$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}_0 \times \boldsymbol{\zeta}_0, \quad \boldsymbol{\zeta}_0 = \mathbf{Z}_0^{-T} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\Omega}^* = \dot{\boldsymbol{\zeta}}_0 - \boldsymbol{\zeta}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0, \quad (7.29)$$

где использовано обозначение $\boldsymbol{\zeta}_0 = \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon|_{\varepsilon=0}$.

Если возмущения накладываются на равновесные (статические) состояния, то $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}$. Используя формулы (7.20), (7.26)–(7.29), можно получить формулы для первой вариации модуля вектора поворота $\theta_\varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\theta}_\varepsilon}$:

$$\theta^* = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\eta}_0 = \frac{1}{\theta_0} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\zeta}_0. \quad (7.30)$$

Метод, изложенный в данном разделе, будет использоваться в подразделе 7.5.4 при исследовании устойчивости регулярной прецессии твердотельного осциллятора, в разделе 7.7 при исследовании устойчивости положений равновесия твердотельного осциллятора при действии на него внешнего момента, а также в последующих главах книги.

7.4. Уравнения движения твердотельного осциллятора

Представим себе следующую ситуацию. Пусть дан тонкий стержень, расположенный вдоль орта \mathbf{k} . Пусть его нижний конец закреплен от смещений в неподвижной точке \mathbf{O} , которую примем за начало в инерциальной системе отсчета. Пусть, наконец, рассматриваемый воображаемый стержень удерживается от поворотов упругим основанием (рис. 7.1). Когда стержень направлен вертикально и не повернут вокруг своей оси, упругое основание считается недеформированным. Насадим теперь на воображаемый стержень твердое тело произвольного вида. Тогда воображаемый стержень станет некой материальной осью в теле, защемленной в упругое основание. Положение тела, при котором упругое основание не деформировано, будем называть отсчетным. Тензор инерции тела в отсчетном положении, вычисленный относительно неподвижной точки \mathbf{O} , будем обозначать символом $\boldsymbol{\Theta}$. Тензор $\boldsymbol{\Theta}$ симметричен и положительно определен. Вектор вертикали \mathbf{k} не обязан совпадать с главной осью $\boldsymbol{\Theta}$. Ситуация такого рода возникает в динамике неуравновешенных центрифуг. При исследовании динамики центрифуг вместо твердого тела нужно рассматривать гири, что, конечно, вносит некоторые технические осложнения, но в данном случае эти осложнения совершенно излишни.

Тензор инерции тела, вычисленный относительно неподвижной точки \mathbf{O} , можно представить в виде

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \quad (7.31)$$

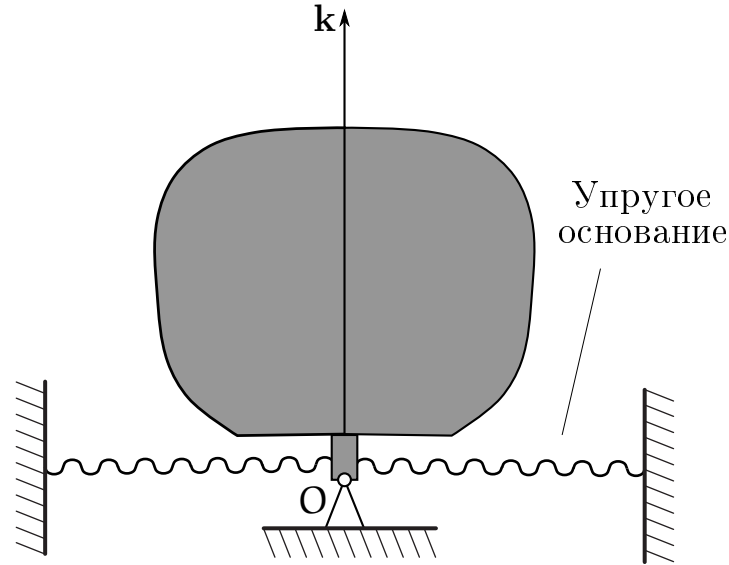


Рис. 7.1. Твердое тело на упругом основании

где $\Theta_i > 0$ — главные моменты инерции, а единичные векторы \mathbf{d}_i определяют направления главных осей инерции.

Важное значение имеет случай трансверсально-изотропного тензора инерции с осью изотропии \mathbf{k} . В этом случае тензор Θ имеет вид

$$\Theta = \Theta_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \Theta_3 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{k}, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad (7.32)$$

где Θ_1, Θ_3 — экваториальный и осевой моменты инерции, вычисленные относительно осей, проходящих через неподвижную точку O .

Положение тела в момент времени \mathbf{t} называется актуальным положением тела. Движение тела можно описывать либо посредством тензора поворота $\mathbf{P}(\mathbf{t})$, либо с помощью вектора поворота $\theta(\mathbf{t})$:

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\theta(\mathbf{t})).$$

В актуальном положении тела, т. е. в положении тела в данный момент времени, тензор инерции Θ^t находится по формуле

$$\Theta^t = \mathbf{P}(\mathbf{t}) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{t}). \quad (7.33)$$

Если тензор Θ — трансверсально-изотропный, предыдущую формулу можно привести к виду

$$\Theta^t = \Theta_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}') + \Theta_3 \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}. \quad (7.34)$$

Кинетический момент тела можно представить в двух формах. Используя левую угловую скорость, получаем

$$\mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \Theta_1 \boldsymbol{\omega} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{k}', \quad (7.35)$$

где вторая часть уравнения (7.35) справедлива только в случае трансверсально-изотропного тензора инерции. С использованием правой угловой скорости кинетический момент записывается так:

$$\mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P} \cdot [\Theta_1 \boldsymbol{\Omega} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k}]. \quad (7.36)$$

Заметим, что в силу соотношения между угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ имеет место равенство

$$\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (7.37)$$

Внешний момент \mathbf{M} , действующий на тело, можно представить в виде суммы:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_{\text{ext}},$$

где \mathbf{M}_e — реакция упругого основания, \mathbf{M}_{ext} — дополнительный внешний момент. Упругий момент \mathbf{M}_e считается позиционным потенциальным моментом. В этом случае, согласно определению (7.10), упругий момент можно представить в виде

$$\mathbf{M}_e = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}}, \quad (7.38)$$

где скалярная функция $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ называется упругой энергией.

В дальнейшем упругое основание считается трансверсально-изотропным. В этом случае выражение для упругого момента упрощается и принимает вид (7.17):

$$\mathbf{M}_e = -2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^2). \quad (7.39)$$

В дальнейшем будем считать, что внутренняя энергия \mathbf{U} является положительно определенной:

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{a} > 0, \quad \forall \mathbf{a}: |\mathbf{a}| \neq 0. \quad (7.40)$$

В случае трансверсально-изотропного основания

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} &= 2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2)} \mathbf{E} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2) \partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} (\boldsymbol{\theta} \otimes \mathbf{k} + \mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\theta}) + \\ &+ 4 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2) \partial (\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7.41)$$

Перепишем выражение (7.39) для упругого момента в форме

$$\mathbf{M}_e(\boldsymbol{\theta}) = -C(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} - D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^\top(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k}, \quad (7.42)$$

где

$$C = 2 \frac{\partial}{\partial (\theta^2)} \mathcal{U}(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}), \quad D = \frac{\partial}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathcal{U}(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (7.43)$$

Рассмотрим возможное выражение для упругой энергии, удовлетворяющее ограничению (7.40), например

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 C_1 \theta^2}{\alpha^2 - \theta^2 + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2}{\beta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2}, \quad (7.44)$$

где $C_1 > 0$ и $C_3 > 0$ — являются постоянными, причем C_1 называется жесткостью на изгиб, а C_3 — жесткостью на кручение. Постоянные α^2 и β^2 для большинства реальных опор относительно малы: $\alpha^2 \sim 0,1$, $\beta^2 \sim 0,1$. Если параметры α^2 и β^2 устремить к бесконечности (мягкие опоры), то получим простейшую форму упругой энергии

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{1}{2} C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2. \quad (7.45)$$

В этом случае упругий момент (7.42) принимает вид

$$\mathbf{M}_e(\boldsymbol{\theta}) = -C_1 \boldsymbol{\theta} - (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^\top(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k}. \quad (7.46)$$

Внешний момент \mathbf{M}_{ext} представим в виде суперпозиции потенциальной и непотенциальной частей:

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{Z}^\top(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{\text{ex}}. \quad (7.47)$$

Здесь первое слагаемое, согласно (7.10), описывает потенциальную часть внешнего момента, причем $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$ — потенциал внешнего воздействия.

Второй закон динамики Эйлера можно представить в двух эквивалентных формах. Записав уравнение

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathbf{M}$$

через левую угловую скорость, получим:

$$[\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^\top(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}] \cdot + \mathbf{Z}^\top(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d(\mathcal{U} + \mathbf{V})}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{M}_{\text{ex}}. \quad (7.48)$$

Дополнив это уравнение левым уравнением Пуассона (2.145)

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad (7.49)$$

придем к общей модели твердотельного осциллятора. С использованием правой угловой скорости данная модель описывается уравнением динамики

$$\Theta \cdot \dot{\Omega} + \Omega \times \Theta \cdot \Omega + \mathbf{Z}(\theta) \cdot \frac{d(\mathbf{U} + \mathbf{V})}{d\theta} = \mathbf{P}^T(\theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}} \quad (7.50)$$

в совокупности с правым уравнением Пуассона (2.146)

$$\dot{\theta} = \Omega + \frac{1}{2}\theta \times \Omega + \frac{1-g}{\theta^2}\theta \times (\theta \times \Omega), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (7.51)$$

При выводе уравнения (7.50) использовались уравнения (7.36), (7.38), (7.47) и тождество

$$(\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \Omega)' = \mathbf{P} \cdot (\Theta \cdot \dot{\Omega} + \Omega \times \Theta \cdot \Omega).$$

Итак, предложена общая модель твердотельного осциллятора. Математическая формулировка задачи представлена уравнениями (7.48), (7.49) или равносильными им уравнениями (7.50), (7.51). Следует отметить, что модель твердотельного осциллятора представлена в терминах естественных переменных: вектора поворота и вектора угловой скорости. В частности, с использованием вектора поворота введен в рассмотрение потенциальный момент. Важное достоинство представленных выше уравнений состоит в том, что они содержат только первые производные неизвестных векторов. Поэтому для их решения можно использовать стандартные методы численного анализа.

При изучении свойств твердотельного осциллятора внешний момент можно считать равным нулю: $\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{0}$. В этом случае уравнения динамики (7.48) и (7.50) принимают вид

$$[\mathbf{P}(\theta) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(\theta) \cdot \omega]' + \mathbf{Z}^T(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\theta} = \mathbf{0}, \quad (7.52)$$

$$\Theta \cdot \dot{\Omega} + \Omega \times \Theta \cdot \Omega + \mathbf{Z}(\theta) \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\theta} = \mathbf{0}. \quad (7.53)$$

В такой форме модель твердотельного осциллятора имеет множество важных технических приложений. Эта модель будет особенно полезна при исследовании микромасштабных явлений на основе принципов классической механики. Например, в [60] показано, что хорошо известные уравнения Клейна–Гордона и Шредингера могут быть выведены путем применения этой модели к среде лорда Кельвина⁷.

⁷ Вывод уравнений Клейна–Гордона и Шредингера путем применения модели твердотельного осциллятора к среде лорда Кельвина изложен в разделе 12.4. (Примеч. ред.)

7.5. Простейшая модель твердотельного осциллятора

Рассмотрим простейшую задачу о движении твердого тела с шаровым тензором инерции на изотропной упругой опоре:

$$\Theta = \Theta \mathbf{E}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta^2), \quad \frac{d}{d\theta} \mathbf{u} = 2 \frac{d\mathbf{u}(\theta^2)}{d(\theta^2)} \boldsymbol{\theta} = C(\theta^2) \boldsymbol{\theta}. \quad (7.54)$$

Кроме того, введем момент вязкого трения:

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = -b\boldsymbol{\omega}, \quad b = \text{const} \geq 0. \quad (7.55)$$

В этом случае основные уравнения (7.50), (7.51) примут вид

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\boldsymbol{\Omega}} + b\boldsymbol{\Omega} + C(\theta^2) \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Умножив первое уравнение (7.56) на тензор $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ слева, получим

$$\Theta \dot{\boldsymbol{\omega}} + b\boldsymbol{\omega} + C(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}. \quad (7.57)$$

При выводе уравнения (7.57) учтено тождество

$$\mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} = (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot - \dot{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} - (\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Уравнение (7.57) эквивалентно первому уравнению (7.56). Однако, далее будет показано, что совместное решение этих уравнений позволяет получить нетривиальный результат.

Очевидно, что несмотря на принятые упрощения, уравнения движения достаточно сложны. В случае плоских колебаний система уравнений упрощается. Действительно, второе уравнение (7.56) удовлетворяется, если вектор поворота и угловая скорость связаны соотношением

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}.$$

Тогда первое уравнение (7.56) приводится к виду

$$\Theta \ddot{\boldsymbol{\theta}} + b\dot{\boldsymbol{\theta}} + C(\theta^2) \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}. \quad (7.58)$$

При этом начальные условия для уравнения (7.58) выглядят так:

$$\boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\Omega}(0) = \boldsymbol{\Omega}_0, \quad \boldsymbol{\theta}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}.$$

Эту задачу можно исследовать без каких-либо затруднений. Далее обсудим решение системы уравнений (7.56) в более общем случае.

7.5.1. Классический подход, основанный на углах Эйлера

Попробуем исследовать систему (7.56) воспользовавшись системой углов Эйлера. Тензор поворота можно представить в форме (2.61):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\theta) &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \\ &= \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}') \cdot \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{p}') \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (7.59)$$

где

$$\beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}' = 0. \quad (7.60)$$

Левая угловая скорость определяется выражением

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \right) \mathbf{k} + \dot{\vartheta} \mathbf{p}' + \dot{\varphi} \sin \vartheta \mathbf{p}' \times \mathbf{k}, \quad (7.61)$$

полученным с помощью формул (2.175), (2.176). Подставив выражения (2.76), (7.59), (7.61) в уравнение (7.57), получим

$$\begin{aligned} \Theta \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \right)' + b \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \right) + \frac{C(\theta^2) \theta}{2 \sin \theta} \sin \beta (1 + \cos \vartheta) &= 0, \\ \Theta \left(\ddot{\vartheta} + \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta \right) + b \dot{\vartheta} + \frac{C(\theta^2) \theta}{2 \sin \theta} \sin \vartheta (1 + \cos \beta) &= 0, \\ \Theta \left((\dot{\varphi} \sin \vartheta)' - \dot{\psi} \dot{\vartheta} \right) + b \dot{\varphi} \sin \vartheta + \frac{C(\theta^2) \theta}{2 \sin \theta} \sin \beta \sin \vartheta &= 0. \end{aligned} \quad (7.62)$$

В дополнение к этой системе с помощью формул (2.75) и (7.60) получим уравнение связи:

$$1 + 2 \cos \theta = \cos \vartheta + \cos \beta + \cos \vartheta \cos \beta. \quad (7.63)$$

Заметим, что не так легко найти общее решение уравнений (7.62). Показательно, что при выводе (7.62) мы воспользовались априорным представлением для тензора поворота (7.59). Оно допустимо, равно как совершенно правильной является система (7.62), (7.63). Можно было бы воспользоваться какой-либо другой системой углов, но неизменным остался бы априорный характер выбора представления для тензора поворота. Между тем этот выбор является чрезвычайно важным. На самом деле в каждой задаче тензор поворота должен представляться только в одной форме, если мы хотим получить обозримое решение. Это единственное представление должно не угадываться, а определяться в процессе решения задачи. Именно это обстоятельство подчеркивалось в шестой главе. Там выбор представления для тензора поворота

определялся строением интеграла энергии. Для рассматриваемой нами системы (7.56) интеграла энергии нет. Однако, существуют интегралы другого типа.

7.5.2. Подход, основанный на использовании вектора поворота

Покажем, как интегрируется система (7.56). Для этого воспользуемся уравнением (7.57), которое, как отмечалось выше, эквивалентно первому уравнению (7.56). Из первого уравнения (7.56) и уравнения (7.57) следует

$$\Theta (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})' + \mathbf{b} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \exp\left(-\frac{\mathbf{b}t}{\Theta}\right), \quad (7.64)$$

где $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\Omega}_0$ — начальные угловые скорости. Выражение (7.64) содержит три интеграла. Теперь нужно рассмотреть два случая⁸:

$$\text{a) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{0}, \quad \text{b) } \boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0 = |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0| \mathbf{e} \neq \mathbf{0}.$$

В первом случае решение элементарно, поскольку мы имеем дело с плоскими колебаниями осциллятора. Действительно, в первом случае из (7.64) следует, что

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}.$$

Последний факт легко доказывается⁹ с помощью соотношений (2.145) и (2.146). Этот результат идентичен случаю (7.58).

Более интересен для исследования случай **b)**. Воспользовавшись уравнениями (2.150), (2.151), выпишем кинематические уравнения, с помощью которых производная $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ выражается через левую $\boldsymbol{\omega}$ и правую $\boldsymbol{\Omega}$ угловые скорости:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}).$$

Из последнего равенства получаем тождество

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}). \quad (7.65)$$

⁸ Формула, приведенная в случае b) вводит в рассмотрение единичный вектор \mathbf{e} , определяющий направление разности векторов $\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0$. На использовании этого единичного вектора основан предлагаемый метод решения задачи. Если векторы $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\Omega}_0$ равны, то такой единичный вектор \mathbf{e} ввести невозможно. Поэтому приходится отдельно рассматривать случай a). (*Примеч. ред.*)

⁹ Правая и левая угловые скорости совпадают только в случае вращения вокруг фиксированной оси. Но в этом случае вектор поворота направлен по оси вращения, т. е. направления вектора поворота и угловых скоростей совпадают. (*Примеч. ред.*)

Раскрывая здесь двойное векторное произведение, получаем

$$\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})) = \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta} \cdot (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) - \theta^2 (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}).$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, так как

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\theta}.$$

С учетом сказанного равенство (7.65) переписывается в виде

$$g(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}).$$

Принимая во внимание интеграл (7.64), получаем

$$g(\boldsymbol{\theta}) \exp\left(-\frac{bt}{\Theta}\right) (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}).$$

Далее, воспользовавшись (2.136), (2.137) и (2.144), можно вывести тождество

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}},$$

с учетом которого приведенное выше соотношение переписывается в форме

$$\frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) \exp\left(-\frac{bt}{\Theta}\right). \quad (7.66)$$

Из уравнения (7.66) следует еще один интеграл:

$$\boldsymbol{\theta}(t) \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta}(t) \cdot \mathbf{e} = 0, \quad (7.67)$$

где направление единичного вектора \mathbf{e} определяется формулой

$$\mathbf{e} = (\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0) / |\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}_0|.$$

Итак, получили важный вывод о том, что вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ лежит в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{e} . Любой вектор, в том числе и вектор поворота $\boldsymbol{\theta}(t)$, лежащий в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{e} , можно представить в виде

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \theta(t) \mathbf{Q}(\psi(t)\mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\theta}_0/\theta_0, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \psi(0) = 0. \quad (7.68)$$

Из равенства (7.68) получаем

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\dot{\theta}(t)}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \dot{\psi} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}.$$

Умножая обе части этого равенства векторно на вектор $\boldsymbol{\theta}$, получаем

$$\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \theta^2 \mathbf{e}. \quad (7.69)$$

Подставляя соотношение (7.69) в уравнение (7.66), с учетом начальных условий получаем

$$\dot{\psi} = \frac{(1 - \cos \theta_0) \dot{\psi}_0}{1 - \cos \theta(t)} \exp\left(-\frac{bt}{\Theta}\right), \quad \dot{\psi}_0 > 0. \quad (7.70)$$

Таким образом, если известен угол поворота $\boldsymbol{\theta}(t)$, то угол прецессии можно найти, проинтегрировав выражение (7.70). Получим уравнение для нахождения угла поворота $\boldsymbol{\theta}$. Для этого вычислим правую угловую скорость, воспользовавшись формулами (2.137), (2.146) и (7.68):

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\dot{\theta}}{\theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\sin \theta}{\theta} \dot{\psi} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta} - (1 - \cos \theta) \dot{\psi} \mathbf{e}. \quad (7.71)$$

Подставив выражение (7.71) в первое уравнение (7.56) и спроецировав получившееся уравнение на вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, вектор \mathbf{e} и вектор $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$, получим три скалярных уравнения. При этом проекции на \mathbf{e} и $\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}$ являются тождествами в силу (7.70). Проекция на вектор $\boldsymbol{\theta}$ дает уравнение для угла поворота θ :

$$\Theta \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + \left[C(\theta^2) - \Theta \frac{\sin \theta}{\theta} \left(\frac{1 - \cos \theta_0}{1 - \cos \theta} \right)^2 \dot{\psi}_0^2 \exp\left(-\frac{2bt}{\Theta}\right) \right] \theta = 0. \quad (7.72)$$

Если $\dot{\psi}_0 = 0$, из уравнения (7.72) находятся плоские движения осциллятора. В общем случае уравнение (7.72) можно исследовать с помощью стандартных методов нелинейной механики. Заметим, что даже при малых θ уравнение (7.72) является нелинейным:

$$\Theta \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + \left[C(0) - \Theta \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^4 \dot{\psi}_0^2 \exp\left(-\frac{2bt}{\Theta}\right) \right] \theta = 0. \quad (7.73)$$

В отличие от уравнения (7.72), исходную систему уравнений (7.56) при малых поворотах, т. е. при $|\boldsymbol{\theta}| \ll 1$, можно линеаризовать. В этом проявляется одно из преимуществ использования вектора поворота, а не углов Эйлера. В результате линеаризации получается следующее уравнение относительно вектора поворота:

$$\Theta \ddot{\boldsymbol{\theta}} + b \dot{\boldsymbol{\theta}} + C(0) \boldsymbol{\theta} = 0. \quad (7.74)$$

Покажем, что нелинейное уравнение (7.73) следует из уравнения (7.74), если принимается во внимание соотношение $\theta = |\boldsymbol{\Theta}|$. Воспользовавшись представлением вектора поворота в виде $\boldsymbol{\Theta} = \theta \mathbf{n}$, где $|\mathbf{n}| = 1$, имеем

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \dot{\theta} \mathbf{n} + \theta \dot{\mathbf{n}}, \quad \ddot{\boldsymbol{\Theta}} = \ddot{\theta} \mathbf{n} + 2\dot{\theta} \dot{\mathbf{n}} + \theta \ddot{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0, \quad \ddot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = -\dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}}. \quad (7.75)$$

Подстановка (7.75) в уравнение (7.74) дает

$$\left(\Theta \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + C\theta \right) \mathbf{n} + \left(2\Theta \dot{\theta} + b\theta \right) \dot{\mathbf{n}} + \Theta \theta \ddot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}.$$

Умножая это уравнение скалярно на \mathbf{n} и $\dot{\mathbf{n}}$, получаем

$$\Theta \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + (C - \Theta \chi) \theta = 0, \quad \frac{1}{2} \Theta \theta \dot{\chi} + \left(2\Theta \dot{\theta} + b\theta \right) \chi = 0, \quad \chi = \dot{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{n}}. \quad (7.76)$$

Начальные условия имеют вид

$$\chi(0) = \chi_0, \quad \theta(0) = \theta_0.$$

Интегрируя второе уравнение системы (7.76) с учетом начальных условий, получаем

$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} + 4\frac{\dot{\theta}}{\theta} + 2\frac{b}{\Theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi \theta^4 = \chi_0 \theta_0^4 \exp\left(-\frac{2b\theta}{\Theta}\right).$$

Подставляя выражение для χ в первое уравнение (7.74), приходим к (7.73). Таким образом, решение линейного уравнения (7.74) относительно вектора $\boldsymbol{\Theta}$ определяет точное решение нелинейного уравнения (7.73) относительно скалярной величины θ . Подобная ситуация встречается и в ряде других случаев.

Если трение отсутствует, т. е. $b = 0$, то уравнения (7.70), (7.72) принимают вид

$$\dot{\psi} = \frac{(1 - \cos \theta_0) \dot{\psi}_0}{1 - \cos \theta}, \quad \Theta \left(\ddot{\theta} - \sin \theta \frac{(1 - \cos \theta_0)^2}{(1 - \cos \theta)^2} \dot{\psi}_0^2 \right) + C (\theta^2) \theta = 0. \quad (7.77)$$

Хотя второе уравнение (7.77) имеет сложный вид, оно интегрируется в квадратурах стандартным образом. Кроме того, система (7.77) допускает частное решение:

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const}, \quad \dot{\psi}^2 = \frac{C (\theta_0^2) \theta_0}{\Theta \sin \theta_0}. \quad (7.78)$$

Это решение называется регулярной прецессией. Регулярная прецессия относится к случаю, когда ось поворота и ось вращения тела взаимно ортогональны:

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (7.79)$$

7.5.3. Сравнение двух методов решения задачи

Чтобы подчеркнуть различие в методах решения обсуждаемой задачи, напомним сначала суть классического подхода. При классическом подходе обычно работают с правыми угловыми скоростями. Кроме того, используют какую-либо систему параметров для представления тензора поворота. Наиболее популярной является система углов Эйлера (7.59). Заметим, что для углов ψ , ϑ , φ и скоростей $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ можно использовать произвольные начальные условия, но только в том случае, если удастся найти общее решение уравнений (7.62). Возможно ли это — неизвестно.

Согласно альтернативному подходу представление тензора поворота не выбирается заранее, а определяется в ходе решения задачи с учетом ее специфических особенностей. Метод решения задачи о движении твердотельного осциллятора с шаровым тензором инерции на изотропном упругом основании, представленный в подразделе 7.5.2, сводится к доказательству того факта, что вектор поворота в данной задаче может быть представлен в виде (7.68), где единичные векторы \mathbf{e} и \mathbf{m} имеют весьма специальный вид и находятся в процессе решения задачи. Выражением (7.68) для вектора поворота обусловлена допустимость представления тензора поворота в специальной форме

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}[\boldsymbol{\theta} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi} \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}] = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi} \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\psi} \mathbf{e}), \quad (7.80)$$

содержащей только два угла $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\psi}$. Разумеется, представление тензора поворота (7.80) нельзя использовать для описания произвольного движения твердого тела, но оно очень удобно для описания того движения, которое совершает твердотельный осциллятор с шаровым тензором инерции на изотропном упругом основании.

Решение, найденное в подразделе 7.5.2 и представленное тензором поворота (7.80), содержится в общем решении уравнений, полученных при классическом подходе. Чтобы увидеть это, примем ограничение $\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{\psi}$, т. е. $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ в представлении (7.59), в результате чего $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\theta}$. В этом случае система (7.62), (7.63) приводится к виду

$$\Theta \left(\dot{\psi} (1 - \cos \theta) \right)' + b \dot{\psi} (1 - \cos \theta) = 0,$$

$$\Theta \left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin \theta \right) + b \dot{\theta} + C (\theta^2) \theta = 0,$$

$$\Theta \left(\left[\dot{\psi} \sin \theta \right]' + \dot{\psi} \dot{\theta} \right) + b \dot{\psi} \sin \theta = 0.$$

Первое уравнение этой системы дает интеграл (7.70). С учетом первого уравнения третье уравнение выполняется тождественно. Наконец, второе уравнение совпадает с уравнением (7.72). Таким образом, система (7.62) имеет частное решение, совпадающее с решением, построенным с использованием вектора поворота. Однако при использовании представления (7.59) это решение не позволяет удовлетворить всем начальным условиям, поскольку векторы \mathbf{k} и \mathbf{p} имеют наперед заданные направления и $\mathbf{k} \neq \mathbf{e}$.

7.5.4. Регулярная прецессия твердотельного осциллятора

Рассмотрим тело с трансверсально-изотропным тензором инерции. Упругое основание также считается трансверсально-изотропным. Движение осциллятора описывается уравнениями (7.48), (7.49) и выражением (7.42) для упругого момента. Таким образом, постановка задачи сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} [\Theta_1 \boldsymbol{\omega} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{k}'] \cdot + \mathbf{C} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D} \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}), \end{aligned} \quad (7.81)$$

где функции \mathbf{C} и \mathbf{D} определяются формулами (7.43). Допустим, что частное решение системы (7.81) представляется в форме

$$\boldsymbol{\theta} = \vartheta \mathbf{p}', \quad \mathbf{p}' = \mathbf{Q} (\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q} (\vartheta \mathbf{p}'). \quad (7.82)$$

Движение (7.82) называется регулярной прецессией, если

$$\vartheta = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta}. \quad (7.83)$$

В соответствии с формулами (2.39), (2.136), левая угловая скорость имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2 \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}.$$

С учетом (7.83) последняя формула принимает вид

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \left[(1 - \cos \theta) \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \right) + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} \right].$$

Принимая во внимание соотношения (7.82) и тождество

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1, \quad (7.84)$$

справедливое для любого ортогонального тензора \mathbf{Q} и произвольной пары векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , окончательно получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\psi} [(1 - \cos \vartheta) \mathbf{k} + \sin \vartheta \mathbf{k} \times \mathbf{p}] = \text{const.} \quad (7.85)$$

Как видно из (7.85), вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ представляет собой прецессию вектора $\boldsymbol{\omega}_0$ вокруг оси \mathbf{k} , ортогональной вектору поворота

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0.$$

Также примем ограничение

$$D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})|_{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0} = \left. \frac{\partial U(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \right|_{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0} = 0,$$

которое удовлетворяется для большинства видов упругой энергии. Тогда, из первого уравнения (7.81) для предполагаемого решения получаем

$$\dot{\psi}^2 = \frac{C(\vartheta^2, 0) \vartheta}{\sin \vartheta [\Theta_3 (1 - \cos \vartheta) + \Theta_1 \cos \vartheta]}. \quad (7.86)$$

Отметим, что при $\Theta_1 = \Theta_3 = \Theta$ выражение (7.86) переходит в (7.78).

Перейдем к исследованию устойчивости регулярной прецессии твердотельного осциллятора, т. е. устойчивости (7.82)–(7.86). В общем это довольно трудоемкий процесс. В целях его упрощения примем

$$\Theta = \Theta_1 = \Theta_3, \quad D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad C(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \text{const.} \quad (7.87)$$

Это означает, что тензор инерции и упругое основание считаются изотропными. При этих предположениях уравнения движения (7.81) в вариациях принимают вид

$$\Theta \dot{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon + C \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_\varepsilon - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon + \frac{1 - g_\varepsilon}{\theta_\varepsilon^2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times (\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon). \quad (7.88)$$

Возмущенные величины $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ и $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ можно было бы представить в виде

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (7.89)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\theta}$ определяются уравнениями (7.82)–(7.86). Однако такой выбор приводит к уравнениям с переменными коэффициентами для $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\varphi}$. Поэтому лучше представить функции $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ и $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$ в следующей форме:

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot (\vartheta \mathbf{p} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}), \quad (7.90)$$

где функция ψ определяется формулой (7.86). С использованием тождества (7.84), нетрудно вычислить:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_\varepsilon &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \left(\dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \varepsilon (\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\eta}) \right), \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \left(\dot{\psi} \vartheta \mathbf{k} \times \mathbf{p} + \varepsilon (\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi}) \right).\end{aligned}$$

С учетом этих выражений, обозначений (7.27) и уравнений (7.88), имеем

$$\begin{aligned}\Theta(\dot{\boldsymbol{\omega}})^* + \mathbf{c}\boldsymbol{\theta}^* &= \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\theta}^* = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\varphi}, \\ (\dot{\boldsymbol{\omega}})^* &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\eta} \right), \\ (\dot{\boldsymbol{\theta}})^* &= \boldsymbol{\omega}^* - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}^* \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}^*) + \\ &+ \left(\frac{1-g}{\theta^2} \right)^* [\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega})] + \left(\frac{1-g}{\theta^2} \right) [\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega})]^*.\end{aligned}\tag{7.91}$$

С использованием тождества (7.84) из уравнений (7.91) получим следующие уравнения для вариаций $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\Theta \left(\dot{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\eta} \right) + \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\psi} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi} &= \frac{\vartheta \sin \vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} \boldsymbol{\eta} - \frac{\vartheta - \sin \vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \boldsymbol{\omega}_0 - \\ - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}_0 - \frac{1}{2} \vartheta \mathbf{p} \times \boldsymbol{\eta} &+ \frac{2(1 - \cos \vartheta) - \vartheta \sin \vartheta}{2\vartheta(1 - \cos \vartheta)} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\omega}_0 + \vartheta \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta}) \mathbf{p},\end{aligned}$$

где $\vartheta = \text{const}$, а $\dot{\psi}$ определяется формулой (7.86). Дальнейшее исследование этой системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами осуществляется стандартными методами. Наша цель заключалась в том, чтобы показать вывод уравнений в вариациях¹⁰.

7.6. Равновесные положения тела при действии крутящего момента

Далее исследуются равновесные положения тела для некоторых типов внешнего момента. Рассматриваются мертвый момент, касательный момент, полукасательный момент и два вида консервативного момента. Кроме того, обсуждается случай отсутствия внешнего момента.

¹⁰ Исследование устойчивости регулярной прецессии для более сложной модели проведено в подразделе 8.3.3. (*Примеч. ред.*)

7.6.1. Натуральная равновесная конфигурация

При натуральной равновесной конфигурации внешний момент считается равным нулю:

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}.$$

В этом случае уравнение (7.48) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad 2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (7.92)$$

Согласно условию (7.40), имеем

$$\forall \theta^2 : \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} > 0. \quad (7.93)$$

Это одно из необходимых условий, гарантирующих выполнение неравенства (7.40). Тогда из (7.92) видим, что $\boldsymbol{\theta}$ и \mathbf{k} коллинеарны. В этом случае (7.92) равносильно скалярному уравнению

$$2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0. \quad (7.94)$$

Дополнительно к условию (7.40) примем, что выполняется следующее ограничение на энергию¹¹:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = F(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad F(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) + 2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} > 0. \quad (7.95)$$

При выполнении (7.93) и (7.95) уравнение (7.94) имеет единственное решение $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0$, т. е. $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$.

Всюду в дальнейшем условия (7.40) и (7.95) будут предполагаться выполненными. Например, эти условия выполнены для энергии вида (7.44). При использовании (7.44) подразумевается, что начальные условия удовлетворяют неравенствам

$$\theta_0^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_0)^2 < \alpha^2, \quad (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_0)^2 < \beta^2.$$

Тогда очевидно, что при всех t будут выполнены неравенства

$$\theta^2(t) \leq \alpha^2, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}(t) \leq \beta^2.$$

При стремлении α^2 и β^2 к бесконечности, выражение для энергии (7.44) переходит в форму (7.45), которая будет использоваться в дальнейшем.

¹¹ В линейном приближении условия (7.95) означают положительность жесткости на поворот вокруг вектора \mathbf{k} . В случае нелинейной теории трудно определить физический смысл каких-либо производных от энергии. (*Примеч. ред.*)

7.6.2. Мертвый момент

Пусть на тело действует внешний момент

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = M\mathbf{k}. \quad (7.96)$$

Уравнение (7.48) принимает вид

$$2\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\theta^2)}\boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})}\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = M\mathbf{k}. \quad (7.97)$$

С учетом представления (2.139) имеем

$$\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\theta^2}[(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{k})\boldsymbol{\theta} - \theta^2\mathbf{k}]. \quad (7.98)$$

Умножая обе части (7.97) векторно на \mathbf{k} и учитывая (7.98), получаем

$$\left[2\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\theta^2)} + \frac{(1-g)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})}{\theta^2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \right] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} [\boldsymbol{\theta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{k}] = \mathbf{0}. \quad (7.99)$$

Покажем, что должно выполняться равенство

$$\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{k}. \quad (7.100)$$

Допустим, что это не так. Тогда из (7.99) следует два равенства

$$2\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\theta^2)} + \frac{(1-g)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})}{\theta^2} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = 0,$$

которые невозможны в силу (7.93). Следовательно, условие (7.100) должно быть выполнено. Подставляя (7.100) в (7.97), получаем

$$2\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\theta^2)} \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = M. \quad (7.101)$$

В силу неравенства (7.95) это уравнение имеет единственное решение. Если принять (7.45), то получим

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = \frac{M}{d}, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{M\mathbf{k}}{d}. \quad (7.102)$$

7.6.3. Касательный (следящий) момент

Пусть внешний момент задан выражением

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = M \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad (7.103)$$

т. е. этот момент стремится повернуть тело вокруг оси $\mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$. В этом случае вместо уравнения (7.97) имеем

$$2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = M \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}. \quad (7.104)$$

Воспользовавшись тождествами $\mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\theta} = \theta$ и $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}^T$, уравнение (7.104) можно привести к виду

$$2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \theta + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{k} = M \mathbf{k}. \quad (7.105)$$

Проведя рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в случае мертвого момента, можно показать, что $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k}$. В результате приходим к уравнению (7.101) или, в частности, к соотношениям (7.102).

7.6.4. Полукасательный момент

Полукасательным будем называть крутящий момент, предложенный Е. Л. Николаи [61]:

$$\mathbf{M}_{\text{ext}} = \mathbf{M}_{\text{ex}} = \frac{M(\mathbf{k} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})}{\sqrt{2(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})}}. \quad (7.106)$$

В случае действия полукасательного момента (7.106) уравнение статики принимает вид

$$2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} = \frac{M(\mathbf{k} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})}{\sqrt{2(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k})}}. \quad (7.107)$$

В общем случае уравнение (7.107) имеет несчетное множество решений, но практический интерес среди них представляет только решение (7.100)–(7.102). Для энергии (7.44) это решение единственно.

Замечание. Моменты (7.96), (7.103) и (7.106) были введены в рассмотрение Е. Л. Николаи [61]. Легко убедиться, что все они неконсервативны. Г. Циглер [62] ввел в употребление консервативный полукасательный момент, но последний существенно отличается от момента (7.106) тем, что его модуль не остается постоянным.

Рассмотрим еще два типа внешних моментов, которые, в отличие от уже рассмотренных, являются консервативными.

7.6.5. Консервативный момент 1

Сначала рассмотрим потенциал, который не является аналитическим. В приложениях случаи неаналитических потенциалов встречаются, хотя и относительно редко. Для данной работы потенциал такого рода представляет определенный интерес, поскольку внешний момент, порождаемый этим потенциалом и потому являющийся консервативным, ведет к так называемому парадоксу Николаи.

Пусть потенциал внешнего воздействия $V(\boldsymbol{\theta})$ задан выражением

$$V = -\frac{M\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}}}{|\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}|}, \quad M\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0. \quad (7.108)$$

Последнее неравенство исключает случай “чистого изгиба без кручения”, который нас не интересует¹². Далее рассматривается случай $M > 0$, так как случай $M < 0$ по существу приводит к аналогичным результатам. При отсутствии внешнего непотенциального момента \mathbf{M}_{ex} в случае статики уравнение (7.48) принимает вид

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)}\boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})}\mathbf{k} = \frac{M\boldsymbol{\theta}}{\sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}}}. \quad (7.109)$$

Здесь сразу видим, что при выполнении неравенства $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0$, вектор поворота направлен по \mathbf{k} и (7.109) принимает вид

$$2\frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)}\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} = M.$$

С учетом (7.95) это уравнение имеет единственное решение. Если принять энергию (7.45), то решение определяется формулами (7.102).

7.6.6. Консервативный момент 2

Зададим внешний потенциал $V(\boldsymbol{\theta})$ в виде

$$V = -M\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\theta}} = -M\mathbf{k}. \quad (7.110)$$

В этом случае уравнение статики записывается в форме

$$\frac{\partial(U + V)}{\partial\boldsymbol{\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\frac{\partial U}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)}\boldsymbol{\theta} + \frac{\partial U}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})}\mathbf{k} = M\mathbf{k}. \quad (7.111)$$

¹² Анализ положений равновесия и их устойчивости при внешнем воздействии с потенциалом (7.108) без ограничения $M\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} > 0$ содержится в приложении С, написанном В. А. Кузькиным и А. М. Кривцовым. (*Примеч. ред.*)

Отсюда следует, что вектор поворота направлен по \mathbf{k} , т. е. имеем чистое кручение, а решение уравнения (7.111) единственно. Для энергии (7.45) оно определяется формулами (7.102).

Итак, выше рассмотрены пять случаев задания внешних моментов. Всем им отвечает одно и то же положение равновесия: тело в упругой опоре закручено вокруг собственной оси. В положении равновесия все рассмотренные моменты неразличимы между собой. Понятно, что положение равновесия реализуется в действительности только тогда, когда оно устойчиво относительно малых возмущений. При наложении малых возмущений на положение равновесия приходится рассматривать уравнения динамики, а при движениях тела все рассмотренные выше моменты ведут себя по-разному. Поэтому суждение об устойчивости одного и того же положения равновесия может быть получено только в результате анализа каждого случая в отдельности.

7.7. Устойчивость в линейном приближении. Парадокс Николаи

Одним из наиболее употребительных методов исследования устойчивости является подход, основанный на наложении малых колебаний на равновесную конфигурацию, т. е. на анализе так называемых уравнений в вариациях. Известно [63], что такой подход не всегда приводит к правильным результатам, но, тем не менее, он широко используется в силу своей относительной простоты и хорошего соответствия здравому смыслу. Воспользуемся этим методом для анализа классической задачи, которая впервые была исследована Е. Л. Николаи [61], а позднее исследовалась многими авторами — см., например [62, 64], где можно найти множество ссылок на литературу. Речь идет об исследовании устойчивости равновесной конфигурации твердого тела на упругом основании при действии крутящего момента.

Тензор инерции тела считается трансверсально-изотропным и определяется выражением (7.32). Внешний момент принимается в одной из форм, рассмотренных в разделе 7.6. Уравнение движения (7.50) и кинематическое соотношение (7.51) записываются так:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}) \mathbf{k} - (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + \\ + \mathbf{C}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{M}_{\text{ext}}(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (7.112)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)},$$

где функции $C(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})$ и $D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})$ определяются выражениями (7.43), а внешний момент $\mathbf{M}_{\text{ext}}(\boldsymbol{\theta})$ либо равен нулю (натуральное состояние), либо определяется одним из выражений (7.96), (7.103), (7.106), либо соответствует одному из потенциалов (7.108), (7.110). Как было показано в разделе 7.6, при действии любого из перечисленных моментов существует равновесное решение системы уравнений (7.112):

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{k}, \quad \theta = \text{const}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}. \quad (7.113)$$

Подставляя (7.113) в систему (7.112), получаем уравнение

$$C(\theta^2, \theta) \theta + D(\theta^2, \theta) = M. \quad (7.114)$$

Заметим, что если упругая энергия имеет вид (7.45), уравнение (7.114) становится линейным:

$$C(\theta^2, \theta) = C_1, \quad D(\theta^2, \theta) = (C_3 - C_1) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta = M\mathbf{k}/C_3. \quad (7.115)$$

Для исследования устойчивости решения (7.115) мы воспользуемся методом наложения малых возмущений на равновесное состояние. Рассмотрим возмущенные величины

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \theta_0 \mathbf{k} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\zeta}(t), \quad \theta_0 = M/C_3. \quad (7.116)$$

Далее будет показано, что, воспользовавшись обозначениями

$$\boldsymbol{\zeta} = \xi \mathbf{k} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{k} = 0; \quad \boldsymbol{\varphi} = \gamma \mathbf{k} + \boldsymbol{\psi}, \quad \boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (7.117)$$

возмущенные уравнения (7.112) можно разложить на крутильные и изгибные возмущения.

Возмущенные уравнения (7.112) с учетом обозначений (7.115) принимают вид

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon) \mathbf{k} - (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \\ + C_1 \boldsymbol{\theta}_\varepsilon + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{P}^\top(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{M}_{\text{ext}}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon), \end{aligned} \quad (7.118)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon = \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \frac{1 - g_\varepsilon}{\theta_\varepsilon^2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times (\boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon), \quad g_\varepsilon = \frac{\theta_\varepsilon \sin \theta_\varepsilon}{2(1 - \cos \theta_\varepsilon)}. \quad (7.119)$$

7.7.1. Устойчивость натурального состояния

В этом случае внешний момент отсутствует и $\boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}$. Подстановка выражений (7.116) в уравнения (7.118), (7.119) с учетом невозмущенного решения дает

$$\Theta_1 \dot{\boldsymbol{\zeta}} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{k} + C_1 \boldsymbol{\varphi} + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\zeta}. \quad (7.120)$$

Подставив (7.117) в (7.120) и спроецировав полученные уравнения на вектор \mathbf{k} и на плоскость, ортогональную \mathbf{k} , после исключения переменных $\boldsymbol{\xi}$ и \mathbf{z} приходим к уравнениям

$$\Theta_3 \ddot{\gamma} + C_3 \gamma = 0, \quad \Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + C_1 \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}.$$

Колебательный характер решений этих уравнений очевиден, т. е. отсчетное положение тела есть устойчивое положение равновесия при отсутствии внешних моментов.

7.7.2. Мертвый момент

В этом случае уравнение (7.118) принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon) \mathbf{k} - (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \\ + C_1 \boldsymbol{\theta}_\varepsilon + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k} = \text{MP}^\top(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7.121)$$

Подстановка выражений (7.116) в уравнения (7.119), (7.121) с учетом невозмущенного решения дает

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\zeta}} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{k} + C_1 \boldsymbol{\varphi} + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k} + \\ + M \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_1}{C_3} \right) - \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi} + \\ + M \left[\left(1 - \frac{C_1}{C_3} \right) \frac{1 - g_0}{\theta_0} - \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0} \right] (\boldsymbol{\varphi} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k}) = \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\zeta} + \frac{1}{2} \frac{M}{C_3} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta} - (1 - g_0) (\boldsymbol{\zeta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{k}), \quad g_0 = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)}. \end{aligned} \quad (7.122)$$

Подставляя (7.117) в (7.122) и проецируя полученные уравнения на вектор \mathbf{k} и на плоскость, ортогональную \mathbf{k} , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \Theta_3 \dot{\boldsymbol{\xi}} + C_3 \gamma = 0, \quad \dot{\gamma} = \boldsymbol{\xi}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = g_0 \mathbf{z} + \frac{M}{2C_3} \mathbf{k} \times \mathbf{z}, \\ \Theta_1 \dot{\mathbf{z}} + [g_0 C_1 + (\cos \theta_0 - g_0) C_3] \boldsymbol{\psi} + M \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_1}{C_3} \right) - \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.123)$$

Исключив из этих уравнений ξ и \mathbf{z} , получим

$$\Theta_3 \ddot{\gamma} + C_3 \gamma = 0,$$

$$\Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \left[\left(g_0^2 + \frac{M^2}{4C_3^2} \right) (C_1 - C_3) + g_0 C_3 \right] \boldsymbol{\psi} - \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \quad (7.124)$$

Если $|M|/C_3 \ll 1$, то второе уравнение (7.124) можно переписать в виде

$$\Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \left(C_1 + \frac{(C_1 - 2C_3) M^2}{12C_3^2} \right) \boldsymbol{\psi} - \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \quad (7.125)$$

Принимая во внимание, что вектор $\boldsymbol{\psi}$ ортогонален \mathbf{k} , будем искать частное решение этого уравнения в форме

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{a} \exp(\mathbf{p}t), \quad \mathbf{a} = \text{const}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Для вектора \mathbf{a} получаем следующее уравнение:

$$\left[\left(\Theta_1 \mathbf{p}^2 + C_1 + \frac{(C_1 - 2C_3) M^2}{12C_3^2} \right) (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) - \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \right] \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (7.126)$$

Это уравнение можно представить в форме

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{A} = \lambda \mathbf{E}_* + \mu \mathbf{k} \times \mathbf{E}_*, \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

где

$$\lambda = \Theta_1 \mathbf{p}^2 + C_1 + \frac{(C_1 - 2C_3) M^2}{12C_3^2}, \quad \mu = -\frac{M}{2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \det \mathbf{A} = 0.$$

В таком случае имеет значение только определитель плоской части \mathbf{A} . Его можно определить следующим образом:

$$\text{Det } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \left((\text{tr } \mathbf{A})^2 - \text{tr } \mathbf{A}^2 \right) = \frac{1}{2} (4\lambda^2 - 2\lambda^2 + \mu^2) = \lambda^2 + \mu^2.$$

Таким образом, нетривиальные решения уравнения (7.126) существуют, если

$$\left(\Theta_1 \mathbf{p}^2 + C_1 + \frac{(C_1 - 2C_3) M^2}{12C_3^2} \right)^2 + \frac{M^2}{4} = 0. \quad (7.127)$$

Можно показать, что хотя бы один корень этого уравнения имеет положительную действительную часть, что приводит к возрастанию решения уравнения (7.125), так как полное решение (7.125) имеет вид

$$\psi = \sum_{k=1}^4 \mathbf{a}_k \exp(\mathbf{p}_k t), \quad \mathbf{a}_k = \text{const}, \quad \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{k} = 0,$$

где \mathbf{p}_k — корни характеристического уравнения (7.127); векторы \mathbf{a}_k — решения уравнения (7.126). Таким образом, положение равновесия (7.115) неустойчиво при любом сколь угодно малом мертвом моменте M . Это явление получило название парадокса Николаи [62, 64].

7.7.3. Касательный (следящий) момент

В этом случае уравнение (7.118) принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon) \mathbf{k} - (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \\ + C_1 \boldsymbol{\theta}_\varepsilon + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k} = M \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7.128)$$

Подстановка выражений (7.116) в уравнения (7.119), (7.128) с учетом невозмущенного решения приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\zeta}} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{k} + C_1 \boldsymbol{\varphi} + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k} + \\ + M \left(1 - \frac{C_1}{C_3} \right) \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1 - g_0}{\theta_0} (\boldsymbol{\varphi} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k}) \right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7.129)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\zeta} + \frac{1}{2} \frac{M}{C_3} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta} - (1 - g_0) (\boldsymbol{\zeta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{k}), \quad g_0 = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)}.$$

Подставив (7.117) в (7.129) и спроецировав полученные уравнения на вектор \mathbf{k} и на плоскость, ортогональную \mathbf{k} , придем к уравнениям

$$\begin{aligned} \Theta_3 \dot{\xi} + C_3 \gamma = 0, \quad \dot{\gamma} = \xi, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = g_0 \mathbf{z} + \frac{M}{2C_3} \mathbf{k} \times \mathbf{z}, \\ \Theta_1 \dot{\mathbf{z}} + [g_0 C_1 + (1 - g_0) C_3] \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \left(1 - \frac{C_1}{C_3} \right) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.130)$$

Исключив из этих уравнений ξ и \mathbf{z} , получим

$$\begin{aligned} \Theta_3 \ddot{\gamma} + C_3 \gamma = 0, \\ \Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \left[\left(g_0^2 + \frac{M^2}{4C_3^2} \right) (C_1 - C_3) + g_0 C_3 \right] \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.131)$$

Если $|M|/C_3 \ll 1$, то второе уравнение (7.131) можно привести к виду

$$\Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \left(C_1 + \frac{(C_1 - 2C_3) M^2}{12C_3^2} \right) \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \quad (7.132)$$

Исследование уравнения (7.132), аналогичное проведенному выше исследованию уравнения (7.125), приводит нас к выводу о неустойчивости положения равновесия (7.115) при любом сколь угодно малом касательном моменте M . Сравнивая уравнения (7.125) и (7.132), замечаем, что они различаются только знаком у гироскопического члена. Поэтому при сложении этих уравнений гироскопический член исчезает. Этот факт навел Е. А. Николаи на мысль о введении полукасательного момента.

7.7.4. Полукасательный момент

В случае полукасательного момента уравнение (7.118) принимает вид

$$\begin{aligned} & \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon) \mathbf{k} - (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \\ & + C_1 \boldsymbol{\theta}_\varepsilon + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k} = \frac{M (\mathbf{P}^\top(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k})}{\sqrt{2(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{P}^\top(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k})}}. \end{aligned} \quad (7.133)$$

Подстановка выражений (7.116) в уравнения (7.119), (7.133) с учетом невозмущенного решения приводит к системе

$$\begin{aligned} & \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\zeta}} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{k} + C_1 \boldsymbol{\varphi} + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k} + \\ & + M \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_1}{C_3} \right) - \frac{\sin \theta_0}{2\theta_0} \right] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi} + \\ & + M \left[\left(1 - \frac{C_1}{C_3} \right) \frac{1 - g_0}{\theta_0} - \frac{1 - \cos \theta_0}{2\theta_0} \right] (\boldsymbol{\varphi} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k}) = \mathbf{0}, \\ & \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\zeta} + \frac{1}{2} \frac{M}{C_3} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta} - (1 - g_0) (\boldsymbol{\zeta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{k}), \quad g_0 = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)}. \end{aligned} \quad (7.134)$$

Подставив (7.117) в (7.134) и найдя проекции на вектор \mathbf{k} и на плоскость, ортогональную \mathbf{k} , получим

$$\begin{aligned} & \Theta_3 \dot{\xi} + C_3 \gamma = 0, \quad \dot{\gamma} = \xi, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = g_0 \mathbf{z} + \frac{M}{2C_3} \mathbf{k} \times \mathbf{z}, \\ & \Theta_1 \dot{\boldsymbol{z}} + \left[g_0 C_1 + \left(\frac{1 + \cos \theta_0}{2} - g_0 \right) C_3 \right] \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \left[1 - \frac{C_1}{C_3} - \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \right] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.135)$$

Исключив из этих уравнений ξ и \mathbf{z} , получим

$$\Theta_3 \ddot{\gamma} + C_3 \gamma = 0, \quad \Theta_1 \ddot{\psi} + \left[\left(g_0^2 + \frac{M^2}{4C_3^2} \right) (C_1 - C_3) + g_0 C_3 \right] \psi = 0. \quad (7.136)$$

При $|M|/C_3 \ll 1$ второе (7.136) можно привести к виду

$$\Theta_1 \ddot{\psi} + \left(C_1 + \frac{(C_1 - 2C_3) M^2}{12C_3^2} \right) \psi = 0. \quad (7.137)$$

В случае полукасательного момента анализ устойчивости сводится к отысканию наименьших по модулю значений M , которые нарушают неравенство

$$\left(g_0^2 + \frac{M^2}{4C_3^2} \right) (C_1 - C_3) + g_0 C_3 > 0. \quad (7.138)$$

Заметим, что согласно (7.138) потеря устойчивости возможна при конечных значениях M . При малых M вместо (7.138) имеем неравенство

$$C_1 + \frac{(C_1 - 2C_3) M^2}{12C_3^2} > 0,$$

которое, очевидно, выполняется, а следовательно положение равновесия устойчиво. Структура уравнения (7.136) дала основание думать [64], что полукасательный момент Николай консервативен¹³.

7.7.5. Консервативный момент 1

В случае консервативного момента, соответствующего потенциалу (7.108), уравнение (7.118) при $M > 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\Omega}_\varepsilon + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{k} - (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \Omega_\varepsilon) \mathbf{k} \times \Omega_\varepsilon + \\ + C_1 \theta_\varepsilon + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \theta_\varepsilon) \mathbf{Z}(\theta_\varepsilon) \cdot \mathbf{k} = \frac{M \theta_\varepsilon}{\sqrt{\theta_\varepsilon \cdot \theta_\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (7.139)$$

Подставляя выражения (7.116) в уравнения (7.119), (7.139), с учетом невозмущенного решения получаем

$$\begin{aligned} \Theta_1 \dot{\zeta} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\zeta}) \mathbf{k} + C_1 \varphi + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \varphi) \mathbf{k} + \\ + M \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_1}{C_3} \right) \mathbf{k} \times \varphi - \frac{1}{\theta_0} \left(g_0 + (1 - g_0) \frac{C_1}{C_3} \right) (\varphi - (\mathbf{k} \cdot \varphi) \mathbf{k}) \right] = 0, \quad (7.140) \\ \dot{\varphi} = \zeta + \frac{1}{2} \frac{M}{C_3} \mathbf{k} \times \zeta - (1 - g_0) (\zeta - (\mathbf{k} \cdot \zeta) \mathbf{k}), \quad g_0 = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)}. \end{aligned}$$

¹³ Вопрос о консервативности или неконсервативности полукасательного момента не очевиден и требует отдельного исследования. (Примеч. ред.)

Подставляя (7.117) в (7.140) и проецируя на вектор \mathbf{k} и на плоскость, ортогональную \mathbf{k} , получаем:

$$\begin{aligned}\Theta_3 \dot{\xi} + C_3 \gamma = 0, \quad \dot{\gamma} = \xi, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = g_0 \mathbf{z} + \frac{M}{2C_3} \mathbf{k} \times \mathbf{z}, \\ \Theta_1 \dot{\mathbf{z}} + g_0(C_1 - C_3) \boldsymbol{\psi} + \frac{M}{2} \left(1 - \frac{C_1}{C_3}\right) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{7.141}$$

Исключая ξ и \mathbf{z} , имеем

$$\Theta_3 \ddot{\gamma} + C_3 \gamma = 0, \quad \Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + (C_1 - C_3) \left(g_0^2 + \frac{M^2}{4C_3^2}\right) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}.\tag{7.142}$$

В этом случае при $C_1 - C_3 > 0$ имеем устойчивость, а при $C_1 - C_3 \leq 0$ имеем неустойчивость при любых значениях внешнего момента. Поскольку случай $C_1 - C_3 \leq 0$ вполне реален, например, он имеет место для упругого основания в форме круглой тонкой пластины, то очевидно, что природа парадокса Николаи отнюдь не сводится к неконсервативному характеру внешнего момента, как это иногда утверждается в литературе¹⁴.

7.7.6. Консервативный момент 2

В случае консервативного момента, соответствующего потенциалу (7.110), уравнение (7.118) принимает вид

$$\begin{aligned}\Theta_1 \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_\varepsilon) \mathbf{k} - (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon + \\ + C_1 \boldsymbol{\theta}_\varepsilon + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k} = M \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \mathbf{k}.\end{aligned}\tag{7.143}$$

Подставляя выражения (7.116) в уравнения (7.119), (7.143), с учетом невозмущенного решения приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}\Theta_1 \dot{\boldsymbol{\zeta}} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{k} + C_1 \boldsymbol{\varphi} + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k} - \\ - M \frac{C_1}{C_3} \left[\frac{1}{2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1 - g_0}{\theta_0} (\boldsymbol{\varphi} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \mathbf{k}) \right] = \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\zeta} + \frac{1}{2} \frac{M}{C_3} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta} - (1 - g_0) (\boldsymbol{\zeta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{k}), \quad g_0 = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)}.\end{aligned}\tag{7.144}$$

¹⁴ В приложении С, написанном В. А. Кузькиным и А. М. Кривцовым, показано, что воздействие консервативного момента аналогично добавлению к телу на упругом основании системы с отрицательной жесткостью. (*Примеч. ред.*)

Подставляя (7.117) в (7.144) и проецируя на вектор \mathbf{k} и на плоскость, ортогональную \mathbf{k} , получаем:

$$\begin{aligned}\Theta_3 \dot{\xi} + C_3 \gamma = 0, \quad \dot{\gamma} = \xi, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = g_0 \mathbf{z} + \frac{M}{2C_3} \mathbf{k} \times \mathbf{z}, \\ \Theta_1 \dot{\mathbf{z}} + g_0 C_1 \boldsymbol{\psi} - \frac{MC_1}{2C_3} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{7.145}$$

Исключив ξ и \mathbf{z} , получим

$$\Theta_3 \ddot{\gamma} + C_3 \gamma = 0, \quad \Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + C_1 \left(g_0^2 + \frac{M^2}{4C_3^2} \right) \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}.\tag{7.146}$$

Здесь положение равновесия устойчиво при всех значениях внешнего момента M .

7.7.7. Обсуждение результатов

В разделе 7.6 показано существование равновесного положения тела, повернутого вокруг собственной оси внешними моментами различного вида. Сама по себе упругая опора обеспечивает устойчивое положение равновесия ненагруженного тела, и в этом смысле она не содержит в себе пороков. Если теперь повернуть тело вокруг собственной оси внешним моментом, величина которого мала, т. е. отношение модуля момента $|M|$ к величине жесткости на кручение C_3 много меньше единицы, то возникающее положение равновесия оказывается неустойчивым для некоторых типов внешних моментов, как неконсервативных, так и консервативных.

С чисто теоретической точки зрения нет ничего удивительного в том, что положение равновесия неустойчиво. Однако с практической точки зрения ситуация кажется достаточно неприятной. При малом внешнем моменте можно ожидать, что задачу допустимо анализировать в линейном приближении. В этом случае систему (7.112) можно записать в виде одного уравнения

$$\Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\theta}} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}) \mathbf{k} + C_1 \boldsymbol{\theta} + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} = M \mathbf{k}.\tag{7.147}$$

С использованием разложения $\boldsymbol{\theta} = \gamma \mathbf{k} + \boldsymbol{\psi}$, где $\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{k} = 0$, последнее уравнение переписывается как

$$\Theta_3 \ddot{\gamma} + C_3 \gamma = M, \quad \Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\psi}} + C_1 \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}.\tag{7.148}$$

Если величина момента M мала и малы начальные значения поворотов и угловых скоростей, то решение задачи (7.148) имеет колебательный характер

и не сулит нам никаких неожиданностей. Именно такие рассуждения проводятся в большинстве работ прикладного характера при анализе динамики ротора в упругих опорах. И не было никаких сомнений, что этот подход является достаточно точным. Однако, как было показано выше, учет величин второго порядка малости (а именно таков порядок малости величины $M\mathbf{k} \times \boldsymbol{\psi}$) приводит к неустойчивым решениям. Неужели это действительно так?

Эксперименты, хотя и недостаточно чистые, показывают, что на самом деле эти неустойчивые решения никогда не проявляются. Как объяснить это явное противоречие между теорией и практикой? Известно несколько объяснений. Первое заключается во влиянии сил трения. Конечно, учет трения устраняет неустойчивость при малых значениях момента M . Однако и здесь не все понятно. Прежде всего нет полной ясности в законах трения. В работе [65] ставилась задача выяснить дестабилизирующий характер касательного момента (7.103), который создавался парой реактивных сил. Предполагалось, что трение, каково бы оно ни было, будет влиять примерно одинаково на движение системы при наличии момента и при его отсутствии. В этом случае мы должны иметь следующее. Выведем систему из положения равновесия и предоставим ей совершать свободные колебания. Существующее в реальности трение приведет к затуханию свободных колебаний. Можно измерить время затухания τ_* . Теперь проводим второе испытание. Системе даем то же самое начальное отклонение, но в момент уничтожения сил, создающих начальное отклонение, включаем действие касательного момента. После этого измеряем время затухания возникающих колебаний. Результат: через время τ_{**} система приходит в положение равновесия (7.102). Исходя из результатов раздела 7.7, следовало ожидать, что τ_{**} будет больше τ_* , так как положение равновесия при действии касательного момента является неустойчивым, т. е. в систему идет накачка энергии. Измерения показали, что τ_{**} почти вдвое меньше, чем τ_* . Вывод: либо при наличии касательного момента, создаваемого реактивными струями, резко возрастает трение в системе, либо при анализе устойчивости не были учтены какие-то существенные свойства системы, например, инерционные свойства упругих опор.

Второе объяснение, данное Е. Л. Николаи [61], заключается в том, что необходимо учитывать нарушения в трансверсальной изотропии как в тензоре инерции, так и в тензоре упругости. Тогда, согласно Николаи, потеря устойчивости при сколь угодно малом M не происходит, но при малых отклонениях от трансверсальной изотропии значения критических моментов неправдоподобно малы.

Наконец, третье объяснение расхождения теории и эксперимента основано

на хорошо известном факте [63], что суждение об устойчивости на основе анализа уравнений в вариациях в некоторых случаях (в частности, в задачах рассматриваемого типа) может привести к неверным результатам. В таких сомнительных случаях необходимо использовать нелинейный анализ.

7.8. Нелинейный анализ движения твердотельного осциллятора при действии внешнего момента

Рассмотрим внешний момент вида

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = \gamma M (\mathbf{l}_1 \mathbf{k} + \mathbf{l}_2 \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{l}_1^2 + \mathbf{l}_2^2 + 2\mathbf{l}_1 \mathbf{l}_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}}}. \quad (7.149)$$

Если $\mathbf{l}_1 = 1$, $\mathbf{l}_2 = 0$, то \mathbf{M}_{ex} представляет собой мертвый момент; если $\mathbf{l}_1 = 0$, $\mathbf{l}_2 = 1$, то \mathbf{M}_{ex} представляет собой следящий (касательный) момент; если $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = 1$, то \mathbf{M}_{ex} — полукасательный момент.

Для упругого момента примем выражение (7.42):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e(\boldsymbol{\theta}) &= -C(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} - D(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k}, \\ C &= 2 \frac{\partial}{\partial(\boldsymbol{\theta}^2)} U(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}), \quad D = \frac{\partial}{\partial(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} U(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}). \end{aligned}$$

Этому упругому моменту соответствует потенциал $U(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})$, такой, что

$$\frac{dU}{d\boldsymbol{\theta}} = C(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} + D(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k}.$$

Тензор инерции тела будем считать трансверсально-изотропным:

$$\boldsymbol{\Theta}^t = \Theta_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}') + \Theta_3 \mathbf{k}' \otimes \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}.$$

Тогда для вектора кинетического момента получим выражения, определяемые формулами (7.35) и (7.36).

Выпишем уравнение баланса энергии для системы, состоящей из твердотельного осциллятора и тела, воздействующего на твердотельный осциллятор посредством момента \mathbf{M}_{ex} :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= \mathbf{M}_{\text{ex}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \gamma M (\mathbf{l}_1 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{l}_2 \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}), \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \Theta_1 \boldsymbol{\omega}^2 + \frac{1}{2} (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 + U(\boldsymbol{\theta}). \end{aligned} \quad (7.150)$$

Отсюда получаем, что

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = M \int_0^t \gamma(\tau) \mathbf{k} \cdot (\mathbf{l}_1 \boldsymbol{\omega}(\tau) + \mathbf{l}_2 \boldsymbol{\Omega}(\tau)) d\tau. \quad (7.151)$$

Если интеграл в левой части (7.151) ограничен при всех t , то при малых $|M|$ энергия \mathcal{E} мало отличается от \mathcal{E}_0 , и можно говорить об устойчивости. Если интеграл в правой части (7.151) неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$, то имеет место накачка энергии в систему, что влечет за собой неустойчивость при любом сколь угодно малом $|M|$. Г. Циглер указывает [62], с. 159–160, что при $\mathbf{l}_1 = \mathbf{1}$, $\mathbf{l}_2 = \mathbf{0}$ происходит накачка энергии, но он не приводит строгого доказательства, которое совсем не очевидно. Во всяком случае автору не удалось получить это доказательство аналитически. Численные расчеты, проведенные с помощью Т. П. Товстик, показали, что при $\mathbf{l}_1 = \mathbf{1}$, $\mathbf{l}_2 = \mathbf{0}$ или $\mathbf{l}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{l}_2 = \mathbf{1}$ энергия неограниченно растет, а при $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2 = \mathbf{1}$ энергия колеблется около значения \mathcal{E}_0 . Однако анализировалось малое число различных вариантов начальных условий, поэтому сказанное носит предварительный характер.

Для получения более определенных результатов будем рассуждать несколько иначе.

Воспользовавшись выражениями для кинетического момента (7.35) и (7.36), запишем уравнения движения твердотельного осциллятора. С использованием левой угловой скорости уравнение динамики можно привести к форме (7.48):

$$[\Theta_1 \boldsymbol{\omega} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}']^\cdot + \mathbf{C}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}\mathbf{Z}^\top \cdot \mathbf{k} = \gamma M (\mathbf{l}_1 \mathbf{k} + \mathbf{l}_2 \mathbf{k}'), \quad (7.152)$$

с использованием правой угловой скорости — к форме (7.50):

$$\begin{aligned} & [\Theta_1 \boldsymbol{\Omega} + (\Theta_3 - \Theta_1) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}]^\cdot + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} + \\ & + \mathbf{C}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}\mathbf{Z} \cdot \mathbf{k} = \gamma M (\mathbf{l}_1 \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{k} + \mathbf{l}_2 \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (7.153)$$

Здесь $\mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}$. Несмотря на то, что уравнения (7.152), (7.153) — эквиваленты, их сравнение позволяет получить нетривиальный результат. Вычитая уравнение (7.153) из уравнения (7.152) и принимая во внимание, что $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}' = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & [\Theta_1 (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) + (\Theta_3 - \Theta_1) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k}' - \mathbf{k})]^\cdot + \\ & + (\Theta_3 - \Theta_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{D}\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} = \gamma M [(\mathbf{l}_1 - \mathbf{l}_2) \mathbf{k} + \mathbf{l}_2 \mathbf{k}' - \mathbf{l}_1 \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Проецируя это уравнение на вектор \mathbf{k} , получаем

$$\begin{aligned} & [\Theta_1 (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{k} + (\Theta_1 - \Theta_3) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} (1 - \cos \vartheta)]' = \\ & = \gamma M (l_1 - l_2) (1 - \cos \vartheta), \end{aligned} \quad (7.154)$$

где

$$\cos \vartheta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' = \mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}.$$

Заметим, что уравнение (7.154) не содержит характеристик упругого основания.

Преобразуем (7.154) к другой форме. Согласно уравнениям (2.136), (2.137), (2.144), имеем

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-T}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (7.155)$$

Представим вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ в виде разложения

$$\boldsymbol{\theta} = \chi \mathbf{k} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \theta^2 = \chi^2 + \mathbf{y}^2, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(t) \mathbf{Q}(\psi(t) \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad (7.156)$$

где

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad |\mathbf{m}| = 1.$$

Легко показать, что

$$\mathbf{k} \cdot (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}}) = \dot{\psi} \mathbf{y}^2, \quad 1 - \cos \vartheta = \frac{\mathbf{y}^2 (1 - \cos \theta)}{\theta^2}. \quad (7.157)$$

С учетом соотношений (7.155), (7.156) и (7.157) равенство (7.154) можно переписать в виде

$$[(1 - \cos \vartheta) F]' = \gamma M (l_1 - l_2) (1 - \cos \vartheta), \quad (7.158)$$

где

$$F \equiv 2\Theta_1 \dot{\psi} + (\Theta_1 - \Theta_3) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}.$$

Равенство (7.158) было получено другим способом и показывалось автору в частной беседе А. М. Кривцовым¹⁵.

Фактически равенство (7.158) обусловлено тем, что упругий момент обладает свойством (7.18). Заметим, что правая часть (7.158) знакопостоянна, причем ее знак определяется числом $M(l_1 - l_2)$. Пусть правая часть (7.158) положительна: $M(l_1 - l_2) > 0$. Выберем начальные условия так, чтобы функция F при $t = 0$ была положительной. Тогда произведение $(1 - \cos \vartheta) F$ будет

¹⁵ Упомянутая работа А. М. Кривцова содержится в приложении В. (*Примеч. ред.*)

расти до тех пор, пока правая часть (7.158) не обратится в нуль, что возможно только тогда, когда $1 - \cos \vartheta = 0$. Однако в этом случае функция F должна обратиться в бесконечность. Если же правая часть (7.158) не обращается в нуль, то функция F должна тем более возрастать до бесконечности. Если левая часть (7.158) отрицательна, то начальные условия выбираем так, чтобы F при $t = 0$ была отрицательной, т. е. все рассуждения повторяем, умножив обе части (7.158) на (-1) . Вывод: при $l_1 \neq l_2$ тело, в конечном счете, начинает бесконечно быстро прецессировать вокруг вертикального орта \mathbf{k} , и никакое сколь угодно жесткое трансверсально-изотропное упругое основание не может воспрепятствовать этому.

Таким образом, нелинейный анализ показал, что из-за накопления энергии в системе положение равновесия (7.115) неустойчиво при сколь угодно малом крутящем моменте. Следовательно, анализ на основе уравнений в вариациях дает правильный результат.

Указанное выше обстоятельство, разумеется, объясняет формальные истоки парадокса Е. Л. Николаи, но оно отнюдь не устраняет его. Действительно, любой парадокс заключается в противоречии между формально верным утверждением и интуицией или здравым смыслом. В частности, приведенное выше рассуждение вовсе не объясняет ненаблюдаемости бесконечного возрастания скорости прецессии в экспериментах. Как отмечено в предыдущем разделе, учет трения также не вполне объясняет отмеченную ненаблюдаемость потери устойчивости при сколь угодно малом внешнем моменте. Возможное объяснение парадокса Николаи может заключаться в следующем. При возрастании скорости прецессии тела до достаточно больших значений упругое основание заведомо нельзя считать безынерционным. Кроме того, никто никогда не доказывал, что упругий момент (или упругая сила) непременно должны быть позиционными. Рассмотрим инерционное упругое основание. Тогда упругий момент должен иметь вид (7.9), и тогда, например, вместо (7.42) мы получаем следующее выражение:

$$\mathbf{M}_e(\boldsymbol{\theta}) = -C(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta} - D(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k} - \mu \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (7.159)$$

где μ для простоты считается постоянной величиной.

В этом случае уравнения движения твердотельного осциллятора принимают вид

$$\begin{aligned} & [\Theta_1 \boldsymbol{\omega} + (\Theta_3 - \Theta_1)(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{k}']' + C\boldsymbol{\theta} + D\mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k} + \mu \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \\ & \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{k}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (7.160)$$

Можно показать, что в задаче (7.160) регулярная прецессия невозможна. Угол нутации стремится к нулю, и парадокс Николаи не возникает.

Возможно, что на самом деле упругий момент должен иметь вид (7.9). Хотя слагаемое в (7.9), содержащее скорость, и не попадает в выражение баланса энергии, но оно определенно влияет на угловые скорости и, следовательно, на правую часть (7.150) или (7.151). Поэтому, по мнению автора, вопрос о парадоксе Е. Л. Николаи нельзя считать полностью решенным: нужны и тщательные эксперименты, и дальнейшие теоретические разработки.

Глава 8

Многоспиновый твердотельный осциллятор¹

8.1. Уравнения движения двухроторного гиростата на нелинейно упругом основании

Многоспиновый твердотельный осциллятор является естественным обобщением модели твердотельного осциллятора. При этом нелинейно упругое основание моделируется точно так же, как и в случае твердотельного осциллятора. Отличие состоит в том, что в качестве основного элемента модели вместо абсолютно твердого тела (односпиновой частицы) используется система твердых тел, состоящая из несущего тела и внутренних роторов. Такая система называется многоспиновой частицей. Если роторы осесимметричны, а их оси фиксированы относительно несущего тела, то многоспиновая частица представляет собой гиростат. Именно этот случай рассматривается в данной главе².

¹ Материал этой главы основан на статье [66]: П. А. Жилин, С. А. Сорокин “Мультироторный гиростат на нелинейно упругом основании” (ИПМаш РАН: Препринт N 140. 1997. 83 с.) (*Примеч. ред.*)

² Общий случай многоспиновой частицы — квазитвердое тело — рассмотрен в четвертой главе, см. раздел 4.2. В двенадцатой главе обсуждается, в частности, модель среды, базовым элементом которой является многоспиновая частица — см. раздел 12.1. В континуальных моделях многоспиновая частица рассматривается как точечная частица, подобная той, которая обсуждается в подразделе 3.2.1. Движение такой частицы определяется заданием ее вектора положения и набором независимых тензоров поворота. В данной главе, посвященной решению инженерных задач, многоспиновая частица моделирует тело макроскопических размеров. Поэтому ниже используется принятый в динамике твердого тела и инженерной практике термин “гиростат”. Однако модели, которые обсуждаются в данной главе, могут найти применение не только при расчете технических конструкций, но и при описании процессов в микромире. (*Примеч. ред.*)

Определение. Гиростатом называется тело, распределение масс в котором не меняется в процессе движения. Однако какая-то часть этого тела может вращаться относительно остальной части.

Далее для определенности рассматривается двухроторный гиростат на упругом основании. Однако все постановки задач и их анализ легко распространяются на случай многороторного гиростата.

8.1.1. Тензоры инерции.

Кинетический момент двухроторного гиростата

Пусть дано твердое тело с двумя полостями, границы которых являются поверхностями вращения. В дальнейшем будем считать, что это тело \mathcal{A} имеет неподвижную точку и упруго заземлено в некоей опоре (рис. 8.1).

В отсчетном положении ось \mathbf{k} тела направлена вертикально, а упругое основание не деформировано. Тензор инерции этого тела с полостями, вычисленный относительно неподвижной точки \mathbf{O} , в отсчетном положении обозначим символом \mathbf{A} . Тензор инерции тела в актуальный момент времени обозначим символом \mathbf{A}^t :

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad (8.1)$$

где через $\mathbf{P}(t)$ обозначен тензор поворота тела \mathcal{A} . Единичные векторы \mathbf{m} и \mathbf{n} направлены по осям симметрии полостей в отсчетном положении.

В одну полость тела \mathcal{A} вставлен ротор \mathcal{B} с тензором инерции \mathbf{B} , вычисленным относительно опорной точки \mathbf{O} . Чтобы вращение ротора \mathcal{B} не меняло распределения масс в теле, он должен быть осесимметричным, т. е. его тензор инерции должен иметь вид

$$\mathbf{B} = \lambda_b \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \mu_b (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}), \quad (8.2)$$

где \mathbf{m} определяет направление оси ротора \mathcal{B} в отсчетном положении, λ_b — осевой момент инерции, μ_b — экваториальный момент инерции.

В актуальный момент времени тензор инерции ротора \mathcal{B} имеет вид, аналогичный (8.1):

$$\mathbf{B}^t = \mathbf{P}_b(t) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_b^T(t), \quad (8.3)$$

где $\mathbf{P}_b(t)$ — тензор поворота (полный) ротора \mathcal{B} .

В другую полость тела \mathcal{A} вставлен ротор \mathcal{C} . Его тензор инерции \mathbf{C} , вычисленный относительно опорной точки \mathbf{O} , имеет вид

$$\mathbf{C} = \lambda_c \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu_c (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (8.4)$$

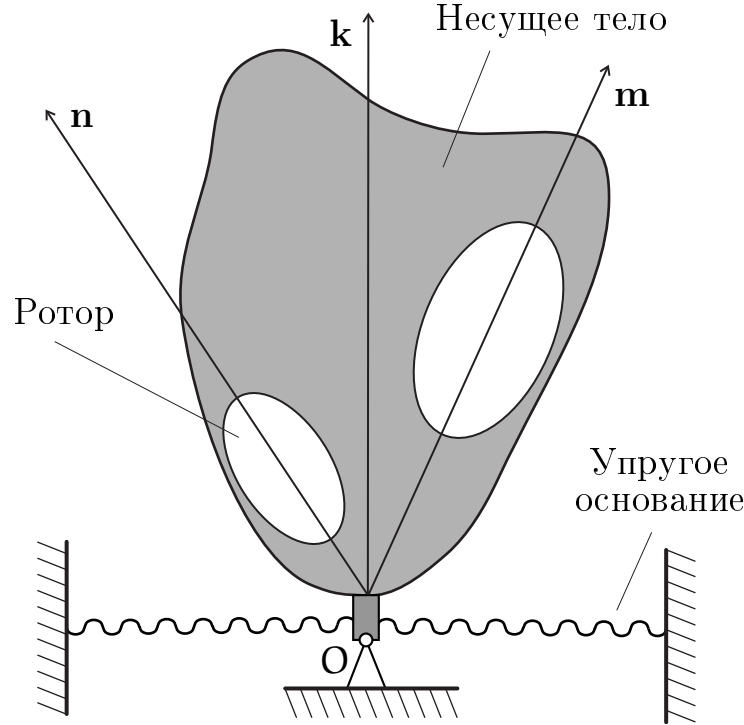


Рис. 8.1. Двухроторный гиросат

где единичный вектор \mathbf{n} определяет направление оси симметрии ротора \mathcal{C} в отсчетном положении; λ_c и μ_c — соответственно осевой и экваториальный моменты инерции. В актуальном положении тензор инерции ротора \mathcal{C} имеет вид

$$\mathbf{C}^t = \mathbf{P}_c(t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_c^T(t), \quad (8.5)$$

где $\mathbf{P}_c(t)$ — полный тензор поворота ротора \mathcal{C} .

Тензоры поворота роторов \mathcal{B} и \mathcal{C} удобно представить в другом виде. Полный поворот ротора \mathcal{B} можно представить в виде композиции поворотов: поворота ротора $\mathbf{Q}(\tilde{\alpha}\mathbf{m})$ вокруг своей оси симметрии в отсчетном положении и поворота ротора тензором поворота тела \mathcal{A} , т. е. тензором $\mathbf{P}(t)$. Однако здесь необходимо уточнение. Если тело \mathcal{A} поворачивается вокруг оси \mathbf{m} , то такой поворот не повернет ротора, который может свободно вращаться внутри \mathcal{A} . Тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ тела в свою очередь можно представить в виде композиции поворотов вокруг \mathbf{m} и вокруг оси ортогональной \mathbf{m} . Это немедленно следует из теоремы (2.61), где следует положить $\mathbf{n} = \mathbf{m}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{m}) = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}') \cdot \mathbf{Q}((\varphi - \psi)\mathbf{m}),$$

где

$$\mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{m}) \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{e}' \cdot \mathbf{m} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Итак, тензор поворота $\mathbf{P}(t)$ представим в виде

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{Q}(\alpha_* \mathbf{m}), \quad (8.6)$$

где α_* — угол поворота тела \mathcal{A} вокруг оси \mathbf{m} , тензор поворота $\mathbf{P}_*(t)$ можно назвать тензором наклона оси \mathbf{m} . Именно этот тензор поворота $\mathbf{P}_*(t)$ и поворачивает ротор с осью \mathbf{m} .

Теперь полный поворот ротора \mathcal{B} можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_b(t) &= \mathbf{P}_*(t) \cdot \mathbf{Q}(\tilde{\alpha} \mathbf{m}) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}^\Gamma(\alpha_* \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\tilde{\alpha} \mathbf{m}) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}), \\ \alpha(t) &= \tilde{\alpha}(t) - \alpha_*(t), \end{aligned} \quad (8.7)$$

где $\alpha(t)$ — угол поворота ротора \mathcal{B} относительно тела \mathcal{A} .

Для ротора \mathcal{C} имеем аналогичное представление:

$$\mathbf{P}_c(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{n}), \quad (8.8)$$

где $\beta(t)$ — угол поворота ротора \mathcal{C} относительно тела \mathcal{A} .

Введем обозначения: вектор $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела \mathcal{A} , вектор $\boldsymbol{\omega}_b$ — угловая скорость ротора \mathcal{B} , вектор $\boldsymbol{\omega}_c$ — угловая скорость ротора \mathcal{C} . Тогда, согласно (2.154), получим формулы

$$\boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha} \mathbf{m}', \quad \mathbf{m}' = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{m}, \quad (8.9)$$

$$\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega} + \dot{\beta} \mathbf{n}', \quad \mathbf{n}' = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{n}. \quad (8.10)$$

Теперь мы можем записать выражение для кинетического момента гиростата, вычисленного относительно опорной точки \mathbf{O} . Поскольку кинетический момент аддитивен по массе, то полный кинетический момент гиростата \mathcal{L} есть сумма кинетических моментов тела \mathcal{A} и роторов \mathcal{B} и \mathcal{C} :

$$\mathcal{L} = \mathbf{A}^t \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^t \cdot \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{C}^t \cdot \boldsymbol{\omega}_c. \quad (8.11)$$

Заметим, что справедливы равенства

$$\mathbf{B}^t = \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_b^\Gamma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^\Gamma(\alpha \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P}^\Gamma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^\Gamma,$$

так как

$$\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^\Gamma(\alpha \mathbf{m}) = \mathbf{B}.$$

С учетом вышесказанного теперь имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathbf{P} \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\alpha} \mathbf{m}) + \mathbf{C} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \dot{\beta} \mathbf{n}) \right) = \\ &= \mathbf{P} \cdot \left((\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n} \right), \end{aligned} \quad (8.12)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega}$ есть правая угловая скорость тела \mathcal{A} . Введем обозначение

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}. \quad (8.13)$$

Тогда для вектора кинетического момента имеем окончательное выражение

$$\mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \left(\boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n} \right). \quad (8.14)$$

Как видно из (8.14), вектор кинетического момента гиростата зависит от суммарного тензора инерции гиростата в отсчетном положении и осевых моментов инерции роторов.

8.1.2. Уравнения движения гиростата

Напомним второй закон динамики Эйлера: скорость изменения кинетического момента произвольной системы, вычисленного относительно опорной точки \mathbf{O} , равна внешнему моменту, действующему на рассматриваемую систему.

В данном случае второй закон динамики имеет вид

$$\dot{\mathcal{L}} = \mathbf{M}, \quad (8.15)$$

где \mathbf{M} — внешний момент. Запишем кинетический момент в виде

$$\mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n}. \quad (8.16)$$

Тогда с учетом правого уравнения Пуассона (2.81) имеем³

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{J}} + \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{J}} + (\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{J} = \\ &= \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{J}} + \mathbf{P} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}) = \mathbf{P} \cdot (\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J}). \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (8.15) и умножив обе части получившегося уравнения скалярно на тензор \mathbf{P}^\top слева, получим

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} = \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{M}. \quad (8.17)$$

Внешний момент \mathbf{M} представим в виде суперпозиции моментов:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_e + \mathbf{M}_{ex}^*,$$

³ В преобразованиях использовано тождество $(\mathbf{A} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, справедливое для любого тензора \mathbf{A} и любых векторов \mathbf{b} и \mathbf{c} . (*Примеч. ред.*)

где \mathbf{M}_e — момент, создающийся упругим основанием, \mathbf{M}_{ex}^* — момент внешних (прочих) воздействий. Момент \mathbf{M}_e выражается через энергию упругого основания $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ по формуле (7.38). Момент \mathbf{M}_{ex}^* в свою очередь может состоять из потенциальной и непотенциальной частей. Потенциальная часть момента \mathbf{M}_{ex}^* выражается через потенциал внешних воздействий $V(\boldsymbol{\theta})$ по формуле (7.47). В результате, с использованием (7.38), (7.47), для \mathbf{M} можно записать выражение

$$\mathbf{M} = -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{d(\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) + V(\boldsymbol{\theta}))}{d\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{M}_{ex}, \quad (8.18)$$

где \mathbf{M}_{ex} есть непотенциальная часть внешнего момента. Теперь уравнение движения (8.17) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + \mathbf{Z} \cdot \frac{d(\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) + V(\boldsymbol{\theta}))}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{ex}, \quad (8.19)$$

где учтено тождество $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}$. Упругое основание будем считать трансверсально-изотропным с осью изотропии \mathbf{k} . Тогда, согласно формулам (7.16), (7.17), для упругого момента имеем упрощенное выражение

$$\mathbf{M}_e = -2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{k}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (8.20)$$

Уравнение движения гиростата в этом случае можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{Z} \cdot \frac{dV}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{ex}. \quad (8.21)$$

Если на гиростат помимо реакции упругого основания других воздействий нет, то получаем более простое уравнение

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (8.22)$$

Если роторы жестко закреплены на несущем теле \mathcal{A} , т. е. $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, то уравнение (8.22) упрощается еще сильнее:

$$\boldsymbol{\Theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} + 2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\boldsymbol{\theta}^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (8.23)$$

Наконец, полагая в (8.23) функцию $\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta})$ равной нулю, т. е. убирая упругое основание, получаем хорошо известное уравнение Эйлера:

$$\boldsymbol{\Theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}. \quad (8.24)$$

К этим уравнениям должно быть добавлено уравнение, связывающее угловую скорость $\mathbf{\Omega}$ с производной от вектора поворота. Удобнее записать последнее уравнение в обращенной форме (2.146):

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{\Omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad \theta = |\boldsymbol{\theta}|.$$

Сравнивая между собой системы (8.23), (2.146) и (8.24), (2.146), видим, что первая из них существенно сложнее второй, так как уравнения (8.23) и (2.146) образуют совместную систему для векторов $\boldsymbol{\theta}$ и $\mathbf{\Omega}$. В классическом случае по уравнению Эйлера (8.24) находят правую угловую скорость $\mathbf{\Omega}$, а затем решают правую задачу Дарбу, которая в данной работе сводится к интегрированию уравнения (2.146). Если тело закреплено на упругом основании, то задача интегрирования основной системы очевидным образом усложняется. Впрочем, для численных решений обсуждаемые системы уравнений практически эквивалентны. Возвращаясь к рассмотрению двухроторного гиростата, сразу замечаем, что здесь возникают дополнительные усложнения. Вектор \mathbf{J} , определенный выражением (8.16), зависит не только от угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ тела \mathcal{A} , но и от относительных скоростей роторов \mathcal{B} и \mathcal{C} , т. е. в этом случае система уравнений (8.22) и (2.146) содержит два неизвестных вектора $\mathbf{\Omega}$ и $\boldsymbol{\theta}$ и две скалярные функции $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ и $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ (считается, что вектор \mathbf{J} исключен из (8.22) с помощью (8.16)). Иными словами, система (8.22) и (2.146) незамкнута. К ней необходимо добавить еще два уравнения, к выводу которых мы сейчас и переходим.

8.1.3. Уравнения движения роторов

Для упрощения нижеследующих уравнений и рассуждений примем ограничение, что оси роторов проходят через неподвижную точку \mathbf{O} . Тогда сами роторы можно считать твердыми телами, имеющими неподвижную точку. На роторы действуют моменты, развиваемые двигателями, которые до сих пор не упоминались, поскольку для гиростата в целом они являются внутренними. Кроме того, на роторы действуют моменты со стороны тела \mathcal{A} , вынуждающие роторы отслеживать повороты несущего тела \mathcal{A} .

Обратимся к выводу уравнений движения ротора \mathcal{B} . Кинетический момент ротора \mathcal{B} определяется выражением

$$\mathcal{L}_b = \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b. \quad (8.25)$$

С учетом формул (8.2), (8.7) и (8.9) выражению (8.25) можно придать вид

$$\mathcal{L}_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} \cdot (\mathbf{\Omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{m}) \quad (8.26)$$

или его можно записать иначе:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_b &= (\mu_b \mathbf{E} + (\lambda_b - \mu_b) \mathbf{m}' \otimes \mathbf{m}') \cdot (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{m}') = \\ &= \mu_b (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{m}') + (\lambda_b - \mu_b) (\mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \mathbf{m}'.\end{aligned}\quad (8.27)$$

Второй закон динамики для ротора \mathcal{B} можно записать в виде

$$\dot{\mathcal{L}}_b = \mathbf{M}_{\text{mot}} + \mathbf{M}_{\text{ab}}, \quad (8.28)$$

где \mathbf{M}_{mot} — момент, развиваемый двигателем; \mathbf{M}_{ab} — момент, действующий на ротор \mathcal{B} со стороны тела \mathcal{A} . Учтем теперь следующее. Момент \mathbf{M}_{mot} очевидно направлен по оси ротора \mathcal{B} , т. е. по вектору $\mathbf{m}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}$. Момент \mathbf{M}_{ab} , напротив, ортогонален оси ротора \mathcal{B} , т. е. $\mathbf{M}_{\text{ab}} \cdot \mathbf{m}' = 0$. Спроецируем теперь уравнение (8.28) на вектор \mathbf{m}' и учтем равенства

$$\mathbf{M}_{\text{mot}} = M_{\text{mot}} \mathbf{m}', \quad \mathbf{M}_{\text{ab}} \cdot \mathbf{m}' = 0, \quad \mathbf{m}' \cdot \dot{\mathcal{L}}_b = (\mathbf{m}' \cdot \mathcal{L}_b)^\cdot - \dot{\mathbf{m}}' \cdot \mathcal{L}_b.$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}}' \cdot \mathcal{L}_b &= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}') \cdot (\mu_b (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{m}') + (\lambda_b - \mu_b) \mathbf{m}' (\mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}})) = 0, \\ \mathbf{m}' \cdot \mathcal{L}_b &= \lambda_b (\omega_m + \dot{\boldsymbol{\alpha}})^\cdot, \quad \omega_m = \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega}.\end{aligned}\quad (8.29)$$

Проекция уравнения (8.28) на вектор \mathbf{m}' записывается так:

$$\lambda_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \omega_m)^\cdot = M_{\text{mot}}, \quad \omega_m = \mathbf{m}' \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega}.\quad (8.30)$$

Для момента, развиваемого двигателем, M_{mot} примем простейшее выражение

$$M_{\text{mot}} = -\nu_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \omega_b), \quad \nu_b > 0, \quad (8.31)$$

где ω_b есть номинальная угловая скорость двигателя, ν_b — параметр, характеризующий мощность двигателя. Подставляя (8.31) в (8.30), получаем уравнение

$$\lambda_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \omega_b)^\cdot + \nu_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_m = 0, \quad \omega_b = \text{const}.$$

В этом уравнении основной неизвестной является функция $\boldsymbol{\alpha}(t)$, а угловая скорость тела \mathcal{A} входит в уравнение через величину $\omega_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega}$. Аналогичные рассуждения для ротора \mathcal{C} приводят к уравнению

$$\lambda_c (\dot{\boldsymbol{\beta}} - \omega_c)^\cdot + \nu_c (\dot{\boldsymbol{\beta}} - \omega_c) + \lambda_c \dot{\omega}_n = 0, \quad \omega_c = \text{const}, \quad \nu_c > 0,$$

где ω_c есть номинальная угловая скорость двигателя, вращающего ротор \mathcal{C} , угловая скорость тела \mathcal{A} входит в уравнение через величину $\omega_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}$.

Если считать, что двигатели, вращающие роторы \mathcal{B} и \mathcal{C} , имеют бесконечную мощность, то следует принять

$$\nu_b \rightarrow \infty, \quad \nu_c \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha} = \omega_b, \quad \dot{\beta} = \omega_c. \quad (8.32)$$

Последние значения получаются после переходного процесса.

8.1.4. Полная система уравнений движения двухроторного гиростата на упругом основании

Выпишем полную систему уравнений, описывающих динамику двухроторного гиростата.

Второй закон динамики для гиростата — уравнение движения (8.21):

$$\dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\theta^2)} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})} \mathbf{Z} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{Z} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{d\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{M}_{\text{ex}}, \quad (8.33)$$

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{m} + \lambda_c \dot{\beta} \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}.$$

Кинематическое уравнение (2.146):

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad g \equiv \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad \theta = |\boldsymbol{\theta}|. \quad (8.34)$$

Уравнения, определяющие вращение роторов \mathcal{B} и \mathcal{C} :

$$\lambda_b (\dot{\alpha} - \omega_b)' + \nu_b (\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_m = 0, \quad \omega_m = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (8.35)$$

$$\lambda_c (\dot{\beta} - \omega_c)' + \nu_c (\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \dot{\omega}_n = 0, \quad \omega_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (8.36)$$

Система уравнений (8.33)–(8.36) является замкнутой и содержит восемь неизвестных: вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, вектор правой угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, углы относительных поворотов роторов $\alpha(\mathbf{t})$ и $\beta(\mathbf{t})$.

Система (8.33)–(8.36) весьма удобна для численного анализа. В частности, численные эксперименты с ней позволяют выбирать энергию деформации $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta})$, т. е. проектировать упругое основание, обеспечивающее заданное динамическое поведение гиростата. В данной работе анализ такого рода оставлен в стороне из-за недостаточной его завершенности.

Для практических приложений можно принять энергию деформации в виде квадратичной формы, аналогично тому, как это принято, например, для так называемого полулинейного материала [67] в нелинейной теории упругости:

$$\mathcal{U}(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{1}{2} C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2. \quad (8.37)$$

В этом случае упругий момент \mathbf{M}_e вычисляется по простейшей формуле

$$\mathbf{M}_e = -C_1 \boldsymbol{\theta} - (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k}, \quad (8.38)$$

где $C_1 > 0$, $C_3 > 0$ называются жесткостями основания на изгиб и кручение соответственно. Обратим внимание, что выражение для упругого момента, соответствующее простейшей форме энергии, является нелинейным. В развернутом виде с учетом формулы (2.139) для функции $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta})$ выражение (8.38) принимает вид

$$\mathbf{M}_e = -C_1 \boldsymbol{\theta} - (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \left(\mathbf{k} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}) \right). \quad (8.39)$$

Иными словами, в отличие от нелинейной теории упругости, здесь мы имеем дело с физически нелинейной задачей, а не только с геометрической нелинейностью. Обоснованность принятых наименований для упругих постоянных C_1 и C_3 следует из линеаризованной записи выражения (8.39):

$$\mathbf{M}_e = -C_1 [\boldsymbol{\theta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k}] - C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k}. \quad (8.40)$$

Если вектор поворота направлен по \mathbf{k} , т. е. имеет место чистое кручение, то получаем

$$\mathbf{M}_e = -C_3 \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}.$$

Отсюда понятно наименование жесткость на кручение для упругой постоянной C_3 . Если же вектор поворота ортогонален \mathbf{k} , то имеем

$$\mathbf{M}_e = -C_1 \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0.$$

При этом мы имеем наклон гиростата, т. е. отклонение его оси от вертикали, и изгиб упругого основания.

8.1.5. Уравнения движения двухроторного гиростата при малых поворотах несущего тела

Несущее тело гиростата, упруго заземленное в упругое основание, во многих практически важных случаях не должно сильно отклоняться от исходного состояния, т. е. вектор поворота несущего тела должен быть малым:

$$|\boldsymbol{\theta}| \ll 1.$$

В этом случае основную систему уравнений (8.33)–(8.37) можно существенно упростить, сохранив в ней только линейные по $\boldsymbol{\theta}$ и его производным

слагаемые. Наиболее значительное упрощение претерпевает кинематическое уравнение (8.34). Заметим, что справедлива оценка

$$\frac{1-g}{\theta^2} = \frac{1}{12} + O(\theta^2).$$

Поэтому в линейном приближении получаем, что правая угловая скорость $\mathbf{\Omega}$ совпадает с левой угловой скоростью и определяется простейшим выражением

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (8.41)$$

Примем, что внешние моменты отсутствуют. Для упругого момента имеем выражение (8.40). С учетом (8.41) уравнение (8.33) после линеаризации записываем в виде

$$\boldsymbol{\Theta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \lambda_b \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{m} + \lambda_c \ddot{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{n} + C_1 [\boldsymbol{\theta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k}] + C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (8.42)$$

Уравнения (8.35) и (8.36) остаются почти без изменений:

$$\lambda_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_b) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \nu_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_b) + \lambda_b \mathbf{m} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0, \quad (8.43)$$

$$\lambda_c (\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\omega}_c) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \nu_c (\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\omega}_c) + \lambda_c \mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0. \quad (8.44)$$

Система (8.42)–(8.44) есть система обыкновенных дифференциальных уравнений восьмого порядка с постоянными коэффициентами. В принципе она допускает полное исследование.

8.2. Динамика однороторного гиростата на упругом основании

В этом разделе будет рассматриваться частный случай полученных выше уравнений. При этом будут приняты дополнительные упрощающие предположения.

Первое. Тензор инерции несущего тела \mathcal{A} будем считать трансверсально-изотропным с осью изотропии, направленной по вектору \mathbf{k} :

$$\mathbf{A} = \lambda_a \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu_a (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}). \quad (8.45)$$

От этого предположения в дальнейшем мы откажемся и рассмотрим ситуацию, когда тензор инерции \mathbf{A} будет близок к выражению (8.45), но перестанет обладать осью симметрии.

Второе. Считаем, что ротор \mathcal{C} отсутствует, но полость, занимаемая ротором \mathcal{C} , заполнена материалом несущего тела \mathcal{A} .

Третье. Считаем, что ось ротора \mathcal{B} в исходном натуральном состоянии совпадает с осью симметрии несущего тела \mathcal{A} : $\mathbf{m} = \mathbf{k}$.

Четвертое. Для энергии упругого основания считаем справедливым выражение (8.37).

8.2.1. Уравнения движения однороторного гиростата с трансверсально-изотропным тензором инерции

При принятых предположениях суммарный тензор инерции гиростата Θ имеет вид

$$\Theta = \lambda \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}), \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_b, \quad \mu = \mu_a + \mu_b. \quad (8.46)$$

Тогда правый вектор кинетического момента \mathbf{J} выражается по формуле

$$\mathbf{J} = \mu \boldsymbol{\Omega} + [(\lambda - \mu) \omega_{\mathbf{k}} + \lambda_b \dot{\alpha}] \mathbf{k}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (8.47)$$

Кинематическое уравнение (8.34) остается без изменений. В результате уравнения движения гиростата (8.33), (8.34) в данном случае переписывается в виде

$$\begin{aligned} \mu \dot{\boldsymbol{\Omega}} + [(\lambda - \mu) \omega_{\mathbf{k}} + \lambda_b \dot{\alpha}] \dot{\mathbf{k}} - [(\lambda - \mu) \omega_{\mathbf{k}} + \lambda_b \dot{\alpha}] \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} + \\ + C_1 \boldsymbol{\theta} + (C_3 - C_1) (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (8.48)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}.$$

Уравнение динамики для ротора так же остается почти без изменений:

$$\lambda_b (\dot{\alpha} - \omega_b) \dot{\mathbf{k}} + \nu_b (\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \dot{\omega}_{\mathbf{k}} = 0, \quad \omega_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (8.49)$$

Система (8.48), (8.49) являет собой замкнутую систему уравнений для однороторного гиростата, который в данном случае можно рассматривать как простейшую модель центрифуги. Чтобы закончить постановку задачи, необходимо задать начальные условия

$$\mathbf{t} = 0: \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0, \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0. \quad (8.50)$$

Полученная задача Коши оказывается сильно нелинейной и достаточно сложна для аналитического решения в общем случае. Традиционные методы анализа здесь не подходят, так как система существенно неконсервативна. Подвод или отвод энергии в этой системе осуществляется электрическим путем за счет работы двигателя, вращающего ротор.

8.2.2. Крутильно-вращательные движения гиростата

Нелинейная система (8.48), (8.49) имеет точное частное решение, которое реализуется, конечно, при частном случае начальных условий. А именно, допустим, что несущее тело \mathcal{A} совершает чисто крутильные колебания вокруг своей оси симметрии. Тогда ротор будет совершать крутильно-вращательное движение. Для центрифуги это нормальный рабочий режим движения, а все прочие движения являются паразитными и нежелательными. Итак, примем, что вектор поворота несущего тела \mathcal{A} имеет вид

$$\boldsymbol{\theta} = \theta(t)\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = \text{const.} \quad (8.51)$$

Здесь $\theta(t)$ уже не является модулем вектора $\boldsymbol{\theta}$, как это было выше, что не имеет значения, так как

$$\frac{|\boldsymbol{\theta}| \sin |\boldsymbol{\theta}|}{2(1 - \cos |\boldsymbol{\theta}|)} = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}.$$

Легко убедиться, что при принятии (8.51) левая и правая угловые скорости совпадают и определяются по простейшей формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}. \quad (8.52)$$

Вектор кинетического момента \mathbf{J} определяется выражением

$$\mathbf{J} = (\lambda\dot{\theta} + \lambda_b\dot{\alpha})\mathbf{k}, \quad \omega_k \equiv \dot{\theta}.$$

Кроме того, имеем равенство

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k}.$$

Система (8.48), (8.49) сводится к трем скалярным уравнениям:

$$(\lambda\dot{\theta} + \lambda_b\dot{\alpha})' + C_3\theta = 0, \quad \lambda_b\dot{\alpha} + \nu_b\alpha + \lambda_b\ddot{\theta} = 0, \quad \dot{\alpha} = \omega_b + \alpha. \quad (8.53)$$

Получили линейную систему четвертого порядка, но решать фактически надо систему третьего порядка, так как последнее уравнение системы (8.53) позволяет найти $\alpha(t)$ квадратурой. Решение ищем в виде

$$\theta = Ae^{pt}, \quad \alpha = Be^{pt}.$$

Подставляя эти выражения в первые два уравнения системы (8.53), получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений. Приравнивая к нулю определитель этой системы, получаем характеристическое уравнение

$$\mathcal{F}(p) \equiv \lambda_b\lambda_a p^3 + \lambda\nu_b p^2 + C_3\lambda_b p + C_3\nu_b = 0. \quad (8.54)$$

Вводя стандартные обозначения, принимаем

$$a_0 = \lambda_b \lambda_a, \quad a_1 = \lambda \nu_b, \quad a_2 = C_3 \lambda_b, \quad a_3 = C_3 \nu_b.$$

Для того чтобы все корни уравнения (8.54) имели бы отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно выполнение условий Рауса–Гурвица, которые в данном случае сводятся к неравенствам

$$\lambda_b \lambda_a > 0, \quad \lambda \nu_b > 0, \quad C_3 \nu_b \lambda_b (\lambda - \lambda_a) > 0, \quad C_3^2 \nu_b^2 \lambda_b (\lambda - \lambda_a) > 0.$$

Все эти неравенства строго выполняются, если выполняются строгие неравенства

$$\lambda_a > 0, \quad \lambda_b > 0, \quad C_3 > 0, \quad \nu_b > 0.$$

Далее считаем эти неравенства выполненными. Итак, все корни уравнения (8.54) имеют отрицательные вещественные части. Один из этих корней заведомо вещественный. Два других могут быть либо вещественными, либо комплексно сопряженными. С практической точки зрения выгодно, чтобы все корни были бы вещественными, ибо в этом случае идет плавный (без крутильных колебаний) разгон центрифуги. Выясним, при каких условиях все корни (8.54) будут вещественны. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы функция $\mathcal{F}(p)$ имела бы два экстремума, т. е. уравнение

$$\mathcal{F}'(p) \equiv 3\lambda_b \lambda_a p^2 + 2\lambda \nu_b p + C_3 \lambda_b = 0 \quad (8.55)$$

имело бы два вещественных решения. Для этого, в свою очередь, необходима положительность дискриминанта этого уравнения:

$$4\lambda^2 \nu_b^2 - 12\lambda_b^2 \lambda_a C_3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \nu_b^2 > \frac{3C_3 \lambda_a \lambda_b^2}{(\lambda_a + \lambda_b)^2}. \quad (8.56)$$

Условие (8.56) является только необходимым, но не достаточным. Тем не менее оно все же любопытно. Разработчикам центрифуг хорошо известно, что для улучшения качества работы центрифуги надо по возможности увеличивать мощность двигателя, которая характеризуется параметром ν_b . Значение $\nu_b = \infty$ соответствует двигателю неограниченной мощности. Вместе с тем никакие неравенства типа (8.56) разработчикам, по всей вероятности, неизвестны. Кроме того, известно, что нужно стремиться увеличивать осевой момент инерции несущего тела, на котором закреплен статор двигателя. Но количественных ограничений до сих пор не было установлено. И увеличение мощности двигателя, и увеличение осевого момента инерции λ_a несущего тела связаны с ростом веса центрифуги. Последний показатель очень

важен для переносных медицинских центрифуг, используемых для очистки крови. Например, при землетрясении в Спитаке погибло свыше тысячи людей, большинство из которых погибло в результате токсикации крови. Если бы после извлечения их из-под развалин удалось бы немедленно произвести очистку их крови с помощью центрифуги, то многие и многие остались бы в живых. Нередко медицинские центрифуги приходится поднимать, например, на шестой этаж к нетранспортабельному больному. Короче говоря, вес нельзя увеличивать без уменьшения потребительских свойств центрифуги, и, следовательно, неравенства типа (8.56), увязывающие между собой основные параметры центрифуги C_3 , ν_b , λ_a , очень важны при проектировании центрифуг. Отсутствие неравенств типа (8.56) в традиционных методиках расчета центрифуг объясняется тем, что методы динамики твердого тела в этих методиках практически не используются. Более того, применение этих методов в их классической трактовке без применения вектора поворота ведет к чрезвычайно громоздким уравнениям и вычислениям, на которые авторы потратили очень много времени и не сумели довести их до обозримых результатов. Правда, это не относится к крутильно-вращательным движениям гиростата. Впрочем, мы отвлеклись, ибо вопросы проектирования реальных центрифуг здесь не рассматриваются.

Условия (8.56) будут достаточными для существования трех отрицательных корней уравнения (8.54), если для отрицательных корней уравнения (8.55) будут справедливы неравенства

$$|p_1| > |p_2|, \quad \mathcal{F}(p_1) > 0, \quad \mathcal{F}(p_2) < 0.$$

С теоретической точки зрения для нас важен только факт убывания переменных x и θ с ростом времени:

$$t \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad |\theta| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow 0. \quad (8.57)$$

Условие (8.57) выполняется благодаря указанным выше условиям Рауса–Гурвица. При больших значениях времени в силу (8.57) из последнего уравнения системы (8.53) следует, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью

$$\dot{\alpha} = \omega_b. \quad (8.58)$$

Этот режим стационарного вращения является основным рабочим режимом, например, центрифуги. Теперь необходимо исследовать устойчивость стационарных вращений.

8.2.3. Устойчивость стационарных вращений ротора гиростата на упругом основании

При стационарных вращениях вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ равен нулю, а угловая скорость вращения ротора $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_b$ постоянна. Рассмотрим возмущенное движение гиростата, в котором вектор $\boldsymbol{\theta}$ мал, а угловая скорость $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\chi}$, где $\boldsymbol{\chi}$ мал по модулю. Линеаризуем систему (8.48), (8.49) по $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\chi}$. При этом возмущенная $\boldsymbol{\Omega}$ также мала. Тогда из (8.48), (8.49) вытекает следующая система уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\boldsymbol{\theta}} + [(\lambda - \mu) \mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + \lambda_b \boldsymbol{\chi}] \dot{\mathbf{k}} - \lambda_b \boldsymbol{\omega}_b \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} + \\ + C_1 [\boldsymbol{\theta} - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k}] + C_3 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{k} = \mathbf{0}, \\ \lambda_b \dot{\boldsymbol{\chi}} + \nu_b \boldsymbol{\chi} + \lambda_b \mathbf{k} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} = 0. \end{aligned} \quad (8.59)$$

Вектор $\boldsymbol{\theta}$ представим в виде суммы:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{y} \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (8.60)$$

Тогда система (8.59) распадается на две независимые системы:

$$\mu \ddot{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda_b \boldsymbol{\omega}_b \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} + C_1 \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (8.61)$$

$$\lambda \ddot{\boldsymbol{y}} + C_3 \boldsymbol{y} + \lambda_b \dot{\boldsymbol{\chi}} = 0, \quad \lambda_b \ddot{\boldsymbol{y}} + \lambda_b \dot{\boldsymbol{\chi}} + \nu_b \boldsymbol{\chi} = 0. \quad (8.62)$$

Что касается системы (8.62), то она уже была исследована в предыдущем разделе, где было показано, что с ростом времени функции $\boldsymbol{\chi}$ и \boldsymbol{y} экспоненциально затухают. Поэтому остается исследовать уравнение (8.61). Оно линейно, и потому для построения общего решения достаточно найти два линейно независимых частных решения. Последние будем искать в виде

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{p} \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \text{const}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (8.63)$$

Геометрически (8.63) означает, что $\boldsymbol{\gamma}$ ищется в виде постоянного по модулю вектора, вращающегося вокруг \mathbf{k} с постоянной угловой скоростью \boldsymbol{p} . Приняв во внимание уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{p} \mathbf{k}) = \boldsymbol{p} \mathbf{k} \times \mathbf{Q}(\boldsymbol{p} \mathbf{k}),$$

вычислим производные $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{p} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \ddot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{p} \mathbf{k} \times (\boldsymbol{p} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}) = -\boldsymbol{p}^2 \boldsymbol{\gamma}.$$

Подставив эти выражения в (8.61), получим

$$(-\mu p^2 + \lambda_b \omega_b p + C_1) \gamma = 0.$$

Таким образом, пришли к характеристическому уравнению

$$\mu p^2 - \lambda_b \omega_b p - C_1 = 0. \quad (8.64)$$

Корни уравнения (8.64) находятся по формуле

$$p_{1,2} = \frac{\lambda_b \omega_b \pm \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4C_1 \mu}}{2\mu}. \quad (8.65)$$

Из (8.65) видно, что p_1 и p_2 вещественны, но имеют разные знаки. Общее решение уравнения (8.61) имеет вид

$$\gamma = Q(p_1 tk) \cdot a_1 + Q(p_2 tk) \cdot a_2, \quad a_1 \cdot k = 0, \quad a_2 \cdot k = 0. \quad (8.66)$$

Отсюда видим, что вектор γ есть суперпозиция двух вращающихся векторов, причем они вращаются в разных направлениях. Постоянные векторы a_1 и a_2 находятся по начальным условиям. При любых начальных условиях решение (8.66) остается ограниченным, т. е. режим стационарного вращения ротора гиростата является устойчивым. Заметим, однако, что этот вывод получен в предположении идеальной сбалансированности гиростата как статической (центр инерции расположен на оси симметрии гиростата), так и динамической, когда главная ось инерции несущего тела направлена по оси вращения. Полученное решение позволяет удовлетворить произвольным начальным условиям при условии малости начальных отклонений. Полный анализ решения будет проведен в подразделе 8.2.5.

8.2.4. Движения гиростата с неуравновешенным ротором при малых углах поворота несущего тела

Если гиростат рассматривать как простейшую модель центрифуги, то необходимо учитывать возможную неуравновешенность ротора. В этом случае рассматриваемую систему уже, строго говоря, нельзя назвать гиростатом, поскольку распределение масс в ней зависит от движения. С другой стороны, можно считать, что неуравновешенность возникает при подвешивании к ротору системы грузов, которые неуравновешенны. При проектировании центрифуг важнейшей характеристикой является допустимый дисбаланс подвешиваемого груза. Чем больший дисбаланс допускает центрифуга, тем выше ее

качество и потребительские свойства. В данной работе в качестве дисбаланса закрепим на роторе сосредоточенный груз массой m .

Тогда для вектора кинетического момента получим выражение

$$\mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{P}_b \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_b^T \cdot \boldsymbol{\omega}_b, \quad (8.67)$$

где

$$\mathbf{C} = ml^2(\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (8.68)$$

причем \mathbf{n} является ортом вектора, направленного от неподвижного ротора, к сосредоточенному грузу, l есть расстояние от неподвижной точки до дисбаланса. Считаем, что вектор \mathbf{n} мало отличается от вектора \mathbf{k} . Представим вектор $l\mathbf{n}$ в виде

$$l\mathbf{n} = l_1\mathbf{k} + l_2\mathbf{m}, \quad l_1^2 + l_2^2 = l^2, \quad |\mathbf{m}| = 1, \quad l_2^2 \ll l_1^2. \quad (8.69)$$

В дальнейшем тензор \mathbf{C} будем считать малым. Согласно (8.7) и (8.9) имеем

$$\mathbf{P}_b = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}), \quad \boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega} + \dot{\alpha}\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}. \quad (8.70)$$

Примем, что вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$ несущего тела мал. Тогда

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} + \gamma\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (8.71)$$

Угловые скорости несущего тела и ротора вычисляются по формулам

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\omega}_b = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\alpha}\mathbf{k} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}, \quad (8.72)$$

т. е. вектор $\boldsymbol{\omega}$ мал, а вектор $\boldsymbol{\omega}_b$ таковым не является. С учетом того, что последнее слагаемое в выражении (8.67) для кинетического момента мало из-за малости тензора \mathbf{C} , то в нем оставим только главную (не малую) часть вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_b$. Тогда линейризованное по $\boldsymbol{\theta}$ выражение для кинетического момента после несложных преобразований с учетом (8.71), (8.72) принимает вид

$$\mathcal{L} = \mu\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda\dot{\gamma}\mathbf{k} + \lambda_b\dot{\alpha}\mathbf{k} - \lambda_b\dot{\alpha}\mathbf{k} \times \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\alpha}\mathbf{k}. \quad (8.73)$$

Наиболее существенное отличие данного случая от предыдущего состоит в том, что тензор $\mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k})$ не уходит из выражения для кинетического момента. Однако при сделанных предположениях этот тензор попадет только в правую часть уравнений движения.

Необходимо еще немного преобразовать последнее слагаемое в (8.73). Тензор \mathbf{C} , определенный формулой (8.68), перепишем в другом виде. Для этого вектор \mathbf{n} представим в виде разложения

$$\mathbf{n} = \cos u \mathbf{k} + \sin u \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad l_1 = l \cos u, \quad l_2 = l \sin u, \quad (8.74)$$

где \mathbf{u} — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{k} , причем $|\mathbf{u}| \ll 1$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \cdot \mathbf{k} &= m l^2 (\mathbf{k} - \cos u (\cos u \mathbf{k} + \sin u \mathbf{m})) = \\ &= -m l^2 (\cos u \sin u \mathbf{m} - \sin^2 u \mathbf{k}) \approx -m l^2 u \mathbf{m}. \end{aligned}$$

Итак, в линейном приближении для вектора кинетического момента имеем выражение

$$\mathcal{L} = \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} + \mu \dot{\gamma} + \lambda \dot{y} \mathbf{k} - \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma} - \dot{\alpha} m l^2 u \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad (8.75)$$

где единичный вектор \mathbf{m} ортогонален \mathbf{k} . Примем дополнительно предположение, что двигатель имеет неограниченную мощность и в состоянии поддерживать заданную угловую скорость вращения ротора вокруг собственной оси. Тогда справедливо равенство

$$\dot{\alpha} = \omega_b = \text{const}, \quad \alpha = \omega_b t. \quad (8.76)$$

Запишем второй закон динамики:

$$\dot{\mathcal{L}} + \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{C}_3 y \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

или в проекциях на ось \mathbf{k} и плоскость, ортогональную \mathbf{k} :

$$\lambda \ddot{y} + \mathbf{C}_3 y = 0, \quad (8.77)$$

$$\mu \ddot{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda_b \omega_b \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{C}_1 \boldsymbol{\gamma} = m l^2 u \omega_b^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}). \quad (8.78)$$

В качестве начальных условий принимаем

$$t = 0: \quad y = y_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad (8.79)$$

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_0. \quad (8.80)$$

Решение задачи (8.77), (8.79) очевидно и имеет вид

$$y = y_0 \cos(pt) + \frac{\dot{y}_0}{p} \sin(pt), \quad p = \sqrt{C_3/\lambda}. \quad (8.81)$$

Задача (8.78), (8.80) немногим сложнее. Частное решение неоднородного уравнения (8.77) ищем в виде

$$\boldsymbol{\gamma}_* = \Gamma_* \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}}_* = \omega_b \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}_*, \quad \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_* = -\omega_b^2 \boldsymbol{\gamma}_*.$$

Подставляя эти выражения в (8.78), получаем

$$(\mathbf{C}_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2) \Gamma_* \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}) = m l^2 u \omega_b^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}).$$

Таким образом, частное решение уравнения (8.78) определяется выражением

$$\boldsymbol{\gamma}_* = \frac{ml^2 u \omega_b^2}{C_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}). \quad (8.82)$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (8.78), уже было найдено в подразделе 8.2.3. Таким образом, общее решение уравнения (8.78) имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}(p_1 \mathbf{t} \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}(p_2 \mathbf{t} \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 + \frac{ml^2 u \omega_b^2}{C_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\omega_b \mathbf{t} \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}), \quad (8.83)$$

где величины p_1 и p_2 определены выражением (8.65). По (8.83) вычисляем

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\gamma}} &= p_1 \mathbf{Q}(p_1 \mathbf{t} \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_1) + p_2 \mathbf{Q}(p_2 \mathbf{t} \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{a}_2) - \\ &\quad - \frac{ml^2 u \omega_b^3}{C_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\omega_b \mathbf{t} \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем найти постоянные векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 по начальным условиям (8.80):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \frac{ml^2 u \omega_b^2}{C_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{k} \times \mathbf{m} &= \boldsymbol{\gamma}_0, \\ p_1 \mathbf{k} \times \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{k} \times \mathbf{a}_2 - \frac{ml^2 u \omega_b^3}{C_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{m} &= \dot{\boldsymbol{\gamma}}_0. \end{aligned} \quad (8.84)$$

Последнее условие удобнее переписать в другой форме, которая получается после векторного умножения обеих частей этого условия на вектор \mathbf{k} :

$$p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 + \frac{ml^2 u \omega_b^3}{C_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{k} \times \mathbf{m} = -\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}_0. \quad (8.85)$$

Решение системы (8.84) и (8.85) выписывается стандартным образом, но здесь оно не приводится. Из решения (8.83) видим, что в неуровновешенном гиростате могут возникать резонансы при $\mu > \lambda_b$, но могут и не возникать, если $\lambda_b \geq \mu$. В реальных центрифугах, как правило, экваториальный момент инерции μ в несколько раз превышает значение осевого момента инерции λ_b . Поэтому в реальных центрифугах все-таки приходится проходить через резонанс, что приводит к возникновению крайне нежелательных поперечных колебаний. Амплитудно-частотная характеристика системы имеет достаточно стандартный вид с одним пиком на резонансной частоте

$$\omega_b^2 = \frac{C_1}{\mu - \lambda_b}. \quad (8.86)$$

Экспериментальные данные показывают, что характер амплитудно-частотной характеристики несколько иной. А именно, вблизи частоты (8.86) имеется два ярко выраженных пика. Причина этого явления в том, что, как будет показано в подразделе 8.2.6, тензор инерции несущего тела нельзя считать трансверсально-изотропным.

8.2.5. Определение углов Эйлера

В предыдущем разделе задача решалась в терминах вектора поворота. В динамике твердого тела значительно более распространенными являются углы Эйлера. Различия этих двух подходов весьма значительны. Даже для малого вектора поворота углы Эйлера оказываются немалыми. Более того, даже при малых углах нутации подход, основанный на применении углов Эйлера, приводит к нелинейному уравнению для угла нутации. В этом разделе будет показано, как определить углы Эйлера по заданному вектору поворота.

Представим тензор поворота несущего тела через углы Эйлера:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}) = \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}') \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}), \quad (8.87)$$

где

$$\beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{e}' = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0. \quad (8.88)$$

Найдем вектор поворота, отвечающий композиции (8.87) с учетом того, что угол нутации ϑ и угол β являются малыми, хотя ни угол прецессии ψ , ни угол собственного вращения φ малыми не являются. Для малых ϑ и β имеем

$$\mathbf{P} = (\mathbf{E} + \vartheta \mathbf{e}' \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{E} + \beta \mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} + (\vartheta \mathbf{e}' + \beta \mathbf{k}) \times \mathbf{E} + \text{малые 2-го порядка}.$$

Отсюда видим, что в обозначениях подраздела 8.2.4:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{y} \mathbf{k} = \vartheta \mathbf{e}' + \beta \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} = \vartheta \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{y} = \beta. \quad (8.89)$$

Вращающийся вектор нутации $\boldsymbol{\gamma}$ был найден в предыдущем подразделе — см. выражение (8.83). Согласно (8.83) и (8.89) имеем

$$\vartheta \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} = \mathbf{Q}(p_1 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}(p_2 t \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 + \frac{m l^2 u \omega_b^2}{C_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}(\omega_b t \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}),$$

или после умножения этого равенства на $\mathbf{Q}^\top(\psi \mathbf{k})$ слева:

$$\begin{aligned} \vartheta \mathbf{m} = & \mathbf{Q}((p_1 t - \psi) \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}((p_2 t - \psi) \mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}_2 + \\ & + \frac{m l^2 u \omega_b^2}{C_1 - (\mu - \lambda_b) \omega_b^2} \mathbf{Q}((\omega_b t - \psi) \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}). \end{aligned} \quad (8.90)$$

Здесь принято $\mathbf{e} = \mathbf{m}$, так как выбор единичного вектора \mathbf{e} в представлении тензора поворота (8.87) безразличен при условии, что $\mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0$. Регулярной прецессией называют движение, при котором угол нутации ϑ сохраняет постоянное значение. Из выражения (8.90) видно, что регулярная прецессия возможна в следующих трех случаях:

- а) $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{p}_1 \mathbf{t}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ (дисбаланс отсутствует);
- б) $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{p}_2 \mathbf{t}$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ (дисбаланс отсутствует);
- в) $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega}_b \mathbf{t}$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ (чисто вынужденное вращение).

Все перечисленные случаи реализуются только при специальных начальных условиях.

Вернемся к определению углов Эйлера. Угол нутации ϑ и угол прецессии $\boldsymbol{\psi}$ находятся из равенства (8.90). Конкретное определение углов Эйлера проведем для частного случая начальных условий. Кроме того, будем считать, что дисбаланс отсутствует ($\mathbf{m} = \mathbf{0}$). С принципиальной точки зрения принимаемые упрощения совершенно несущественны, но они сильно упрощают конкретные вычисления.

Итак, принимаем

$$\mathbf{t} = \mathbf{0}: \quad \boldsymbol{\gamma} = \vartheta_0 \mathbf{m}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}. \quad (8.91)$$

Условия (8.84), (8.85) при принятых ограничениях записываются в виде

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \vartheta_0 \mathbf{m}, \quad p_1 \mathbf{a}_1 + p_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}. \quad (8.92)$$

Решение этой системы дается выражениями

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\vartheta_0 p_2}{p_1 - p_2} \mathbf{m}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\vartheta_0 p_1}{p_1 - p_2} \mathbf{m}. \quad (8.93)$$

Выражение (8.90) с учетом (8.93) и условия $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ переписывается в виде

$$\vartheta \mathbf{m} = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} \left[-p_2 \mathbf{Q}((p_1 \mathbf{t} - \boldsymbol{\psi}) \mathbf{k}) + p_1 \mathbf{Q}((p_2 \mathbf{t} - \boldsymbol{\psi}) \mathbf{k}) \right] \cdot \mathbf{m}. \quad (8.94)$$

Равенство (8.94) эквивалентно двум скалярным уравнениям, которые можно записать в виде

$$\vartheta = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} \left[(p_1 \cos p_2 t - p_2 \cos p_1 t) \cos \psi + (p_1 \sin p_2 t - p_2 \sin p_1 t) \sin \psi \right]; \quad (8.95)$$

$$0 = (p_1 \sin p_2 t - p_2 \sin p_1 t) \cos \psi - (p_1 \cos p_2 t - p_2 \cos p_1 t) \sin \psi. \quad (8.96)$$

Рассмотрим сначала равенство (8.96). Введем обозначения:

$$A(t) = p_1 \cos p_2 t - p_2 \cos p_1 t, \quad B(t) = p_1 \sin p_2 t - p_2 \sin p_1 t. \quad (8.97)$$

Тогда нетрудно получить, что

$$A^2 + B^2 = (p_1 - p_2)^2 + 2p_1p_2(1 - \cos(p_1 - p_2)t). \quad (8.98)$$

Согласно (8.65) имеем

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{1}{\mu} \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4C_1\mu} > 0, \\ p_1 p_2 &= \frac{C_1}{\mu} < 0, \quad p_1 + p_2 = \frac{\lambda_b \omega_b}{\mu} > 0. \end{aligned} \quad (8.99)$$

С учетом этих неравенств получаем:

$$A^2 + B^2 \geq (p_1 - p_2)^2 + 4p_1p_2 = (p_1 + p_2)^2.$$

Рассмотрим два случая: $\omega_b = 0$ и $\omega_b \neq 0$. В первом случае $p_2 = -p_1$ и уравнение (8.96) дает

$$2 \cos(p_1 t) \sin \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = 0.$$

Других значений ψ быть не может, если допустить, что функция $\psi(t)$ непрерывна. На самом деле это допущение окажется неверным, но об этом речь пойдет ниже. Если $\psi = 0$, то равенство (8.95) дает выражение для угла нутации

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos(p_1 t), \quad (8.100)$$

т. е. получили обычное колебание физического маятника. Обратим внимание, что угол нутации по (8.100) — знакопеременная функция.

Рассмотрим второй случай, когда $\omega_b \neq 0$. В этом случае $A^2 + B^2$ строго больше нуля, и уравнение (8.96) можно переписать в виде

$$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \psi - \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \psi = 0.$$

Введем функцию $\alpha(t)$, такую, что

$$\sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (8.101)$$

Поскольку $B(0) = 0$, $A(0) = p_1 - p_2 > 0$, то $\alpha(0) = 0$. В обозначениях (8.101) уравнение (8.96) принимает вид

$$\sin(\psi - \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = \alpha(t). \quad (8.102)$$

Здесь использованы начальные условия $\psi(0) = \alpha(0) = 0$. Итак,

$$\begin{aligned}\cos \psi &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{p_1 \cos p_2 t - p_2 \cos p_1 t}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 2p_1 p_2 (1 - \cos(p_1 - p_2)t)}}, \\ \sin \psi &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{p_1 \sin p_2 t - p_2 \sin p_1 t}{\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 2p_1 p_2 (1 - \cos(p_1 - p_2)t)}}.\end{aligned}\quad (8.103)$$

Подставляя (8.103) в (8.95), получаем выражение для угла нутации ϑ :

$$\vartheta(t) = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 2p_1 p_2 (1 - \cos(p_1 - p_2)t)}. \quad (8.104)$$

Это выражение получено в предположении, что ω_b не равно нулю, но величина $\omega_b > 0$ может быть сколь угодно малой. Поэтому естественно думать, что выражение (8.104) не потеряет смысл и в пределе при $\omega_b \rightarrow 0$.

Устремляя в (8.104) величину ω_b к нулю, получаем

$$\vartheta_*(t) = \vartheta_0 |\cos p_1 t|. \quad (8.105)$$

Сравнивая (8.105) с (8.100), замечаем, что они существенно различаются между собой. Следовательно, где-то была допущена ошибка или принято неверное допущение. Возвращаясь к выводу соотношения (8.100), обращаем внимание, что оно было получено в предположении, что функция $\psi(t)$ непрерывна. Действительно ли это так? Проанализируем выражения (8.103) при $\omega_b \rightarrow 0$, т. е. при $p_2 \rightarrow -p_1$. Второе выражение (8.103) при $\omega_b \rightarrow 0$ дает, что

$$\sin \psi = 0. \quad (8.106)$$

Первое выражение (8.103) при $\omega_b \rightarrow 0$, т. е. при $p_2 \rightarrow -p_1$, приводит к соотношению

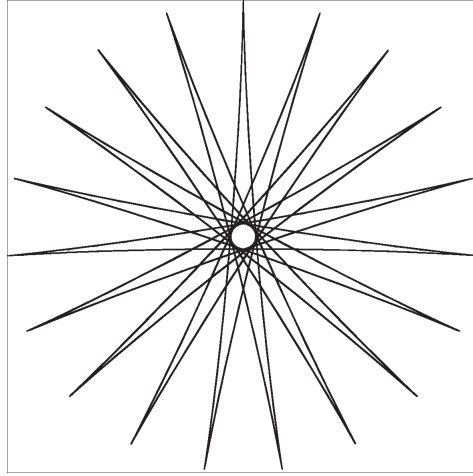
$$\cos \psi = \frac{2p_1 t \cos p_1 t}{2p_1 t |\cos p_1 t|} = \text{sign} \cos(p_1 t). \quad (8.107)$$

Из (8.106) и (8.107) следует, что функция $\psi(t)$ в пределе при $\omega_b \rightarrow 0$ является периодической с периодом 2π , но при этом она оказывается разрывной:

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq p_1 t < \pi/2; \\ \pi, & \pi/2 < p_1 t < 3\pi/2; \\ 0, & 3\pi/2 < p_1 t \leq 2\pi. \end{cases} \quad (8.108)$$

Появление разрывных функций при описании поворотов в ситуациях, когда физический процесс непрерывен, есть особенность, которую следует помнить. Угол прецессии по заданному вектору поворота γ можно найти другим способом. А именно, по (8.89) имеем

$$\gamma(t) = \vartheta(t) \mathbf{Q}(\psi(t) \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \text{const.}$$

Рис. 8.2. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.1$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \dot{\vartheta} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi} \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} + \dot{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{k} \times \vartheta \mathbf{Q}(\boldsymbol{\psi} \mathbf{k}) \cdot \mathbf{e} = \frac{\dot{\vartheta}}{\vartheta} \boldsymbol{\gamma} + \dot{\boldsymbol{\psi}} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}.$$

Умножая обе части этого равенства векторно на $\boldsymbol{\gamma}$, получаем

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{1}{|\boldsymbol{\gamma}|^2} \boldsymbol{\gamma} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}, \quad |\boldsymbol{\gamma}|^2 = \vartheta^2.$$

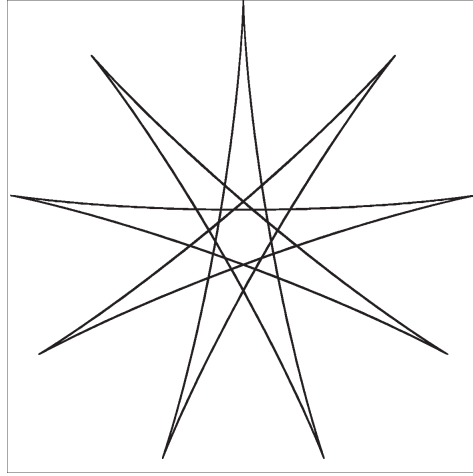
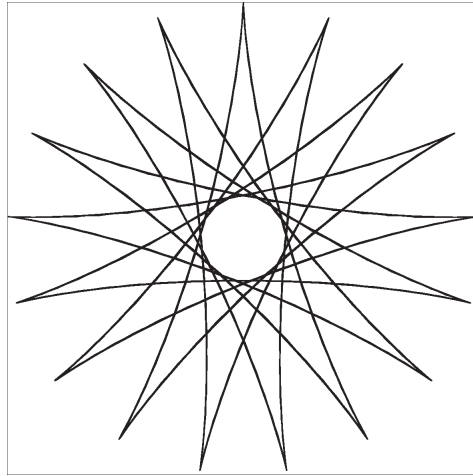
После несложных вычислений это выражение принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) (1 - \cos(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) t)}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 + 2\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 (1 - \cos(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) t)}. \quad (8.109)$$

Это выражение, конечно, можно получить из выражений (8.103), продифференцировав, например, второе из этих выражений и затем воспользовавшись первым.

Скорость прецессии $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t)$, определенная выражением (8.109), непрерывна, если знаменатель в (8.109) не может обращаться в нуль. Последнее возможно только при $\boldsymbol{\omega}_b = \mathbf{0}$, т. е. при $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. При этом скорость прецессии $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ равна нулю при всех t , при которых знаменатель в (8.109) не обращается в нуль. Запишем выражение (8.109) в момент времени $t = \pi/(2\mathbf{p}_1)$:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \left(1 - \sin \frac{\pi \mathbf{p}_2}{2\mathbf{p}_1}\right)}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2 + 2\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \left(1 - \sin \frac{\pi \mathbf{p}_2}{2\mathbf{p}_1}\right)}.$$

Рис. 8.3. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.2$ Рис. 8.4. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.3$

Раскрывая здесь неопределенность, получаем, что при $\mathbf{p}_2 \rightarrow -\mathbf{p}_1$ скорость прецессии равна ∞ . Если же $\mathbf{t} \neq \pi/(2\mathbf{p}_1)$, то скорость прецессии при $\mathbf{p}_2 \rightarrow -\mathbf{p}_1$ обращается в нуль. Найдем траекторию апекса, т. е. точки, лежащей на верхнем конце оси ротора. Если расстояние от неподвижной точки до апекса обозначить через l , то вектор положения \mathbf{R}_a апекса определяется выражением

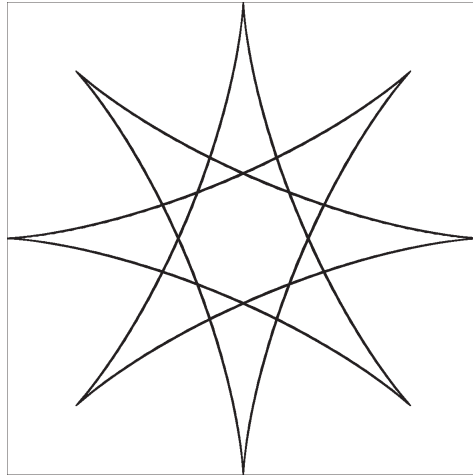
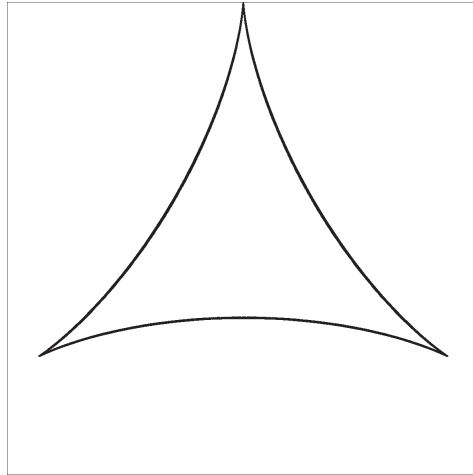
$$\mathbf{R}_a = l\mathbf{P}_b \cdot \mathbf{k} = l\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}(\alpha\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = l\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}.$$

Вектор положения \mathbf{R}_a определяется только тензором поворота несущего тела. Для малых поворотов получим

$$\mathbf{R}_a = l\mathbf{P} \cdot \mathbf{k} = l(\mathbf{E} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{k} = l(\mathbf{k} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}) = l(\mathbf{k} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{k}).$$

Поскольку для вращающегося вектора нутации $\boldsymbol{\gamma}$ имеем выражение (8.89), то вектор \mathbf{R}_a можно представить в виде

$$\mathbf{R}_a = l \left[\mathbf{k} + (\boldsymbol{\vartheta} \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}) \times \mathbf{k} \right] = l\mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} + \boldsymbol{\vartheta}\mathbf{m} \times \mathbf{k}).$$

Рис. 8.5. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.4$ Рис. 8.6. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.5$

Введем ортонормированную тройку векторов \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{k} так, чтобы

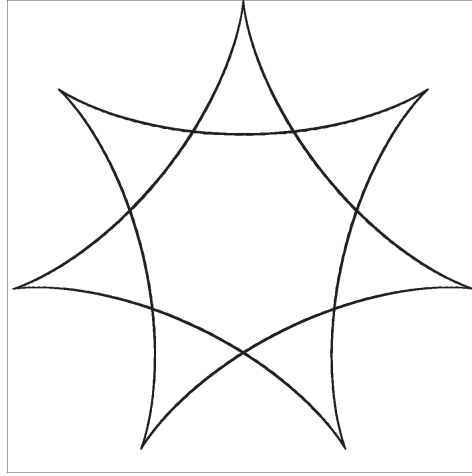
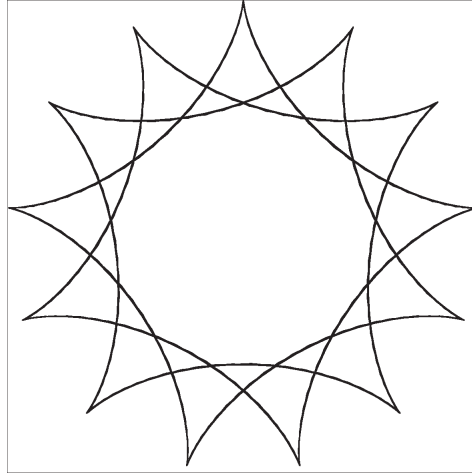
$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{m}, \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{k}.$$

Тогда вектор \mathbf{R}_a можно переписать в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_a &= l\mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} - \vartheta\mathbf{e}_2) = \\ &= l[\mathbf{k} - \vartheta(\cos\psi\mathbf{e}_2 - \sin\psi\mathbf{e}_1)] = l(\mathbf{k} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2), \end{aligned} \tag{8.110}$$

где

$$\begin{aligned} x &= \vartheta \sin \psi = \frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} (p_1 \sin p_2 t - p_2 \sin p_1 t), \\ y &= -\vartheta \cos \psi = -\frac{\vartheta_0}{p_1 - p_2} (p_1 \cos p_2 t - p_2 \cos p_1 t). \end{aligned} \tag{8.111}$$

Рис. 8.7. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.6$ Рис. 8.8. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.7$

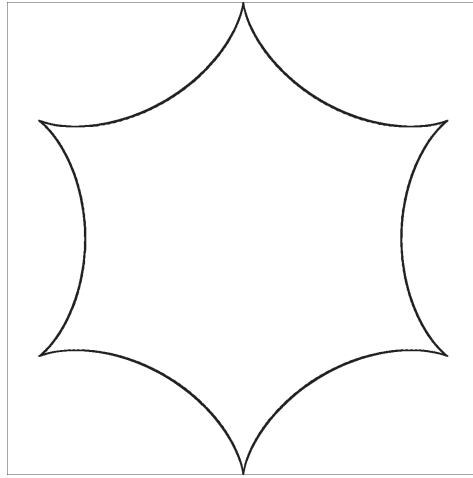
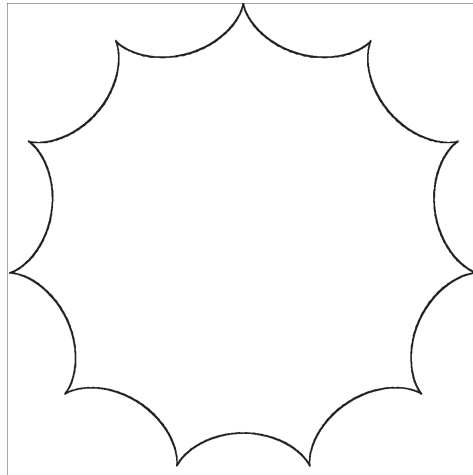
Этими выражениями определяется проекция траектории апекса на плоскость, ортогональную \mathbf{k} . Введем обозначения:

$$p_2 = -p_1(1-\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{p_1 + p_2}{p_1} = \frac{2\lambda_b \omega_b}{\lambda_b \omega_b + \sqrt{\lambda_b^2 \omega_b^2 + 4C_1 \mu}}, \quad \tau = p_1 t. \quad (8.112)$$

Тогда параметрическое задание траектории апекса (8.111) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\vartheta_0}{2-\varepsilon} (\sin(1-\varepsilon)\tau - (1-\varepsilon)\sin \tau), \\ y &= -\frac{\vartheta_0}{2-\varepsilon} (\cos(1-\varepsilon)\tau + (1-\varepsilon)\cos \tau). \end{aligned} \quad (8.113)$$

Параметр ε , как это видно из (8.112), меняется в пределах $0 < \varepsilon < 1$, причем с ростом скорости двигателя ω_b параметр ε приближается к едини-

Рис. 8.9. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.8$ Рис. 8.10. Траектория апекса ротора при $\varepsilon = 0.9$

це. Траектории (8.113) при разных значениях параметра ε представлены на рис. 8.2–8.10. На рисунках множитель $(-\vartheta_0)$ принят равным единице.

Интересно оценить порядок параметра ε для каких-либо реальных значений ω_b и моментов инерции λ_b и μ .

Примем следующие значения параметров:

$$\lambda_b = 350 \text{ кг} \cdot \text{см}^2, \quad \mu = 300 \text{ кг} \cdot \text{см}^2, \quad C_1 = 17500 \text{ кг} \cdot \text{см},$$

взятые для реально действующей медицинской низкооборотной центрифуги со скоростями

$$500 \text{ об/мин} < \omega_b < 5000 \text{ об/мин}.$$

Примем $\omega_b = 100$ рад/с, т. е. ω_b равна примерно 1000 об/мин. Тогда

$$\varepsilon \approx 0,25.$$

8.2.6. Движения гиростата на упругом основании при малых поворотах несущего тела с произвольным тензором инерции

При изготовлении центрифуг точности исполнения ротора и его балансировке уделяется особое внимание. Дисбаланс возникает из-за неточного распределения располагаемых на планшайбе (верхней части ротора) сепарируемых масс. Поэтому тензор инерции ротора вполне допустимо считать трансверсально-изотропным с осью изотропии, направленной по оси ротора. Иначе обстоит дело с тензором инерции несущего тела, в котором закрепляется статор электродвигателя. Как правило, трансверсальную изотропию несущего тела обеспечить не удастся. Впрочем, к этому, видимо, никто и не стремится. Характерным при этом является то, что одна из главных осей тензора инерции несущего тела мало отличается от оси изотропного ротора. Это обстоятельство будет учтено ниже.

Тензор инерции несущего тела в соответствии со сказанным представим в виде спектрального разложения

$$\mathbf{A} = \lambda_a \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \mu_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2. \quad (8.114)$$

Повторяя рассуждения подраздела 8.2.4, для вектора кинетического момента получаем выражение

$$\mathcal{L} = \Theta \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} + (\lambda \dot{y} + \lambda_b \dot{\alpha}) \mathbf{k} - \lambda_b \dot{\alpha} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma} - \dot{\alpha} m l^2 u \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad (8.115)$$

где помимо обозначений, принятых в подразделе 8.2.4, введен тензор

$$\Theta = (\lambda_a + \lambda_b) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + (\mu_1 + \mu_b) \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + (\mu_2 + \mu_b) \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2. \quad (8.116)$$

Теперь вместо уравнений (8.77), (8.78) получаем следующие:

$$\lambda \ddot{y} + C_3 y = 0, \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_b, \quad (8.117)$$

$$\Theta \cdot \ddot{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda_b \omega_b \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}} + C_1 \boldsymbol{\gamma} = m l^2 u \omega_b^2 \mathbf{Q}(\alpha \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{m}). \quad (8.118)$$

Как видим, изменение произошло только в уравнении (8.118) — оно несколько усложнилось. Решение (8.118) уже нельзя построить столь же красиво, как для уравнения (8.78). Решение однородного уравнения (8.118) ищем в стандартном виде:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a} e^{i p t}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (8.119)$$

Подставляя (8.119) в уравнение (8.118) с отброшенной правой частью, получаем

$$(-p^2 \Theta \cdot \mathbf{a} - i \lambda_b \omega_b p \mathbf{k} \times \mathbf{a} + C_1 \mathbf{a}) e^{i p t} = \mathbf{0}.$$

Получили однородную систему линейных уравнений для плоского комплексного вектора \mathbf{a} . Определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\det [-\mathbf{p}^2(\Theta - \lambda \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) - i\lambda_b \omega_b \mathbf{p} \mathbf{k} \times \mathbf{E} + C_1(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k})] = 0.$$

В явном виде это уравнение записывается как

$$\Theta_1 \Theta_2 \mathbf{p}^4 - S \mathbf{p}^2 + C_1^2 = 0, \quad (8.120)$$

где

$$S = C_1(\Theta_1 + \Theta_2) + \lambda_b^2 \omega_b^2, \quad \Theta_1 = \mu_1 + \mu_b, \quad \Theta_2 = \mu_2 + \mu_b. \quad (8.121)$$

Корни уравнения (8.120) имеют вид

$$\mathbf{p}^2 = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4\Theta_1 \Theta_2 C_1^2}}{2\Theta_1 \Theta_2} > 0. \quad (8.122)$$

Положительность и вещественность \mathbf{p}^2 следует из положительности подкоренного выражения

$$S^2 - 4C_1^2 \Theta_1 \Theta_2 = C_1^2(\Theta_1 - \Theta_2)^2 + 2C_1^2(\Theta_1 + \Theta_2)\lambda_b^2 \omega_b^2 + \lambda_b^4 \omega_b^4 > 0.$$

Таким образом, имеем колебательный характер движения. Осталось построить частное решение уравнения (8.118). Для этого спроецируем уравнение (8.118) на главные оси тензора Θ , при этом вектор $\boldsymbol{\gamma}$ представим в виде разложения

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 \mathbf{d}_1 + \gamma_2 \mathbf{d}_2, \quad \mathbf{m} = h_1 \mathbf{d}_1 + h_2 \mathbf{d}_2.$$

Векторное уравнение (8.118) эквивалентно двум скалярным:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \ddot{\gamma}_1 + \lambda_b \omega_b \dot{\gamma}_2 + C_1 \gamma_1 &= -m l^2 u \omega_b^2 (\cos \alpha h_2 + \sin \alpha h_1), \\ \Theta_2 \ddot{\gamma}_2 - \lambda_b \omega_b \dot{\gamma}_1 + C_1 \gamma_2 &= m l^2 u \omega_b^2 (\cos \alpha h_1 - \sin \alpha h_2), \end{aligned} \quad (8.123)$$

где $\alpha = \omega_b t$.

Частные решения можно искать для двух случаев:

$$\text{а) } h_1 \neq 0, \quad h_2 = 0 \quad \text{и} \quad \text{б) } h_1 = 0, \quad h_2 \neq 0.$$

Рассмотрим первый случай⁴, когда $h_1 \neq 0, h_2 = 0$. Частное решение ищем в виде

$$\gamma_1 = \Gamma_1 \sin \omega_b t, \quad \gamma_2 = \Gamma_2 \cos \omega_b t.$$

⁴ Второй случай исследуется аналогично первому. Частное решение ищется в виде

$$\gamma_1 = \Gamma_1 \cos \omega_b t, \quad \gamma_2 = \Gamma_2 \sin \omega_b t,$$

при этом окончательные результаты и выводы полностью совпадают с теми, которые получены ниже для первого случая. (*Примеч. ред.*)

Подставляя эти выражения в (8.123), получаем

$$\begin{aligned} (C_1 - \omega_b^2 \Theta_1) \Gamma_1 - \lambda_b \omega_b^2 \Gamma_2 &= -ml^2 u \omega_b^2 h_1, \\ -\lambda_b \omega_b^2 \Gamma_1 + (C_1 - \omega_b^2 \Theta_2) \Gamma_2 &= ml^2 u \omega_b^2 h_1. \end{aligned} \quad (8.124)$$

Резонансные частоты определяются как нули определителя этой системы. Решая последнюю, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\frac{ml^2 u \omega_b^2 h_1 (C_1 - (\Theta_2 + \lambda_b) \omega_b^2)}{(C_1 - \Theta_1 \omega_b^2)(C_1 - \Theta_2 \omega_b^2) - \lambda_b^2 \omega_b^4}, \\ \Gamma_2 &= \frac{ml^2 u \omega_b^2 h_1 (C_1 - (\Theta_1 + \lambda_b) \omega_b^2)}{(C_1 - \Theta_1 \omega_b^2)(C_1 - \Theta_2 \omega_b^2) - \lambda_b^2 \omega_b^4}. \end{aligned} \quad (8.125)$$

Из (8.125) видно, что в данном случае имеются два резонанса, частоты которых определяются по формуле

$$\omega_b^2 = \frac{C_1}{2(\Theta_1 \Theta_2 - \lambda_b^2)} \left((\Theta_1 + \Theta_2) \pm \sqrt{(\Theta_1 - \Theta_2)^2 + 4\lambda_b^2} \right). \quad (8.126)$$

Если в (8.126) положить $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$, т. е. принять трансверсальную изотропию, то получим два значения для ω_b^2 :

$$\omega_{b,1}^2 = \frac{C_1}{\Theta - \lambda_b}, \quad \omega_{b,2}^2 = \frac{C_1}{\Theta + \lambda_b}. \quad (8.127)$$

Случай трансверсальной изотропии был рассмотрен в подразделе 8.2.4. Там было показано, что имеется всего один резонанс на частоте (8.86), совпадающий с первой из величин (8.127). Вторая частота в (8.127), казалось бы дает дополнительный резонанс, что находится в противоречии с анализом, проведенным в подразделе 8.2.4. На самом деле никакого противоречия нет, а вторая частота в (8.127) не является резонансной, в чем легко убедиться по формулам (8.125), числители которых при $\Theta_1 = \Theta_2$ на частоте $\omega_{b,2}^2$ также обращаются в нули. Действительно, в случае трансверсальной изотропии вместо (8.125) имеем

$$\Gamma_1 = -\frac{ml^2 u \omega_b^2 h_1}{C_1 - (\Theta - \lambda_b) \omega_b^2}, \quad \Gamma_2 = \frac{ml^2 u \omega_b^2 h_1}{C_1 - (\Theta - \lambda_b) \omega_b^2}.$$

Нетрудно видеть, что в случае $\omega_b^2 = \omega_{b,1}^2$ величины Γ_1 и Γ_2 обращаются в бесконечность, т. е. первая частота является резонансной. При $\omega_b^2 = \omega_{b,2}^2$ величины Γ_1 и Γ_2 остаются конечными: $\Gamma_1 = -ml^2 u h_1 / (2\lambda_b)$,

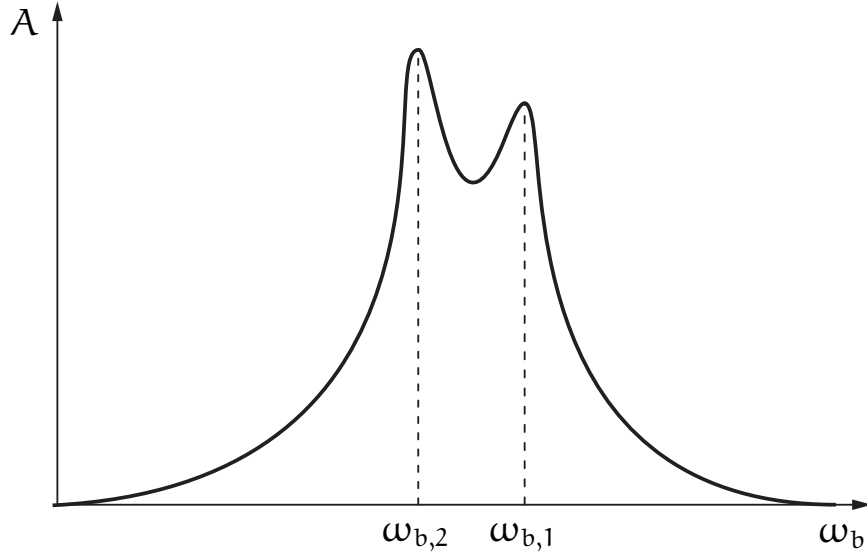


Рис. 8.11. Амплитудно-частотная характеристика реальной центрифуги

$\Gamma_2 = ml^2 u h_1 / (2\lambda_b)$. Следовательно, вторая частота не является резонансной. По сути это обусловлено тем, что в уравнениях (8.123) правые части, которые играют роль внешних воздействий, зависят от частоты ω_b , входящей в коэффициенты при первых производных γ_1 и γ_2 .

Рассмотрим случай, близкий к трансверсальной изотропии, когда

$$\Theta_1 = \Theta, \quad \Theta_2 = \Theta(1 + \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (8.128)$$

Тогда вместо (8.127) получаем с точностью до членов первого порядка малости:

$$\omega_{b,1}^2 = \frac{C_1}{\Theta - \lambda_b} \left(1 - \frac{\varepsilon\Theta}{\Theta - \lambda_b} \right), \quad \omega_{b,2}^2 = \frac{C_1}{\Theta + \lambda_b} \left(1 - \frac{\varepsilon\Theta}{\Theta + \lambda_b} \right). \quad (8.129)$$

Обе эти частоты являются резонансными. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Осевой момент ротора λ_b , как правило, значительно меньше экваториального момента $\Theta = \mu_a + \mu_b$ всего гиростата: $\lambda \ll \Theta$. Поэтому на самом деле частоты (8.129) оказываются близкими.

На рис. 8.11 показана типичная амплитудно-частотная характеристика центрифуги, снятая экспериментально.

В подразделе 8.2.4 показано, что для трансверсально-изотропного тензора инерции амплитудно-частотная характеристика имеет один пик на частоте (8.84), совпадающей при $\varepsilon = 0$ с частотой $\omega_{b,1}$. Характерное раздвоение пика на осциллограмме на предварительном этапе (до решения задачи аналитически) объяснялось следующим образом. Для трансверсально-изотропного

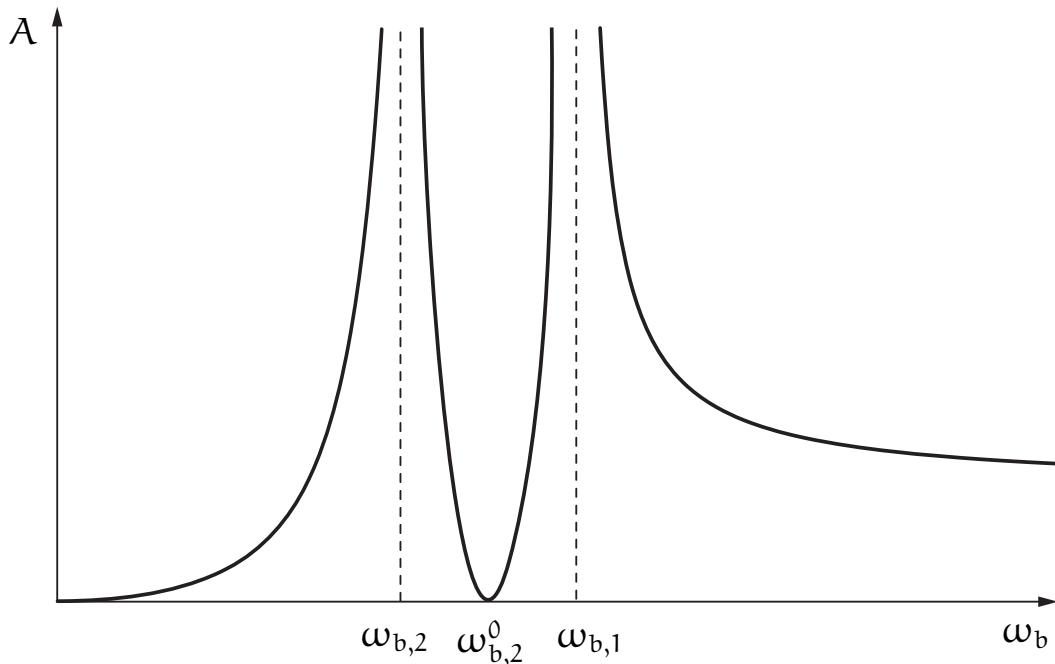


Рис. 8.12. Теоретическая амплитудно-частотная характеристика,

тензора инерции имеем кратную собственную частоту и один пик. При малом отклонении от трансверсальной изотропии эти кратные частоты слегка раздвигаются и возникают два пика, показанные на рис. 8.11.

Однако уже первые расчеты, приведенные в подразделе 8.2.4, показали, что это объяснение является неправильным. При трансверсально-изотропном тензоре инерции малые колебания гиростата с жестко закрепленным ротором действительно имеют кратную собственную частоту. Но при вращающемся роторе, как это видно из выражения (8.122), частоты раздвигаются и перестают быть кратными. Поэтому даже в этом случае амплитудно-частотная характеристика могла бы иметь два пика, если бы не особенность внешнего воздействия (правых частей уравнений (8.123)), отмеченная в рассуждении, следующим за формулами (8.127). Теоретическая амплитудно-частотная характеристика, вытекающая из (8.129), представлена на рис. 8.12.

Существующее трение ограничивает пики, а на частоте $\omega_{b,2}^0$ имеется антирезонанс⁵. Поскольку частоты $\omega_{b,1}$ и $\omega_{b,2}$ близки, то антирезонансный провал в характеристике очень узкий и в эксперименте оказался незамеченным. По-

⁵ Явление антирезонанса имеет место в колебательных системах с несколькими степенями свободы. Суть этого явления состоит в том, что при определенной частоте наблюдается ярко выраженный минимум амплитуды колебаний по одной из степеней свободы. (Примеч. ред.)

сле указанных трансформаций и получается кривая, очень похожая на экспериментальную кривую, представленную на рис. 8.11. Приведенное выше теоретическое объяснение наличия двух близких пиков на амплитудно-частотной характеристике, видимо, ранее не встречалось.

8.3. Динамика двухроторного гиростата на упругом основании

8.3.1. Основные уравнения при соосных роторах

Примем следующие ограничения. Роторы будем считать соосными, т. е. в формулах (8.33) примем, что $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{k}$. Энергию упругого основания зададим в виде квадратичной формы (8.37):

$$U(\theta^2, \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}C_1 (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{1}{2}C_3(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2.$$

Внешний момент примем в виде

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = -b\boldsymbol{\omega}_c + M\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad b > 0, \quad (8.130)$$

где $\boldsymbol{\omega}_c$ — угловая скорость “основного” ротора \mathcal{C} , причем ротор \mathcal{B} будем называть вспомогательным.

Первое слагаемое в правой части (8.130) соответствует случаю, когда на основной ротор действует момент трения. Напомним, что согласно (8.10) справедливо представление

$$\boldsymbol{\omega}_c = \boldsymbol{\omega} + \dot{\beta}\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad (8.131)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость несущего тела \mathcal{A} .

Наконец, примем еще одно допущение: будем считать, что двигатели имеют неограниченную мощность, так что относительные угловые скорости роторов $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$ являются наперед заданными функциями. При принятых допущениях основная система уравнений динамики двухроторного гиростата на упругом основании (8.33), (8.34) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{J} + b\boldsymbol{\Omega} + b\dot{\beta}\mathbf{k} + C_1\boldsymbol{\theta} + (C_3 - C_1)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{k} &= M\mathbf{k}, \\ \mathbf{J} &= \boldsymbol{\Theta} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \left(\lambda_b\dot{\alpha} + \lambda_c\dot{\beta}\right)\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{k}, \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (8.132)$$

Система (8.132) содержит два неизвестных вектора $\boldsymbol{\theta}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ и является замкнутой. В эту систему входит большое число конструктивных характеристик, которыми можно распорядиться при проектировании и выбирать их на основе каких-либо соображений. Пример такого выбора будет рассмотрен в следующем подразделе.

8.3.2. Двухроторный гиростат с шаровым тензором инерции на изотропном упругом основании

В этом разделе будет рассмотрена предельно упрощенная ситуация. Примем, что на гиростат не действуют внешние моменты, кроме реакции упругого основания, и внешнее трение отсутствует:

$$\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{M} = 0. \quad (8.133)$$

Далее примем, что вспомогательный ротор \mathcal{B} вращается так, что проекция суммарного кинетического момента обеих роторов равна нулю:

$$\lambda_b \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \lambda_c \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0. \quad (8.134)$$

Упругое основание будем считать изотропным:

$$C_1 = C_3 = C. \quad (8.135)$$

Наконец, примем, что суммарный тензор инерции гиростата является шаровым тензором:

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta \mathbf{E}, \quad (8.136)$$

хотя ни один из тензоров инерции \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} шаровым не является.

При сделанных допущениях система (8.132) предельно упрощается и сводится к следующей:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + C \boldsymbol{\theta} &= 0, \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad g \equiv \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (8.137)$$

Подробный анализ системы уравнений, отличающейся от (8.137) наличием диссипативного слагаемого и учетом нелинейности упругого основания

$$C = C(\theta), \quad C' > 0, \quad C(0) > 0, \quad (8.138)$$

проведен в разделе 7.5. Показано, в частности, что использование углов Эйлера приводит в этой задаче к трудно преодолимым проблемам. Однако существует другой путь, найденный до некоторой степени случайно, но тем не

менее весьма простой. Он основан на использовании правой и левой угловых скоростей и вектора поворота. Этот путь позволяет свести задачу к решению уравнения относительно $|\boldsymbol{\theta}|$. Хотя это уравнение имеет сложный вид, но при отсутствии диссипации оно интегрируется в квадратурах стандартным образом. Отметим, что уравнение для $|\boldsymbol{\theta}|$ остается нелинейным для сколь угодно малых углов нутации. Если же использовать вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$, то при малых углах нутации $|\boldsymbol{\theta}|$ для вектора $\boldsymbol{\theta}$ сразу получается линейное уравнение

$$\Theta \ddot{\boldsymbol{\theta}} + C(0)\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}.$$

В этом проявляется одно из преимуществ метода, основанного на использовании вектора поворота, по сравнению с методами, основанными на использовании углов Эйлера.

8.3.3. Регулярная прецессия гиростата на упругом основании и ее устойчивость

Выше было показано, что при некоторых упрощающих допущениях, которые в принципе реализуемы на практике, динамика гиростата на упругом основании сводится к полностью интегрируемой задаче. Здесь будет подробно рассмотрен один частный случай движения, а именно регулярная прецессия гиростата. В этом случае

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_0 = \text{const.} \quad (8.139)$$

Согласно уравнению (7.77) находится постоянная скорость прецессии $\dot{\psi}_0$:

$$\dot{\psi}_0^2 = \frac{C(\boldsymbol{\theta}_0) \boldsymbol{\theta}_0}{\Theta \sin \theta_0} \Rightarrow \psi(t) = \dot{\psi}_0 t + \psi_0. \quad (8.140)$$

Выпишем все основные характеристики регулярной прецессии. Вектор поворота по (7.68) и (8.139) имеет вид

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\theta}_0, \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\theta} = 0. \quad (8.141)$$

Отсюда для $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ следует выражение

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}(t). \quad (8.142)$$

Для угловой скорости получим выражение (2.136), которое в развернутом виде записывается так:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}).$$

Подставляя сюда выражение (8.142), получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}_0 \left((1 - \cos \theta_0) \mathbf{e} + \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}(t) \right). \quad (8.143)$$

Из выражений (8.141) и (8.143) видим, что при регулярной прецессии вектор поворота $\boldsymbol{\theta}(t)$ и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ ортогональны между собой, т. е. тело поворачивается вокруг одной оси, но вращается вокруг другой оси, ортогональной оси поворота. Заметим, что тело вращается с постоянной по модулю угловой скоростью

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = 2(1 - \cos \theta_0) \dot{\psi}_0^2.$$

Исследуем устойчивость регулярной прецессии. Для этого на исследуемое движение необходимо наложить малое возмущение общего вида и вывести так называемые уравнения в вариациях. Вывод последних, к сожалению, наталкивается на сравнительно громоздкие вычисления. Здесь возможны три различных подхода, приводящих к одним и тем же уравнениям.

Первый подход. Возмущение накладывается на вектор поворота. Рассмотрим возмущенный вектор поворота

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad |\varepsilon| \ll 1,$$

где вектор $\boldsymbol{\varphi}$ называется первой вариацией. Возмущенный вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon, \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \boldsymbol{\eta},$$

где $\boldsymbol{\eta}$ — первая вариация $\boldsymbol{\omega}$. Дифференцируя данное выражение по ε и полагая ε равным нулю, получаем

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}. \quad (8.144)$$

Возмущенное уравнение движения имеет вид

$$\Theta \dot{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon + \mathbf{C} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \mathbf{0}. \quad (8.145)$$

Пусть для простоты $\mathbf{C} = \text{const}$. Дифференцируя это уравнение по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем уравнения в вариациях:

$$\Theta \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}.$$

Сюда надо подставить выражение (8.144) и учесть, что вектор $\boldsymbol{\theta}$ зависит от времени. Этот подход неприятен тем, что получаются уравнения сложного вида.

Второй подход. Малое возмущение накладывается на тензор поворота

$$\mathbf{P}_\varepsilon = (\mathbf{E} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}). \quad (8.146)$$

Тогда возмущенная угловая скорость вычисляется легко:

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Однако достаточно громоздко вычисляется вектор поворота $\boldsymbol{\theta}_\varepsilon$, отвечающий тензору поворота (8.146). Поэтому здесь будет использован третий подход, который короче первых двух.

Третий подход. Запишем возмущенные уравнения движения⁶:

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\boldsymbol{\omega}}_\varepsilon + \mathbf{C} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon &= \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon &= g_\varepsilon \boldsymbol{\omega}_\varepsilon - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_\varepsilon \times \boldsymbol{\omega}_\varepsilon + \frac{1 - g_\varepsilon}{\theta_\varepsilon} \dot{\boldsymbol{\theta}}_\varepsilon \boldsymbol{\theta}_\varepsilon, \quad g_\varepsilon = \frac{\theta_\varepsilon \sin \theta_\varepsilon}{2(1 - \cos \theta_\varepsilon)}, \end{aligned} \quad (8.147)$$

Жесткость упругого основания будем считать постоянной, что немного упрощает вычисления. Примем разложения

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \boldsymbol{\theta} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad (8.148)$$

где $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ называются первыми вариациями $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\theta}$ соответственно. Для модуля вектора поворота получаем

$$\theta_\varepsilon = \theta + \varepsilon \frac{1}{\theta} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (8.149)$$

Дифференцируя (8.147) по ε и полагая затем $\varepsilon = 0$, получаем искомые уравнения в вариациях:

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} &= g \boldsymbol{\eta} - \frac{\theta - \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\omega} - \\ &- \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\eta} + \frac{1 - g}{\theta^2} (\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\theta}) \dot{\boldsymbol{\theta}}, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (8.150)$$

⁶ Различие первого и третьего подходов состоит в следующем. В первом подходе вариация угловой скорости выражается через производные по времени вариации вектора поворота и невозмущенного вектора поворота, а в третьем подходе производная по времени от вариации вектора поворота выражается через вариацию угловой скорости и невозмущенный вектор угловой скорости. Третий подход быстрее и проще приводит к окончательному уравнению. (*Примеч. ред.*)

В последнем уравнении учтено, что модуль невозмущенного вектора поворота, т. е. угол нутации, постоянен $\dot{\theta} = 0$.

Исключая из (8.150) вектор $\boldsymbol{\varphi}$, получаем уравнение для первой вариации вектора угловой скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta}{C} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + g\boldsymbol{\eta} + \frac{\theta - \sin \theta}{2\theta(1 - \cos \theta)} \frac{\Theta}{C} (\dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \frac{\Theta}{C} \dot{\boldsymbol{\eta}} \times \boldsymbol{\omega} - \\ & - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\eta} - \frac{1-g}{\theta^2} \frac{\Theta}{C} (\dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (8.151)$$

Получившееся уравнение имеет переменные коэффициенты, что затрудняет его анализ. Однако заменой переменных оно может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами. При этом преобразовании следует использовать тождество

$$\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) \quad \forall \mathbf{Q}: \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{Q} = 1.$$

Перепишем вектор $\boldsymbol{\theta}$ невозмущенного движения в виде

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\theta}_0, \quad \boldsymbol{\theta}_0 = \text{const}, \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 = 0, \quad \psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0, \quad (8.152)$$

где выражение для $\dot{\psi}_0$ определяется формулой (8.140). Согласно (8.143) и (8.152), вектор $\boldsymbol{\omega}$ невозмущенного движения можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\omega}_0, \quad \boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\psi}_0 \left((1 - \cos \theta_0) \mathbf{e} + \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}_0 \right). \quad (8.153)$$

Вместо первой вариации $\boldsymbol{\eta}$ введем вектор $\boldsymbol{\xi}$ по формуле

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (8.154)$$

Отсюда получаем выражения:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \boldsymbol{\xi} \right), \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \boldsymbol{\xi} \right), \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \left(\ddot{\boldsymbol{\xi}} + 2\dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\psi}_0^2 \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\xi}) \right). \end{aligned} \quad (8.155)$$

После подстановки выражений (8.152)–(8.155) в уравнение (8.151) и последующего умножения получившегося уравнения на \mathbf{Q}^T слева, приходим к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} & \frac{\Theta}{C} \left(\ddot{\boldsymbol{\xi}} + 2\dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\psi}_0^2 \mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\xi}) \right) + g_0 \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}_0 \times \boldsymbol{\xi} + \\ & + \frac{\Theta(\theta_0 - \sin \theta_0)}{2C\theta_0(1 - \cos \theta_0)} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \boldsymbol{\xi} \right) \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{\Theta}{2C} \left(\dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \boldsymbol{\xi} \right) \times \boldsymbol{\omega}_0 - \\ & - \frac{\Theta(1 - g_0)}{C\theta_0^2} \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \left(\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{\psi}_0 \mathbf{e} \times \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) \boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{0}, \quad g_0 = \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)}. \end{aligned} \quad (8.156)$$

Уравнение (8.156) выглядит весьма громоздко, но оно имеет постоянные коэффициенты и потому допускает полное исследование. Введем в рассмотрение ортогональный базис из постоянных векторов

$$\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}_0; \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\theta}_0 = 0. \quad (8.157)$$

Вектор $\boldsymbol{\xi}$ представим в виде разложения:

$$\boldsymbol{\xi} = S\mathbf{e} + T\boldsymbol{\theta}_0 + R\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}_0, \quad (8.158)$$

где

$$\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\xi} = S, \quad \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\xi} = \theta_0^2 T, \quad (\mathbf{e} \times \boldsymbol{\theta}_0) \cdot \boldsymbol{\xi} = \theta_0^2 R.$$

Проецируя уравнение (8.156) на базисные векторы (8.157), получаем систему трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{S} + \frac{1 + \cos \theta_0}{2} \dot{\psi}_0^2 S + \frac{\theta_0^2}{2} \dot{\psi}_0 \dot{T} - \frac{C}{2\Theta} \left(1 + \frac{\theta_0}{\sin \theta_0}\right) \theta_0^2 R &= 0, \\ -\frac{\dot{\psi}_0 \sin \theta_0}{2\theta_0} \dot{S} + \frac{\theta_0 \sin \theta_0}{2(1 - \cos \theta_0)} \ddot{T} - \frac{1 + \cos \theta_0}{2} \left(1 + \frac{\theta_0}{\sin \theta_0}\right) \dot{\psi}_0 \dot{R} &= 0, \\ \frac{1}{2} \dot{\psi}_0^2 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0} S + \ddot{R} - \frac{\sin \theta_0 (\theta_0 - \sin \theta_0)}{2(1 - \cos \theta_0)} \dot{\psi}_0^2 R + \\ + \left(\frac{3 + \cos \theta_0}{2} + \frac{\sin \theta_0 (\theta_0 - \sin \theta_0)}{2(1 - \cos \theta_0)}\right) \dot{\psi}_0 \dot{T} &= 0. \end{aligned} \quad (8.159)$$

Напомним, что скорость прецессии в этих уравнениях определена формулой (8.140). Оставляя за рамками работы полный анализ уравнений (8.159), ограничимся рассмотрением малых углов нутации. Отбрасывая величины порядка $O(\theta_0^2)$ в сравнении с единицей, вместо (8.159) получаем упрощенную систему:

$$\ddot{S} + \frac{C}{\Theta} S = 0, \quad \ddot{T} - 2\dot{\psi}_0 \dot{R} = \frac{1}{2} \dot{\psi}_0 \dot{S}, \quad \ddot{R} + 2\dot{\psi}_0 \dot{T} = -\frac{C}{2\Theta} S. \quad (8.160)$$

Из второго уравнения (8.160) получаем

$$\dot{T} = 2\dot{\psi}_0(R + A) + \frac{1}{2} \dot{\psi}_0 S, \quad (8.161)$$

где A — константа интегрирования. Тогда третье уравнение (8.160) с учетом (8.140) может быть переписано в виде

$$(R + A)'' + \frac{4C}{\Theta} (R + A) = -\frac{3C}{2\Theta} S. \quad (8.162)$$

Из этой системы устойчивость регулярной прецессии при малых углах нутации вполне очевидна. Обратим внимание, что в левой части уравнения (8.161) стоит периодическая функция времени. Кроме того, резонансы в уравнении (8.162) невозможны. Действительно, частота внешнего воздействия в уравнении (8.162), согласно первому уравнению (8.160), равна $\sqrt{C/\Theta}$. Собственная частота равна $2\sqrt{C/\Theta}$. Следовательно, резонансы невозможны.

8.3.4. Динамика двухроторного гиростата на упругом основании при действии внешнего следящего момента

Выше было показано, как можно распорядиться вспомогательным ротором, чтобы максимально упростить задачу. Ниже будет рассмотрен вопрос о возможности использования вспомогательного ротора (не меняя режима работы основного ротора) для стабилизации движения гиростата при действии внешнего малого следящего момента. Роторы будем считать соосными, а их оси направим по оси \mathbf{k} . Напомним, что при недеформированном основании ось \mathbf{k} несущего тела направлена вертикально вверх. Основные уравнения были выведены в разделе 8.1 — это уравнения (8.33)–(8.36), в которых следует принять $\mathbf{m} = \mathbf{n} = \mathbf{k}$. В качестве внешнего момента выбираем следящий момент:

$$\mathbf{M}_{\text{ex}} = M\mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad \mathbf{U} = 0. \quad (8.163)$$

Упругое основание будем считать изотропным, а суммарный тензор инерции Θ — шаровым. С практической точки зрения эти упрощения нерациональны и ухудшают рабочие параметры гиростата (используемого в качестве центрифуги). С технической точки зрения они упрощают вычисления. С теоретической точки зрения они не принципиальны, поскольку все основные проблемы, связанные с возможными неустойчивостями, остаются и даже усиливаются.

При принятых допущениях уравнения (8.33)–(8.36) принимают вид

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \left(\lambda_b \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \lambda_c \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \cdot \mathbf{k} + \left(\lambda_b \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \lambda_c \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} + C(\theta)\boldsymbol{\theta} &= M\mathbf{k}, \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2}\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, & \\ \lambda_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_b) \cdot \mathbf{k} + \nu_b (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_b) + \lambda_b \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} &= 0, \\ \lambda_c (\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\omega}_c) \cdot \mathbf{k} + \nu_c (\dot{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\omega}_c) + \lambda_c \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (8.164)$$

Напомним, что здесь вектор поворота Θ и правая угловая скорость Ω относятся к несущему телу, заделанному в упругое основание.

Основной режим работы гиростата характеризуется тем, что несущее тело не совершает поперечных колебаний, т. е. имеем

$$\dot{\Theta}(t) = \Theta(t)\mathbf{k}, \quad \Omega = \dot{\Theta}(t)\mathbf{k}. \quad (8.165)$$

В этом случае второе уравнение (8.164) обращается в тождество, а оставшиеся уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \Theta(\Theta + \lambda_b \alpha + \lambda_c \beta)'' + C(\Theta)\Theta &= M, \\ \lambda_b(\dot{\alpha} - \omega_b)' + \nu_b(\dot{\alpha} - \omega_b) + \lambda_b \ddot{\Theta} &= 0, \\ \lambda_c(\dot{\beta} - \omega_c)' + \nu_c(\dot{\beta} - \omega_c) + \lambda_c \ddot{\Theta} &= 0. \end{aligned} \quad (8.166)$$

Если энергия упругого основания выбрана в виде квадратичной формы, то жесткость $c = \text{const}$. Введем обозначения

$$x = \dot{\alpha} - \omega_b, \quad y = \dot{\beta} - \omega_c.$$

Тогда (8.166) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Theta \ddot{\Theta} + \lambda_b \dot{x} + \lambda_c \dot{y} + C\Theta &= M, \\ \lambda_b \dot{x} + \nu_b x + \lambda_b \ddot{\Theta} &= 0, \quad \lambda_c \dot{y} + \nu_c y + \lambda_c \ddot{\Theta} = 0. \end{aligned} \quad (8.167)$$

Получили систему линейных дифференциальных уравнений. Ее частное решение имеет вид

$$x = y = 0, \quad \Theta_* = M/C. \quad (8.168)$$

Характеристический полином для однородной системы (8.167) имеет вид

$$F(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_b \lambda_c (\Theta - \lambda_b - \lambda_c) > 0, \\ a_1 &= \lambda_c \nu_b (\Theta - \lambda_c) + \lambda_b \nu_c (\Theta - \lambda_b) > 0, \quad a_2 = \Theta \nu_b \nu_c + C \lambda_b \lambda_c > 0, \\ a_3 &= C(\lambda_c \nu_b + \lambda_b \nu_c) > 0, \quad a_4 = C \nu_b \nu_c > 0. \end{aligned} \quad (8.169)$$

По правилу Декарта в силу неравенств (8.169) сразу определяем, что полином $F(p)$ не имеет нулей при вещественных положительных p , но может

иметь четыре нуля при отрицательных действительных \mathbf{p} . Выписывая критерии Рауса–Гурвица, убеждаемся, что все нули полинома $F(\mathbf{p})$ имеют отрицательную действительную часть. Следовательно, при больших временах все частные решения однородной системы (8.167) стремятся по модулю к нулю и остается только частное решение (8.168). Итак, после завершения этапа разгона гири стат выходит на следующий режим работы:

$$\boldsymbol{\theta} = (M/C) \mathbf{k}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega}_b, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\omega}_c, \quad (8.170)$$

т. е. несущее тело находится в положении равновесия, а роторы вращаются с постоянными угловыми скоростями. Так будет в идеальном случае при отсутствии возмущений, вызывающих поперечные колебания несущего тела. Чтобы идеальный режим (8.170) осуществился в реальности, необходимо, чтобы он был устойчив по отношению к малым возмущениям.

Рассмотрим возмущенное движение:

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = (M/C) \mathbf{k} + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon = \varepsilon \boldsymbol{\zeta}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_b + \varepsilon \mathbf{u}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_c + \varepsilon \mathbf{v}. \quad (8.171)$$

Записывая возмущенные уравнения движения (8.164) и подставляя в них представления (8.171), получаем систему уравнений в вариациях:

$$\begin{aligned} \Theta \dot{\boldsymbol{\zeta}} + (\lambda_b \dot{\mathbf{u}} + \lambda_c \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{k} + (\lambda_b \boldsymbol{\omega}_b + \lambda_c \boldsymbol{\omega}_c) \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{k} + C \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \boldsymbol{\zeta} + \frac{M}{2C} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta} + (1-g) \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\zeta}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1-\cos \theta)}, \quad \theta = \frac{M}{C}, \\ \lambda_b \dot{\mathbf{u}} + \nu_b \mathbf{u} + \lambda_b \mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= 0, \quad \lambda_c \dot{\mathbf{v}} + \nu_c \mathbf{v} + \lambda_c \mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\zeta}} = 0. \end{aligned} \quad (8.172)$$

Система (8.172) разбивается на две независимые подсистемы, если ввести разложения

$$\boldsymbol{\varphi} = \gamma \mathbf{k} + \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \boldsymbol{\zeta} = \zeta \mathbf{k} + \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Тогда вместо (8.172) получим

$$\begin{aligned} \Theta \ddot{\gamma} + C\gamma + \lambda_b \dot{\mathbf{u}} + \lambda_c \dot{\mathbf{v}} &= 0, \\ \lambda_b \dot{\mathbf{u}} + \nu_b \mathbf{u} + \lambda_b \ddot{\gamma} &= 0, \quad \lambda_c \dot{\mathbf{v}} + \nu_c \mathbf{v} + \lambda_c \ddot{\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (8.173)$$

$$\Theta \dot{\mathbf{z}} - (\lambda_b \boldsymbol{\omega}_b + \lambda_c \boldsymbol{\omega}_c) \mathbf{k} \times \mathbf{z} + C \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}} = g \mathbf{z} + \frac{M}{2C} \mathbf{k} \times \mathbf{z}. \quad (8.174)$$

Система (8.173) была проанализирована в предыдущем подразделе, где было показано, что ее решения стремятся к нулю. Поэтому осталось исследовать систему (8.174), которую удобнее записать в виде одного уравнения.

Для этого достаточно продифференцировать первое из уравнений (8.174) и исключить $\dot{\psi}$ с помощью второго уравнения из (8.174). В результате приходим к уравнению

$$\Theta \ddot{\mathbf{z}} - (\lambda_b \omega_b + \lambda_c \omega_c) \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{z}} + Cg\mathbf{z} + \frac{M}{2} \mathbf{k} \times \mathbf{z} = \mathbf{0}. \quad (8.175)$$

Частные решения этого уравнения будем искать в виде

$$\mathbf{z} = e^{qt} \mathbf{Q}(pt\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \text{const}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (8.176)$$

Вычисляя производные, получаем

$$\dot{\mathbf{z}} = q\mathbf{z} + p\mathbf{k} \times \mathbf{z}, \quad \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{z}} = q\mathbf{k} \times \mathbf{z} - p\mathbf{z}, \quad \ddot{\mathbf{z}} = (q^2 - p^2)\mathbf{z} + 2pq\mathbf{k} \times \mathbf{z}.$$

Подставляя эти выражения в (8.175) и полагая коэффициенты при \mathbf{z} и $\mathbf{k} \times \mathbf{z}$ равными нулю, получаем систему уравнений

$$q^2 - p^2 + ap + b = 0, \quad q = l/(a - 2p), \quad (8.177)$$

где введены обозначения

$$a = \frac{\lambda_b \omega_b + \lambda_c \omega_c}{\Theta}, \quad b = \frac{Cg}{\Theta}, \quad l = \frac{M}{2\Theta}.$$

Считая внешний момент M малым, из (8.177) видим, что и величина q мала. Отбрасывая из первого уравнения системы (8.177) величину q^2 , находим значения p :

$$a - 2p = \pm \sqrt{a^2 + 4b}.$$

Теперь из второго уравнения системы (8.177) видим, что при любом знаке l одно из значений q будет положительным. Иными словами, одно из двух частных решений (8.175) будет расти по модулю, т. е. имеем неустойчивость.

Постановка второго ротора имеет своей целью борьбу с резонансами и разного рода неустойчивостями. Результаты данной главы не подтверждают данную точку зрения. Впрочем, это не удивительно. Выше рассматривались только стационарные режимы, в которых вспомогательный ротор ведет себя пассивно. Ситуация может измениться и должна измениться, если в процессе работы центрифуги активно управлять скоростью вращения вспомогательного ротора. Это означает, что в системе (8.164) параметр ω_b , т. е. номинальную угловую скорость вспомогательного ротора, нужно менять во времени заданным образом, для чего необходимо иметь специальную систему управления. Задачи этого типа трудно поддаются аналитическому решению и требуют активного использования компьютерных вычислений.

Глава 9

Нелинейные задачи теории стержней¹

9.1. Основные уравнения нелинейной теории стержней

Основы теории тонких упругих стержней были заложены Л. Эйлером. Будучи старейшей теорией в механике сплошных сред, теория тонких стержней остается одной из самых полезных и в теоретическом, и в практическом отношении. Тонкие стержни часто выступают в роли элементов тех или иных конструкций. Например, в ультрацентрифугах, работающих в диапазоне 150–400 тысяч оборотов в минуту, ротор устанавливается на гибком стержне и приходится рассматривать совместную динамику ротора (твердого тела) и тонкого стержня². Это очень трудная для анализа проблема. Ситуация заметно упрощается, если стержень считать безынерционным³. Вообще, исследование динамики и устойчивости вращающихся валов относится к числу важнейших технических проблем, некоторые из которых обсуждаются в книге [64].

Линейная теория стержней составляет отдельный предмет, который изучается во всех технических вузах и обрел, можно сказать, каноническую форму. Не столь благополучно обстоит дело с нелинейной теорией стержней. С одной стороны, в ней получено огромное число частных результатов. С другой стороны, большая их часть, полученная с 1744 по 1916 годы, в настоящее время трудна для восприятия, так как изложена на уже устаревшем языке и разбросана по труднодоступным изданиям. Отсутствие современной монографии по нелинейной теории стержней, с достаточной полнотой освещающей

¹ Материал этой главы основан на статье [68]: П. А. Жилин, А. Д. Сергеев, Т. П. Товстик. Нелинейная теория стержней и ее приложения (Труды XXIV школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. 1997. С. 313–337). (*Примеч. ред.*)

² Задача о вращении твердого тела на гибком инерционном стержне рассмотрена в разделе 11.1. (*Примеч. ред.*)

³ Задача о вращении твердого тела на безынерционном гибком стержне анализируется в десятой главе. (*Примеч. ред.*)

предмет, является весьма заметным пробелом в механике сплошных сред и сильно затрудняет дальнейший прогресс в этой области. Между тем многие аспекты обсуждаемой теории еще не исследованы. Особенно это относится к пространственным формам движения и равновесия упругих стержней.

Далее приводится последовательное изложение нелинейной теории тонких упругих стержней. Дается компактная форма основных уравнений, удобных для математического исследования, и показываются некоторые примеры их применения. Особенностью излагаемой теории стержней является систематическое использование тензора поворота, позволяющего наиболее естественным образом описать повороты поперечных сечений стержня. Кроме того, тензор поворота оказывается удобным при рассмотрении задач совместной динамики стержня и сопряженного с ним твердого тела. Заметим, что общепринятой нелинейной теории стержней не существует.

Первоначальный интерес автора к теории стержней с учетом деформации поперечного сдвига был связан со следующим обстоятельством. Известно, что решения целого ряда задач динамики стержней приводят к парадоксальным или не вполне ясным результатам, сущность которых хотелось бы осознать полнее. Приведем простой пример. Рассмотрим динамическую задачу для консольного стержня, нагруженного торцевым мертвым моментом. Если модуль мертвого момента мал и малы начальные отклонения, то можно, казалось бы, воспользоваться уравнениями малых колебаний скрученного стержня. Поступив таким образом, мы получим хорошо поставленную задачу, решения которой малы по норме и не предвещают никаких неприятностей. Но если учесть в этой задаче нелинейные члены, то для сколь угодно малой величины крутящего момента и сколь угодно малых начальных условий мы получим экспоненциально растущие во времени решения. Это явление получило название парадокса Николаи⁴. Аналогичное явление имеет место и для многих других типов торцевых моментов. Означает ли это обстоятельство невозможность использования линеаризованных уравнений? Очень не хотелось бы так думать. А это означает необходимость поиска строгих критериев того, когда можно использовать линейный подход, а когда нельзя, и почему. Для анализа подобного рода необходимо располагать строгой внутренне непротиворечивой теорией стержней. Между тем в литературе подобные задачи решаются на основе заведомо приближенных уравнений, и остается неясным, какие факторы и за что отвечают.

⁴ О парадоксе Николаи — см. также разделы 7.7 и 7.8, где обсуждается задача об устойчивости положения равновесия твердого тела на упругом основании общего вида при действии внешнего крутящего момента. (*Примеч. ред.*)

Нелинейная теория стержней, не учитывающая деформацию поперечного сдвига, была построена Г. Кирхгофом и усовершенствована А. Клебшем. Эта теория представлена в книге А. Лява [69]. Ниже воспроизводятся основные уравнения нелинейной динамики упругих стержней⁵, вывод которых опирается на идеи работ [70, 71]. Отличие этих уравнений от классических заключается в учете деформации поперечного сдвига и инерции вращения. Кроме того, используется современная тензорная символика. При игнорировании поперечного сдвига и инерции вращения излагаемая теория переходит в классическую.

В отсчетной конфигурации упругая линия стержня определяется заданием вектора $\mathbf{r}(s) = s\boldsymbol{\tau}$, $0 \leq s \leq l$, где $\boldsymbol{\tau}$ — орт недеформированной оси стержня; s — материальная координата в недеформированном состоянии; l — длина недеформированного стержня. В актуальной конфигурации положение точек стержня определяется вектором $\mathbf{R}(s, t)$, где t — время. Ориентация поперечного сечения стержня в точке s и момент времени t определяется заданием тензора поворота $\mathbf{P}(s, t)$:

$$\mathbf{P}(s, t) \cdot \mathbf{P}^T(s, t) = \mathbf{E}, \quad \det \mathbf{P}(s, t) = 1.$$

В отсчетной конфигурации $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, а в начальный момент времени $\mathbf{P}(s, 0) = \mathbf{P}_0(s)$. Для первоначально прямолинейных стержней уравнения движения имеют вид

$$\mathbf{N}'(s, t) + \rho_0 \mathbf{F}(s, t) = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}(s, t), \quad (9.1)$$

$$\mathbf{M}'(s, t) + \mathbf{R}'(s, t) \times \mathbf{N}(s, t) + \rho_0 \mathbf{L}(s, t) = \rho_0 (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega})', \quad (9.2)$$

где \mathbf{N} и \mathbf{M} — векторы внутренних усилий и моментов; \mathbf{F} и \mathbf{L} — векторы массовых плотностей внешних сил и моментов; ρ_0 — погонная плотность массы в отсчетной конфигурации; $\rho_0 \boldsymbol{\Theta}$ — линейная плотность тензора инерции стержня; $\mathbf{v}(s, t) = \dot{\mathbf{R}}(s, t)$ — вектор скорости поперечных сечений стержня; $\boldsymbol{\omega}(s, t)$ — вектор угловой скорости. В (9.1), (9.2) считается, что упругая линия проходит через центры масс поперечных сечений.

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(s, t)$ связан с тензором поворота поперечных сечений стержня $\mathbf{P}(s, t)$ посредством уравнения Пуассона (2.80):

$$\dot{\mathbf{P}}(s, t) = \boldsymbol{\omega}(s, t) \times \mathbf{P}(s, t) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} [\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T]_{\times}. \quad (9.3)$$

⁵ Более подробное изложение теории стержней, предложенной П. А. Жилиным, можно найти в книге [72]. (Примеч. ред.)

Введем в рассмотрение векторы деформации: $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор деформации растяжения–поперечного сдвига, $\boldsymbol{\Phi}$ — вектор деформации изгиба–кручения. Они определяются формулами

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}' - \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P}. \quad (9.4)$$

Если векторы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ равны нулю, то стержень движется как жесткое целое. Наоборот, если стержень испытывает только смещение как жесткое целое, то $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ равны нулю. Векторы деформации удовлетворяют уравнениям⁶

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{v}' + \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\omega}'. \quad (9.5)$$

Для замыкания системы уравнений (9.1)–(9.5) необходимо задать определяющие уравнения, т. е. связь векторов усилий и моментов с векторами деформации. При этом необходимо иметь уверенность, что определяющие уравнения согласованы с уравнением баланса энергии:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \rho_0 (\mathcal{K} + \mathcal{U}) ds = \int_{s_1}^{s_2} \rho_0 [\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}] ds + (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}) \Big|_{s_1}^{s_2}, \quad (9.6)$$

где \mathcal{K} и \mathcal{U} — массовые плотности кинетической и внутренней энергий соответственно. В уравнении (9.6) не учтены термомеханические эффекты. Для \mathcal{K} имеем

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + \Theta_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + \Theta_3 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}. \quad (9.7)$$

Здесь \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 — главные оси инерции поперечного сечения. Для стержней с поперечным сечением в форме круга или правильного многоугольника $\Theta_1 = \Theta_2$. Тогда

$$\boldsymbol{\Theta} = \Theta_1 (\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}) + \Theta_3 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}.$$

После стандартных преобразований, учитывающих (9.1), (9.2) и (9.5), получаем локальную форму уравнения баланса энергии:

$$\rho_0 \dot{\mathcal{U}} = \mathbf{N} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{M} \cdot (\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}). \quad (9.8)$$

Примем, что внутренняя энергия зависит только от векторов деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\Phi}$ и тензора поворота \mathbf{P} , т. е.

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}).$$

⁶ Чтобы получить эти уравнения, необходимо продифференцировать по времени уравнения (9.4) и провести ряд несложных преобразований с учетом уравнения Пуассона (9.3). (Примеч. ред.)

Понятно, что внутренняя энергия не должна меняться при наложении на данную конфигурацию жесткого смещения или жесткого поворота. Рассмотрим однопараметрическое семейство тензоров поворота $\mathbf{Q}(\alpha)$, не зависящих ни от \mathbf{s} , ни от \mathbf{t} . Наряду с конфигурацией $\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ и $\mathbf{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ рассмотрим конфигурацию $\mathbf{R}_*(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ и $\mathbf{P}_*(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, определенную выражением

$$\mathbf{R}_*(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{t}) + \mathbf{Q}(\alpha) \cdot [\mathbf{R}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) - \mathbf{R}(\mathbf{0}, \mathbf{t})], \quad \mathbf{P}_*(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t}).$$

Согласно (9.4), для векторов деформации имеем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_*(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathbf{R}'_* - \mathbf{P}_* \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}, \mathbf{t}),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_*(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = -\frac{1}{2} [\mathbf{P}'_* \cdot \mathbf{P}_*^\top]_\times = -\frac{1}{2} [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \mathbf{Q}^\top]_\times = \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{s}, \mathbf{t}).$$

Инвариантность внутренней энергии относительно жестких смещений означает:

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{\varepsilon}_*, \boldsymbol{\Phi}_*, \mathbf{P}_*) = \mathcal{U}[\mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{Q}(\alpha) \cdot \mathbf{P}] = \mathcal{U}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P}). \quad (9.9)$$

Для тензора $\mathbf{Q}(\alpha)$ примем

$$\frac{d}{d\alpha} \mathbf{Q}(\alpha) = \boldsymbol{\eta}(\alpha) \times \mathbf{Q}(\alpha), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\eta}(0) = \boldsymbol{\eta}_0.$$

Дифференцируя (9.9) по α и полагая затем $\alpha = 0$, получаем тождество

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \times \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi} \right) \cdot \boldsymbol{\eta}_0 + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^\top \cdot \cdot (\boldsymbol{\eta}_0 \times \mathbf{P}) = 0. \quad (9.10)$$

Это равенство должно выполняться для любых векторов $\boldsymbol{\eta}_0$. Вычислим производную по времени от $\mathcal{U}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P})$:

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Phi}} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^\top \cdot \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}). \quad (9.11)$$

Перепишем тождество (9.10), заменив в нем⁷ произвольный вектор $\boldsymbol{\eta}_0$ на вектор $\boldsymbol{\omega}$:

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \times \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi} \right) \cdot \boldsymbol{\omega} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^\top \cdot \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = 0. \quad (9.12)$$

⁷ Вектор $\boldsymbol{\omega}$ является функцией \mathbf{s} и \mathbf{t} . Произвольный вектор $\boldsymbol{\eta}_0$ в тождестве (9.10) не зависит от этих переменных. Но, поскольку тождество (9.10) не содержит производных ни по \mathbf{s} , ни по \mathbf{t} , эти величины фактически играют роль параметров. Поэтому данное тождество останется справедливым, если произвольный вектор $\boldsymbol{\eta}_0$ заменить на вектор, зависящий от координаты и времени. (*Примеч. ред.*)

Используя тождество (9.12) и исключая из равенства (9.11) последнее слагаемое, получаем

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \cdot (\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}).$$

С учетом последнего равенства локальное уравнение баланса энергии принимает вид

$$\left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{N} \right) \cdot (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) + \left(\frac{\partial \rho_0 \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} - \mathbf{M} \right) \cdot (\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}) = 0.$$

Это уравнение должно выполняться для произвольных значений векторов $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}$ и $\dot{\boldsymbol{\Phi}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Phi}$, что возможно тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Коши–Грина:

$$\mathbf{N} = \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{M} = \rho_0 \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}}, \quad (9.13)$$

где, напомним, ρ_0 — массовая плотность в отсчетной конфигурации. Таким образом, чтобы получить замкнутую теорию упругих стержней, необходимо задать функцию $\mathcal{U}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Phi}, \mathbf{P})$, удовлетворяющую уравнению (9.10), которое удобнее переписать в другой форме, если учесть тождество⁸:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \right)^\top \cdot \cdot (\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{P}) = - \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times \cdot \boldsymbol{\zeta}.$$

Тогда вместо (9.10) с учетом произвольности вектора $\boldsymbol{\zeta}$ получаем

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \times \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\Phi}} \times \boldsymbol{\Phi} + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times = \mathbf{0}.$$

Это уравнение в частных производных первого порядка, общим интегралом которого является произвольная функция $\mathcal{U}(\mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\Phi})$. Простейшая форма для $\rho_0 \mathcal{U}$ имеет вид квадратичной формы:

$$\rho_0 \mathcal{U} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad (9.14)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{C} — симметричные положительно определенные тензоры 2-го ранга, заданные в отсчетной конфигурации и не зависящие от деформаций стержня, т. е. они могут быть вычислены по данным линейной теории. Плотность

⁸ Здесь используется тождество $\mathbf{A} \cdot \cdot (\boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{B}^\top)_\times \cdot \boldsymbol{\zeta}$, справедливое для любых тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} и любого вектора $\boldsymbol{\zeta}$. (Примеч. ред.)

энергии (9.14) переходит в классическую [69, с. 417] при игнорировании деформации поперечного сдвига⁹. Тензоры упругости \mathbf{A} и \mathbf{C} в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + A_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + A_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3, \\ \mathbf{C} &= C_1 \mathbf{d}_1 \otimes \mathbf{d}_1 + C_2 \mathbf{d}_2 \otimes \mathbf{d}_2 + C_3 \mathbf{d}_3 \otimes \mathbf{d}_3,\end{aligned}$$

где A_3 — жесткость на растяжение; A_1 и A_2 — жесткости на поперечный сдвиг; C_3 — жесткость на кручение; C_1 и C_2 — жесткости на изгиб. В дальнейшем будет рассматриваться случай трансверсально-изотропных тензоров упругости $A_1 = A_2$ и $C_1 = C_2$:

$$\mathbf{A} = A_3 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + A_1 (\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}), \quad \mathbf{C} = C_3 \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + C_1 (\mathbf{E} - \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau}). \quad (9.15)$$

Подставляя (9.14) в (9.13), получаем

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}. \quad (9.16)$$

К выписанным уравнениям следует добавить краевые условия. Здесь нужно ставить по шесть краевых условий на каждом торце стержня. Например, для защемленного края имеем $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{P} = \mathbf{E}$. Для свободного торца имеем $\mathbf{N} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Возможны и многие другие типы краевых условий.

Переход к теории без учета деформации поперечного сдвига происходит в пределе $A_1 \rightarrow \infty$, $A_2 \rightarrow \infty$. Вектор усилия при этом должен оставаться конечным. Отсюда следует, что должно выполняться равенство

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \forall \mathbf{a} : \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = (1 + e) \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = e \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (9.17)$$

где $e = dS/ds - 1$ — относительное удлинение упругой линии¹⁰. В этом случае вместо первого из соотношений (9.16) мы должны принять равенство

$$\mathbf{N} = A_3 e \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (9.18)$$

⁹ Составляющая вектора деформации $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}' - \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}$, направленная по нормали к сечению деформированного стержня $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}$, характеризует растяжение (сжатие) стержня. Составляющая вектора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, лежащая в плоскости сечения деформированного стержня, называется деформацией поперечного сдвига. Деформация поперечного сдвига характеризует угол между касательной к деформированному стержню \mathbf{R}' и нормалью к сечению стержня в деформированном состоянии $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}$. (*Примеч. ред.*)

¹⁰ Перепишем соотношение $\mathbf{R}' = (1 + e) \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}$ в виде

$$\frac{d\mathbf{R}}{dS} \frac{dS}{ds} = (1 + e) \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \left| \frac{d\mathbf{R}}{dS} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{R}}{dS} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{dS}{ds} = 1 + e,$$

где S — материальная координата в деформированном состоянии. Приведенные выше соотношения доказывают, что $e = dS/ds - 1$ — относительное удлинение упругой линии. (*Примеч. ред.*)

где вектор перерезывающих сил \mathbf{Q} находится из уравнений движения. При этом энергия (9.14) принимает вид

$$\rho_0 \mathcal{U} = \frac{1}{2} A_3 e^2 + \frac{1}{2} \Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \Phi, \quad e = \mathbf{R}' \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} - 1. \quad (9.19)$$

Весьма популярна теория, не учитывающая не только деформацию поперечного сдвига, но и растяжение. В этом случае имеем

$$e = 0, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \rho_0 \mathcal{U} = \frac{1}{2} \Phi \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \Phi. \quad (9.20)$$

Вектор усилий \mathbf{N} находится из уравнений движения.

Изложенная выше теория стержней применима как в случае прямолинейных, так и в случае криволинейных стержней. Однако далее рассматриваются только прямолинейные стержни, т. е. считается, что $\boldsymbol{\tau} = \text{const}$.

9.2. Равновесие консольного стержня, нагруженного мертвым моментом

В качестве простой иллюстрации рассмотрим одну из немногих задач, допускающих точное элементарное решение по нелинейной теории¹¹. Примем, что в (9.1), (9.2) внешние нагрузки отсутствуют: $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Краевые условия имеют вид

$$s = 0: \quad \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l: \quad \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathcal{M}, \quad (9.21)$$

где $\mathcal{M} = \text{const}$ и не зависит от деформации.

Уравнения статики (9.1), (9.2), соотношения упругости (9.16) и условия (9.21) дают следующее:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{N} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathcal{M}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

¹¹ Данная задача с математической точки зрения аналогична задаче о свободном вращении твердого тела. При этом имеет место следующее соответствие между характеристиками стержня и твердого тела: момент в сечении стержня соответствует вектору кинетического момента твердого тела, вектор деформации изгиба–кручения стержня соответствует вектору угловой скорости твердого тела, тензор жесткости стержня соответствует тензору инерции твердого тела. Координата вдоль стержня соответствует времени в задаче о свободном вращении твердого тела. Существенное отличие задач о статическом деформировании стержней от задач динамики твердого тела заключается в том, что задачи статики стержней — это краевые задачи, и, следовательно, они могут иметь неединственные решения. Однако обсуждаемая в этом разделе задача имеет единственное решение, так что в данном случае существует полная аналогия с динамикой твердого тела. (*Примеч. ред.*)

Второе из соотношений (9.16) запишем в обращенной форме:

$$\Phi = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathcal{M}. \quad (9.23)$$

Легко строится первый интеграл уравнения (9.23):

$$h = \frac{1}{2} \mathcal{M} \cdot \Phi = \frac{1}{2} \mathcal{M} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathcal{M} = \text{const}. \quad (9.24)$$

Чтобы убедиться, что это действительно первый интеграл (9.23), достаточно продифференцировать h по координате, воспользоваться уравнением Пуассона (9.4) и самим уравнением (9.23):

$$\begin{aligned} h' &= \frac{1}{2} \mathcal{M} \cdot \underbrace{(\Phi \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathcal{M})}_{\Phi} - \frac{1}{2} \underbrace{(\mathcal{M} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \times \Phi)}_{\Phi} \cdot \mathcal{M} = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{M} \cdot (\Phi \times \Phi) - \frac{1}{2} (\Phi \times \Phi) \cdot \mathcal{M} = 0. \end{aligned}$$

Тензор поворота \mathbf{P} в общем случае определяется тремя параметрами, например, углами Эйлера.

Интеграл (9.24) показывает, что только два из трех параметров являются независимыми. Поэтому достаточно указать двухпараметрический тензор \mathbf{P} , тождественно удовлетворяющий интегралу энергии (9.24).

Для тензора \mathbf{C} общего вида тензор \mathbf{P} строится относительно сложно¹². Но для трансверсально-изотропного тензора \mathbf{C} вида (9.15) тензор \mathbf{P} определяется немедленно и имеет вид¹³

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{Q}(\psi(s)\hat{\mathcal{M}}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(s)\boldsymbol{\tau}), \quad \hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/|\mathcal{M}|, \quad (9.25)$$

где используется стандартное для данной книги обозначение

$$\mathbf{Q}(\alpha \mathbf{m}) \equiv (1 - \cos \alpha) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad |\mathbf{m}| = 1 \quad (9.26)$$

для тензора поворота на угол α вокруг вектора \mathbf{m} .

¹² Вопрос о представлении тензора поворота в общем случае обсуждается в шестой главе, посвященной решению задачи о свободном вращении твердого тела с произвольным тензором инерции. (*Примеч. ред.*)

¹³ Более подробно вопрос о представлении тензора поворота обсуждается в разделе 5.1, где представлено решение задачи о свободном вращении твердого тела с трансверсально-изотропным тензором инерции. (*Примеч. ред.*)

Тензор (9.25) тождественно удовлетворяет (9.24) при любых значениях углов $\psi(s)$ и $\varphi(s)$ в силу равенств

$$\mathcal{M} \cdot \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}, \quad \mathbf{Q}(\varphi \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T(\varphi \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{C}^{-1}, \quad (9.27)$$

где \mathbf{C} определен равенством (9.15).

Вектор изгиба-кручения Φ , отвечающий тензору поворота (9.25), выражается формулой, аналогичной (5.10):

$$\Phi = \psi' \hat{\mathcal{M}} + \varphi' \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{M}}) \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (9.28)$$

Теперь уравнение (9.23) с учетом (9.25) и (9.27) принимает вид

$$\psi' \hat{\mathcal{M}} + \varphi' \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{M}}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathcal{M}}) \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathcal{M},$$

или после умножения на $\mathbf{Q}^T(\psi \hat{\mathcal{M}})$ слева:

$$\psi' \hat{\mathcal{M}} + \varphi' \boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathcal{M}.$$

В скалярной форме это уравнение равносильно двум:

$$\psi' + \varphi' \cos \theta = \frac{2h}{\mathcal{M}}, \quad \psi' \cos \theta + \varphi' = \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{C_3}, \quad \mathcal{M} \equiv |\mathcal{M}|, \quad (9.29)$$

где θ — угол между направлением \mathcal{M} и $\boldsymbol{\tau}$, константа h определяется следующим образом:

$$2h = \mathcal{M} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}^2}{C_3} \cos^2 \theta + \frac{\mathcal{M}^2}{C_1} \sin^2 \theta, \quad \cos \theta = \hat{\mathcal{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Решая (9.29), находим углы ψ и φ :

$$\psi' = \frac{\mathcal{M}}{C_1}, \quad \varphi' = \left(\frac{\mathcal{M}}{C_3} - \frac{\mathcal{M}}{C_1} \right) \cos \theta. \quad (9.30)$$

Вектор $\mathbf{R}(s)$ находится по (9.22) и (9.30):

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}(\beta s \hat{\mathcal{M}}) \cdot \boldsymbol{\tau} = (1 - \cos \beta s) \cos \theta \hat{\mathcal{M}} + \cos \beta s \boldsymbol{\tau} + \sin \beta s \hat{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \beta = \mathcal{M}/C_1,$$

или после интегрирования:

$$\beta \mathbf{R} = (\beta s - \sin \beta s) \cos \theta \hat{\mathcal{M}} + \sin \beta s \boldsymbol{\tau} + (1 - \cos \beta s) \hat{\mathcal{M}} \times \boldsymbol{\tau}. \quad (9.31)$$

Легко видеть, что (9.31) определяет винтовую линию, т. е. линию, навитую на цилиндр радиуса $R_c = 1/\beta$, ось которого направлена вдоль вектора $\hat{\mathcal{M}}$.

Радиусы кривизны и кручения, а также шаг H винтовой линии, определяются формулами

$$R_1^{-1} = \beta \sin \theta, \quad R_2^{-1} = \beta \cos \theta, \quad H = 2\pi \cos \theta / \beta. \quad (9.32)$$

Если вектор $\hat{\mathbf{M}}$ ортогонален $\boldsymbol{\tau}$, то винтовая линия превращается в дугу окружности. Если, кроме того, параметр $\beta l = 2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$, то стержень сворачивается в k -витковую окружность. Обратим внимание, что следует различать понятия кручения стержня и кручения упругой линии. Радиус кручения упругой линии определяется второй из формул (9.32), в то время как кручение стержня находится по вектору изгиба-кручения следующим образом. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ есть нормаль к поперечному сечению недеформированного стержня. Вектор $\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}$ есть нормаль к поперечному сечению деформированного стержня. Имеем представления:

$$\mathbf{D}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{D})\mathbf{D} + \mathbf{D} \times \mathbf{D}'.$$

Величина $\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{D}$ называется кручением стержня, а обратная к ней величина — радиусом кручения. В данной задаче $\mathbf{D} = \mathbf{R}'$, поэтому

$$R_k^{-1} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{R}' = [\psi' \hat{\mathbf{M}} + \varphi' \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T(\psi \hat{\mathbf{M}})] \cdot \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{M}}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \psi' \cos \theta + \varphi'.$$

Итак, радиус кручения стержня R_k определяется формулой

$$R_k^{-1} = \frac{\mathcal{M} \cos \theta}{C_3} \neq R_2^{-1} = \frac{\mathcal{M}}{C_1} \cos \theta.$$

Допустим, что внешний торцевой момент \mathcal{M} мал по величине

$$\left| \frac{\mathcal{M}l}{C_3} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\mathcal{M}l}{C_1} \right| \ll 1.$$

В этом случае в полном решении можно ограничиться только главными членами разложения:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s) &= s\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathcal{M}}{2C_1} s^2 \hat{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathcal{M}^2}{6C_1^2} s^3 \cos \theta \boldsymbol{\tau} \times (\hat{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau}), \\ \boldsymbol{\Phi}(s) &= \frac{\mathcal{M}}{C_1} \hat{\mathbf{M}} + \left(\frac{\mathcal{M}}{C_3} - \frac{\mathcal{M}}{C_1} \right) \cos \theta \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathcal{M}s}{C_1} \left(\frac{\mathcal{M}}{C_3} - \frac{\mathcal{M}}{C_1} \right) \cos \theta \hat{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

Линейные по \mathcal{M}/C_1 и \mathcal{M}/C_3 слагаемые в этих выражениях определяются линейной теорией, а квадратичные по ним слагаемые малы, но не вполне ясно, когда их можно игнорировать, так как они ортогональны линейным слагаемым и качественно меняют характер решения — плоская кривая превращается в пространственную.

9.3. Условия потенциальности внешних воздействий

Чтобы не загромождать изложение несущественными деталями, в дальнейшем считаем, что один конец стержня заземлен:

$$\mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0, t) = \mathbf{E}.$$

Тогда мощность внешних воздействий на стержень определяется выражением

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \rho_0 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}) ds + \mathbf{N}(l, t) \cdot \mathbf{v}(l, t) + \mathbf{M}(l, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(l, t). \quad (9.33)$$

Определение. Внешние воздействия называются потенциальными¹⁴, если существуют такие функции векторов положений и тензоров поворота $\Pi_1(\mathbf{R}, \mathbf{P})$ и $\Pi_2(\mathbf{R}, \mathbf{P})$, что справедливы равенства:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{d}{dt} \Pi_1(\mathbf{R}, \mathbf{P}), \quad (9.34)$$

$$\mathbf{N}(l, t) \cdot \mathbf{v}(l, t) + \mathbf{M}(l, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(l, t) = -\frac{d}{dt} \Pi_2(\mathbf{R}(l, t), \mathbf{P}(l, t)),$$

где векторы усилия $\mathbf{N}(l, t)$ и момента $\mathbf{M}(l, t)$ считаются заданными функциями $\mathbf{R}(l, t)$ и $\mathbf{P}(l, t)$.

Поскольку условия потенциальности для обоих случаев в (9.34) выписываются одинаково, то в дальнейшем будем рассматривать только первое из этих выражений, причем будем писать $\Pi_1 = \Pi$. Вычислим производную по времени от функции $\Pi(\mathbf{R}, \mathbf{P})$:

$$\dot{\Pi}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \dot{\mathbf{P}}.$$

Кроме того, с учетом (9.3) имеем

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot [\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T]_{\times} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \times \mathbf{P})^T \cdot \dot{\mathbf{P}}.$$

Подставляя эти выражения в (9.34), получаем

$$\left(\mathbf{F} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}} \right) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \left[\frac{1}{2} \mathbf{L} \times \mathbf{P} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \right]^T \cdot \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (9.35)$$

¹⁴ Условия потенциальности внешних воздействий применительно к абсолютно твердому телу обсуждаются в разделе 7.2. (Примеч. ред.)

Получили линейную форму скоростей, которая для всех мыслимых движений должна обращаться в нуль. Отсюда нельзя заключить, что коэффициенты при скоростях должны обращаться в нуль, поскольку не все компоненты тензора поворота независимы. В самом деле, из уравнения Пуассона следует:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \Rightarrow \operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^\top \cdot \dot{\mathbf{P}} = 0 \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top.$$

Поэтому (9.35) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}, \quad \frac{1}{2} \mathbf{L} \times \mathbf{P} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}.$$

Умножая второе из этих равенств на \mathbf{P}^\top справа и вычисляя векторный инвариант от обеих частей получившегося равенства, получаем искомые условия потенциальности:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}, \quad \mathbf{L} = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_\times. \quad (9.36)$$

Здесь учтены тождества

$$(\mathbf{L} \times \mathbf{E})_\times = -2\mathbf{L}, \quad \mathbf{A}_\times = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^\top.$$

Условие потенциальности силы вполне стандартно, но условие потенциальности момента, видимо, ранее не встречалось. Задание Π как функции \mathbf{R} и \mathbf{P} возможно, но не всегда удобно. Часто бывает удобнее пользоваться вектором поворота¹⁵. Напомним его определение. Согласно теореме Эйлера любой тензор поворота представим в форме

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta \mathbf{E} + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E}, \quad (9.37)$$

где θ — угол поворота, $\mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{m}$ — неподвижный вектор тензора \mathbf{P} . Тензору поворота (9.37) отвечает угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{m} + \sin \theta \dot{\mathbf{m}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}. \quad (9.38)$$

Вектором поворота называется вектор $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}, \quad \mathbf{P} = \exp(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}).$$

Вторая из этих формул, являющаяся перефразировкой теоремы Эйлера (9.37), устанавливает связь между тензором поворота и вектором поворота. Через вектор поворота угловая скорость выражается формулой (2.136):

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \left[\frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

¹⁵ В разделе 7.2 реализован подход, основанный на задании потенциала внешних воздействий как функции вектора поворота. (*Примеч. ред.*)

Потенциалы Π_1 и Π_2 в (9.34) можно рассматривать как функции \mathbf{R} и $\boldsymbol{\theta}$. Тогда вместо (9.35) получим¹⁶:

$$\left(\mathbf{F} + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}} \right) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \left[\mathbf{L} \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = 0.$$

Здесь уже все скорости линейно независимы и условия потенциальности состоят в обращении коэффициентов при скоростях в нули:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{R}}, \quad \mathbf{L} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \equiv -\mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}}. \quad (9.39)$$

Второе из этих выражений совпадает с выражением (7.10), полученным в седьмой главе. С учетом выражения для тензора-интегратора (2.139):

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E} + \frac{1-g}{\theta^2} (\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - \theta^2 \mathbf{E}), \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)},$$

выражение для \mathbf{L} можно записать в виде

$$\mathbf{L} = - \left[\frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{2(1 - \cos \theta) - \theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta) \theta^2} \left(\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \boldsymbol{\theta} \right]. \quad (9.40)$$

Выражение (9.40) внешне выглядит сложнее, чем (9.36), но его фактическое использование часто оказывается проще. Оно сильно упрощается для так называемых изотропных потенциалов, таких, что

$$\Pi(\mathbf{P}) = \Pi(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}^T) = F(\text{tr } \mathbf{P}), \quad \forall \mathbf{Q}: \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E}, \quad (9.41)$$

$$\Pi(\boldsymbol{\theta}) = \Pi(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\theta}) \Rightarrow \Pi = F(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}). \quad (9.42)$$

В случае (9.41) формула (9.36) может быть преобразована следующим образом:

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{P}} = F'(\text{tr } \mathbf{P}) \frac{d(\text{tr } \mathbf{P})}{d\mathbf{P}} = F'(\text{tr } \mathbf{P}) \mathbf{E},$$

где штрих означает производную по аргументу $\text{tr } \mathbf{P}$.

Учтем теперь формулы

$$\text{tr } \mathbf{P} = 1 + 2 \cos \theta, \quad \mathbf{P} \times = -2 \sin \theta \mathbf{m} = \frac{d(\text{tr } \mathbf{P})}{d\theta} \mathbf{m}$$

¹⁶ Здесь проведены следующие преобразования:

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \dots \dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial \Pi}{\partial p_{ij}} e^j e^i \dots \dot{p}^{mn} e_m e_n = \frac{\partial \Pi}{\partial p^{mn}} \dot{p}^{mn} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial p^{mn}} \frac{\partial p^{mn}}{\partial \theta} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{E} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

и учтены соотношения $\frac{1}{2} (\mathbf{L} \times \mathbf{P})^T \dots \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}$. (Примеч. ред.)

и перепишем (9.36) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^\top \right)_{\times} = F'(\text{tr } \mathbf{P}) (\mathbf{P}^\top)_{\times} = -F'(\text{tr } \mathbf{P}) \frac{d(\text{tr } \mathbf{P})}{d\theta} \mathbf{m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{L} = -\frac{d\mathcal{F}}{d\theta} \mathbf{m}, \quad F(\text{tr } \mathbf{P}) = \mathcal{F}(\theta). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Если для $\mathcal{F}(\theta)$ принять простейшее выражение

$$\mathcal{F}(\theta) = -L\theta \Rightarrow \mathbf{L} = L\mathbf{m}, \quad (9.44)$$

то для \mathbf{L} получаем выражение, предложенное в работе [73].

В случае (9.42) выражение (9.40) резко упрощается и принимает вид

$$\mathbf{L} = -2\Pi'(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}, \quad (9.45)$$

где штрих означает производную по аргументу $\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}$. Чтобы получить момент (9.44), достаточно принять, что $\Pi = -L\sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}}$. Эта энергия не слишком удачна, поскольку она имеет угловую точку в нуле.

Рассмотрим другой вид консервативного момента, который определяется энергией

$$\Pi = -L\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}. \quad (9.46)$$

Подставляя (9.46) в (9.40), получаем

$$\mathbf{L} = L \left[\frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\tau} + \frac{2(1 - \cos \theta) - \theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)\theta^2} (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\theta} \right]. \quad (9.47)$$

При чистом кручении стержня вектор поворота $\boldsymbol{\theta} = \theta \boldsymbol{\tau}$, а вектор момента определяется простым выражением

$$\mathbf{L} = L\boldsymbol{\tau}.$$

В этом случае модуль момента не зависит от поворота, но в общем случае (9.47) модуль потенциального момента (9.47) зависит от угла поворота $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$:

$$|\mathbf{L}|^2 = \frac{L^2(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau})^2}{\theta^2} + \frac{L^2 [\theta^2 - (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau})^2]}{2(1 - \cos \theta)}. \quad (9.48)$$

Очевидно, что для потенциальных внешних воздействий, согласно (9.6) и (9.34), имеем интеграл энергии

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\rho_0(\mathcal{K} + \mathcal{U}) + \Pi_1(\mathbf{R}, \boldsymbol{\theta}) \right] ds + \Pi_2(\mathbf{R}(\mathbf{l}, t), \boldsymbol{\theta}(\mathbf{l}, t)) = \text{const}. \quad (9.49)$$

9.4. Прямолинейные равновесные конфигурации консольного стержня

Рассмотрим консольный стержень, нагруженный силами и моментами на незакрепленном торце. Краевые условия

$$s = 0: \quad \mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0, t) = \mathbf{E}; \quad (9.50)$$

$$s = l: \quad \mathbf{N}(l, t) = -\alpha_1 \mathcal{N} \boldsymbol{\tau} - \alpha_2 \mathcal{N} \mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (9.51)$$

$$\mathbf{M}(l, t) = \mathbf{b}_1 \mathcal{M} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{b}_2 \mathcal{M} \mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{b}_3 \mathcal{M} (\boldsymbol{\tau} + \mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\tau})}{\sqrt{2[1 + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\tau}]} + \mathbf{b}_4 \mathcal{M}. \quad (9.52)$$

В (9.51)–(9.52) учтены наиболее популярные типы торцевых нагрузок¹⁷. Мертвая сила: $\alpha_1 \neq 0$. Следящая сила: $\alpha_2 \neq 0$. Мертвый момент: $\mathbf{b}_1 \neq 0$. Следящий момент: $\mathbf{b}_2 \neq 0$. Полукасательный момент: $\mathbf{b}_3 \neq 0$. Потенциальный момент: $\mathbf{b}_4 \neq 0$. Считается, что остальные α_i и \mathbf{b}_k равны нулю. В литературе полукасательный момент относят к потенциальным, но это верно только приближенно. В качестве потенциального будем рассматривать момент (9.47), порождаемый потенциалом (9.46): $\Pi = -\mathcal{M} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}$, а также момент (9.44), порождаемый потенциалом

$$\Pi = -\mathcal{M} \sqrt{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}}, \quad \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{R}' > 0, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M} \boldsymbol{\theta} / |\boldsymbol{\theta}|. \quad (9.53)$$

Условие $\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{R}' > 0$ исключает из рассмотрения чистый изгиб стержня. Равновесные конфигурации находятся как решения уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{N} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\Phi}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{R}' - \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P} \end{aligned} \quad (9.54)$$

при краевых условиях (9.50)–(9.52).

Убедимся, что задача (9.50)–(9.52), (9.54) имеет решение вида

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= [s + \mathbf{u}(s)] \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi(s) \boldsymbol{\tau}) \Rightarrow \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{u}' \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \psi' \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}_3 \mathbf{u}' \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{C}_3 \psi' \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

¹⁷ В разделе 7.6 рассмотрена задача о положениях равновесия твердого тела на упругом основании общего вида, при условии, что на тело действуют крутящие моменты, которые являются частными случаями (9.52). А именно, речь идет о мертвом, следящем, полукасательном моментах и двух видах потенциального момента. В разделе 7.7 проводится анализ устойчивости равновесной конфигурации. (*Примеч. ред.*)

Подставляя (9.55) в уравнения статики (9.54), с учетом граничных условий (9.50)–(9.52) получаем

$$A_3 \mathbf{u}(s) = -(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \mathcal{N} s, \quad C_3 \psi(s) = (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4) \mathcal{M} s. \quad (9.56)$$

В равновесной конфигурации (9.55), (9.56) стержень остается прямолинейным, но оказывается сжатым и скрученным. Имеются ли в задаче (9.50)–(9.52) другие решения и каково их число? В общем случае ответ неизвестен. Следующий важный вопрос: устойчива ли конфигурация (9.55), (9.56)? В общем случае ответ и на этот вопрос не получен, хотя много частных результатов в рамках нерастяжимого стержня известно уже давно [61, 62, 64]. Вопрос об устойчивости стержня, скрученного следящим моментом, обсуждается в разделе 9.10. Данный раздел посвящен определению равновесных конфигураций стержня для нескольких частных случаев чисто моментного нагружения ($\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$). Итак, имеем

$$\mathbf{N} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = \text{const}. \quad (9.57)$$

Пришли к задаче, аналогичной задаче о нагружении стержня мертвым моментом, но здесь постоянный момент \mathbf{M} заранее неизвестен и подлежит определению. Каков бы ни был момент \mathbf{M} , первая часть решения этой задачи совпадает с тем, что было изложено в разделе 9.2. Поэтому можем написать

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \hat{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \boldsymbol{\tau}), \quad \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M}/M, \quad M = |\mathbf{M}|, \quad (9.58)$$

где

$$\psi(s) = \frac{Ms}{C_1}, \quad \varphi(s) = \left(\frac{Ms}{C_3} - \frac{Ms}{C_1} \right) \cos \theta, \quad \cos \theta \equiv \hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (9.59)$$

Осталось определить момент \mathbf{M} . Далее момент \mathbf{M} определяется для частных случаев внешнего нагружения.

9.4.1. Нагружение мертвым моментом

Момент на торце стержня получается мертвым, если коэффициенты в выражении (9.52) принимают значения

$$\mathbf{b}_1 = 1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_4 = 0.$$

В этом случае

$$\mathbf{M} = M \boldsymbol{\tau}, \quad M = |M|, \quad \hat{\mathbf{M}} = \pm \boldsymbol{\tau}.$$

Выбор знака у $\hat{\mathbf{M}}$ безразличен, и прямолинейная конфигурация единственна.

9.4.2. Нагружение следящим моментом

Момент на торце стержня получается следящим, если коэффициенты в выражении (9.52) принимают значения

$$b_2 = 1, \quad b_1 = b_3 = b_4 = 0.$$

В этом случае

$$\mathbf{M} = \mathcal{M} \mathbf{P}(l) \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Подставляя сюда (9.58), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \mathcal{M} \mathbf{Q}(\psi(l) \hat{\mathbf{M}}) \cdot \boldsymbol{\tau} &\Rightarrow \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{M}} = \mathcal{M} \hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{M} = |\mathcal{M}|, \quad \hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau} = \pm 1 &\Rightarrow \hat{\mathbf{M}} = \pm \boldsymbol{\tau}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что и в этом случае прямолинейная конфигурация (9.54)–(9.56) единственна.

9.4.3. Нагружение полукасательным моментом

Момент на торце стержня получается следящим при следующих значениях коэффициентов в выражении (9.52):

$$b_3 = 1, \quad b_1 = b_2 = b_4 = 0.$$

В этом случае прямолинейная конфигурация единственна при условии, что

$$|\mathcal{M}| \neq (2k + 1)\pi C_1/l. \quad (9.60)$$

В самом деле для полукасательного момента имеем равенство

$$\mathbf{M} = \frac{\mathcal{M}(\boldsymbol{\tau} + \mathbf{P}(l) \cdot \boldsymbol{\tau})}{\sqrt{2[1 + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}(l) \cdot \boldsymbol{\tau}]}} \Rightarrow |\mathbf{M}| = |\mathcal{M}|.$$

Для направляющего вектора $\hat{\mathbf{M}}$ имеем ($\mathcal{M} > 0$)

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{(1 + \cos \alpha l)\boldsymbol{\tau} + (1 - \cos \alpha l) \cos \theta \hat{\mathbf{M}} + \sin \alpha l \hat{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau}}{\sqrt{2(1 + \cos^2 \theta + \cos \alpha l \sin^2 \theta)}},$$

где

$$\alpha l = \mathcal{M}l/C_1, \quad \cos \theta = \hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Если $\sin \alpha l \neq 0$, то $\hat{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ и $\hat{\mathbf{M}} = \pm \boldsymbol{\tau}$. Легко убедиться, что при любом выборе знака мы имеем одну и ту же прямолинейную равновесную

конфигурацию. Если $\sin \alpha l = 0$ и $\cos \alpha l = 1$, то $\hat{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\tau}$, и мы опять приходим к прямолинейной конфигурации.

Если справедливы равенства

$$\sin \alpha l = 0, \quad \cos \alpha l = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha l = (2k + 1)\pi \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (9.61)$$

то получаем

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} \hat{\mathbf{M}}.$$

Следовательно, при $\cos \theta > 0$ вектор $\hat{\mathbf{M}}$ может быть любым, а при $\cos \theta < 0$ решения не существует, т. е. остается только решение $\hat{\mathbf{M}} = \pm \boldsymbol{\tau}$. В случае (9.61) тензор поворота (9.58) принимает вид

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \left[(2k + 1)\pi \frac{s}{l} \hat{\mathbf{M}} \right] \cdot \mathbf{Q} \left[(2k + 1)\pi \left(\frac{C_1}{C_3} - 1 \right) \frac{s}{l} (\hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} \right].$$

Равновесные конфигурации находятся интегрированием соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'(s) &= \left[1 - \cos \frac{(2k + 1)\pi s}{l} \right] (\hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}) \hat{\mathbf{M}} + \\ &+ \cos \frac{(2k + 1)\pi s}{l} \boldsymbol{\tau} + \sin \frac{(2k + 1)\pi s}{l} \hat{\mathbf{M}} \times \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{R}'(l) = 2(\hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}) \hat{\mathbf{M}} - \boldsymbol{\tau}, \quad \hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau} > 0. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Интегрируя (9.62), получаем винтовую линию, а точнее семейство винтовых линий, так как вектор $\hat{\mathbf{M}}$ остается неопределенным.

Решения (9.62) появляются только для дискретных значений момента, определяемых равенством (9.61). Таким образом, если игнорировать эти дискретные значения момента, то прямолинейная конфигурация стержня, нагруженного полукасательным моментом, единственна.

9.4.4. Нагружение потенциальным моментом

Если принять потенциал (9.53), то для краевого момента \mathcal{M} имеем $\mathcal{M} = \mathcal{M} \boldsymbol{\theta}(l) / |\boldsymbol{\theta}(l)|$, т. е. \mathcal{M} , а стало быть и \mathbf{M} , направлен по неподвижному вектору тензора $\mathbf{P}(l)$:

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}(\psi(l) \hat{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(l) \boldsymbol{\tau}) = \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}(\varphi(l) \boldsymbol{\tau}),$$

т. е. вектор $\hat{\mathbf{M}}$ является неподвижным вектором тензора поворота $\mathbf{Q}(\varphi(l) \boldsymbol{\tau})$. Если $\varphi(l) \neq 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то вектор $\hat{\mathbf{M}}$ находится однозначно и равен $\hat{\mathbf{M}} = \boldsymbol{\tau}$. Случай $\hat{\mathbf{M}} = -\boldsymbol{\tau}$ по существу ничего не меняет.

Если $\varphi(\mathbf{l}) = 0$, то при $\mathcal{M} \neq 0$ имеем $\hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$. Но этот случай очевидно исключен условием $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{l}) \cdot \mathbf{R}'(\mathbf{l}) > 0$. Поэтому рассмотрим случай

$$\varphi(\mathbf{l}) = \left(\frac{Ml}{C_3} - \frac{Ml}{C_1} \right) (\hat{\mathbf{M}} \cdot \boldsymbol{\tau}) = \left(\frac{1}{C_3} - \frac{1}{C_1} \right) l \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\tau} = 2\pi k. \quad (9.63)$$

Видим, что и здесь, как и в случае с полукасательным моментом, для каждого значения \mathbf{M} , удовлетворяющего (9.63), появляется свое семейство винтовых линий.

Практического значения выявленная неединственность, видимо, не имеет, так как она появляется только при больших значениях краевого момента \mathbf{M} , когда материал стержня находится далеко за пределами упругости.

Для потенциала (9.46) исследование числа решений в принципе проводится аналогично, но выливается в анализ очень громоздких уравнений. Поэтому этот анализ оставляем в стороне. Усложняется этот анализ и в том случае, когда действует комбинация рассмотренных моментов. То, что здесь могут возникнуть нетривиальные ситуации, видно уже из приведенного анализа: для мертвого и следящего моментов, взятых по отдельности, решение единственно, но для их комбинации (полукасательного момента) решение не единственно.

9.5. Нерастяжимый гибкий стержень

подавляющее большинство результатов, полученных в нелинейной теории стержней, относятся к случаю, когда игнорируются деформации растяжения и поперечного сдвига, а также инерция вращения и распределенный момент. Полная система уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{N}' + \rho_0 \mathbf{F} &= \rho_0 \ddot{\mathbf{R}}, & \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} &= \mathbf{0}, & \mathbf{R}' &= \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\Phi}, & \mathbf{P}' &= \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Здесь мы имеем девять неизвестных функций: шесть координат векторов \mathbf{R} и \mathbf{N} и три параметра, определяющих тензор поворота. Далее в этом разделе будем рассматривать частный случай безынерционного стержня ($\rho_0 = 0$) с трансверсально-изотропным тензором упругости \mathbf{C} . Если, кроме того, распределенная нагрузка отсутствует ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$), то ситуация упрощается еще больше, поскольку $\mathbf{N} = \text{const}$. Фактически теперь остается только три неизвестных — параметры, определяющие тензор поворота. Вектор \mathbf{R} находится по третьему уравнению системы (9.64) квадратурой. Очень часто при анализе

этого случая ссылаются на аналогию, установленную Г. Кирхгофом в 1859 г., между уравнениями теории стержней и уравнениями динамики твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести¹⁸. Мертвая сила: $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$. Следящая сила: $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$. Следует, однако, иметь в виду, что, строго говоря, эта аналогия справедлива только в том случае, если вектор \mathbf{N} равен нулю¹⁹. Дело в том, что в динамике твердого тела заданы начальные условия, т. е. при $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ заданы тензор поворота и вектор угловой скорости. Для консольного стержня вектор поворота при $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ задан, но вектор момента при $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ известен только в том случае, если $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Поэтому теорема единственности для решений задачи Коши в динамике твердого тела в задаче об изгибе с кручением тонкого стержня уже неприменима. Имеются и другие весьма заметные отличия.

В целом задачи теории стержней оказываются значительно более сложными, чем задачи динамики твердого тела.

Согласно третьему и пятому уравнению системы (9.64) имеем

$$\mathbf{R}'' = \Phi \times \mathbf{R}' \Rightarrow \Phi = (\Phi \cdot \mathbf{R}')\mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \Phi \cdot \mathbf{R}'' = 0. \quad (9.65)$$

Второе из этих соотношений выражает представление Пуассона для вектора изгиба–кручения. Если тензор упругости \mathbf{C} определяется формулой (9.15), то для момента \mathbf{M} имеем

$$\mathbf{M} = C_1 \Phi + (C_3 - C_1)(\mathbf{R}' \cdot \Phi)\mathbf{R}' \Rightarrow \mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = C_3 \Phi \cdot \mathbf{R}'. \quad (9.66)$$

Подставляя (9.66) во второе уравнение системы (9.64) и проецируя получившееся уравнение на \mathbf{R}' с учетом последнего соотношения из (9.65), получаем интеграл Пуассона (1816):

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{R}' = C_3 \Phi \cdot \mathbf{R}' = C_3 \Phi = \text{const}, \quad (9.67)$$

т. е. крутящий момент в стержне при действии только торцевых нагрузок сохраняет постоянное по длине стержня значение. Тогда имеем представления

$$\Phi = \Phi \mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \mathbf{M} = C_3 \Phi \mathbf{R}' + C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}''. \quad (9.68)$$

¹⁸ Задача о вращении твердого тела с трансверсально-изотропным тензором инерции вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести рассмотрена в разделе 5.5. (*Примеч. ред.*)

¹⁹ Случай, когда вектор \mathbf{N} равен нулю, аналогичен задаче о свободном вращении твердого тела с трансверсально-изотропным тензором инерции. Эта задача рассмотрена в разделе 5.1. (*Примеч. ред.*)

Далее рассматривается безынерционный стержень в отсутствие распределенных внешних сил. Следовательно, вектор \mathbf{N} не зависит от пространственной координаты

$$\mathbf{N}(s, t) = \mathbf{N}(t). \quad (9.69)$$

Краевые условия примем в виде

$$\mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0, t) = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{R}'(0, t) = \boldsymbol{\tau}, \quad (9.70)$$

$$\mathbf{N}(l, t) = -\alpha_1 \mathcal{N} \boldsymbol{\tau} - \alpha_2 \mathcal{N} \mathbf{R}'(l, t) - \alpha_3 \mathbf{m} \ddot{\mathbf{R}}(l, t), \quad (9.71)$$

$$\mathbf{M}(l, t) = \mathcal{M} \mathbf{R}'(l, t). \quad (9.72)$$

Здесь мы сохраняем только следящий момент, поскольку это едва ли не единственный случай, который легко осуществляется экспериментально. В (9.71) включен инерционный член $\mathbf{m} \ddot{\mathbf{R}}(l, t)$. Это означает, что к незакрепленному торцу стержня присоединено точечное тело с массой \mathbf{m} .

В дополнение к интегралу Пуассона (9.67) имеются еще два очевидных интеграла

$$\mathbf{M}(s, t) \cdot \mathbf{N}(t) = A(t), \quad (9.73)$$

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\Phi}(s, t) \cdot \mathbf{P}(s, t) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T(s, t) \cdot \boldsymbol{\Phi}(s, t) + \mathbf{R}'(s, t) \cdot \mathbf{N}(t) = H(t). \quad (9.74)$$

Согласно (9.68) и (9.72) имеем

$$\begin{aligned} C_3 \boldsymbol{\Phi} \mathbf{R}'(l, t) + C_1 \mathbf{R}'(l, t) \times \mathbf{R}''(l, t) &= \mathcal{M} \mathbf{R}'(l, t) \Rightarrow \\ \Rightarrow C_3 \boldsymbol{\Phi} &= \mathcal{M}, \quad \mathbf{R}''(l, t) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9.75)$$

Введем естественный базис на упругой линии: \mathbf{R}' , \mathbf{n} , $\mathbf{b} = \mathbf{R}' \times \mathbf{n}$, где \mathbf{n} — единичная нормаль к кривой, \mathbf{b} — бинормаль, т. е.

$$\mathbf{R}''(s, t) = \frac{1}{R_c(s, t)} \mathbf{n}(s, t), \quad |\mathbf{n}| = 1, \quad \mathbf{b} = \mathbf{R}' \times \mathbf{n}. \quad (9.76)$$

Последнее равенство в (9.75) показывает, что кривизна упругой линии $R_c^{-1}(l, t)$ на незакрепленном торце стержня равна нулю. С учетом (9.68) и (9.75) интегралы (9.73) и (9.74) можно переписать в виде

$$\frac{C_1}{R_c(s, t)} \mathbf{b}(s, t) \cdot \mathbf{N}(t) = \mathcal{M}(T(l, t) - T(s, t)), \quad (9.77)$$

$$\frac{C_1}{2R_c^2(s, t)} = T(l, t) - T(s, t), \quad T(s, t) \equiv \mathbf{R}'(s, t) \cdot \mathbf{N}(t), \quad (9.78)$$

где $T(s, t)$ — продольная сила в стержне.

Выражения (9.68) для вектора деформации изгиба–кручения и вектора момента можно переписать с учетом (9.75), (9.77) и (9.78) в следующем виде:

$$\Phi(s, t) = \frac{\mathcal{M}}{C_3} \mathbf{R}'(s, t) + \frac{1}{R_c(0, t)} \sqrt{\frac{T(l, t) - T(s, t)}{T(l, t) - T(0, t)}} \mathbf{b}(s, t), \quad (9.79)$$

$$\mathbf{M}(s, t) = \mathcal{M} \mathbf{R}'(s, t) + \frac{C_1}{R_c(0, t)} \sqrt{\frac{T(l, t) - T(s, t)}{T(l, t) - T(0, t)}} \mathbf{b}(s, t). \quad (9.80)$$

Кроме того, из (9.77) и (9.78) при $R_c^{-1}(s, t)$, не равном тождественно нулю, следует соотношение²⁰

$$\frac{\mathcal{M}}{2R_c(s, t)} = \mathbf{b}(s, t) \cdot \mathbf{N}(t). \quad (9.81)$$

Из (9.77)–(9.80) видно, сколь важную роль играет продольная сила в стержне. Таким образом, проекция уравнения моментов на \mathbf{R}' дает нам интеграл Пуассона (9.67), проекция на \mathbf{N} дает интеграл (9.73) и проекция на Φ дает интеграл энергии (9.74).

Если векторы \mathbf{R}' , \mathbf{N} и Φ линейно независимы, т. е. если выполнено неравенство

$$\frac{1}{R_c(0, t)} \sqrt{\frac{T(l, t) - T(s, t)}{T(l, t) - T(0, t)}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \neq 0,$$

то уравнение баланса моментов $\mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ в силу найденных выше трех первых интегралов удовлетворяется тождественно. Впрочем, проекция этого уравнения на нормаль \mathbf{n} дает еще одно полезное тождество

$$\frac{3\mathcal{M}}{2R_c^3(s, t)} + \frac{C_1}{R_c(0, t)} \sqrt{\frac{T(l, t) - T(s, t)}{T(l, t) - T(0, t)}} (\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'') \cdot \mathbf{R}''' = 0, \quad (9.82)$$

из которого видно, что при $\mathcal{M} = 0$ кручение упругой линии отсутствует.

Дальнейшее интегрирование уравнений нерастяжимого стержня в общем случае едва ли имеет смысл, так как даже уже полученные интегралы опираются на допущения следующего типа: если кривизна не равна нулю тождественно, если продольная сила в стержне не постоянна и т. д. Поэтому в дальнейшем ограничимся анализом конкретных частных случаев.

²⁰ Из этого соотношения видно, что зависимость кривизны стержня от пространственной координаты определяется косинусом угла между вектором бинормали и вектором $\mathbf{N}(t)$. Отсюда, в частности, можно заключить, что $|R_c^{-1}(s, t)| \leq 2|\mathbf{N}(t)/\mathcal{M}|$. (Примеч. ред.)

Важно подчеркнуть следующее. Несмотря на то, что для нерастяжимого стержня получено большое количество частных результатов, тем не менее в общем случае не доказана даже разрешимость основных уравнений (9.64) при краевых условиях (9.70)–(9.72).

9.6. Нагружение стержня мертвой силой (эластика Эйлера)

Обратимся к рассмотрению одной из самых знаменитых задач механики, известной под названием эластики Эйлера (1744 г.). Исследование этой задачи привело к возникновению новых разделов механики (теория устойчивости упругих конструкций) и математической физики (теория ветвлений решений нелинейных уравнений [74]). Решения многих нелинейных задач статики для тонких стержней можно найти в книге [75].

Эластикой Эйлера называют задачу о нагружении первоначально прямолинейного стержня продольной силой, приложенной к свободному торцу стержня. При этом используется модель нерастяжимого стержня. Эластика Эйлера описывается дифференциальными уравнениями (9.64) и краевыми условиями (9.70)–(9.72) при

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

В этом случае краевые условия принимают вид

$$s = 0: \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}; \quad s = l: \mathbf{N} = -\mathcal{N}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (9.83)$$

Плоские формы равновесия в этой задаче хорошо изучены еще Л. Эйлером. Покажем, что равновесных конфигураций, отличных от плоских, не существует. Согласно (9.68) и (9.75), в эластике Эйлера для момента имеем

$$\mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}''. \quad (9.84)$$

Если $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, т. е. если $\mathbf{R}'' = \mathbf{0}$, имеем только прямолинейную равновесную конфигурацию $\mathbf{R} = s\boldsymbol{\tau}$. Поэтому рассмотрим случай $\mathbf{R}'' \neq \mathbf{0}$. Интеграл (9.73) принимает вид

$$\mathbf{M}(s, t) \cdot \mathbf{N}(t) = -C_1 \mathcal{N} \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{R}' \times \mathbf{R}'') = \mathbf{0}.$$

Это означает, что векторы $\mathbf{R}'(s)$, $\mathbf{R}''(s)$ и $\boldsymbol{\tau}$ лежат в одной плоскости. Поскольку $\mathbf{R}''(s) \neq \mathbf{0}$, то справедливо разложение

$$\mathbf{R}''(s) = \mu(s)\boldsymbol{\tau} + \lambda(s)\mathbf{R}'(s) = \mu(s) [\boldsymbol{\tau} - (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}')\mathbf{R}'], \quad \mu(s) \neq 0. \quad (9.85)$$

Уравнение моментов с учетом (9.84) дает

$$\mathbf{R}' \times [\mathbf{C}_1 \mathbf{R}''' - \mathcal{N} \boldsymbol{\tau}] = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{C}_1 \mathbf{R}''' = \mathcal{N} \boldsymbol{\tau} + q(s) \mathbf{R}'(s),$$

т. е. вектор \mathbf{R}''' также лежит в плоскости, натянутой на $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{R}' . Если $\mathbf{R}'' \neq \mathbf{0}$, то для бинормали \mathbf{b} можем написать

$$\mathbf{b} = \mathcal{R}_c \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = \mathcal{R}_c \mu \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau}, \quad (9.86)$$

где учтено (9.85). Дифференцируя (9.86) по s и вновь используя (9.85), получаем

$$\mathbf{b}' = (\mathcal{R}_c \mu)' \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau} + \mathcal{R}_c \mu \mathbf{R}'' \times \boldsymbol{\tau} = [(\mathcal{R}_c \mu)' - \mathcal{R}_c \mu^2 (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}')] \mathbf{R}' \times \boldsymbol{\tau}.$$

Проецируя это выражение на \mathbf{b} с учетом (9.86) и принимая во внимание, что \mathbf{b}' ортогонален \mathbf{b} , так как $|\mathbf{b}| = 1$, получаем

$$(\mathcal{R}_c \mu)' - \mathcal{R}_c \mu^2 (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{R}') = 0 \Rightarrow \mathbf{b} = \text{const.}$$

Итак, вектор бинормали к упругой линии постоянен не только по модулю, но и по направлению, т. е. равновесная конфигурация, если она существует и отлична от прямолинейной, является плоской.

Для вектора $\mathbf{R}'(s)$ имеем выражение

$$\mathbf{R}'(s) = \mathbf{Q}(\theta(s) \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\tau} = \cos \theta \boldsymbol{\tau} + \sin \theta \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau},$$

так как \mathbf{R}' всегда принадлежит плоскости, ортогональной \mathbf{b} и, следовательно, может поворачиваться только вокруг \mathbf{b} . Подставляя выражение для \mathbf{R}' в (9.84), получаем выражение для вектора моментов

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}_1 \theta' \mathbf{b}.$$

В результате второе уравнение (9.64) с учетом граничных условий (9.83) сводится к известной задаче для угла нутации:

$$\mathbf{C}_1 \theta'' + \mathcal{N} \sin \theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0. \quad (9.87)$$

Решение задачи (9.87) также хорошо известно: при $\mathcal{N} < 0$, т. е. при растяжении имеем только тривиальное решение $\theta = 0$; при $\mathcal{N} > 0$, т. е. при сжатии стержня, нетривиальные решения появляются при $\mathcal{N} \geq \pi^2 \mathbf{C}_1 / 4l^2$. Число дополнительных решений растет с ростом величины \mathcal{N} . Обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть $\mathcal{N} > \pi^2 \mathbf{C}_1 / 4l^2$, т. е. пусть \mathcal{N} превышает эйлерову критическую силу. Тогда согласно вышесказанному, существуют, как минимум, две равновесные конфигурации: прямолинейная и плоско-изогнутая.

Интуиция подсказывает, что в действительности при $\mathcal{N} > \pi^2 C_1 / 4l^2$ реализуется именно второе решение, а прямолинейная конфигурация неустойчива. Последнее утверждение нетрудно доказать теоретически, если рассмотреть малые движения относительно прямолинейной равновесной конфигурации. Здесь мы этого делать не будем, но в дальнейшем процедура наложения малых движений на равновесные конфигурации будет описана на примере модельной задачи.

В литературе [74] при суждении об устойчивости равновесной конфигурации часто используют “энергетические” соображения, а именно: из двух равновесных конфигураций устойчивой считается та, которая имеет меньшую энергию. Строго говоря, сравнение энергий равновесных конфигураций не имеет прямого отношения к понятию устойчивости. Равновесная конфигурация консервативной системы устойчива, если для нее потенциальная энергия имеет изолированный локальный минимум, который никак не связан с энергией другой равновесной конфигурации. Тем не менее из двух возможных равновесных конфигураций Природа, если это возможно, выбирает конфигурацию с меньшей энергией. Поэтому в эластике Эйлера устойчивой считается именно изогнутая конфигурация, поскольку потенциальная энергия в этом случае меньше — см., например, [74]. Однако использование энергетических соображений для исследования устойчивости в эластике Эйлера вызывает возражение. Дело в том, что в рассматриваемом случае минимум энергии не изолирован. Фактически мы имеем семейство равновесных изогнутых конфигураций, и все они обладают одинаковой энергией. Действительно, полученное решение позволяет однозначно найти угол поворота θ вокруг вектора бинормали \mathbf{b} , но сам вектор \mathbf{b} был определен с точностью до произвольного поворота вокруг $\boldsymbol{\tau}$. Таким образом, все множество решений в эластике Эйлера исчерпывается двухпараметрическим множеством тензоров поворота:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\theta_k(s) \mathbf{b}), \quad \mathbf{b} = \mathbf{Q}(\psi \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{b}_0, \quad \psi = \text{const}(s). \quad (9.88)$$

Здесь $k = 0, 1, \dots, n$, где n определяется величиной $\mathcal{N} > 0$, причем $\theta_0 = 0$. Решение зависит от одного вектора \mathbf{b}_0 ($|\mathbf{b}_0| = 1$, $\mathbf{b}_0 \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$) и одного параметра ψ , который может зависеть, например, от времениподобного параметра. Из выражений (9.88) хорошо видно, что хотя энергия и достигает минимума в изогнутой равновесной конфигурации, но этот минимум не изолирован. Имеется не одна, а континуум равновесных конфигураций, т. е. налицо ситуация типа нейтрального равновесия. В этом случае энергетические рассуждения об устойчивости не вполне убедительны.

Определение вектора положений по равенству $\mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}$ не изменится,

если вместо тензора (9.88) рассмотреть тензор

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\theta_k \mathbf{b}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi(s) \boldsymbol{\tau}).$$

Вычисляя для этого тензора вектор изгиба–кручения, получаем

$$\boldsymbol{\Phi} = \theta' \mathbf{b} + \varphi' \mathbf{R}' \Rightarrow \varphi' = 0,$$

что немедленно следует из (9.79). Поэтому (9.88) дает максимально полное выражение для тензора поворота в эластике Эйлера.

Если допустить, что угловой параметр ψ зависит от времени, то можно вычислить угловую скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{Q}(\psi \boldsymbol{\tau}) \cdot [(1 - \cos \theta_k) \boldsymbol{\tau} - \sin \theta_k \mathbf{b}_0 \times \boldsymbol{\tau}] = \dot{\psi} [(1 - \cos \theta_k) \boldsymbol{\tau} - \sin \theta_k \mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}].$$

Таким образом, если в эластике Эйлера мы сообщим изогнутому стержню сколь угодно малую угловую скорость, то он будет медленно вращаться (прецессировать) вокруг вектора $\boldsymbol{\tau}$, пробегая все множество равновесных конфигураций. Причем для этого не требуется приложения внешних моментов. Следует подчеркнуть, что речь не идет о вращениях стержня как жесткого целого. Например, заделанный торец стержня не поворачивается, ибо при $s = 0$ тензор поворота становится единичным тензором при любом значении ψ . Речь идет о том, что стержень не сопротивляется неким специальным видам деформации, что для реальных стержней не соответствует действительности. Следовательно, указанный факт нужно отнести к некоему дефекту самой теории стержней, который до сих пор не устранен ни в одной из существующих версий теории стержней. Отметим, что от указанного дефекта невозможно избавиться никакими манипуляциями с внутренней энергией стержня. Конечно, можно в этой связи говорить о трении и тому подобных вещах и уклониться от решения проблемы. Но проблема существует, и ее необходимо разрешить.

Может показаться, что все рассуждения, связанные с вращением стержня, не вполне корректны, ибо рассматривались статические уравнения. В разделе 9.9 мы рассмотрим эластику Эйлера в динамической постановке.

9.7. Нагружение стержня следящей силой

Нагружение стержня торцевой следящей силой

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathcal{M} = 0$$

мало отличается от эластики Эйлера по характеру исследования, но результаты анализа оказываются другими. Здесь также, как в эластике Эйлера,

доказывается, что равновесные конфигурации могут быть только плоскими. Различие получается в задаче нахождения угла нутации θ . Вместо (9.87) получаем задачу

$$C_1\theta'' + \mathcal{N}\sin(\theta - \theta(l)) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0,$$

или после замены переменной $\psi = \theta - \theta(l)$

$$C_1\psi'' + \mathcal{N}\sin\psi = 0, \quad \psi(l) = 0, \quad \psi'(l) = 0. \quad (9.89)$$

Для функции $\psi(s)$ получили задачу Коши, а не краевую задачу типа (9.87). Известно, что задача Коши (9.89) имеет только нулевое решение $\psi(s) = 0$, т. е. $\theta(s) = \theta(l)$. Но при $s = 0$ угол θ равен нулю, и, следовательно, он равен нулю при всех s . Таким образом, при нагружении стержня следящей силой имеем только прямолинейную равновесную конфигурацию.

9.8. Нагружение стержня мертвой силой и следящим моментом

Рассмотрим консольный стержень, нагруженный мертвой силой и следящим моментом, т. е. в (9.51)–(9.52) примем:

$$a_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad a_2 = b_1 = b_3 = b_4 = 0.$$

Докажем, что в этом случае равновесная конфигурация (9.56) единственна. Будем рассматривать растяжимый стержень с учетом деформации поперечного сдвига. Обращая первое из соотношений (9.16) с учетом равенства $\mathbf{N} = -\mathcal{N}\boldsymbol{\tau}$, получаем

$$\mathbf{R}' = \alpha \mathbf{m} - \frac{\mathcal{N}}{A_1} \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{m} \equiv \mathbf{P}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \alpha \equiv 1 + \left(\frac{\mathcal{N}}{A_1} - \frac{\mathcal{N}}{A_3} \right) \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (9.90)$$

Уравнение моментов принимает вид

$$\mathbf{M}' + \alpha \mathcal{N} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (9.91)$$

Для вектора изгиба–кручения имеем представление Пуассона:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi} &= (\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{m})\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{m}' \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{M} &= C_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Phi})\mathbf{m} + C_1 \mathbf{m} \times \mathbf{m}'. \end{aligned} \quad (9.92)$$

Из второго выражения (9.92) получаем $\mathbf{M} \cdot \mathbf{m}' = 0$. Учитывая это равенство и проецируя (9.91) на \mathbf{m} , получаем интеграл Пуассона:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' \cdot \mathbf{m} &= (\mathbf{M} \cdot \mathbf{m})' - \mathbf{M} \cdot \mathbf{m}' = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{m} &= C_3 \mathbf{m} \cdot \Phi = C_3 \Phi = \text{const.} \end{aligned} \quad (9.93)$$

По краевому условию $\mathbf{M}(l) = \mathcal{M} \mathbf{m}(l)$ с учетом (9.92), (9.93) получаем $C_3 \Phi = \mathcal{M}$. Кроме того, из (9.92) получаем условие $\mathbf{m}'(l) = \mathbf{0}$.

Итак, получены соотношения

$$\mathbf{M} = \mathcal{M} \mathbf{m} + C_1 \mathbf{m} \times \mathbf{m}', \quad \Phi = \frac{\mathcal{M}}{C_3} \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{m}', \quad \mathbf{m}'(l) = \mathbf{0}. \quad (9.94)$$

Проецируя (9.91) на $\boldsymbol{\tau}$ и учитывая (9.94), получаем интеграл

$$\mathcal{M} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau} + C_1 (\mathbf{m} \times \mathbf{m}') \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}(l) \cdot \boldsymbol{\tau} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m}(l) = \boldsymbol{\tau}. \quad (9.95)$$

Первая часть первого из соотношений (9.95) следует, если (9.95) записать при $s = 0$. Обратим внимание, что последнее равенство в (9.95) справедливо только при $\mathcal{M} \neq 0$. Умножая (9.91) скалярно на Φ , получаем интеграл энергии, который с учетом (9.94)–(9.95) можно записать в виде

$$C_1 |\mathbf{m}'|^2 = -\mathcal{N}(1 - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}) \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{N}}{A_1} - \frac{\mathcal{N}}{A_3} \right) (1 + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\tau}) \right]. \quad (9.96)$$

Записывая это выражение при $s = 0$ и учитывая условие $\mathbf{m}(0) = \boldsymbol{\tau}$, получаем, что $\mathbf{m}'(0) = \mathbf{0}$. Подставляя первое из выражений (9.94) в (9.91), получаем задачу Коши:

$$C_1 \mathbf{m} \times \mathbf{m}'' + \mathcal{M} \mathbf{m}' + \alpha \mathcal{N} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{m}(0) = \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{m}'(0) = \mathbf{0},$$

которая имеет единственное решение

$$\mathbf{m}(s) = \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(s) \cdot \boldsymbol{\tau} = \tau \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi(s) \boldsymbol{\tau}). \quad (9.97)$$

Теперь по (9.90) получаем

$$\mathbf{R}' = \left(1 - \frac{\mathcal{N}}{A_3} \right) \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = \left(1 - \frac{\mathcal{N}}{A_3} \right) s \boldsymbol{\tau}.$$

В результате пришли к равновесной конфигурации (9.56). Поскольку при этом использовались только необходимые условия, то этим доказывается единственность конфигурации (9.56).

В данной задаче можно отметить два любопытных обстоятельства. Первое. Когда мы решаем задачу при краевых условиях $\mathbf{N}(l) = -N\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}(l) = M\mathbf{P}(l) \cdot \boldsymbol{\tau}$, то можно ожидать, что из решения при $M \neq 0$ при предельном переходе $M \rightarrow 0$ мы получим решение задачи $\mathbf{N}(l) = -N\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{M}(l) = \mathbf{0}$. Однако это не совсем так. Если $M \neq 0$, то решение задачи единственно. Если же $M = 0$, то мы имеем дело с эластикой Эйлера и неединственными решениями. Разгадка “парадокса” в том, что при сколь угодно малом $M \neq 0$, мы имеем по (9.95) равенство $\mathbf{m}(l) = \boldsymbol{\tau}$, которое не обязано выполняться при $M = 0$. Оно и не выполняется в эластике Эйлера.

Второе обстоятельство объяснить труднее, и оно заключается в следующем. Вообразим себе, что консольный стержень нагружен мертвой силой $\mathbf{N} = -N\boldsymbol{\tau}$, где $N > \pi^2 C_1 / 4l^2$, т. е. N больше эйлеровой критической. В этом случае имеются, как минимум, две равновесные конфигурации: прямолинейная и изогнутая. Рассмотрим искривленную равновесную конфигурацию. Допустим, что к незакрепленному торцу в дополнение к мертвой силе прикладывается сколь угодно малый следящий момент. При этом равновесие нарушается и стержень приходит в движение. Если стержень был изогнут достаточно сильно, то близких равновесных конфигураций не существует. Поэтому возможна альтернатива: либо а) под действием сколь угодно малого момента стержень перескочит в далеко отстоящую прямолинейную равновесную конфигурацию, что интуитивно маловероятно, либо б) стержень придет в безостановочное движение. В последнем случае важно было бы установить характер этого движения: затухающее (стремление к прямолинейной равновесной конфигурации), нарастающее по амплитуде (неустойчивость) или, наконец, стационарные вращения. Задачи подобного типа до сих пор не исследованы.

9.9. Стационарные вращения в эластике Эйлера

Запишем уравнения движения нерастяжимого гибкого стержня (9.64), исключив из них вектор \mathbf{R} . Для этого продифференцируем первое уравнение (9.64) по пространственной координате. Кроме того, примем во внимание, что в эластике Эйлера выражение для вектора момента упрощается и принимает вид (9.84). В результате получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{N}'' = \rho_0 \ddot{\mathbf{R}}', \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (9.98)$$

Заметим, что в (9.98) не учитывается инерция вращения. Именно это упрощение позволяет использовать полученную в статической задаче форму-

лу (9.84) для вектора момента. Краевые условия принимаем в форме (9.83). Поскольку после перехода от (9.64) к (9.98) порядок системы уравнений повысился, необходимо сформулировать дополнительное краевое условие. Это условие является следствием первого уравнения (9.64) и первого уравнения (9.83). Итак, краевые условия имеют вид

$$s = 0: \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N}' = \mathbf{0}; \quad s = l: \mathbf{N} = -\mathcal{N}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (9.99)$$

Решение задачи (9.98), (9.99) ищем в следующем виде:

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{Q}[\psi(t)\boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{Q}[\theta(s)\mathbf{e}] \cdot \mathbf{Q}^T[\psi(t)\boldsymbol{\tau}], \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (9.100)$$

где \mathbf{e} — постоянный единичный вектор. Из представления (9.100) следует, что при $s = 0$ и $\theta(0) = 0$ тензор поворота обращается в единичный тензор, т. е. поворот заделанного торца стержня отсутствует. Вектор изгиба-кручения, отвечающий тензору поворота (9.100), имеет вид

$$\boldsymbol{\Phi} = \theta'(s)\mathbf{Q}[\psi(t)\boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{e} = \theta'(s)\mathbf{e}_*, \quad \mathbf{e}_*(t) \equiv \mathbf{Q}[\psi(t)\boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{e}. \quad (9.101)$$

Для касательной в актуальном положении и ее второй производной по времени имеем выражения

$$\mathbf{R}' = \cos \theta(s) \boldsymbol{\tau} + \sin \theta(s) \mathbf{e}_*(t) \times \boldsymbol{\tau}. \quad (9.102)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}' = \sin \theta(s) \left(\ddot{\psi} \mathbf{e}_*(t) - \dot{\psi}^2 \mathbf{e}_*(t) \times \boldsymbol{\tau} \right). \quad (9.103)$$

Вектор усилия \mathbf{N} представим в виде разложения

$$\mathbf{N} = -\mathcal{N}\boldsymbol{\tau} + Q_* \mathbf{e}_* + Q \mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau}. \quad (9.104)$$

Согласно (9.99), краевые условия для \mathbf{N} , Q и Q_* имеют вид

$$\mathbf{N}'(0, t) = Q'_*(0, t) = Q'(0, t) = 0, \quad Q_*(l, t) = Q(l, t) = 0, \quad \mathbf{N}(l, t) = \mathcal{N}.$$

Подставляя выражение (9.104) в первое уравнение системы (9.98) и проецируя получившееся уравнение на оси $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{e}_* и $\mathbf{e}_* \times \boldsymbol{\tau}$, получаем

$$Q'' = -\rho_0 \dot{\psi}^2 \sin \theta, \quad Q_*'' = \rho_0 \ddot{\psi} \sin \theta, \quad \mathbf{N}(s, t) = \mathcal{N}, \quad (9.105)$$

где последнее равенство получено с использованием краевых условий.

С учетом (9.102), выражение для вектора момента принимает вид

$$\mathbf{M} = C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' = C_1 \theta' \mathbf{e}_*. \quad (9.106)$$

Поскольку проекция второго уравнения системы (9.98) на вектор \mathbf{R}' является тождеством, это векторное уравнение эквивалентно двум скалярным. Подставляя выражения (9.102), (9.104) и (9.106) во второе уравнение системы (9.98) и проецируя это уравнение на векторы \mathbf{e}_* и $\boldsymbol{\tau}$, получаем

$$C_1\theta'' + \mathcal{N}\sin\theta + Q\cos\theta = 0, \quad Q_* = 0. \quad (9.107)$$

Последнее уравнение в (9.107) и второе уравнение системы (9.105) показывают, что в эластике Эйлера возможны только стационарные вращения:

$$\ddot{\psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} \equiv \omega = \text{const}. \quad (9.108)$$

Окончательно пришли к следующей системе уравнений:

$$Q'' = -\rho_0\omega^2\sin\theta, \quad C_1\theta'' + \mathcal{N}\sin\theta + Q\cos\theta = 0. \quad (9.109)$$

К системе (9.109) необходимо присоединить краевые условия

$$s = 0: Q'(0) = 0, \quad \theta(0) = 0; \quad s = l: Q(l) = 0, \quad \theta'(l) = 0. \quad (9.110)$$

Точки ветвления решений [74] находятся в этой задаче весьма просто из линеаризованной задачи:

$$\begin{aligned} Q'' = -\rho_0\omega^2\theta, \quad C_1\theta'' + \mathcal{N}\theta + Q = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow C_1\theta'''' + \mathcal{N}\theta'' - \rho_0\omega^2\theta = 0. \end{aligned} \quad (9.111)$$

К уравнению (9.111) необходимо присоединить краевые условия

$$s = 0: \theta = 0, \quad C_1\theta'' = -\mathcal{N}\theta'; \quad s = l: C_1\theta'' = -\mathcal{N}\theta, \quad \theta' = 0. \quad (9.112)$$

Пришли к хорошо известной спектральной задаче, квадраты собственных чисел $\omega^2 \equiv \dot{\psi}^2$ в которой вещественны. Впрочем, последнее утверждение требует отдельного доказательства. С этой целью сначала приведем задачу к безразмерному виду посредством введения обозначений

$$s = l\xi, \quad \lambda^2 = \mathcal{N}l^2/C_1, \quad \Omega^2 = \rho_0l^4\omega^2/C_1.$$

В этих обозначениях задача (9.111), (9.112) принимает следующий вид:

$$\theta'''' + \lambda^2\theta'' - \Omega^2\theta = 0, \quad \theta' \equiv d\theta/d\xi; \quad (9.113)$$

$$\xi = 0: \theta = 0, \quad \theta''' = -\lambda^2\theta'; \quad \xi = 1: \theta'' = -\lambda^2\theta, \quad \theta' = 0. \quad (9.114)$$

В задаче (9.113), (9.114) параметр λ^2 является вещественным, а вещественность параметра Ω^2 требуется доказать. Доказательство будем проводить от

противного. Допустим, что параметр Ω^2 является комплексным. Пусть собственному числу Ω^2 отвечает собственная функция θ . Понятно, что комплексно сопряженная функция $\bar{\theta}$ также является собственной функцией и отвечает комплексно сопряженному собственному числу $\bar{\Omega}^2$. Умножая уравнение (9.113) на функцию $\bar{\theta}$ и интегрируя получившееся уравнение по интервалу $(0, 1)$, после стандартных преобразований получаем тождество

$$(\Omega^2 - \bar{\Omega}^2) \int_0^1 \theta \bar{\theta} d\xi = \theta_1''' \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_1''' \theta_1 + \theta_0'' \bar{\theta}_0' - \bar{\theta}_0'' \theta_0', \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta(1) = \theta_1.$$

Умножая уравнение (9.113) на функцию $\bar{\theta}''$ и проводя те же рассуждения, получаем еще одно тождество:

$$(\Omega^2 - \bar{\Omega}^2) \int_0^1 \theta' \bar{\theta}' d\xi = \lambda^2 [\theta_1''' \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_1''' \theta_1 + \theta_0'' \bar{\theta}_0' - \bar{\theta}_0'' \theta_0'] .$$

Из двух вышеуказанных тождеств следует искомое тождество

$$(\Omega^2 - \bar{\Omega}^2) \int_0^1 (\theta' \bar{\theta}' - \lambda^2 \theta \bar{\theta}) d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 = \bar{\Omega}^2.$$

Нелинейная краевая задача четвертого порядка (9.109), (9.110) достаточно сложна для точного анализа, поскольку допускает только один первый интеграл. Но для наших целей нет нужды в получении точного решения. Мы видели, что в эластике Эйлера наряду с равновесными конфигурациями имеются вращающиеся “равновесные” конфигурации²¹, причем скорость вращения осталась неопределенной. Здесь нам нужно показать, что учет сил инерции не уничтожает наличие вращающихся “равновесных” конфигураций, хотя и вносит некоторые уточнения. Прежде всего, мы установили, что вращения могут происходить только с постоянной угловой скоростью. Далее мы ограничимся рассмотрением случая малых скоростей вращения, поскольку в данной ситуации задачу можно линеаризовать. При малых ω^2 поперечная сила Q мала. Отклонение упругой линии от вертикали, т. е. угол нутации θ , также незначительно меняется. Поэтому будем искать возмущенный угол нутации в виде разложения:

$$\theta(s) = \theta_{st}(s) + \vartheta(s), \quad |\vartheta(s)| \ll 1,$$

²¹ Как правило, динамическая устойчивость исследуется по линейному приближению. Однако, в ряде случаев удается найти частное решение нелинейной задачи, существование которого доказывает неустойчивость равновесной конфигурации. Именно этот путь реализован в данном разделе. (*Примеч. ред.*)

где $\theta_{st}(s)$ есть ненулевое решение статической задачи при $\mathcal{N} > \mathcal{N}_{cr}$.

Подставляя это разложение в (9.109), (9.110) и ограничиваясь членами первого порядка по ω^2 , получаем следующую краевую задачу:

$$Q'' = -\rho_0 \omega^2 \sin \theta_{st}, \quad C_1 \vartheta'' + (\mathcal{N} \cos \theta_{st}) \vartheta = Q \cos \theta_{st}; \quad (9.115)$$

$$s = 0: Q'(0) = 0, \quad \vartheta(0) = 0; \quad s = l: Q(l) = 0, \quad \vartheta'(l) = 0. \quad (9.116)$$

Нетрудно доказать, что задача (9.115), (9.116) имеет единственное решение, норма которого мала, если мала величина ω^2 .

Таким образом, учет сил инерции не влияет на вывод о наличии вращающихся “равновесных” конфигураций. Это означает, что изогнутые равновесные конфигурации в эластике Эйлера неустойчивы, ибо при сколь угодно малых возмущениях изогнутая конфигурация начнет совершать вращательное движение вокруг вектора $\boldsymbol{\tau}$ и через некоторое время после начала движения уже не будет сколь угодно близкой к исходной равновесной конфигурации.

Следует подчеркнуть, что эксперимент не подтверждает вывода о наличии вращающихся “равновесных” конфигураций. Грубый эксперимент, проведенный автором, показал, что если изогнутую равновесную конфигурацию слегка толкнуть, то начинаются низкочастотные колебания относительно равновесной конфигурации, но не вращения. Это означает, что *используемая нами модель стержня неверно описывает реальную ситуацию*. Между тем именно эта модель широко используется при анализе многих проблем устойчивости, например, устойчивости положения равновесия скрученного стержня (парадокс Николаи). В последнем случае потерю устойчивости скрученного сколь угодно малым моментом стержня объясняют неконсервативностью задачи. По мнению автора, это “объяснение” неприемлемо, ибо потеря устойчивости происходит даже в том случае, когда кручение стержня производится потенциальным моментом, т. е. задача является консервативной. Кроме того, эксперимент также не подтверждает существование парадокса Николаи²². Поэтому следует искать другие причины. В частности, необходимо внимательно проанализировать все допущения, сделанные нами при выводе теории стержней и при переходе к модели, описываемой уравнениями (9.98).

Среди общих допущений теории стержней главным является задание внутренней энергии в виде квадратичной формы (9.14). Можно показать, что при любом задании внутренней энергии для стержня с трансверсально-изотропной энергией парадокс Николаи не исчезает. Не исчезают и стационарные вращения в эластике Эйлера, которые по существу и являются причиной возникновения парадокса Николаи.

²² Указанный эксперимент обсуждается в подразделе 7.7.7. (Примеч. ред.)

При переходе от общей теории стержней к модели нерастяжимого стержня (9.98) были сделаны три допущения. Первое: пренебрегали деформацией поперечного сдвига. Второе: отбрасывали деформацию растяжения. И, наконец, третье допущение состояло в игнорировании инерции вращения. Интуиция подсказывает (а во многих случаях это может быть доказано), что первые два допущения вполне оправданы. Более того, отказ от этих допущений не избавляет ни от парадокса Николаи, ни от возникновения стационарных вращений. Остается третье допущение. Оно принимается во всех работах по теории стержней. При плоских движениях учет инерции вращения оказывается важным только при анализе высокочастотных сдвиговых колебаний. В нашем случае речь идет о медленных движениях, в которых, казалось бы, учет инерции вращения совершенно не важен. С другой стороны, при рассмотрении стационарных вращений в эластике Эйлера речь шла о пространственных движениях, которые исследованы очень мало. Поэтому именно это обстоятельство и требует отдельного рассмотрения. К сожалению, в общем случае исследовать столь сложные уравнения весьма затруднительно. Однако нетрудно убедиться, что при учете инерции вращения решение вида (9.100) оказывается невозможным.

9.10. Динамика скрученного стержня. Парадокс Николаи

9.10.1. Историческая справка

О неустойчивости равновесной конфигурации стержня, скрученного следящим или мертвым моментом, при сколь угодно малом значении крутящего момента впервые было доложено на двух заседаниях Ленинградского механического общества 26 мая и 29 сентября 1927 г. профессором Политехнического института Е. Л. Николаи. Опубликована эта работа была в Известиях Политехнического института в 1928 г. На заседаниях присутствовали выдающиеся ленинградские ученые, среди которых были, в частности, П. Ф. Папкович и А. И. Лурье. На первом заседании сообщение Е. Л. Николаи буквально шокировало всех присутствующих, ибо понятие эйлеровой критической силы было хорошо знакомо и понятно всем присутствующим. Все, разумеется, ожидали аналогичного явления и при действии крутящего момента: при малых значениях момента должна быть устойчивость, а при превышении моментом некоторого критического значения — неустойчивость. Однако результат анализа показал, что это не так.

Первым, кто указал на возможную причину столь странного поведения стержня при кручении, был П. Ф. Папкович. А именно, он указал, что речь идет о неконсервативной задаче, а следовательно, в систему может накапливаться энергия. Это объяснение примирило присутствующих с парадоксом Николаи. В самом деле, рассмотрим, например, линейный осциллятор со сколь угодно малым внешним возбуждением, пропорциональным скорости:

$$m\ddot{x} + cx = \varepsilon\dot{x}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

В этом случае имеем отрицательное трение и решение экспоненциально нарастает во времени при сколь угодно малом ε . Как бы то ни было, но обсуждаемые сообщения Е. Л. Николаи положили начало новому и чрезвычайно важному разделу механики — теории устойчивости неконсервативных систем.

9.10.2. Постановка задачи

Рассмотрим следующую динамическую задачу для нерастяжимого гибкого стержня. Выпишем уравнения движения, исключив из них \mathbf{R} путем дифференцирования первого уравнения по пространственной координате:

$$\mathbf{N}'' = \rho_0 \ddot{\mathbf{R}}', \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \rho_0 (\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega})'. \quad (9.117)$$

Стержень считаем нерастяжимым, т. е. сохраняем условия (9.20). Тогда, согласно (9.65), имеем

$$\mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \Phi = (\Phi \cdot \mathbf{R}') \mathbf{R}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'', \quad (9.118)$$

и выражение для вектора момента принимает вид

$$\mathbf{M} = C_3 (\Phi \cdot \mathbf{R}') \mathbf{R}' + C_1 \mathbf{R}' \times \mathbf{R}''. \quad (9.119)$$

Тензор инерции сечения стержня считается трансверсально-изотропным:

$$\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T = \Theta_1 \mathbf{E} + (\Theta_3 - \Theta_1) \mathbf{R}' \otimes \mathbf{R}'.$$

Предполагается, что основание стержня заделано, а свободный конец нагружен следящим моментом. В этом случае краевые условия имеют вид

$$s = 0: \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad s = l: \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathcal{M} \mathbf{R}'. \quad (9.120)$$

Начальные условия обсудим позднее.

9.10.3. Решение статической задачи

Начнем с решения статической задачи. В этом случае уравнения (9.117)–(9.120) интегрируются элементарно:

$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathcal{M}\mathbf{R}' = \mathcal{M}\boldsymbol{\tau} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = s\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\Phi} = (\mathcal{M}/C_3)\boldsymbol{\tau}. \quad (9.121)$$

Осталось найти тензор поворота

$$\mathbf{P}' = \boldsymbol{\Phi} \times \mathbf{P} = (\mathcal{M}/C_3)\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{P}.$$

Отсюда немедленно следует выражение для тензора поворота:

$$\mathbf{P} = (1 - \cos(\mathcal{M}s/C_3))\boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{\tau} + \cos(\mathcal{M}s/C_3)\mathbf{E} + \sin(\mathcal{M}s/C_3)\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{E}. \quad (9.122)$$

Построенная равновесная конфигурация является единственной²³.

9.10.4. Малые колебания скрученного стержня

Пусть в начальный момент времени $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ стержень был незначительно изогнут, так что угол между касательной к деформированной упругой линии и вектором $\boldsymbol{\tau}$ является малым. При $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ движение стержня описывается уравнениями (9.117) и краевыми условиями (9.120). По крайней мере при незначительных промежутках времени ось стержня будет оставаться близкой к прямолинейной форме. Исследуем эти малые движения. Тензор поворота будем искать через углы Эйлера (2.71):

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}[\psi(s, \mathbf{t})\boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s, \mathbf{t})\mathbf{e}] \cdot \mathbf{Q}[\varphi(s, \mathbf{t})\boldsymbol{\tau}], \quad \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad (9.123)$$

где ψ , ϑ , φ суть углы прецессии, нутации и собственного вращения, соответственно; единичный вектор \mathbf{e} может иметь любое направление, ортогональное $\boldsymbol{\tau}$.

Легко установить смысл угла нутации ϑ . Для этого достаточно вычислить скалярное произведение:

$$\mathbf{R}' \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}[\vartheta(s, \mathbf{t})\mathbf{e}] \cdot \boldsymbol{\tau} = \cos \vartheta(s, \mathbf{t}).$$

По предположению этот угол мал при $\mathbf{t} = \mathbf{0}$. Следовательно, он будет оставаться малым, по крайней мере, при малых временах. Чтобы использовать это обстоятельство, перепишем тензор поворота в тождественном виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\vartheta\mathbf{e}_*) \cdot \mathbf{Q}(\beta\boldsymbol{\tau}), \quad \beta = \varphi + \psi, \quad \mathbf{e}_* \equiv \mathbf{Q}(\psi\boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{e}. \quad (9.124)$$

²³ Решение аналогичной задачи для твердого тела на безынерционном упругом основании общего вида представлено в разделе 7.6, где рассмотрены также и другие виды крутящего момента. В разделе 7.7 обсуждается вопрос об устойчивости равновесной конфигурации при различных видах крутящего момента. (*Примеч. ред.*)

Воспользуемся теперь малостью угла ϑ :

$$\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{e}_*) = \mathbf{E} + \vartheta \times \mathbf{E}, \quad \vartheta \equiv \vartheta \mathbf{e}_*.$$

Хотя модуль вектора ϑ мал, но он может поворачиваться на произвольный конечный угол прецессии ψ . Преобразовав (9.118), (9.119) с использованием выражения для тензора поворота (9.123) и ограничившись линейными членами по ϑ , получим представления

$$\mathbf{R}' = \boldsymbol{\tau} + \vartheta \times \boldsymbol{\tau}, \quad \Phi = \vartheta' + \beta' \mathbf{R}', \quad \mathbf{M} = C_3 \beta' \mathbf{R}' + C_1 \vartheta'. \quad (9.125)$$

При вычислении угловой скорости следует помнить о возможном наличии вращений актуальной конфигурации стержня²⁴. Это означает, что углы прецессии ψ и собственного вращения φ имеют следующее строение:

$$\begin{aligned} \psi(s, t) &= \gamma(t) + \tilde{\psi}(s, t), & \varphi(s, t) &= -\gamma(t) + \tilde{\varphi}(s, t), \\ \beta(s, t) &= \tilde{\psi}(s, t) + \tilde{\varphi}(s, t). \end{aligned}$$

Видим, что угол кручения β не зависит от угла поворота γ , но угол прецессии ψ и, следовательно, вектор поворота ϑ зависят от γ . При этом следует иметь в виду, что угол γ и производные от него по времени не являются малыми.

Вектор поворота ϑ представим в следующем виде:

$$\vartheta = \mathbf{Q}(\gamma \boldsymbol{\tau}) \cdot \tilde{\vartheta}, \quad \tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}(s, t) \tilde{\mathbf{e}}, \quad \tilde{\mathbf{e}} \equiv \mathbf{Q}[\tilde{\psi}(s, t) \boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{e}. \quad (9.126)$$

Аналогичным образом преобразуются представления (9.125):

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q}(\gamma \boldsymbol{\tau}) \cdot \tilde{\mathbf{R}}', \quad \Phi = \mathbf{Q}(\gamma \boldsymbol{\tau}) \cdot \tilde{\Phi}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{Q}(\gamma \boldsymbol{\tau}) \cdot \tilde{\mathbf{M}}, \quad (9.127)$$

где

$$\tilde{\mathbf{R}}' = \boldsymbol{\tau} + \tilde{\vartheta} \times \boldsymbol{\tau}, \quad \tilde{\Phi} = \tilde{\vartheta}' + \beta' \tilde{\mathbf{R}}', \quad \tilde{\mathbf{M}} = C_3 \beta' \tilde{\mathbf{R}}' + C_1 \tilde{\vartheta}'. \quad (9.128)$$

²⁴ При наложении малого возмущения на равновесную конфигурацию стержень изгибается, отклоняясь от первоначально прямолинейного положения. В силу симметрии задачи направление изгиба не имеет значения. Это означает, что актуальную конфигурацию можно повернуть как жесткое целое вокруг оси недеформированного стержня на произвольный угол $\psi = \gamma$ и новая актуальная конфигурация также будет удовлетворять дифференциальным уравнениям. Однако при этом нарушается граничное условие $\mathbf{P}|_{s=0} = \mathbf{E}$. Для того чтобы исправить ситуацию, необходимо добавить собственное вращение стержня на угол $\varphi = -\gamma$. Данные рассуждения наводят на мысль о возможном наличии вращений актуальной конфигурации стержня. (*Примеч. ред.*)

Вычислим угловую скорость, отвечающую тензору поворота (9.125), и другие необходимые величины:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{Q}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\tau}) \cdot \left(\dot{\beta}\tilde{\mathbf{R}}' + \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\tau} \times \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \right), \\ \boldsymbol{\tau} \times \ddot{\tilde{\mathbf{R}}}' &= \mathbf{Q}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\tau}) \cdot \left[\ddot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\tau} \times \left(\ddot{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} \right) \right], \\ (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot &= \mathbf{Q}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\tau}) \cdot \left[\Theta_3\ddot{\beta}\tilde{\mathbf{R}}' + \Theta_3\dot{\beta} \left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} \times \boldsymbol{\tau} \right) + \right. \\ &\left. + \Theta_1 \left(\ddot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} + 2\dot{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\tau} \times \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \ddot{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\tau} \times \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \right) \right].\end{aligned}\tag{9.129}$$

Вектор усилия \mathbf{N} представим в следующей форме:

$$\mathbf{N} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\tau}) \cdot \tilde{\mathbf{N}}.\tag{9.130}$$

Уравнения (9.117) в линейном приближении принимают вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}}'' &= \rho_0 \left[\ddot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\tau} \times \left(\ddot{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} \right) \right], \\ C_3\beta''\tilde{\mathbf{R}}' + C_1\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}'' + C_3\beta'\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}' \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}} &= \\ = \rho_0 \left[\Theta_3\ddot{\beta}\tilde{\mathbf{R}}' + \Theta_1 \left(\ddot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} + 2\dot{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\tau} \times \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \ddot{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\tau} \times \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \right) + \Theta_3\dot{\beta} \left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} \times \boldsymbol{\tau} \right) \right],\end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbf{N}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ ортогональны $\boldsymbol{\tau}$. Ортогональность $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ и $\boldsymbol{\tau}$ следует из (9.126). Для доказательства ортогональности $\tilde{\mathbf{N}}$ и $\boldsymbol{\tau}$ надо воспользоваться первыми уравнениями (9.117), (9.127) и (9.128), а также краевыми условиями (9.120) и соотношением (9.130).

Из этих уравнений видим, что задачи кручения и изгиба разделяются. Для задачи кручения получаем волновое уравнение

$$C_3\beta'' = \Theta_3\ddot{\beta}, \quad \beta(0) = 0, \quad \beta'(l) = \mathcal{M}/C_3.\tag{9.131}$$

Для задачи изгиба получаем следующую систему:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}}'' &= \rho_0 \left[\ddot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\tau} \times \left(\ddot{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + 2\dot{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} \right) \right], \\ C_1\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}'' + C_3\beta'\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}' \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}} &= \\ = \rho_0 \left[\Theta_1 \left(\ddot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} + 2\dot{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\tau} \times \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} - \dot{\boldsymbol{\gamma}}^2\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \ddot{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\tau} \times \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \right) + \Theta_3\dot{\beta} \left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} \times \boldsymbol{\tau} \right) \right].\end{aligned}\tag{9.132}$$

К уравнениям (9.132) необходимо присоединить краевые условия, которые в линейном приближении записываются в следующей форме:

$$s = 0: \tilde{\mathbf{N}}' = \mathbf{0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} = \mathbf{0}; \quad s = l: \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}' = \mathbf{0}.\tag{9.133}$$

Систему (9.132) можно немного упростить. В правой части второго уравнения этой системы содержится подчеркнутое слагаемое. Оно существенно только при рассмотрении высокочастотных колебаний, которые без учета деформации поперечного не могут быть правильно описаны, нас эти колебания не интересуют. Это слагаемое должно быть отброшено. Если бы мы все же захотели рассмотреть высокочастотные колебания и учли бы деформации растяжения и сдвига, то на акустический спектр подчеркнутые в (9.132) слагаемые не оказали бы никакого влияния и их можно было бы отбросить. Они существенны только при описании быстрых движений. Формальным поводом для отбрасывания подчеркнутых в (9.132) слагаемых становится следующее рассуждение. Если из второго уравнения системы (9.132) исключить подчеркнутые слагаемые с помощью первого уравнения этой же системы, то в получившемся уравнении появится слагаемое, которое заведомо много меньше слагаемого $\boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}}$, содержащегося в этом уравнении. Поэтому его можно и даже необходимо отбросить.

Таким образом, вместо системы (9.132) допустимо рассматривать более простую систему:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}}'' &= \rho_0 \left[\ddot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} - \dot{\gamma}^2 \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\tau} \times \left(\dot{\gamma} \tilde{\boldsymbol{\theta}} + 2\dot{\gamma} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \right) \right], \\ C_1 \tilde{\boldsymbol{\theta}}'' + C_3 \beta' \tilde{\boldsymbol{\theta}}' \times \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}} &= \rho_0 \Theta_3 \dot{\beta} \left(\dot{\gamma} \tilde{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\tau} \times \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \right). \end{aligned} \quad (9.134)$$

Переход к классическим уравнениям, впервые исследованным А. Трешем (1952) и описанным в книге В. В. Болотина [64], происходит при принятии следующих ограничений:

$$\gamma = 0, \quad \beta = \mathcal{M}s/C_3, \quad \dot{\beta} = 0. \quad (9.135)$$

Принятие первого из этих ограничений возможно всегда. Его использование всего лишь затрудняет как анализ основной системы, так и интерпретацию получаемых результатов. Принятие второго и третьего ограничений также возможно, но при этом рассматривается частный случай возмущений, относительно которых исследуется устойчивость²⁵, а именно: второе и третье ограничения соответствуют следующим начальным условиям для задачи кручения (9.131):

$$\mathbf{t} = 0: \beta(s, 0) = \mathcal{M}s/C_3, \quad \dot{\beta}(s, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(s, t) = \mathcal{M}s/C_3. \quad (9.136)$$

²⁵ В общем случае возмущениями являются дополнительное кручение и изгиб. Принятие второго и третьего ограничений приводит к рассмотрению частного случая возмущений, а именно изгиба без дополнительного кручения. (*Примеч. ред.*)

Таким образом, классическая система следует из уравнений (9.134) и имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}}'' = \rho_0 \ddot{\boldsymbol{\vartheta}}, \quad C_1 \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}'' - M \boldsymbol{\tau} \times \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}' + \boldsymbol{\tau} \times \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{0}. \quad (9.137)$$

Краевые условия для системы (9.137) имеют прежний вид (9.133). Решение системы (9.137) при краевых условиях (9.133) было построено А. Трешем (1952), который показал, что оно содержит экспоненциально растущие во времени слагаемые при любом сколь угодно малом значении крутящего момента M . Отсюда вытекает парадоксальный вывод о том, что равновесная конфигурация скрученного стержня, определяемая формулами (9.121) и (9.122), неустойчива при сколь угодно малом значении крутящего момента M . Это явление известно в механике под названием парадокса Николаи, поскольку именно он впервые обнаружил его, но Е. Л. Николаи рассматривал безынерционный стержень с точечной массой на свободном конце стержня. Парадокс Николаи объясняют неконсервативностью задачи о кручении стержня, подразумевая при этом, что в систему накачивается энергия. Г. Циглер в работе [62] приводит подтверждающие это утверждение правдоподобные рассуждения. Однако такое объяснение, хотя и возможно, трудно признать всеобъемлющим. Например, в работе [73] показано, что парадокс Николаи имеет место в задаче о кручении стержня консервативным следящим моментом, когда накачка энергии в систему заведомо невозможна²⁶. Поэтому необходимо искать и другие объяснения. К тому же результаты А. Треша, воспроизведенные в работе [64], трудно признать удовлетворительными с чисто математической точки зрения, поскольку он учел только половину корней характеристического уравнения²⁷. Впрочем, если все сделать правильно, то основной вывод А. Треша не изменится.

С формальной точки зрения системы (9.134) и (9.137) эквивалентны для частного случая возмущений (9.136). Следует при этом иметь в виду, что в системе (9.137) вектор $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}$ соответствует вектору $\boldsymbol{\vartheta}$ в системе (9.134). Теперь представим себе такую ситуацию. Пусть решение задачи (9.134) обладает следующим свойством: $\boldsymbol{\vartheta} \rightarrow \mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{\gamma}} \rightarrow \infty$, т. е. по переменной γ имеем неустойчи-

²⁶ Тот факт, что парадокс Николаи имеет место в случае консервативного крутящего момента, доказывается в разделе 7.7 на примере задачи об устойчивости положения равновесия твердого тела на безынерционном упругом основании общего вида. (*Примеч. ред.*)

²⁷ А. Треш считал возможным не рассматривать комплексно сопряженные корни характеристического уравнения и отвечающие ему частные решения. В общем случае частотное уравнение есть определитель восьмого порядка, а не четвертого. Более того, этот определитель не имеет блочной структуры, поэтому, вообще говоря, он не сводится к вычислению определителя четвертого порядка.

вость. Но с физической точки зрения этот вид неустойчивости совершенно несущественен, ибо неустойчивая переменная исчезает в окончательном решении, как это видно из выражения (9.126). Совершенно иначе обстоит дело при анализе системы (9.137). В ней неустойчивая переменная γ входит в состав вектора $\tilde{\mathcal{Q}}$. Поэтому, если ограничиться только вычислением собственных частот и не проводить дальнейший анализ получившегося решения, мы получим вывод о неустойчивости равновесной конфигурации скрученного стержня при сколь угодно малом значении крутящего момента, т. е. придем к так называемому парадоксу Николаи²⁸.

²⁸ Для пояснения сути проблемы проведем сравнение с эластикой Эйлера. При действии на стержень сжимающей силы, превышающей критическое значение, прямолинейная конфигурация стержня становится неустойчивой, но появляется изогнутая равновесная конфигурация, которая является устойчивой. И здесь нет никакого парадокса. Совсем иная ситуация возникает при действии на стержень крутящего момента. Прямолинейная конфигурация неустойчива при сколь угодно малом моменте, а другой равновесной конфигурации нет. Как такое может быть? Что происходит со стержнем? Формально математически ответ получается такой: стержень будет двигаться, причем так, что его отклонение от равновесной конфигурации будет неограниченно возрастать. Но если этот процесс связан с неограниченным возрастанием каких-либо деформаций в стержне, то неизбежно произойдет его разрушение. Вывод о разрушении стержня при действии сколь угодно малого крутящего момента находится в очевидном противоречии с тем, что наблюдается в природе и технике. Именно в этом и состоит парадокс Николаи — формально математическое решение находится в противоречии с наблюдаемыми явлениями. Проблема решается, если движение, связанное с неограниченно возрастающим отклонением от равновесной конфигурации, происходит таким образом, что деформации остаются малыми. Такое решение с формально математической точки зрения является неустойчивым, но оно не должно приводить к разрушению стержня, и поэтому никакого парадокса нет. П. А. Жилин выделил переменную γ , которая не зависит от пространственной координаты s и по которой есть неустойчивость, и получил систему уравнений (9.132). Он полагал, что анализ этой системы должен привести к выводу об устойчивости по тем переменным, которые связаны с деформацией стержня. Однако эту систему П. А. Жилин до конца не проанализировал. (Примеч. ред.)

Глава 10

Вращение твердого тела на безынерционном гибком стержне¹

10.1. Вводные замечания

В данной главе рассмотренный выше математический аппарат будет применен к анализу классического случая вращения твердого тела на безынерционном гибком стержне². Хотя этот случай рассмотрен во многих работах, обзор которых можно найти в книге В. В. Болотина “Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости” [64], тем не менее многое здесь остается невыясненным. В то же время эта задача является одной из важнейших в практическом отношении, поскольку она моделирует динамическое поведение валов, которые играют центральную роль во многих машинах. Эксперименты далеко не всегда отвечают результатам известных теорий. В частности,

¹ Материал этой главы основан на статье [66]: П. А. Жилин, С. А. Сорокин “Мультироторный гироскоп на нелинейно упругом основании” (ИПМаш РАН: Препринт N 140. 1997. 83 с.). (*Примеч. ред.*)

² В принципе задача о вращении твердого тела на безынерционном гибком стержне по физическому содержанию аналогична задаче о движении твердотельного осциллятора, которой посвящена седьмая глава. Однако есть несколько существенных отличий. Во-первых, задача о твердотельном осцилляторе — это в чистом виде задача динамики твердого тела, тогда как в задаче о вращении твердого тела на безынерционном гибком стержне уравнения динамики твердого тела играют роль граничных условий в задаче о деформировании стержня. Во-вторых, в седьмой главе представлен самый общий вид консервативного момента, а в случае твердого тела на гибком стержне вид упругого момента, действующего на тело, полностью определяется моделью стержня и условиями закрепления нижнего конца стержня. В настоящей главе используется физически линейная теория стержней и допускается вращение нижнего конца стержня вокруг вертикальной прямой. В-третьих, в седьмой главе рассматривается твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной точки. В настоящей главе исследуется произвольное движение твердого тела, на которое со стороны стержня действуют упругая сила и упругий момент. Распространение результатов седьмой главы на случай произвольного движения твердого тела требует проведения дополнительного исследования. (*Примеч. ред.*)

в 1924 г. Ньюкирк обнаружил самовозбуждение поперечных колебаний вращающегося вала на частотах, отличных от критических. Тогда же Кимболл объяснил это явление наличием внутреннего трения в материале вала. Эта ситуация в 1937 г. была подробно изучена и описана в работе Е. Л. Николаи [61]. С тех пор утвердилось мнение о дестабилизирующей роли внутреннего трения [76]. Теоретические результаты проведенного Е. Л. Николаи и многими другими авторами анализа, разумеется, не могут быть оспорены. Тем не менее тот факт, что внутреннее трение способствует накачке энергии в систему, вместо того, чтобы ее рассеивать, все-таки вызывает некоторое удивление. Сомнения связаны, главным образом, с принятой моделью внутреннего трения. В самом деле, использование определяющего уравнения типа

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

приводит к дифференциальным уравнениям параболического типа, что многими рассматривается как серьезный недостаток в фундаментальном плане. В 1947 г. появилась большая работа И. Б. Баргера [77], в которой экспериментально показано, что, несмотря на качественное совпадение результатов анализа Е. Л. Николаи с экспериментом, количественное несовпадение весьма значительно. Чтобы добиться количественного совпадения, И. Б. Баргер предложил использовать модель нелинейного внутреннего трения. После этого при высоких скоростях вращения удалось добиться хорошего количественного совпадения теории И. Б. Баргера с экспериментом. Однако эксперимент был недостаточно точным для того, чтобы судить о поведении системы при малых угловых скоростях, включая и область вблизи критической частоты вращения. Между тем фотографии, приведенные в работе И. Б. Баргера, дают основание думать, что нарастание амплитуд поперечных колебаний начинается еще до первой критической частоты. Поэтому естественно предположить, что существуют и другие механизмы самовозбуждения поперечных колебаний во вращающихся валах, помимо внутреннего трения. Один такой механизм будет рассмотрен в данной главе.

10.2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим твердое тело с трансверсально-изотропным центральным тензором инерции

$$\boldsymbol{\Theta} = \lambda \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}). \quad (10.1)$$

Будем считать, что центр масс тела расположен на оси симметрии тела. К центру масс тела жестко прикреплен гибкий стержень, так что поворот

концевого поперечного стержня совпадает с поворотом тела. Второй конец стержня закреплен в подшипниках, которые допускают свободное вращение стержня вокруг собственной оси.

Стержень будем считать безынерционным и нерастяжимым, как это общепринято в литературе. Будем считать, что в недеформированном состоянии стержень прямолинеен и его ось направлена по единичному вектору \mathbf{k} . Положение поперечного сечения стержня в отсчетной (недеформированной) конфигурации будем определять координатой s : $0 \leq s \leq l$. Вектор положения точек стержня в отсчетной конфигурации будем обозначать вектором $\mathbf{r}(s) = s\mathbf{k}$. Вектор положения точек стержня в актуальной конфигурации будем обозначать символом $\mathbf{R}(s, t)$. Пусть векторы $\mathbf{N}(s, t)$ и $\mathbf{M}(s, t)$ обозначают векторы внутренних усилий и моментов в стержне.

Запишем уравнения движения безынерционного стержня, т. е. уравнения квазиравновесия:

$$\mathbf{N}'(s, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}'(s, t) + \mathbf{R}'(s, t) \times \mathbf{N}(s, t) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{f}} = \partial \mathbf{f} / \partial s. \quad (10.2)$$

Соотношения упругости имеют вид

$$\mathbf{M}(s, t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{\Phi}, \quad (10.3)$$

где $\mathbf{P}(s, t)$ — тензор поворота поперечного сечения стержня; $\mathbf{\Phi}(s, t)$ — вектор изгиба–кручения, тензор жесткости \mathbf{C} считается трансверсально-изотропным:

$$\mathbf{C} = C_1(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + C_3\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \quad (10.4)$$

где C_1 и C_3 — жесткости стержня на изгиб и кручение соответственно.

Вектор изгиба–кручения $\mathbf{\Phi}(s, t)$ связан с тензором поворота уравнением Пуассона:

$$\mathbf{P}'(s, t) = \mathbf{\Phi}(s, t) \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{R}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{k}, \quad (10.5)$$

где второе равенство выражает условие нерастяжимости. Векторы трансляционной $\mathbf{v}(s, t)$ и угловой $\mathbf{\omega}(s, t)$ скоростей определяются по формулам

$$\mathbf{v}(s, t) = \dot{\mathbf{R}}(s, t), \quad \dot{\mathbf{P}}(s, t) = \mathbf{\omega}(s, t) \times \mathbf{P}(s, t), \quad \dot{\mathbf{f}} = \partial \mathbf{f} / \partial t. \quad (10.6)$$

Дифференцируя (10.5) по времени и учитывая (10.6), получаем

$$(\mathbf{P}')^\cdot = \dot{\mathbf{\Phi}} \times \mathbf{P} + \mathbf{\Phi} \times (\mathbf{\omega} \times \mathbf{P}).$$

Дифференцируя второе уравнение в (10.6) и учитывая (10.5), получим

$$(\dot{\mathbf{P}})' = \mathbf{\omega}' \times \mathbf{P} + \mathbf{\omega} \times (\mathbf{\Phi} \times \mathbf{P}).$$

Поскольку дифференцирования по координатам и времени перестановочны, то из последних двух уравнений следует равенство их правых частей:

$$\dot{\Phi} \times \mathbf{P} + \Phi \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P} + \boldsymbol{\omega} \times (\Phi \times \mathbf{P}).$$

Умножая это равенство справа на \mathbf{P}^\top , получаем

$$\dot{\Phi} \times \mathbf{E} + \Phi \times \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \times \Phi.$$

Вычисляя векторные инварианты от обеих частей этого равенства, получаем

$$-2\dot{\Phi} + \boldsymbol{\omega} \times \Phi = -2\boldsymbol{\omega}' + \Phi \times \boldsymbol{\omega},$$

или в другой форме:

$$\dot{\Phi}(s, t) = \boldsymbol{\omega}'(s, t) + \boldsymbol{\omega} \times \Phi(s, t). \quad (10.7)$$

Уравнение (10.7) в геометрии известно под названием уравнений структуры Э. Картана. У нас они позволяют вычислять производные от вектора изгиба-кручения по времени. Уравнения (10.7) в механике принято называть кинематическими уравнениями совместности деформаций. Обратимся к формулировке краевых условий. Будем считать, что конец стержня $s = 0$ закреплен в подшипниках. Тогда

$$s = 0: \quad \mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0, t) = (1 - \cos \alpha) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (10.8)$$

т. е. поворот закрепленного торца стержня происходит строго вокруг вектора \mathbf{k} . Для угла $\alpha(t)$ получаем уравнение

$$\dot{\alpha}(t) = \boldsymbol{\omega}(0, t) \cdot \mathbf{k}, \quad (10.9)$$

т. е. угол α , вообще говоря, заранее не определен. К концу стержня $s = 0$ приложен момент \mathbf{M}_{mot} , развиваемый двигателем:

$$\mathbf{M}_{\text{mot}} = M_{\text{mot}} \mathbf{k}. \quad (10.10)$$

Граничное условие на конце стержня $s = 0$ дает дополнительное уравнение

$$\mathbf{M}_{\text{mot}} = -\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{M}(0, t)) \quad \Rightarrow \quad M_{\text{mot}} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{M}(0, t), \quad (10.11)$$

позволяющее определить угол α , т. е. угол поворота начального сечения стержня.

Кроме того, примем для двигателя простейшую характеристику

$$M_{\text{mot}} = -\nu(\dot{\alpha} - \omega_0), \quad \nu > 0, \quad (10.12)$$

где параметр ν характеризует мощность двигателя: $\nu = \infty$ — идеальный двигатель неограниченной мощности; ω_0 — номинальная частота двигателя.

Таким образом, окончательно краевые условия при $s = 0$ имеют вид

$$\mathbf{R}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \nu(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_0) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}(0, t), \quad (10.13)$$

$$\mathbf{P}(0, t) = (1 - \cos \alpha) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \alpha \mathbf{E} + \sin \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{E}.$$

Чтобы получить краевые условия на торце $s = l$, необходимо записать уравнения динамики для твердого тела, прикрепленного к этому торцу стержня. При этом считаем, что тензор поворота твердого тела равен тензору поворота торцевого сечения $s = l$. Тогда, очевидно, имеем уравнения

$$m\ddot{\mathbf{R}}(l, t) = -\mathbf{N}(l, t), \quad (10.14)$$

$$[\mathbf{P}(l, t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T(l, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(l, t)] \cdot = -\mathbf{M}(l, t) + \mathbf{M}_{ex},$$

где m — масса тела, \mathbf{M}_{ex} есть внешний момент (нагрузка), приложенный к твердому телу.

Для внешнего момента можно предложить много различных представлений, которые существенно зависят от конкретных условий задачи. В данной работе будет рассмотрен простейший случай следящего момента

$$\mathbf{M}_{ex} = \mathcal{M} \mathbf{P}(l, t) \cdot \mathbf{k}. \quad (10.15)$$

Чтобы закончить постановку задачи, необходимо сформулировать начальные условия. Однако нас интересует устойчивость стационарного режима вращения, а не конкретное поведение системы при заданных начальных условиях. Поэтому вопрос о начальных условиях оставим в стороне.

10.3. Стационарное вращение твердого тела

Решение задачи (10.2)–(10.5), (10.13)–(10.15) будем искать в виде стационарного вращения, при котором стержень остается прямолинейным, а тело вращается вокруг своей оси изотропии \mathbf{k} .

Тензор поворота при этом имеет вид

$$\mathbf{P} = (1 - \cos \varphi) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (10.16)$$

где угол поворота поперечного сечения стержня есть функция s и t , т. е. $\varphi = \varphi(s, t)$. В этом случае вектор изгиба–кручения и угловая скорость вычисляются по простейшим формулам

$$\boldsymbol{\Phi}(s, t) = \varphi'(s, t) \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\omega}(s, t) = \dot{\varphi}(s, t) \mathbf{k}. \quad (10.17)$$

Поскольку стержень остается прямолинейным и нерастяжимым, то получим

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{r}(s) = s\mathbf{k}. \quad (10.18)$$

Первое уравнение системы (10.2) и первое условие из (10.14) дают с учетом (10.18), что вектор внутренних усилий равен нулю: $\mathbf{N} = \mathbf{0}$. Тогда второе уравнение системы (10.2) дает

$$\mathbf{M}(s, t) = \mathbf{M}(t). \quad (10.19)$$

С другой стороны, из (10.3), (10.4) и (10.17) следует

$$\mathbf{M}(s, t) = \mathbf{C} \cdot \varphi' \mathbf{k} = C_3 \varphi'(s, t) \mathbf{k}. \quad (10.20)$$

Сравнение (10.19) и (10.20) дает, что

$$\mathbf{M}(s, t) = M(t) \mathbf{k}, \quad \varphi(s, t) = sM(t)/C_3 + \alpha(t). \quad (10.21)$$

Здесь учтено, что $\alpha(t) = \varphi(0, t)$. Подставляя (10.21) в (10.13), получаем

$$\nu(\dot{\alpha} - \omega_0) = M(t), \quad \omega_0 = \text{const}. \quad (10.22)$$

Теперь рассмотрим второе из условий (10.14). Подставляя в него (10.16) при

$$\varphi(l, t) = lM(t)/C_3 + \alpha(t)$$

и учитывая второе из равенств (10.17), получаем

$$\Theta \cdot \ddot{\varphi}(l, t) \mathbf{k} = -M(t) \mathbf{k} + \mathcal{M} \mathbf{k}.$$

С учетом выражения для тензора инерции (10.1) последнее уравнение принимает вид

$$\lambda \left(l \ddot{M}(t)/C_3 + \ddot{\alpha}(t) \right) = -M(t) + \mathcal{M}. \quad (10.23)$$

Исключая отсюда момент $M(t)$ с помощью уравнения (10.22), получаем уравнение для угла α :

$$\gamma(\dot{\alpha} - \omega_0)'' + \lambda \ddot{\alpha} = -\nu(\dot{\alpha} - \omega_0) + \mathcal{M}, \quad \gamma \equiv \nu \lambda l / C_3. \quad (10.24)$$

Введем новую переменную

$$x(t) = \dot{\alpha}(t) - \omega_0. \quad (10.25)$$

Тогда уравнение (10.24) примет вид

$$\gamma \ddot{x} + \lambda \dot{x} + \nu x = \mathcal{M}. \quad (10.26)$$

Как легко видеть, при любых начальных условиях решение уравнения (10.26) стремится к стационарному решению

$$\chi = \mathcal{M}/\nu, \quad \alpha = (\omega_0 + \mathcal{M}/\nu)t. \quad (10.27)$$

Обычно $\mathcal{M} < 0$ (момент “трения” или другая нагрузка), так что угловая скорость стационарного вращения оказывается несколько меньше, чем номинальная угловая скорость двигателя.

Подчеркнем, что построенное частное решение (частный режим вращения) является точным решением исходной и сильно нелинейной задачи. Вопрос о реализации такого решения в действительности тесно связан с проблемой его устойчивости.

10.4. Анализ устойчивости стационарного вращения твердого тела на гибком стержне

10.4.1. Уравнения в вариациях

Выше было показано, что задача (10.2)–(10.5), (10.13)–(10.15) допускает точное решение, описываемое функциями:

$$\mathbf{R}(s, t) = s\mathbf{k}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}) = (1 - \cos \varphi) \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \cos \varphi \mathbf{E} + \sin \varphi \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (10.28)$$

$$\mathbf{M} = \mathcal{M}\mathbf{k}, \quad \varphi = s\mathcal{M}/C_3 + \alpha(t), \quad \alpha = \omega t, \quad \omega = \omega_0 + \mathcal{M}/\nu.$$

Чтобы исследовать устойчивость решения (10.28), необходимо рассмотреть возмущенное движение:

$$\mathbf{R}_\varepsilon(s, t) = s\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{u}(s, t), \quad \mathbf{N}_\varepsilon = \varepsilon\mathbf{N}(s, t), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (10.29)$$

$$\mathbf{P}_\varepsilon(s, t) = (\mathbf{E} + \varepsilon\boldsymbol{\theta}(s, t) \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi\mathbf{k}). \quad (10.30)$$

Для возмущенного вектора изгиба–кручения справедлива формула

$$\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon = \varepsilon\boldsymbol{\theta}' + \frac{\mathcal{M}}{C_3}(\mathbf{k} + \varepsilon\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}). \quad (10.31)$$

Для возмущенной угловой скорости имеем аналогичное представление:

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \varepsilon\dot{\boldsymbol{\theta}} + \omega(\mathbf{k} + \varepsilon\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{k}), \quad (10.32)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ определено выражением (10.28). Подставляя (10.30) и (10.31) в (10.3), получаем выражение для возмущенного вектора момента:

$$\mathbf{M}_\varepsilon = \mathcal{M}\mathbf{k} + \varepsilon (\mathbf{C}_1\boldsymbol{\gamma}' - \mathcal{M}\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{C}_3\beta'\mathbf{k}), \quad (10.33)$$

где для вариации $\boldsymbol{\theta}$ вектора поворота принято разложение

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\gamma} + \beta\mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (10.34)$$

Подставляя вышеприведенные представления в уравнения квазистатики стержня (10.2), (10.3), получаем

$$\mathbf{N}' = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C}_1\boldsymbol{\gamma}'' - \mathcal{M}\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}' + \mathbf{C}_3\beta''\mathbf{k} + \mathbf{k} \times \mathbf{N} = \mathbf{0}. \quad (10.35)$$

Второе из равенств (10.5) дает

$$\mathbf{u}' = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{k}. \quad (10.36)$$

Краевые условия (10.1) для стационарного движения принимают вид

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \beta'(0, t) = 0, \quad \boldsymbol{\gamma}(0, t) = \mathbf{0}. \quad (10.37)$$

Краевые условия (10.14) после несложных преобразований сводятся к следующим:

$$m\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{l}, t) = -\mathbf{N}, \quad (10.38)$$

$$\mu\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{l}, t) - \lambda\omega\mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{l}, t) + \mathbf{C}_1\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{l}, t) = \mathbf{0}, \quad (10.39)$$

$$\lambda\ddot{\beta}(\mathbf{l}, t) + \mathbf{C}_3\beta'(\mathbf{l}, t) = 0. \quad (10.40)$$

Задача (10.35)–(10.40) являет собой систему уравнений в вариациях. Если она имеет только ограниченные на всем временном интервале решения, то исследуемое стационарное вращение твердого тела на гибком стержне считается устойчивым.

Проецируя второе из уравнений (10.35) на орт \mathbf{k} , получаем

$$\beta''(s, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(s, t) = \beta(t).$$

Условие $\beta' = 0$ следует из (10.37). Теперь уравнение (10.40) принимает вид

$$\ddot{\beta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t.$$

Иными словами, имеем неустойчивость по углу β , но этот вид неустойчивости не опасен, а в инженерном плане, как правило, не интересен. Поэтому в дальнейшем будем заниматься только поперечными колебаниями, причем вектор перемещения \mathbf{u} будем считать ортогональным \mathbf{k} , как это видно из уравнения (10.36).

10.4.2. Анализ устойчивости при отсутствии внешнего момента

Полная система уравнений в вариациях является весьма громоздкой, и целесообразно сначала рассмотреть классический случай $\mathcal{M} = 0$.

Из уравнений (10.35) при $\mathcal{M} = 0$ следует

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}(t), \quad C_1 \boldsymbol{\gamma}'' = -\mathbf{k} \times \mathbf{N}(t), \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}. \quad (10.41)$$

Интегрируя систему (10.41) и проводя некоторые вычисления, получаем

$$\mathbf{N}(t) = \frac{12C_1}{l^3} \mathbf{u}(l, t) + \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}(l, t),$$

$$\boldsymbol{\gamma}'(l, t) = -\frac{6}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}(l, t) + \frac{4}{l} \boldsymbol{\gamma}(l, t).$$

Подставляя эти выражения в уравнения (10.38) и (10.39), получаем систему двух уравнений для определения функций $\mathbf{u}(l, t)$ и $\boldsymbol{\gamma}(l, t)$, которые ниже обозначаются $\mathbf{u}_l(t)$ и $\boldsymbol{\gamma}_l(t)$:

$$m\ddot{\mathbf{u}}_l + \frac{12C_1}{l^3} \mathbf{u}_l + \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}_l = \mathbf{0}, \quad (10.42)$$

$$-\frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l + \mu\ddot{\boldsymbol{\gamma}}_l - \lambda\omega \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}_l + \frac{4C_1}{l} \boldsymbol{\gamma}_l = \mathbf{0}. \quad (10.43)$$

Исключая переменную $\boldsymbol{\gamma}_l(t)$ из уравнения (10.43) с помощью уравнения (10.42), получаем разрешающее уравнение для функции $\mathbf{u}_l(t)$, т. е. для вектора поперечного смещения торца стержня с твердым телом:

$$\frac{\mu ml^2}{6C_1} \ddot{\ddot{\mathbf{u}}}_l - \frac{\lambda\omega ml^2}{6C_1} \mathbf{k} \times \ddot{\ddot{\mathbf{u}}}_l + \left(\frac{2\mu}{l} + \frac{2ml}{3} \right) \ddot{\ddot{\mathbf{u}}}_l - \frac{2\lambda\omega}{l} \mathbf{k} \times \dot{\ddot{\mathbf{u}}}_l + \frac{2C_1}{l^2} \mathbf{u}_l = \mathbf{0}. \quad (10.44)$$

Частные решения этого уравнения ищем в виде вращающихся вокруг \mathbf{k} постоянных векторов \mathbf{a} , которые ортогональны \mathbf{k} :

$$\mathbf{u}_l(t) = \mathbf{Q}(pt\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}. \quad (10.45)$$

Согласно (10.45), выражения для производных имеют вид

$$\dot{\mathbf{u}}_l = p\mathbf{k} \times \mathbf{u}_l, \quad \ddot{\mathbf{u}}_l = -p^2 \mathbf{u}_l, \quad \ddot{\ddot{\mathbf{u}}}_l = -p^3 \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l, \quad \ddot{\ddot{\ddot{\mathbf{u}}}}_l = p^4 \mathbf{u}_l.$$

Подставляя эти представления в (10.44), получаем

$$\frac{\mu ml^2}{6C_1} p^4 - \frac{\lambda\omega ml^2}{6C_1} p^3 - \left(\frac{2\mu}{l} + \frac{2ml}{3} \right) p^2 + \frac{2\lambda\omega}{l} p + \frac{2C_1}{l^2} = 0. \quad (10.46)$$

Если корни этого уравнения вещественны, то вращения устойчивы, если появляются комплексные корни, то тригонометрические функции комплексного аргумента будут содержать в себе гиперболические функции, т. е. растущие по модулю решения. Для уравнения (10.46) вещественность всех его корней показывается элементарно. В самом деле, обозначим левую часть уравнения (10.46) через $F(p)$, которую запишем в виде

$$F(p) \equiv \frac{\mu ml^2}{6C_1} p^4 - \frac{2\lambda\omega}{l} p \left(\frac{ml^3}{12C_1} p^2 - 1 \right) - \left(\frac{2\mu}{l} + \frac{2ml}{3} \right) p^2 + \frac{2C_1}{l^2}.$$

Вычислив значения этой функции в точках $p = \pm \sqrt{12C_1/(ml^3)}$, получим

$$F\left(\pm \sqrt{\frac{12C_1}{ml^3}}\right) = -\frac{6C_1}{l^2} < 0,$$

причем это неравенство справедливо при всех значениях ω . Учтем теперь очевидные неравенства:

$$F(\pm\infty) = +\infty > 0, \quad F(0) = 2C_1/l^2 > 0.$$

Анализ графика функции $F(p)$ убеждает, что $F(p)$ имеет два отрицательных и два положительных корня.

Итак, при $\mathcal{M} = 0$ вращения твердого тела на гибком стержне устойчивы относительно малых возмущений. Этот результат давно и хорошо известен. Здесь просто показано, что используемый в работе подход полностью соответствует классическому.

10.4.3. Вывод разрешающего уравнения при действии внешнего момента

Если внешний момент, действующий на тело, отличен от нуля, то задача значительно усложняется по сравнению с задачей, рассмотренной в предыдущем подразделе. Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую в интегрировании второго уравнения из системы (10.35):

$$C_1 \gamma'' - \mathcal{M} \mathbf{k} \times \gamma' = -\mathbf{k} \times \mathcal{N}, \quad \mathcal{N}(s, t) = \mathcal{N}(t). \quad (10.47)$$

В качестве краевых условий примем следующие:

$$s = 0: \quad \gamma(0, t) = \mathbf{0}, \quad s = l: \quad \gamma(l, t) = \gamma_l(t). \quad (10.48)$$

Нашей конечной целью на этом предварительном этапе является выражение функций $\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{l}, t)$ и $\mathcal{N}(t)$ через функции $\boldsymbol{\gamma}_1(t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{l}, t)$. Если это будет сделано, то уравнения (10.38) и (10.29) составят систему двух обыкновенных уравнений для функций $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{l}, t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{l}, t)$, решение которых позволит сделать вывод об устойчивости или неустойчивости стационарного режима вращения твердого тела на гибком стержне. Обратимся к решению задачи (10.47), (10.48). Умножая обе части уравнения (10.47) векторно на \mathbf{k} слева, получаем

$$C_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'' + \mathcal{M} \boldsymbol{\gamma}' = \mathcal{N}.$$

Интегрируя это уравнение один раз, получаем

$$C_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}' + \mathcal{M} \boldsymbol{\gamma} = C_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'_0 + s \mathcal{N}, \quad \boldsymbol{\gamma}'_0 = \boldsymbol{\gamma}'(0, t).$$

Исключая с помощью этого уравнения вектор $\mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'$ из уравнения (10.47), приходим к уравнению

$$\boldsymbol{\gamma}'' + \frac{\alpha^2}{l^2} \boldsymbol{\gamma} = -\frac{1}{C_1} \mathbf{k} \times \mathcal{N} + \frac{\alpha s}{l C_1} \mathcal{N} + \frac{\alpha}{l} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'_0, \quad \alpha \equiv \frac{\mathcal{M} l}{C_1}. \quad (10.49)$$

Получили линейное дифференциальное уравнение с правой частью. Его общее решение, казалось бы, можно представить в виде суммы любого частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Одно из частных решений (10.49) имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma}_* = \frac{l^2}{\alpha^2} \left(-\frac{1}{C_1} \mathbf{k} \times \mathcal{N} + \frac{\alpha s}{l C_1} \mathcal{N} + \frac{\alpha}{l} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}'_0 \right).$$

Однако использовать это частное решение нельзя, поскольку при $\alpha \rightarrow 0$ оно перестает существовать. Поэтому общее решение также должно содержать особенности, которые должны компенсировать особенности в частном решении. В результате получается очень сложная и громоздкая форма представления решения. Поэтому кажется предпочтительным воспользоваться методом вариации произвольных постоянных. Хотя этот путь быстрее приводит к цели, но все же он очень длинен, и едва ли имеет смысл воспроизводить его в данной работе. Поэтому здесь мы воспользуемся приближенным решением уравнения (10.49), которое в точности совпадает с главными членами асимптотического разложения точного решения уравнения (10.49) при малых α .

В дальнейшем будем считать справедливым сильное неравенство

$$|\alpha| = \left| \frac{\mathcal{M} l}{C_1} \right| \ll 1. \quad (10.50)$$

С практической точки зрения это ограничение несущественно, так как даже для значений крутящего момента, приводящих к возникновению пластических деформаций в стержне, модуль α не превосходит значения $|\alpha| = 0,01$. Если принять (10.50), то с точностью до малых второго порядка вместо (10.49) можем записать

$$\gamma'' = -\frac{1}{C_1} \mathbf{k} \times \mathcal{N} + \frac{\alpha s}{l C_1} \mathcal{N} + \frac{\alpha}{l} \mathbf{k} \times \gamma'_0. \quad (10.51)$$

Это уравнение интегрируется уже элементарно:

$$\gamma' = -\frac{s}{C_1} \mathbf{k} \times \mathcal{N} + \frac{\alpha s^2}{2l C_1} \mathcal{N} + \frac{\alpha s}{l} \mathbf{k} \times \gamma'_0 + \gamma'_0. \quad (10.52)$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$\gamma(s, t) = -\frac{s^2}{2C_1} \mathbf{k} \times \mathcal{N} + \frac{\alpha s^3}{6l C_1} \mathcal{N} + \frac{\alpha s^2}{2l} \mathbf{k} \times \gamma'_0 + s \gamma'_0. \quad (10.53)$$

Полагая здесь $s = l$, получаем

$$\gamma_l = -\frac{l^2}{2C_1} \mathbf{k} \times \mathcal{N} + \frac{\alpha l^2}{6C_1} \mathcal{N} + \frac{\alpha l}{2} \mathbf{k} \times \gamma'_0 + l \gamma'_0. \quad (10.54)$$

Подставляя (10.53) в (10.36) и интегрируя получившееся равенство, находим выражение для вектора поперечных смещений:

$$\mathbf{u}(s, t) = -\frac{s^3}{6C_1} \mathcal{N} - \frac{\alpha s^4}{24l C_1} \mathbf{k} \times \mathcal{N} + \frac{\alpha s^3}{6l} \gamma'_0 - \frac{s^2}{2} \mathbf{k} \times \gamma'_0. \quad (10.55)$$

Заметим, что согласно (10.55) вектор $\mathbf{u}(s, t)$ — плоский, т. е. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} = 0$. Из (10.55) получаем

$$\mathbf{u}_l(t) = -\frac{l^3}{6C_1} \mathcal{N} - \frac{\alpha l^3}{24C_1} \mathbf{k} \times \mathcal{N} + \frac{\alpha l^2}{6} \gamma'_0 - \frac{l^2}{2} \mathbf{k} \times \gamma'_0. \quad (10.56)$$

Равенства (10.54) и (10.56) позволяют выразить векторы $\mathcal{N}(t)$ и $\gamma'_0(t)$ через векторы $\mathbf{u}_l(t)$ и $\gamma_l(t)$:

$$\mathcal{N} = \frac{12C_1}{l^3} \mathbf{u}_l + \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \gamma_l + \frac{\alpha C_1}{l^2} \gamma_l, \quad (10.57)$$

$$\gamma'_0 = -\frac{2}{l} \gamma_l + \frac{\alpha}{2l} \mathbf{k} \times \gamma_l + \frac{\alpha}{l^2} \mathbf{u}_l + \frac{6}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l. \quad (10.58)$$

В этих выражениях также отброшены слагаемые порядка $O(\alpha^2)$. Наконец, используя (10.57) и (10.58), легко получаем выражение для $\gamma'_l(t)$:

$$\gamma'_l = \frac{4}{l} \gamma_l - \frac{6}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l + \frac{\alpha}{2l} \mathbf{k} \times \gamma_l + \frac{\alpha}{l^2} \mathbf{u}_l. \quad (10.59)$$

Теперь уже можно выписать разрешающие уравнения, описывающие динамическое поведение твердого тела на гибком стержне вблизи стационарного вращения. Они получаются после подстановки выражений (10.57) и (10.59) в уравнения (10.38) и (10.39):

$$m\ddot{\mathbf{u}}_l + \frac{12C_1}{l^3} \mathbf{u}_l + \frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}_l + \frac{\alpha C_1}{l^2} \boldsymbol{\gamma}_l = \mathbf{0}, \quad (10.60)$$

$$-\frac{6C_1}{l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l + \frac{\alpha C_1}{l^2} \mathbf{u}_l + \mu \ddot{\boldsymbol{\gamma}}_l - \lambda \omega \mathbf{k} \times \dot{\boldsymbol{\gamma}}_l + \frac{4C_1}{l} \boldsymbol{\gamma}_l + \frac{\alpha C_1}{2l} \mathbf{k} \times \boldsymbol{\gamma}_l = \mathbf{0}. \quad (10.61)$$

Полагая здесь $\alpha = 0$, приходим к уравнениям, уже рассмотренным в подразделе 10.4.2, где было показано, что их решения ограничены во времени, т. е. там мы имели устойчивость стационарных вращений. Если в (10.60), (10.61) положить равными нулю моменты инерции μ и λ и учесть соотношение $\alpha \equiv \mathcal{M}l/C_1$, то получим уравнение

$$m\ddot{\mathbf{u}}_l + \frac{3C_1}{l^3} \mathbf{u}_l + \frac{9\mathcal{M}}{8l^2} \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l = \mathbf{0}. \quad (10.62)$$

Это уравнение также очень хорошо известно: оно возникает при анализе устойчивости положений равновесия стержня, скрученного моментом \mathcal{M} . Известно, что при любых сколь угодно малых значениях \mathcal{M} решения уравнения (10.62) неограниченно возрастают во времени. Иными словами, равновесие консольного стержня, скрученного сколь угодно малым следящим моментом, неустойчиво³.

Вопрос, ответ на который нам необходимо найти, заключается в следующем: как повлияет малый следящий момент на стационарные вращения, не возникнет ли и здесь явление, аналогичное парадоксу Е. Л. Николаи?

10.4.4. Анализ устойчивости стационарных вращений при действии малого следящего момента

Введем в рассмотрение обыкновенные дифференциальные операторы:

$$L_m = m \frac{d^2}{dt^2} + \frac{12C_1}{l^3}, \quad L_\mu = \mu \frac{d^2}{dt^2} + \frac{4C_1}{l}, \quad L_\omega = \lambda \omega \frac{d}{dt} - \frac{\alpha C_1}{2l}. \quad (10.63)$$

³ Исследование устойчивости равновесной конфигурации консольного стержня, скрученного сколь угодно малым следящим моментом, можно найти в разделе 9.10. Исследование устойчивости равновесной конфигурации твердого тела на упругом основании, находящегося под действием сколь угодно малых крутящих моментов разного вида, в том числе и следящего момента, содержится в разделах 7.7 и 7.8. (*Примеч. ред.*)

Введем плоские тензорные операторы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k})L_m, & \mathbf{B} &= -\frac{6C_1}{l^2}\mathbf{k} \times \mathbf{E} + \frac{\alpha C_1}{l^2}(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}), \\ \mathbf{C} &= (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k})L_\mu - \mathbf{k} \times \mathbf{E}L_\omega. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Как легко убедиться, эти операторы перестановочны. Систему уравнений (10.60), (10.61) перепишем в виде

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_l + \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\gamma}_l = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_l + \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\gamma}_l = \mathbf{0}. \quad (10.65)$$

Подействовав оператором \mathbf{C} на первое уравнение (10.65) и затем исключив $\boldsymbol{\gamma}_l$ с помощью второго уравнения (10.65), получим следующее уравнение для вектора \mathbf{u}_l :

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}_l = \mathbf{0}. \quad (10.66)$$

В развернутом виде последнее уравнение имеет вид

$$\left(L_\mu L_m - \frac{36C_1^2}{l^4} \right) \mathbf{u}_l - \left(L_m L_\omega + \frac{12\alpha C_1^2}{l^4} \right) \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l = \mathbf{0}. \quad (10.67)$$

Перепишем это уравнение, выделив в нем слагаемые, пропорциональные α :

$$\left(L_m L_\mu - \frac{36C_1^2}{l^4} \right) \mathbf{u}_l - \lambda \omega L_m \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}}_l + \frac{\alpha C_1}{2l} \left(m \frac{d^2}{dt^2} + \frac{12C_1}{l^3} \right) \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l = \mathbf{0}. \quad (10.68)$$

Если здесь принять $\alpha = 0$, то получим уравнение (10.44), решение которого было построено в подразделе 10.4.2. Там было показано, что общее решение является суперпозицией четырех вращающихся вокруг \mathbf{k} векторов, модули которых постоянны. Легко убедиться, что при $\alpha \neq 0$ уравнение (10.68) решений такого типа не допускает. Амплитуда вращений (расстояние от апекса до оси \mathbf{k}) не может быть постоянной ни при каких начальных условиях. Следовательно, твердое тело будет либо уклоняться от оси \mathbf{k} , либо, напротив, стремиться к оси. Во втором случае имеем устойчивость стационарных вращений, а в первом случае — неустойчивость. Общий анализ устойчивости сводится к определению корней полинома восьмой степени, что можно, конечно, сделать, но это выливается в довольно большие вычисления. По этой причине в данной работе ограничимся приближенным (асимптотическим) анализом, который тем более уместен, что само уравнение (10.68) выведено с точностью до членов порядка $O(\alpha^2)$. Будем рассуждать следующим образом. При $\alpha = 0$ каждое частное решение уравнения (10.68) являлось вращением с постоянной

амплитудой. Естественно думать, что при малых α мы будем иметь вращение с медленно меняющейся амплитудой. Используем это обстоятельство и будем искать частные решения уравнения (10.68) в виде

$$\mathbf{u}_l = \mathbf{Q}(\mathbf{p}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{p} = \text{const.} \quad (10.69)$$

При $\alpha = 0$ вектор $\mathbf{v}(t)$ постоянен, как это было показано в подразделе 10.4.2. Примем, что при малых α имеет место асимптотическое соответствие

$$\dot{\mathbf{v}} \sim \alpha \mathbf{v}. \quad (10.70)$$

Вычислим производные от \mathbf{u}_l с учетом соотношения (10.70) и при этом ограничимся только членами до первого порядка малости включительно.

Получим:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_l &= \mathbf{p}\mathbf{k} \times \mathbf{u}_l + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}}, & \ddot{\mathbf{u}}_l &= -\mathbf{p}^2 \mathbf{u}_l + 2\mathbf{p}\mathbf{k} \times \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}}, \\ \ddot{\mathbf{u}}_l &= -\mathbf{p}^3 \mathbf{k} \times \mathbf{u}_l - 3\mathbf{p}^2 \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}}, & \dddot{\mathbf{u}}_l &= \mathbf{p}^4 \mathbf{u}_l - 4\mathbf{p}^3 \mathbf{k} \times \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (10.68), получаем уравнение

$$F(\mathbf{p})\mathbf{u}_l - F'(\mathbf{p})\mathbf{k} \times \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \frac{\alpha C_1}{2l} \left(\frac{12C_1}{l^3} - m\mathbf{p}^2 \right) \mathbf{k} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (10.71)$$

где $F'(\mathbf{p}) = dF/d\mathbf{p}$, а полином $F(\mathbf{p})$ имеет вид

$$F(\mathbf{p}) \equiv \frac{\mu m l^2}{6C_1} \mathbf{p}^4 - \frac{\lambda \omega m l^2}{6C_1} \mathbf{p}^3 - \left(\frac{2\mu}{l} + \frac{2ml}{3} \right) \mathbf{p}^2 + \frac{2\lambda \omega}{l} \mathbf{p} + \frac{2C_1}{l^2}. \quad (10.72)$$

Для того чтобы уравнение (10.71) было выполнено, достаточно принять

$$F(\mathbf{p}) = 0, \quad F'(\mathbf{p})\dot{\mathbf{v}} + \frac{\alpha C_1}{2l} \left(m\mathbf{p}^2 - \frac{12C_1}{l^3} \right) \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (10.73)$$

Как было показано выше, функция $F(\mathbf{p})$ имеет ровно четыре вещественных нуля. Перенумеруем их в следующем порядке: $\mathbf{p}_1 < \mathbf{p}_2 < \mathbf{p}_3 < \mathbf{p}_4$. Корни \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 отрицательны, а корни \mathbf{p}_3 и \mathbf{p}_4 — положительны. Кроме того, справедливы неравенства:

$$\mathbf{p}_{1,4}^2 > \frac{12C_1}{ml^3}, \quad \mathbf{p}_{2,3}^2 < \frac{12C_1}{ml^3}. \quad (10.74)$$

Решение второго из уравнений (10.73) имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}e^{-qt}, \quad q = \frac{\alpha C_1}{2l} \frac{m\mathbf{p}^2 - 12C_1/l^3}{F'(\mathbf{p})}. \quad (10.75)$$

При положительных q “амплитуды” стремятся к нулю, т. е. ось симметрии твердого тела стремится к оси \mathbf{k} , т. е. такое частное решение устойчиво. Рассмотрим последовательно все четыре значения корня: p_1, p_2, p_3, p_4 .

Рассмотрим корень p_1 . В силу (10.74) числитель в (10.75) положителен (без учета знака α). Значение функции $F'(p)$ в точке $p = p_1$, очевидно, отрицательно. Следовательно, знак q противоположен знаку α . Таким образом, частное решение, отвечающее корню p_1 , убывает при $\alpha < 0$ и растет при $\alpha > 0$.

Рассмотрим корень p_4 . В этом случае значение функции $F'(p)$ в точке $p = p_4$ положительно. Следовательно, $q > 0$ при $\alpha > 0$ и $q < 0$ при $\alpha < 0$. Иными словами, для частного решения, отвечающего корню $p = p_4$, имеем ситуацию, противоположную случаю $p = p_1$. Это означает, что в любом случае при любом значении угловой скорости и при любом значении α , т. е. внешнего момента M , имеем неустойчивость.

Как было показано выше, сколь угодно малый следящий момент порождает неустойчивость вращения твердого тела на гибком вале. Можно убедиться, что мертвый внешний момент также приводит к развитию неустойчивости. Более того, внешние (сколь угодно малые) воздействия, как правило, ведут к неустойчивостям. Малое трение, внешнее или внутреннее, может также порождать неустойчивость, но может и стабилизировать движение тела. Создается впечатление, что вращающиеся валы оказываются работоспособными не потому, что ликвидированы причины, вызывающие неустойчивость, а, наоборот, вследствие избытка этих причин. В результате одна неустойчивость гасит другую. Именно так обстоит дело при совокупном действии следящего и мертвого моментов. При раздельном действии каждый из них ведет к неустойчивости, но если их величины одинаковы, то поведение системы устойчиво.

Обратимся к экспериментальной работе И. Б. Баргера [77]. Анализ, насколько он возможен по приводимым фотографиям, показывает, что характер неустойчивости значительно лучше описывается типом неустойчивости, предсказываемым результатами данного раздела, нежели типом неустойчивости, определяемым внутренним трением. Действительно, нарастание отклонения от вертикальной оси имеет место при любых ω . Впрочем, данные, приводимые в [77], явно недостаточны для того, чтобы давать какие бы то ни было окончательные суждения.

Глава 11

Вращение твердого тела на инерционном упругом основании¹

11.1. Вращение твердого тела на инерционном стержне

Задача о вращении твердого тела на безынерционном стержне, рассмотренная в десятой главе, исследовалась во многих работах — см., например, [23]. В последние годы изучаются проблемы создания высокооборотных центрифуг со скоростями вращения 120–200 тыс. об/мин. Основным конструктивным решением является установка на гибком стержне, причем параметры стержня и ротора таковы, что стержень уже нельзя считать безынерционным. Попытки решения этой задачи известны, но они приводят к чрезвычайно громоздким уравнениям, трудно поддающимся аналитическому исследованию².

¹ Материал этой главы основан на двух статьях [78, 79]: П. А. Жилин, Т. П. Товстик. Вращение твердого тела на инерционном стержне (Механика и процессы управления: Тр. СПбГТУ. N 458. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1995. С. 78–83), Е. А. Ivanova, P. A. Zhilin. Non-stationary regime of the motion of a rigid body on an elastic plate (Proc. of the XXIX Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. 2002. P. 357–363). Последняя статья написана на английском языке. Перевод Е. А. Ивановой. (*Примеч. ред.*)

² Сложность решения задач совместной динамики твердого тела и инерционного упругого основания заключается в том, что приходится решать уравнения в частных производных. В задаче о вращении твердого тела на гибком стержне уравнения динамики твердого тела играют роль граничных условий в задаче о деформировании стержня. Если стержень является безынерционным, как это предполагалось в десятой главе, уравнения движения стержня представляют собой уравнения квазистатики в том смысле, что время в этих уравнениях играет роль параметра. Благодаря этому задача распадается на две независимые. Первая задача заключается в интегрировании уравнений, описывающих деформацию стержня. В результате ее решения определяется конкретный вид выражений для силы и момента, действующих на твердое тело со стороны стержня. Вторая задача заключается в интегрировании уравнений динамики твердого тела, когда все действующие на него силы и моменты выражены через характеристики движения этого тела. В случае инерционного стержня задача оказывается существенно сложнее. (*Примеч. ред.*)

В данной главе описывается метод, позволяющий свести задачу к решению относительно простого интегро-дифференциального уравнения, и дается способ его приближенного интегрирования. Рассмотрение ограничено простейшим случаем, когда оба конца стержня закреплены от поперечных смещений — это один из режимов работы реально существующей ультрацентрифуги.

11.1.1. Постановка задачи

В качестве исходных уравнений, описывающих нелинейную динамику упругих стержней, примем уравнения, представленные в девятой главе, но игнорирующие инерцию вращения:

$$\mathbf{N}' = \rho_0 \ddot{\mathbf{R}}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad (11.1)$$

где $\mathbf{R}(s, t) = s\mathbf{k} + \mathbf{u}(s, t)$ — вектор положения точек стержня в актуальной конфигурации; s — расстояние вдоль недеформированной оси прямолинейного стержня; ρ_0 — погонная плотность массы в отсчетной конфигурации; \mathbf{N} и \mathbf{M} — векторы силы и момента в сечении стержня.

Соотношения упругости имеют вид

$$\mathbf{N} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad (11.2)$$

где $\mathbf{P}(s, t)$ — тензор поворота поперечного сечения стержня; \mathbf{A} и \mathbf{C} — тензоры упругости, вычисленные в отсчетной (недеформированной) конфигурации и считающиеся трансверсально-изотропными:

$$\mathbf{A} = A_3 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + A_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}), \quad \mathbf{C} = C_3 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + C_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}). \quad (11.3)$$

Здесь A_3 , A_1 , C_3 , C_1 — жесткости на растяжение, поперечный сдвиг, кручение и изгиб соответственно; \mathbf{k} — единичный орт недеформированной оси стержня.

Векторы деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\Phi}$ определяются соотношениями

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}'(s, t) - \mathbf{P}(s, t) \cdot \mathbf{k}, \quad \boldsymbol{\Phi}(s, t) = \mathbf{P}'(s, t) \times \mathbf{P}(s, t). \quad (11.4)$$

Обратимся к формулировке краевых условий. Часть из них очевидна и записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(0, t) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}(0, t) = \mathbf{Q}(\alpha(t)\mathbf{k}), \\ \mathbf{R}(l, t) \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{k} = 0. \end{aligned} \quad (11.5)$$

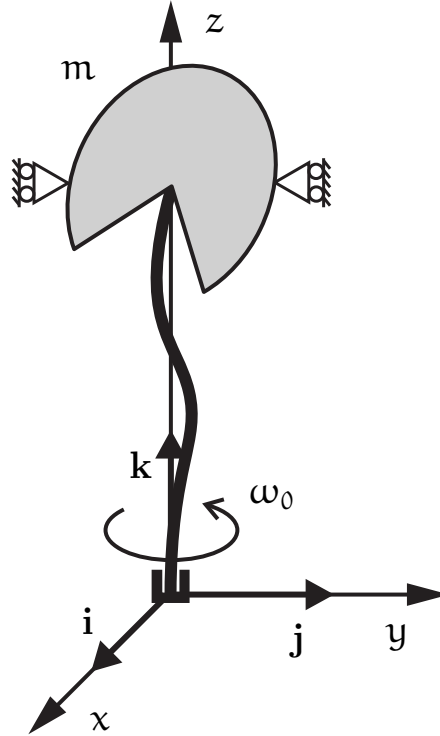


Рис. 11.1. Твердое тело с неподвижной точкой на упругом стержне

Считаем, что торец $s = 0$ стержня вращается двигателем с номинальной угловой скоростью ω_0 . Момент, развиваемый двигателем, определим по простейшей характеристике:

$$M_{\text{mot}} = -\nu(\dot{\alpha} - \omega_0), \quad \nu > 0, \quad (11.6)$$

где ν — характеристика мощности двигателя. Если мощность двигателя считать неограниченной, то $\nu = \infty$ и $\dot{\alpha} = \omega_0$. Ограниченная мощность двигателя проявляется только в режимах разгона и торможения.

Последние два условия в (11.5) означают отсутствие поперечных смещений и осевой силы на торце $s = l$.

В дополнение к (11.5) необходимо сформулировать еще три условия, налагаемых на вектор момента. Роль этих условий выполняют уравнения динамики для твердого тела (ротора), имеющего неподвижную точку (рис. 11.1). Второй закон динамики Эйлера для ротора:

$$[\mathbf{P}(l, t) \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T(l, t) \times \boldsymbol{\omega}(t)]' = \mathbf{M}(l, t), \quad (11.7)$$

где Θ — тензор инерции ротора в отсчетной конфигурации, вычисленный относительно неподвижной точки. Этот тензор имеет вид

$$\Theta = \Theta_3 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \Theta_1 (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}), \quad (11.8)$$

где Θ_3 и Θ_1 — осевой и экваториальный моменты инерции. Поле силы тяжести пренебрегаем. Для вертикально установленной центрифуги это вполне допустимо.

Если к уравнениям (11.1)–(11.8) добавить начальные условия, то получим поставленную нелинейную динамическую краевую задачу. В общей постановке ее решение затруднительно, да и едва ли в этом есть необходимость. Далее рассматривается линеаризованная постановка.

11.1.2. Линеаризация основных уравнений

Тензор поворота представим с использованием углов Эйлера (2.71):

$$\mathbf{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{i}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{k}), \quad (11.9)$$

где углы прецессии ψ , нутации ϑ и собственного вращения φ являются функциями координаты \mathbf{s} и времени \mathbf{t} , а повороты происходят вокруг фиксированных осей. Второе из условий (11.5) дает

$$\vartheta(0, \mathbf{t}) = 0, \quad \alpha(\mathbf{t}) = \psi(0, \mathbf{t}) + \varphi(0, \mathbf{t}).$$

В рассматриваемой задаче допустимо принять, что угол нутации $\vartheta(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ мал по модулю для всех значений \mathbf{s} и \mathbf{t} . В этом случае выражение (11.9) можно линеаризовать по ϑ и записать следующим образом:

$$\mathbf{Q}(\vartheta \mathbf{i}) = \mathbf{E} + \vartheta \mathbf{i} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = (\mathbf{E} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{k}), \quad (11.10)$$

где

$$\beta(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \varphi(\mathbf{s}, \mathbf{t}) + \psi(\mathbf{s}, \mathbf{t}), \quad \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \vartheta(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \mathbf{Q}(\psi \mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}, \quad (11.11)$$

и вращающийся вектор нутации $\boldsymbol{\gamma}$ мал по модулю.

По (11.10) легко найти угловую скорость ротора, используя правило сложения угловых скоростей (2.154):

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t}) = \dot{\beta}(\mathbf{l}, \mathbf{t}) \mathbf{k} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{l}, \mathbf{t}) + \dot{\beta}(\mathbf{l}, \mathbf{t}) \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{l}, \mathbf{t}) \times \mathbf{k}.$$

Кроме того, используя вторую из формул (11.4), вычисляем второй вектор деформации $\Phi(\mathbf{s}, \mathbf{t})$:

$$\Phi(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \beta'(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \mathbf{k} + \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{s}, \mathbf{t}) + \beta'(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \times \mathbf{k}.$$

Линеаризуя второе из соотношений (11.2) по $\boldsymbol{\gamma}$, получаем:

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = C_3 \beta'(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \mathbf{k} + C_1 \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{s}, \mathbf{t}) + C_3 \beta'(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \times \mathbf{k}. \quad (11.12)$$

Аналогичное выражение получаем для вектора кинетического момента ротора:

$$\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \Theta_3 \dot{\beta}(l, t) \mathbf{k} + \Theta_1 \dot{\gamma}(l, t) + \Theta_3 \dot{\beta}(l, t) \boldsymbol{\gamma}(l, t) \times \mathbf{k}. \quad (11.13)$$

Выражения (11.12) и (11.13) можно упростить, если принять во внимание следующие соображения. Угол $\beta = \varphi + \psi$ нельзя считать малым. Однако его можно представить в виде

$$\beta(s, t) = \alpha(t) + \phi(s, t) \quad \Rightarrow \quad \beta'(s, t) = \alpha'(t) + \phi'(s, t), \quad (11.14)$$

где угол $\phi(s, t)$, определяющий упругое закручивание стержня, наложенное на поворот $\alpha(t)$, можно считать малым. Поэтому вместо (11.12) и (11.13) можно записать

$$\mathbf{M}(s, t) = C_3 \alpha'(t) \mathbf{k} + C_1 \phi'(s, t), \quad (11.15)$$

$$\mathbf{P} \cdot \Theta \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} = \Theta_3 \dot{\alpha}(t) \mathbf{k} + \Theta_1 \dot{\gamma}(l, t) + \Theta_3 \dot{\alpha}(t) \boldsymbol{\gamma}(l, t) \times \mathbf{k}. \quad (11.16)$$

Можно показать, что деформациями растяжения и поперечного сдвига в данной задаче допустимо пренебречь. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}' = \mathbf{k} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{k}, \\ \mathbf{R} = s\mathbf{k} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{w}' = \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Заметим, что случай $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ ничего интересного к рассматриваемому ниже случаю не добавляет. Уравнения движения (11.1) в линеаризованной форме имеют вид

$$\mathbf{N}' = \rho_0 \ddot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{R}' \times \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (11.18)$$

Проецируя второе из этих уравнений на \mathbf{k} , получаем

$$\mathbf{M}(s, t) \cdot \mathbf{k} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} \cdot \mathbf{k} = -M_{\text{mot}} = \nu(\dot{\alpha} - \omega_0). \quad (11.19)$$

Из (11.17) и (11.18) следует уравнение поперечных колебаний

$$C_1 \mathbf{w}''''(s, t) + \rho_0 \ddot{\mathbf{w}}(s, t) = \mathbf{0}. \quad (11.20)$$

Проецируя уравнение (11.7) на \mathbf{k} и учитывая (11.14)–(11.16) и (11.19), получаем

$$\Theta_3 \ddot{\alpha} = \nu(\dot{\alpha} - \omega_0) \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha} = \omega_0 + (\dot{\alpha}_0 - \omega_0) \exp(-\nu t / \Theta_3), \quad (11.21)$$

где $\dot{\alpha}_0$ — начальная скорость разгона.

Запишем краевые условия для уравнения (11.20):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}'(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(l, t) = \mathbf{0}, \\ \Theta_1 \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(l, t) + \Theta_3 \dot{\boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(l, t) \times \mathbf{k} + \Theta_3 \nu (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \omega_0) \boldsymbol{\gamma}(l, t) \times \mathbf{k} = -C_1 \boldsymbol{\gamma}'(l, t). \end{aligned} \quad (11.22)$$

Последнее из этих условий вытекает из (11.7), (11.15), (11.16) и (11.21). Если бы это условие не содержало $\boldsymbol{\gamma}'(l, t)$, то все бы было просто, так как можно было бы найти вектор $\boldsymbol{\gamma}(l, t)$. В представленном виде задача (11.20), (11.22) решается не так просто. Обратим, однако, внимание на то, что она линейна. Так получилось только потому, что задача сформулирована через малый вращающийся вектор нутации $\boldsymbol{\gamma}$. Если бы мы попытались получить уравнение для $\boldsymbol{\vartheta}$, то оно было бы нелинейным при сколь угодно малых углах нутации³.

11.1.3. Вывод основного (разрешающего) уравнения

Основная трудность в решении задачи (11.20), (11.22) заключается в том, что она не допускает разделения переменных, так как в последнем из условий (11.22) коэффициенты зависят от времени. Если $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \omega_0$, т. е. если рассматривается установившийся режим, то в принципе задачу можно решить методом Фурье. Далее излагается другой подход к решению, сводящий задачу к интегро-дифференциальному уравнению.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу для уравнения (11.20) с краевыми условиями:

$$\mathbf{w}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}'(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(l, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}'(l, t) = \mathbf{a}(t), \quad (11.23)$$

где $\mathbf{a}(t)$ считается заданной функцией времени.

Решение задачи (11.20), (11.23) будем искать в виде

$$\mathbf{w}(s, t) = \mathbf{v}(s, t) - \mathbf{a}(t) s^2 (l - s) / l^2. \quad (11.24)$$

Тогда для функции $\mathbf{v}(s, t)$ получаем неоднородное уравнение с однородными граничными условиями:

$$C_1 \mathbf{v}'''' + \rho_0 \ddot{\mathbf{v}} = \rho_0 \ddot{\mathbf{a}} s^2 (l - s) / l^2, \quad (11.25)$$

$$\mathbf{v}(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}'(0, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(l, t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}'(l, t) = \mathbf{0}. \quad (11.26)$$

³ Подобная ситуация возникает и в других задачах динамики твердого тела — см., например, подразделы 7.5.2 и 8.3.2. (*Примеч. ред.*)

Решение задачи (11.25), (11.26) будем искать в виде ряда по собственным функциям для защемленной балки:

$$\mathbf{v}(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{f}_k(t) \mathbf{v}_k(s), \quad (11.27)$$

где

$$\mathbf{v}_k'''' - \lambda_k^4 \mathbf{v}_k = 0, \quad \mathbf{v}_k(0) = \mathbf{v}_k(l) = 0, \quad \mathbf{v}_k'(0) = \mathbf{v}_k'(l) = 0. \quad (11.28)$$

Решения спектральной задачи (11.28) хорошо известны [80]:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{A}_k [\operatorname{ch}(\lambda_k s) - \cos(\lambda_k s) - \mathbf{n}_k (\operatorname{sh}(\lambda_k s) - \sin(\lambda_k s))],$$

$$\mathbf{n}_k = \frac{\operatorname{ch}(\lambda_k l) - \cos(\lambda_k l)}{\operatorname{sh}(\lambda_k l) - \sin(\lambda_k l)}.$$

Здесь с достаточной точностью можно принять:

$$\mathbf{A}_k = 1/\sqrt{l}, \quad \mathbf{n}_k = 1, \quad \lambda_k = (2k+1)\pi/2l, \quad \mathbf{v}_k''(l) = 2\lambda_k^2(-1)^{k+1}/\sqrt{l}.$$

Для функций $\mathbf{f}_k(t)$ из (11.25) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{f}}_k(t) + \sigma_k^2 \mathbf{f}_k(t) &= \mathbf{g}_k(t), \\ \sigma_k^2 &\equiv C_1 \lambda_k^4 / \rho_0, \quad \mathbf{g}_k(t) = \ddot{\mathbf{a}} \mathbf{v}_k''(l) / \lambda_k^4. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Решение уравнения (11.29) имеет вид

$$\mathbf{f}_k(t) = \mathbf{C}_k \cos(\sigma_k t) + \mathbf{D}_k \sin(\sigma_k t) + \sigma_k^{-1} \int_0^t \mathbf{g}_k(\tau) \sin(\sigma_k(t-\tau)) d\tau, \quad (11.30)$$

где $\mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k$ — постоянные векторы, определяемые по начальным условиям, налагаемым на функцию $\mathbf{w}(s, t)$. Подставляя (11.30) в (11.27) и проводя преобразования, получаем:

$$\mathbf{v}(s, t) = \tilde{\mathbf{v}}(s, t) + \int_0^t \ddot{\mathbf{a}}(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{v}_k''(l)}{\lambda_k^4} \frac{\sin(\sigma_k(t-\tau))}{\sigma_k} \mathbf{v}_k(s) d\tau, \quad (11.31)$$

где

$$\tilde{\mathbf{v}}(s, t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{C}_k \cos(\sigma_k t) + \mathbf{D}_k \sin(\sigma_k t)) \mathbf{v}_k(s). \quad (11.32)$$

Таким образом, какова бы ни была функция $\mathbf{a}(t)$, мы можем найти по (11.31) и (11.24) функцию $\mathbf{w}(s, t)$, удовлетворяющую первым трем условиям из (11.22).

Четвертое условие из (11.22) дает уравнение для определения функции $\mathbf{a}(\mathbf{t})$, которое имеет вид

$$\begin{aligned} & \Theta_1 \ddot{\mathbf{a}}(\mathbf{t}) + \Theta_3 \dot{\boldsymbol{\alpha}} \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{k} + \Theta_3 \nu (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_0) \mathbf{a} \times \mathbf{k} + 4l^{-1} C_1 \mathbf{a} + \\ & + C_1 \int_0^{\mathbf{t}} \ddot{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\tau}) \sum_{\mathbf{k}=1}^{\infty} \frac{[\nu_{\mathbf{k}}''(l)]^2 \sin(\sigma_{\mathbf{k}}(\mathbf{t} - \boldsymbol{\tau}))}{\lambda_{\mathbf{k}}^4 \sigma_{\mathbf{k}}} d\boldsymbol{\tau} = -C_1 \tilde{\nu}''(l, \mathbf{t}). \end{aligned} \quad (11.33)$$

В правой части этого уравнения стоит известная функция времени, если заданы начальные условия для функций $\mathbf{w}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ и $\dot{\mathbf{w}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, в которые, конечно, входят и начальные значения $\mathbf{a}(0)$ и $\dot{\mathbf{a}}(0)$, но они также известны.

Уравнение (11.33) будем называть основным или разрешающим. В общем случае оно достаточно сложное, ибо это интегро-дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами (из-за наличия функции $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{t})$, определяемой формулой (11.21)). Для безынерционного стержня оно значительно упрощается и принимает вид

$$\Theta_1 \ddot{\mathbf{a}} + \Theta_3 \dot{\boldsymbol{\alpha}} \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{k} + \Theta_3 \nu (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_0) \mathbf{a} \times \mathbf{k} + 4l^{-1} C_1 \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Это уже обыкновенное дифференциальное уравнение, решаемое стандартными методами. Наличие интегрального члена в (11.33) показывает, что реакция стержня из-за происходящих в нем волновых процессов определяется не всей его длиной, а некоей частью длины, зависящей от рассматриваемого момента времени.

Отдельного пояснения требует смысл правой части уравнения (11.33). Это не что иное, как момент, действующий на ротор и порожденный свободными колебаниями стержня, определяемыми начальными условиями. Примем, например, следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{s}, 0) &= -\mathbf{a}(0) s^2 (l - s) / l^2, \\ \dot{\mathbf{w}}(\mathbf{s}, 0) &= -\dot{\mathbf{a}}(0) s^2 (l - s) / l^2. \end{aligned} \quad (11.34)$$

В этом случае начальные условия для функций $\mathbf{v}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ и $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ будут нулевыми, как это видно из (11.24), (11.31) и (11.32), коэффициенты $\mathbf{C}_{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{D}_{\mathbf{k}}$ в (11.32) будут равны нулю. Следовательно, и правая часть в (11.33) равна нулю. Для начальных условий, отличных от (11.34), правая часть в (11.33) будет присутствовать.

11.1.4. Упрощение разрешающего уравнения

Уравнение (11.33) можно переписать в операторном виде:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{a}(t) + C_1 \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) \ddot{\mathbf{a}}(\tau) d\tau = -C_1 \tilde{\mathbf{v}}''(l, t), \quad (11.35)$$

где

$$\mathbf{L} = \left(\Theta_1 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{4C_1}{l} \right) \mathbf{E} - \Theta_3 \left[\dot{\boldsymbol{\alpha}} \frac{d}{dt} + \nu(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_0) \right] \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad (11.36)$$

$$\mathbf{K}(t - \tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} F(t - \tau), \quad F(t - \tau) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[v_k''(l)]^2 \sin(\sigma_k(t - \tau))}{\lambda_k^4 \sigma_k^3}. \quad (11.37)$$

Теперь интегральный оператор в (11.35) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^t \ddot{\mathbf{a}}(\tau) \mathbf{K}(t - \tau) d\tau &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[v_k''(l)]^2}{\lambda_k^4} \frac{1}{\sigma_k^2} \ddot{\mathbf{a}}(t) + \int_0^t \frac{d^4 \mathbf{a}(\tau)}{d\tau^4} F(t - \tau) d\tau - \\ &- \ddot{\mathbf{a}}(0) \left. \frac{dF(t - \tau)}{d\tau} \right|_{\tau=0} + \ddot{\mathbf{a}}(0) F(t). \end{aligned}$$

Подставляя (11.37) в (11.35), получаем

$$\mathbf{L}_* \cdot \mathbf{a} + C_1 \int_0^t \frac{d^4 \mathbf{a}(\tau)}{d\tau^4} F(t - \tau) d\tau = \mathbf{f}(t), \quad (11.38)$$

где $\mathbf{f}(t)$ — известная функция времени, но в нее входят постоянные $\ddot{\mathbf{a}}(0)$ и $\ddot{\mathbf{a}}(0)$, которые должны быть найдены по (11.35): $\ddot{\mathbf{a}}(0)$ находится сразу из (11.35); $\ddot{\mathbf{a}}(0)$ — после дифференцирования (11.35) по времени и принятия $t = 0$.

Оператор \mathbf{L}_* получается из \mathbf{L} заменой в (11.36) момента инерции Θ_1 на величину $\Theta_1^* = \Theta_1 + gC_1$, где g определено формулой

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[v_k''(l)]^2}{\lambda_k^4} \frac{1}{\sigma_k^2}.$$

Переход от (11.35) к (11.38) является точным. Теперь заметим, что ряд (11.37) сходится очень быстро, ибо $\sigma_k^3 \sim (2k + 1)^6$. Поэтому уравне-

ние (11.38) можно переписать в упрощенном виде:

$$\mathbf{L}_* \cdot \mathbf{a} - \mathbf{C} \int_0^t \frac{d^4 \mathbf{a}(\tau)}{d\tau^4} \sin(\sigma_1(t - \tau)) d\tau = \mathbf{f}(t), \quad (11.39)$$

где

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_1 [v_1''(l)]^2 / \lambda_1^4 \sigma_1^3,$$

причем величина \mathbf{C} в определенном смысле мала, так что интегральный член в (11.39) вообще можно отбросить. В результате получим уравнение

$$(\Theta_1 + g\mathbf{C}_1) \ddot{\mathbf{a}}(t) - \Theta_3 \dot{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{a}} - \Theta_3 \nu (\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_0) \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{a}} + 4l^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{a} = \mathbf{f}(t). \quad (11.40)$$

При желании (11.40) можно уточнить. Для этого нужно исключить интегральное слагаемое из (11.38), что осуществляется следующим образом. Пусть дана функция

$$\mathbf{b}(t) = \int_0^t \mathbf{c}(\tau) \sin(\sigma_1(t - \tau)) d\tau.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t дважды, получаем

$$\ddot{\mathbf{b}}(t) = \sigma_1 \mathbf{c}(t) - \sigma_1^3 \mathbf{b}(t). \quad (11.41)$$

Дифференцируя (11.39) по времени дважды и исключая из получившегося уравнения вторую производную от интегрального члена с помощью (11.41), а затем исключая из результата сам интегральный член с помощью (11.39), получаем уравнение четвертого порядка для вектора $\mathbf{a}(t)$.

Заметим, что уравнение (11.39) часто является вполне приемлемым не столько в силу малости коэффициента \mathbf{C} при интегральном операторе, сколько из-за того, что под интегралом стоит быстроменяющаяся во времени функция, так как σ_1 является большим числом.

Дадим приближенную оценку для вектора $\mathbf{a}(t)$. С этой целью упростим (11.40) еще больше. А именно, при больших t величина $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ быстро стремится к $\boldsymbol{\omega}_0$. Поэтому для установившихся вращений вместо (11.40) можно рассматривать уравнение

$$(\Theta_1 + g\mathbf{C}_1) \ddot{\mathbf{a}}(t) - \Theta_3 \boldsymbol{\omega}_0 \mathbf{k} \times \dot{\mathbf{a}} + 4l^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{a} = \mathbf{f}(t). \quad (11.42)$$

Это уже совсем простое уравнение с постоянными коэффициентами, решение которого строится без труда. Частные решения однородного уравнения (11.42) ищем в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q}(pt\mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{m} = \text{const.}$$

Отсюда получаем

$$\dot{\mathbf{a}} = p\mathbf{k} \times \mathbf{a}, \quad \ddot{\mathbf{a}} = -p^2\mathbf{a}.$$

Подставляя эти выражения в (11.42) при $\mathbf{f}(\mathbf{t}) \equiv \mathbf{0}$, получаем характеристическое уравнение для нахождения значения p :

$$-(\Theta_1 + C_1g)p^2 + \Theta_3\omega_0p + 4l^{-1}C_1 = 0.$$

Отсюда получаем два значения p :

$$p_{1,2} = \frac{\Theta_3\omega_0 \pm \sqrt{\Theta_3^2\omega_0^2 + 16(\Theta_1 + C_1g)C_1/l}}{2(\Theta_1 + C_1g)}.$$

Общее решение уравнения (11.42) находится методом вариации произвольных постоянных и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{t}) = & \mathbf{Q}(p_1\mathbf{t}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}_1 + \mathbf{Q}(p_2\mathbf{t}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{m}_2 + \\ & + \frac{1}{p_2 - p_1} \int_0^{\mathbf{t}} [\mathbf{Q}(p_2(\mathbf{t} - \tau)\mathbf{k}) - \mathbf{Q}(p_1(\mathbf{t} - \tau)\mathbf{k})] \cdot (\mathbf{f}(\tau) \times \mathbf{k}) d\tau. \end{aligned}$$

Постоянные векторы \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 находятся из начальных условий.

11.1.5. Определение углов прецессии и собственного вращения

После того как найден вращающийся вектор нутации $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{t})$, необходимо найти углы нутации $\vartheta(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ и прецессии. Покажем, как это делается только для величин $\vartheta(\mathbf{l}, \mathbf{t})$ и $\psi(\mathbf{l}, \mathbf{t})$, т. е. для углов нутации и прецессии ротора. Согласно (11.17) и (11.11) имеем

$$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{l}, \mathbf{t}) = \mathbf{k} \times \mathbf{w}'(\mathbf{l}, \mathbf{t}) = \mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\psi\mathbf{k}) \cdot \vartheta\mathbf{i}.$$

Отсюда можно найти $\psi(\mathbf{l}, \mathbf{t})$ и $\vartheta(\mathbf{l}, \mathbf{t})$, если известен \mathbf{a} . В самом деле,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{a}(\mathbf{t}) = \vartheta [\cos \psi \mathbf{i} + \sin \psi \mathbf{j}].$$

Отсюда получаем равенства:

$$\vartheta(\mathbf{l}, \mathbf{t}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{i} \sin \psi - \mathbf{j} \cos \psi), \quad \operatorname{tg} \psi(\mathbf{l}, \mathbf{t}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})/(\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}).$$

Угол собственного вращения находится по соотношению (11.14), если в нем отбросить упругое закручивание:

$$\varphi(\mathbf{l}, \mathbf{t}) = \alpha(\mathbf{t}) - \psi(\mathbf{l}, \mathbf{t}).$$

Нетрудно найти и величины $\psi(s, t)$, $\vartheta(s, t)$ и $\varphi(s, t)$. Но они не представляют практического интереса.

Выше показана схема решения задачи о вращении твердого тела на инерционном стержне. К сожалению, полный анализ включает много частных случаев и выходит за рамки данной работы. Здесь мы хотели показать только принципиальную сторону проблемы, причем в ее математическом, а не инженерном аспекте. Последний требует как минимум учета двух дополнительных факторов: внешнего трения и неуравновешенности ротора⁴. В принципе оба эти фактора не меняют схемы решения, но значительно увеличивают объем вычислений. Тем не менее даже с учетом этих факторов задача практически до конца решается в аналитическом виде и приводит к сравнительно простым конечным формулам. Исключение составляет рассмотрение режима разгона. Здесь, к сожалению, можно рассчитывать только на численное решение.

11.2. Движение твердого тела на инерционной пластине

Рассматривается движение системы, состоящей из тяжелого симметричного твердого тела и упругой пластины, имеющей форму кольца. Внешний контур пластины жестко заземлен. Внутренний контур пластины соединен с твердым телом посредством подшипника так, что тело может свободно вращаться вокруг оси симметрии. Центр масс тела расположен вблизи оси симметрии. На тело действуют момент двигателя ограниченной мощности и диссипативный момент. Угол нутации тела считается малым. Поэтому движение пластины можно описывать с помощью линейной теории. Хорошо известно, что эта задача сводится к системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Если рассматривается стационарный режим движения, то задача решается методом Фурье. В случае нестационарного режима движения задача усложняется, поскольку коэффициенты в одном из граничных условий оказываются функциями времени и, следовательно, разделение переменных становится невозможным. Ниже применяется метод решения, изложенный в разделе 11.1 на примере задачи о вращении твердого тела на стержне. Для твердого тела на пластине, так же как и в случае твердого тела на стержне, этот метод позволяет свести задачу к решению обыкновенного интегро-дифференциального уравнения.

⁴ В разделе 11.2 рассмотрена постановка задачи о движении твердого тела на упругой пластине с учетом внешнего трения и неуравновешенности ротора. Показано, что и в этом случае можно использовать предложенную схему решения без каких-либо изменений. (Примеч. ред.)

11.2.1. Сводка основных уравнений линейной теории пластин

Для описания движения пластины используется линейная теория пластин типа Рейсснера, учитывающая инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига. Уравнения данной теории пластин имеют вид [81, 82]:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{N} &= \rho h \ddot{w}, & \nabla \cdot \mathbf{M} - \mathbf{N} &= \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\Psi}, \\ \mathbf{M} &= \mathbf{D}[(1 - \mu)\mathbf{k} + \mu(\text{tr}\mathbf{k})(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k})], & & (11.43) \\ \mathbf{N} &= \mathbf{G}h\Gamma(\nabla w + \Psi), & \mathbf{k} &= \frac{1}{2}(\nabla\Psi + \nabla\Psi^T).\end{aligned}$$

Здесь ∇ — оператор градиента в плоскости пластины; w — поперечный прогиб; Ψ — вектор поворота; \mathbf{N} — вектор поперечных сил; \mathbf{M} — тензор моментов; \mathbf{k} — тензор деформации изгиба–кручения; \mathbf{k} — вектор единичной нормали к плоскости пластины в отсчетной конфигурации; ρ — объемная плотность массы; h — толщина пластины; $\mathbf{D} = \mathbf{E}h^3/[12(1 - \mu^2)]$ — изгибная жесткость; \mathbf{E} — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; $\mathbf{G}h\Gamma$ — жесткость на поперечный сдвиг; \mathbf{G} — модуль сдвига; Γ — коэффициент поперечного сдвига.

11.2.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки

Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела с малым дисбалансом массы, закрепленного на упругой пластине (рис. 11.2). Предполагается, что тело имеет неподвижную точку, лежащую на его оси симметрии. Пластина имеет форму кольца; внешний контур пластины жестко заземлен, внутренний контур пластины соединяется с твердым телом с помощью подшипника таким образом, что тело может свободно вращаться вокруг оси симметрии. Центр пластины совпадает с неподвижной точкой твердого тела; в недеформированном состоянии плоскость пластины перпендикулярна оси симметрии тела. Граничные условия на внешнем контуре пластины выглядят так:

$$w|_{r=r_2} = 0, \quad \Psi|_{r=r_2} = \mathbf{0}. \quad (11.44)$$

Граничные условия на внутреннем контуре пластины зависят от движения твердого тела. Вращательное движение твердого тела описывается с помощью тензора поворота

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}_2(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{P}_1(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}). \quad (11.45)$$

Тензор поворота $\mathbf{P}_1(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k})$ определяет вращение тела вокруг оси симметрии, тензор поворота $\mathbf{P}_2(\boldsymbol{\gamma})$ определяет нутационные колебания тела. Поскольку

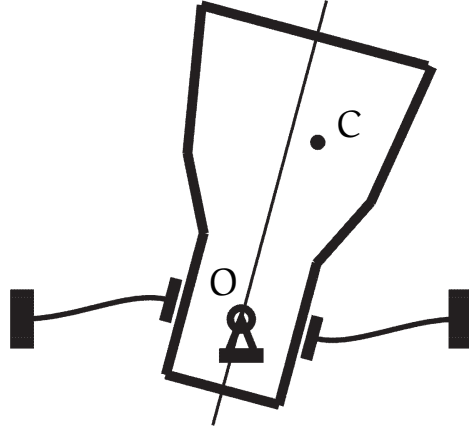


Рис. 11.2. Твердое тело с неподвижной точкой на упругой пластине

угол нутации считается малым, тензор поворота $\mathbf{P}_2(\boldsymbol{\gamma})$ можно записать в приближенной форме:

$$\mathbf{P}_2(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{E} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0. \quad (11.46)$$

Вектор угловой скорости твердого тела $\boldsymbol{\omega}$ вычисляется по формуле (2.154):

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{P}_2(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{k}. \quad (11.47)$$

С учетом (11.45), (11.46) условия сопряжения твердого тела и пластины формулируются следующим образом:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Psi}|_{r=r_1}, \quad w|_{r=r_1} \mathbf{k} = \boldsymbol{\gamma} \times r_1 \mathbf{e}_r, \quad (11.48)$$

где \mathbf{e}_r — орт полярной системы координат. Соотношения (11.48) позволяют получить кинематическое граничное условие на внутреннем контуре пластины:

$$(w + r\Psi_r)|_{r=r_1} = 0. \quad (11.49)$$

Уравнения движения твердого тела (первый и второй законы динамики Эйлера) имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{R}}_C = \mathbf{F}_R + m\mathbf{g}, \quad \mathbf{R}_C = \mathbf{P}(t) \cdot [\alpha\mathbf{k} + \varepsilon\mathbf{j}]; \quad m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k};$$

$$(\boldsymbol{\Theta}^{(t)} \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot = \mathbf{M}_{\text{mot}} + \mathbf{M}_{\text{fr}} + \mathbf{R}_C \times m\mathbf{g} + \mathbf{M}_{\text{pl}};$$

$$\mathbf{M}_{\text{mot}} = -\nu(\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\omega}_*)[\eta\mathbf{k} + (1 - \eta)\mathbf{n}], \quad (11.50)$$

$$\mathbf{M}_{\text{fr}} = -[k_3\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + k_1(\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})] \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{k};$$

$$\boldsymbol{\Theta}^{(t)} = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Theta} \cdot \mathbf{P}^T(t), \quad \boldsymbol{\Theta} = \Theta_3\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + \Theta_1(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}).$$

Здесь m — масса тела; \mathbf{R}_C — вектор положения центра масс тела в данный момент времени, причем $\varepsilon \ll a$; сила \mathbf{F}_R — реакция в шарнире; Θ — тензор инерции твердого тела в отсчетной конфигурации, вычисленный относительно его неподвижной точки; \mathbf{n} — единичный вектор, задающий направление оси симметрии тела в данный момент времени; \mathbf{M}_{mot} — момент двигателя ограниченной мощности (ν — характеристика мощности двигателя, η — параметр, характеризующий направление момента двигателя: $0 \leq \eta \leq 1$, если $\eta = 0$, \mathbf{M}_{mt} — следящий момент, если $\eta = 1$, \mathbf{M}_{mt} — мертвый момент); \mathbf{M}_{fr} — момент вязкого трения ($k_1 = \text{const}$ и $k_3 = \text{const}$ — коэффициенты трения); \mathbf{M}_{pl} — упругий момент, действующий на тело со стороны пластины. Момент \mathbf{M}_{pl} выражается через величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, по формуле

$$\mathbf{M}_{\text{pl}} = r_1 \int_0^{2\pi} [(\mathbf{M}_{rr} - r\mathbf{N}_r)\mathbf{e}_\theta - M_{r\theta}\mathbf{e}_r] \Big|_{r=r_1} d\theta, \quad (11.51)$$

где r и θ — полярные координаты. Подставляя выражение (11.51) в уравнение (11.50) и используя соотношения (11.45)–(11.48), получаем уравнение относительно угла α и величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние пластины. Спроецировав это уравнение на плоскость, ортогональную вектору \mathbf{k} , получим динамическое граничное условие на внутреннем контуре пластины:

$$\begin{aligned} & \left[\Theta_1 \mathbf{k} \times \ddot{\Psi} + \Theta_3 \dot{\alpha} \dot{\Psi} + k_1 \mathbf{k} \times \dot{\Psi} - \eta \nu (\dot{\alpha} - \omega_*) \Psi - mg a \mathbf{k} \times \Psi \right] \Big|_{r=r_1} + \\ & + mg \varepsilon (\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) = r_1 \int_0^{2\pi} [(\mathbf{M}_{rr} - r\mathbf{N}_r)\mathbf{e}_\theta - M_{r\theta}\mathbf{e}_r] \Big|_{r=r_1} d\theta. \end{aligned} \quad (11.52)$$

Проекция на ось, параллельную вектору \mathbf{k} , дает дифференциальное уравнение относительно угла α :

$$\Theta_3 \ddot{\alpha} + \nu (\dot{\alpha} - \omega_*) + k_3 \dot{\alpha} = 0. \quad (11.53)$$

Решение уравнения (11.53) с учетом начального условия $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0$ имеет вид

$$\dot{\alpha} = \frac{\nu \omega_*}{\nu + k_3} + \left(\dot{\alpha}_0 - \frac{\nu \omega_*}{\nu + k_3} \right) e^{-(\nu + k_3)t/\Theta_3}. \quad (11.54)$$

Таким образом, уравнения (11.43), (11.44), (11.49), (11.54), (11.52) представляют собой систему уравнений, описывающих вынужденные колебания пластины, которые возникают вследствие действия на нее твердого тела. Если рассматривается стационарный режим движения ($\dot{\alpha} = \text{const}$), то задача решается с помощью метода Фурье. При исследовании нестационарного режима

задача становится более трудной, поскольку коэффициенты уравнения (11.52) зависят от времени. В этом случае разделение переменных невозможно, и метод Фурье неприменим. Ниже задача нестационарного движения исследуется с помощью метода, изложенного в разделе 11.1.

Итак, будем искать решение задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) &= -\frac{r(r-r_2)}{r_1-r_2} \mathbf{e}_r \cdot \tilde{\Psi}(t) + w^*(r, \theta, t); \\ \Psi_r(r, \theta, t) &= \frac{r-r_2}{r_1-r_2} \mathbf{e}_r \cdot \tilde{\Psi}(t) + \Psi_r^*(r, \theta, t); \\ \Psi_\theta(r, \theta, t) &= \frac{r-r_2}{r_1-r_2} \mathbf{e}_\theta \cdot \tilde{\Psi}(t) + \Psi_\theta^*(r, \theta, t). \end{aligned} \quad (11.55)$$

Первые слагаемые функций (11.55) удовлетворяют кинематическим граничным условиям (11.44), (11.49), а функции w^* , Ψ_r^* , Ψ_θ^* представляют собой ряды по собственным формам колебаний заземленной пластины:

$$\begin{aligned} w^*(r, \theta, t) &= \sum_{n,j} [C_{nj}^c(t) \cos(n\theta) + C_{nj}^s(t) \sin(n\theta)] w_{nj}(r), \\ \Psi_r^*(r, \theta, t) &= \sum_{n,j} [C_{nj}^c(t) \cos(n\theta) + C_{nj}^s(t) \sin(n\theta)] \Psi_{nj}^r(r), \\ \Psi_\theta^*(r, \theta, t) &= \sum_{n,j} [-C_{nj}^c(t) \sin(n\theta) + C_{nj}^s(t) \cos(n\theta)] \Psi_{nj}^\theta(r). \end{aligned} \quad (11.56)$$

Здесь $C_{nj}^c(t)$, $C_{nj}^s(t)$ и $\tilde{\Psi}(t)$ — неизвестные функции времени. Легко убедиться в том, что выражения (11.55), (11.56) удовлетворяют кинематическим граничным условиям (11.44), (11.49). Динамическое граничное условие (11.52) после подстановки в него выражений (11.55), (11.56) и несложных преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta_1 \ddot{\tilde{\Psi}}(t) - \Theta_3 \dot{\alpha}(t) \mathbf{k} \times \dot{\tilde{\Psi}}(t) + k_1 \dot{\tilde{\Psi}}(t) + \eta v(\dot{\alpha}(t) - \omega_*) \mathbf{k} \times \tilde{\Psi}(t) + \\ + D_* \tilde{\Psi}(t) + mg\epsilon (\sin \alpha(t) \mathbf{i} - \cos \alpha(t) \mathbf{j}) = \sum_j M_j^* \mathbf{C}_{1j}(t), \\ D_* = \pi r_1 (r_2 - r_1)^{-1} \left[\frac{D(3-\mu)}{2} + Gh\Gamma r_1^2 \right] - mga, \end{aligned} \quad (11.57)$$

$$M_j^* = \pi r_1 [M_{1j}^{rr}(r_1) + M_{1j}^{r\theta}(r_1) - r_1 N_{1j}^r(r_1)],$$

$$\mathbf{C}_{nj}(t) = C_{nj}^c(t) \mathbf{i} + C_{nj}^s(t) \mathbf{j}.$$

Подставив выражения (11.55), (11.56) в уравнения движения (11.43) и воспользовавшись известными соотношениями ортогональности собственных форм колебаний защемленной пластины, после несложных преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений для $\mathbf{C}_{nj}(t)$, $\tilde{\Psi}(t)$:

$$\begin{aligned} n \neq 1: \quad & \ddot{\mathbf{C}}_{nj}(t) + p_{nj}^2 \mathbf{C}_{nj}(t) = 0; \\ n = 1: \quad & \ddot{\mathbf{C}}_{1j}(t) + p_{1j}^2 \mathbf{C}_{1j}(t) = A_j \tilde{\Psi}(t) + B_j \ddot{\tilde{\Psi}}(t); \\ A_j = & \frac{\pi}{r_1 - r_2} \int_{r_1}^{r_2} \left[\left(\frac{D(1-\mu)}{2} + Gh\Gamma r^2 \right) \Psi_{1j}^r(r) + D\Psi_{1j}^\theta(r) - 2rGh\Gamma w_{1j}(r) \right] dr; \\ B_j = & \frac{\pi\rho h}{r_1 - r_2} \int_{r_1}^{r_2} \left[r w_{1j}(r) - \frac{h^2}{12} (\Psi_{1j}^r(r) + \Psi_{1j}^\theta(r)) \right] (r - r_1) r dr. \end{aligned} \quad (11.58)$$

Как видно из уравнений (11.58), коэффициенты $\mathbf{C}_{nj}(t)$ ($n \neq 1$) не зависят от движения твердого тела. Это означает, что соответствующие формы колебаний могут возбуждаться только в результате воздействия непосредственно на внутренние точки пластины. Коэффициенты $\mathbf{C}_{1j}(t)$, напротив, существенно зависят от движения твердого тела. Они определяются в результате решения системы уравнений (11.57), (11.58). Решение уравнения (11.58) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{1j}(t) = & \mathbf{C}_j^{(1)} \cos(p_{1j}t) + \mathbf{C}_j^{(2)} \sin(p_{1j}t) + \\ & + \frac{1}{p_{1j}} \int_0^t [A_j \tilde{\Psi}(\tau) + B_j \ddot{\tilde{\Psi}}(\tau)] \sin[p_{1j}(t - \tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (11.59)$$

где p_{1j} — собственные частоты защемленной пластины, а $\mathbf{C}_j^{(1)}$, $\mathbf{C}_j^{(2)}$ — константы, определяемые из начальных условий. Подставив выражение (11.59) в уравнение (11.57), получим интегро-дифференциальное уравнение для функции $\tilde{\Psi}(t)$:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \ddot{\tilde{\Psi}}(t) - \Theta_3 \dot{\alpha}(t) \mathbf{k} \times \dot{\tilde{\Psi}}(t) + k_1 \dot{\tilde{\Psi}}(t) + \eta v (\dot{\alpha}(t) - \omega_*) \mathbf{k} \times \tilde{\Psi}(t) + \\ + D_* \tilde{\Psi}(t) + mg\varepsilon (\sin \alpha(t) \mathbf{i} - \cos \alpha(t) \mathbf{j}) = \\ = \sum_j M_j^* \left[\mathbf{C}_j^{(1)} \cos(p_{1j}t) + \mathbf{C}_j^{(2)} \sin(p_{1j}t) \right] + \\ + \int_0^t \left(\sum_j M_j^* p_{1j}^{-1} \left[A_j \tilde{\Psi}(\tau) + B_j \ddot{\tilde{\Psi}}(\tau) \right] \sin [p_{1j}(t - \tau)] \right) d\tau. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Заметим, что уравнение (11.60) по своей структуре совпадает с соответствующим интегро-дифференциальным уравнением (11.33), полученным применительно к задаче о движении твердого тела на инерционном упругом стержне.

11.2.3. Движение твердого тела, не имеющего неподвижных точек

Рассматривается движение динамически симметричного твердого тела с малым дисбалансом на упругой пластине. Тело соединяется с внутренним контуром пластины, как показано на рис. 11.3; при этом оно может свободно вращаться вокруг оси симметрии. Таким образом, данная задача отличается от рассмотренной выше только тем, что твердое тело не имеет неподвижных точек.

Тензор поворота твердого тела и вектор положения его центра масс имеют вид

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_2(\boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{P}_1(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}), \quad \mathbf{R}_C(t) = w_0(t)\mathbf{k} + \mathbf{P}(t) \cdot [\boldsymbol{\alpha}\mathbf{k} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{j}]. \quad (11.61)$$

Здесь w_0 — перемещение точки твердого тела, лежащей на пересечении оси симметрии тела и плоскости пластины в недеформированном состоянии.

Кинематические условия сопряжения твердого тела и пластины формулируются так:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Psi}|_{r=r_1}, \quad (w|_{r=r_1} - w_0)\mathbf{k} = \boldsymbol{\gamma} \times r_1 \mathbf{e}_r. \quad (11.62)$$

Воспользовавшись первым и вторым законами динамики Эйлера, запишем уравнения движения твердого тела:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{R}}_C &= m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{pl}, & \mathbf{F}_{pl} &= r_1 \int_0^{2\pi} \mathbf{N}_r|_{r=r_1} d\theta, \\ (\boldsymbol{\Theta}^{(t)} \cdot \boldsymbol{\omega})' &= \mathbf{M}_{mot} + \mathbf{M}_{fr} + \mathbf{R}_C \times m\mathbf{g} + \mathbf{M}_{pl}. \end{aligned} \quad (11.63)$$

Уравнение баланса моментов записано относительно центра пластины в недеформированном состоянии. Спроецировав уравнение баланса моментов на вектор \mathbf{k} , получим уравнение (11.53) для определения угла $\boldsymbol{\alpha}$, решение которого имеет вид (11.54).

Спроецировав уравнение баланса сил на вектор \mathbf{k} , а уравнение баланса моментов на плоскость, ортогональную вектору \mathbf{k} , после несложных преобразований с учетом уравнений (11.50), (11.51), (11.61), (11.62), (11.63) получим

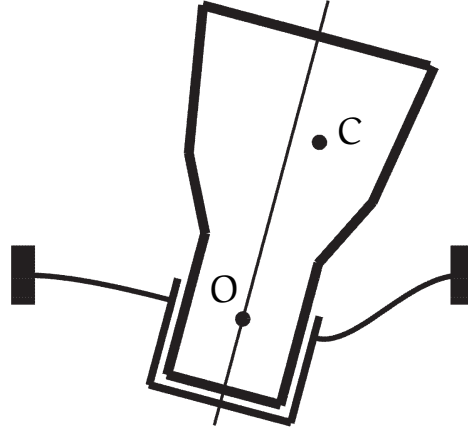


Рис. 11.3. Твердое тело на упругой пластине (у тела нет неподвижных точек)

динамические граничные условия на внутреннем контуре пластины:

$$m(\ddot{w} + r\ddot{\Psi}_r)|_{r=r_1} + mg = r_1 \int_0^{2\pi} N_r|_{r=r_1} d\theta,$$

$$[\Theta_1 \mathbf{k} \times \ddot{\Psi} + \Theta_3 \dot{\alpha} \dot{\Psi} + k_1 \mathbf{k} \times \dot{\Psi} - \eta v(\dot{\alpha} - \omega_*) \Psi - mga \mathbf{k} \times \Psi]|_{r=r_1} + \quad (11.64)$$

$$+ mg\epsilon (\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) = r_1 \int_0^{2\pi} [(M_{rr} - rN_r)\mathbf{e}_\theta - M_{r\theta} \mathbf{e}_r]|_{r=r_1} d\theta,$$

где угол α вычисляется по формуле (11.54). Первое уравнение (11.64) заменяет собой кинематическое граничное условие (11.49), имевшее место в задаче с неподвижной точкой, второе уравнение (11.64) в точности совпадает с динамическим граничным условием (11.52). Уравнения (11.43), (11.44), (11.54), (11.64) представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающих движение твердого тела на пластине, если тело не имеет неподвижных точек.

Будем искать решение в виде

$$w(r, \theta, t) = \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} (\tilde{w}(t) - r \mathbf{e}_r \cdot \tilde{\Psi}(t)) + w^*(r, \theta, t);$$

$$\Psi_r(r, \theta, t) = \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \mathbf{e}_r \cdot \tilde{\Psi}(t) + \Psi_r^*(r, \theta, t); \quad (11.65)$$

$$\Psi_\theta(r, \theta, t) = \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} \mathbf{e}_\theta \cdot \tilde{\Psi}(t) + \Psi_\theta^*(r, \theta, t).$$

Здесь функции w^* , Ψ_r^* , Ψ_θ^* — ряды по собственным формам заземленной пластины (11.56). Легко видеть, что выражения (11.65) удовлетворяют кинематическим граничным условиям (11.44). Подставив выражения (11.56),

(11.65) в уравнения движения пластины (11.43) и динамические граничные условия (11.64), после несложных преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений относительно переменных $\mathbf{C}_{nj}(\mathbf{t})$, $\tilde{\Psi}(\mathbf{t})$:

$$\begin{aligned}
n > 1: \quad & \ddot{\mathbf{C}}_{nj}(\mathbf{t}) + p_{nj}^2 \mathbf{C}_{nj}(\mathbf{t}) = 0; \\
n = 1: \quad & \ddot{\mathbf{C}}_{1j}(\mathbf{t}) + p_{1j}^2 \mathbf{C}_{1j}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_j \tilde{\Psi}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_j \ddot{\tilde{\Psi}}(\mathbf{t}); \\
\Theta_1 \ddot{\tilde{\Psi}}(\mathbf{t}) - \Theta_3 \dot{\alpha} \mathbf{k} \times \dot{\tilde{\Psi}}(\mathbf{t}) + k_1 \dot{\tilde{\Psi}}(\mathbf{t}) + \eta \nu (\dot{\alpha} - \omega_*) \mathbf{k} \times \tilde{\Psi}(\mathbf{t}) + \\
& + \mathbf{D}_* \tilde{\Psi}(\mathbf{t}) + m g \varepsilon (\sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{j}) = \sum_j \mathbf{M}_j^* \mathbf{C}_{1j}(\mathbf{t}); \\
n = 0: \quad & \ddot{\mathbf{C}}_{0j}(\mathbf{t}) + p_{0j}^2 \mathbf{C}_{0j}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}_j^0 \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_j^0 \ddot{\tilde{\mathbf{w}}}(\mathbf{t}); \\
& m \ddot{\tilde{\mathbf{w}}}(\mathbf{t}) + \mathbf{G}_* \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{t}) + m g = \sum_j \mathbf{N}_j^* \mathbf{C}_{0j}(\mathbf{t}).
\end{aligned} \tag{11.66}$$

Здесь константы \mathbf{D}_* , \mathbf{M}_j^* , \mathbf{A}_j , \mathbf{B}_j вычисляются по формулам (11.57), (11.58), а константы \mathbf{G}_* , \mathbf{N}_j^* , \mathbf{A}_j^0 , \mathbf{B}_j^0 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_* &= 2\pi r_1 G h \Gamma / (r_2 - r_1), \quad \mathbf{N}_j^* = 2\pi r_1 \mathbf{N}_{0j}^r(r_1), \\
\mathbf{A}_j^0 &= \frac{2\pi G h \Gamma}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} [r \Psi_{0j}^r(r) - w_{0j}(r)] dr, \quad \mathbf{B}_j^0 = \frac{2\pi \rho h}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} w_{0j}(r) (r - r_2) r dr.
\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (11.66) относительно функций $\tilde{\Psi}(\mathbf{t})$ и $\mathbf{C}_{1j}(\mathbf{t})$ совпадают с уравнениями (11.59), (11.60), полученными для тела с неподвижной точкой. Функции $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{t})$, $\mathbf{C}_{0j}(\mathbf{t})$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{0j}(\mathbf{t}) &= \mathbf{C}_{0j}^{(1)} \cos(p_{0j} t) + \mathbf{C}_{0j}^{(2)} \sin(p_{0j} t) + \\
& + \frac{1}{p_{0j}} \int_0^t [\mathbf{A}_j^0 \tilde{\mathbf{w}}(\tau) + \mathbf{B}_j^0 \ddot{\tilde{\mathbf{w}}}(\tau)] \sin[p_{0j}(t - \tau)] d\tau, \\
m \ddot{\tilde{\mathbf{w}}}(\mathbf{t}) + \mathbf{G}_* \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{t}) + m g &= \sum_j \mathbf{N}_j^* \left[\mathbf{C}_{0j}^{(1)} \cos(p_{0j} t) + \mathbf{C}_{0j}^{(2)} \sin(p_{0j} t) \right] + \\
& + \int_0^t \left(\sum_j \mathbf{N}_j^* p_{0j}^{-1} [\mathbf{A}_j^0 \tilde{\mathbf{w}}(\tau) + \mathbf{B}_j^0 \ddot{\tilde{\mathbf{w}}}(\tau)] \sin[p_{0j}(t - \tau)] \right) d\tau.
\end{aligned} \tag{11.67}$$

Заметим, что интегро-дифференциальное уравнение (11.67) относительно функции $\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{t})$ по своей структуре аналогично уравнению (11.60) относительно функции $\tilde{\Psi}(\mathbf{t})$, однако оно проще уравнения (11.60), так как не зависит от движения твердого тела.

Глава 12

Мультиполярные среды¹

12.1. Многоспиновые частицы

12.1.1. Кинематика многоспиновых частиц

Многоспиновая частица² \mathcal{A} является сложным объектом, состоящим из несущего тела \mathcal{A}_0 со встроенной в него системой роторов \mathcal{A}_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Пусть радиус-векторы \mathbf{R}_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) определяют положения центров масс тел \mathcal{A}_i . Пусть \mathbf{P}_i есть тензоры поворота тел \mathcal{A}_i . Через m_i обозначим массы тел \mathcal{A}_i . Примем, что множество точек, положение которых определено радиус-векторами \mathbf{R}_i , является абсолютно твердым телом, хотя сама многоспиновая частица таковым, конечно, не является. Если роторы внутри несущего тела осесимметричны, а их оси фиксированы относительно несущего тела, то многоспиновую частицу можно назвать гиростатом. Для простоты

¹ Материал этой главы основан на фрагментах из книги П. А. Жилина [1]: Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с. (*Примеч. ред.*)

² Общий случай многоспиновой частицы, для которой также используется термин “кватитвердое тело”, рассмотрен в разделе 4.2. Динамика многоспиновой частицы на упругом основании, для которой также используется термин “многоспиновый твердотельный осциллятор”, исследуется в восьмой главе. При этом используется упрощенная модель многоспиновой частицы, удовлетворяющая определению гиростата. Исключение составляет подраздел 8.2.4, где исследуется движение двухспиновой частицы с неуравновешенным ротором. В восьмой главе, посвященной решению задач, возникающих в инженерной практике, многоспиновая частица моделирует тело макроскопических размеров. В настоящей главе многоспиновая частица является базовым элементом при построении модели сплошной среды. При переходе к сплошной среде многоспиновая частица рассматривается как точечная частица, подобная той, которая обсуждается в подразделе 3.2.1, а именно частица, движение которой определяется заданием ее вектора положения $\mathbf{R}(t)$ и набором независимых тензоров поворота $\mathbf{P}_m(t)$, $m = 0, 1, \dots, n$. (*Примеч. ред.*)

именно этот случай будет рассматриваться далее. Тогда

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R} + \mathbf{P}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_i; \quad \mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^N m_i \mathbf{R}_i; \quad m = \sum_{i=0}^N m_i, \quad (12.1)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор центра масс частицы \mathcal{A} , векторы $\boldsymbol{\rho}_i$ — векторы, определяющие положения центров масс тел \mathcal{A}_i относительно центра масс частицы \mathcal{A} в отсчетном положении. Таким образом, движение многоспиновой частицы \mathcal{A} определяется заданием $3(N+2)$ скалярных функций

$$\mathbf{R}(t), \quad \mathbf{P}_0(t), \quad \mathbf{P}_1(t), \quad \mathbf{P}_2(t), \quad \dots \quad \mathbf{P}_N(t). \quad (12.2)$$

Трансляционная и угловые скорости частицы находятся посредством следующих уравнений:

$$\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t), \quad \dot{\mathbf{P}}_i(t) = \boldsymbol{\omega}_i(t) \times \mathbf{P}_i(t). \quad (12.3)$$

В дальнейшем будем считать, что роторы \mathcal{A}_i являются телами вращения с осями симметрии \mathbf{n}'_i , которые предполагаются фиксированными относительно несущего тела \mathcal{A}_0 . Поэтому можем записать:

$$\mathbf{n}'_i = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (12.4)$$

где векторы \mathbf{n}_i заданы в отсчетном положении. Тензор поворота \mathbf{P}_0 может быть записан во многих, но эквивалентных между собой формах:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{Q}(\psi_1 \mathbf{n}_1) = \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{Q}(\psi_2 \mathbf{n}_2) = \dots = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{Q}(\psi_N \mathbf{n}_N) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{T}_i = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(\psi_i \mathbf{n}_i), \end{aligned} \quad (12.5)$$

где $\mathbf{Q}(\psi_i \mathbf{n}_i)$ — повороты вокруг осей \mathbf{n}_i на угол ψ_i ; \mathbf{T}_i — тензор наклона, т. е. тензор поворота вокруг оси, ортогональной оси \mathbf{n}_i . Для тензоров поворота \mathbf{P}_i имеем аналогичные представления:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{Q}(\varphi_i \mathbf{n}_i). \quad (12.6)$$

Поскольку оси \mathbf{n}_i фиксированы относительно несущего тела \mathcal{A}_0 , то справедливы равенства

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{S}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_i = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}^T(\psi_i \mathbf{n}_i).$$

При этом уравнения (12.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{Q}^T(\psi_i \mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{Q}(\varphi_i \mathbf{n}_i) = \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{Q}(\beta_i \mathbf{n}_i); \\ \beta_i &= \varphi_i - \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (12.7)$$

где β_i есть угол поворота ротора \mathcal{A}_i относительно несущего тела \mathcal{A}_0 . Таким образом, движение многоспиновой частицы определяется заданием $\mathbf{N} + 6$ скалярных функций, т. е. она имеет $\mathbf{N} + 6$ степеней свободы. Далее будут использованы обозначения

$$\mathbf{P} \triangleq \mathbf{P}_0, \quad \boldsymbol{\omega} \triangleq \boldsymbol{\omega}_0. \quad (12.8)$$

Используя теорему сложения угловых скоростей (2.154) для композиции поворотов (12.7), получаем выражения для угловых скоростей роторов:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega} + \dot{\beta}_i \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_i = \boldsymbol{\omega} + \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i, \quad \mathbf{n}'_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \mathbf{N}. \quad (12.9)$$

12.1.2. Кинетическая энергия, количество движения и кинетический момент многоспиновой частицы

Кинетическую энергию K_i тела \mathcal{A}_i определим квадратичной формой³

$$K_i = m_i \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}_i^\top \cdot \boldsymbol{\omega}_i \right), \quad (12.10)$$

где $m_i \mathbf{C}_i$ есть центральный тензор инерции тела \mathcal{A}_i в отсчетном положении. Тензор инерции несущего тела $m_0 \mathbf{C}_0$ может быть произвольным, тензоры инерции роторов трансверсально изотропны:

$$m_i \mathbf{C}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i + \mu_i (\mathbf{E} - \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i), \quad i = 1, 2, \dots, \mathbf{N}, \quad (12.11)$$

где λ_i , μ_i — аксиальный и экваториальный центральные моменты инерции ротора \mathcal{A}_i , соответственно. Из соотношений (12.7), (12.8) и (12.11) следует

$$\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}_i^\top = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}^\top. \quad (12.12)$$

Скорости центров масс роторов можно выразить через скорость центра масс всей частицы и угловую скорость несущего тела с помощью формул (12.1):

$$\mathbf{V}_i = \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}). \quad (12.13)$$

Используя соотношения (12.7), (12.9), (12.13), выражение для кинетической энергии (12.10) переписываем в виде

$$K_i = m_i \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{C}}_i \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \lambda_i \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \lambda_i \dot{\beta}_i^2, \quad (12.14)$$

³ Об определении кинетической энергии тела общего вида см. подраздел 3.2.2. (*Примеч. ред.*)

где приняты обозначения

$$\tilde{\mathbf{C}}_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}^\top - (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}), \quad \mathbf{B}_i = -(\mathbf{R}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{E}. \quad (12.15)$$

При $i = 0$ последние два слагаемых в формуле (12.14) отсутствуют.

Полная кинетическая энергия $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ многоспиновой частицы \mathcal{A} задается выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathcal{A}) = m \left(\frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(\dot{\beta}_i^2 + 2\dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i \cdot \boldsymbol{\omega} \right), \end{aligned} \quad (12.16)$$

где тензор инерции $m\mathbf{C}_*$ имеет вид

$$m\mathbf{C}_* = \sum_{i=0}^N m_i (\mathbf{C}_i - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{E} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)), \quad (12.17)$$

а векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}_i определяют соответственно центры масс частицы \mathcal{A} и тел \mathcal{A}_i в отсчетном положении. В равенстве (12.17) учтено очевидное тождество

$$\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{B}_i = \mathbf{0}.$$

Количество движения \mathbf{K}_{1i} тела \mathcal{A}_i вычисляется по его кинетической энергии с помощью формул⁴

$$\mathbf{K}_{1i} = \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \mathbf{V}_i} = m_i \mathbf{V}_i = m_i (\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R})) = m_i (\mathbf{V} + \mathbf{B}_i \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (12.18)$$

Полное количество движения $\mathbf{K}_1(\mathcal{A})$ многоспиновой частицы \mathcal{A} вычисляется по формуле

$$\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{K}_{1i}(\mathcal{A}_i) = m\mathbf{V} + \left(\sum_{i=0}^N m_i \mathbf{B}_i \right) \cdot \boldsymbol{\omega} = m\mathbf{V}. \quad (12.19)$$

Кинетический момент \mathbf{K}_{2i} тела \mathcal{A}_i определяется выражением⁵

$$\mathbf{K}_{2i} = \mathbf{R}_i \times \mathbf{K}_{1i} + \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \boldsymbol{\omega}_i}. \quad (12.20)$$

⁴ Об определении количества движения тела общего вида см. подраздел 3.2.2. (*Примеч. ред.*)

⁵ Об определении кинетического момента тела общего вида см. подраздел 3.2.2. (*Примеч. ред.*)

Используя формулы (12.1), (12.9), (12.11), (12.12), (12.18), нетрудно получить

$$\mathbf{K}_{2i} = m_i \left(\mathbf{R}_i \times \mathbf{V} + (\mathbf{R}_i \times \mathbf{V}_i + \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}^\top) \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \lambda_i \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i, \quad \beta_0 = 0. \quad (12.21)$$

Кинетический момент $\mathbf{K}_2(\mathcal{A})$ всей частицы \mathcal{A} определяется по формуле

$$\mathbf{K}_2(\mathcal{A}) = \sum_{i=0}^N \mathbf{K}_{2i} = m \left(\mathbf{R} \times \mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \dot{\beta}_i \mathbf{n}'_i, \quad (12.22)$$

где тензор $m\mathbf{C}_*$ определен выражением (12.17).

12.1.3. Фундаментальные законы механики для многоспиновых частиц

Многоспиновая частица имеет $N + 6$ степеней свободы, которые определяются следующими функциями:

$$\mathbf{R}(t), \quad \mathbf{P}(t), \quad \beta_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (12.23)$$

Для отыскания этих функций необходимо сформулировать соответствующее число уравнений. Вывод этих уравнений основан на фундаментальных законах механики, общую формулировку которых можно найти в разделе 3.5.

В основания механики положены четыре утверждения, которые принято называть фундаментальными законами. К ним относятся: первый и второй законы динамики Эйлера, уравнение баланса энергии, или первый закон термодинамики, и неравенство производства энтропии, или второй закон термодинамики. Следует обратить внимание на то, что наименование законов этим утверждениям присвоено по традиции. На самом деле это некие логические утверждения, указывающие путь или, если угодно, метод исследования проблем Природы и техники. Эти логические утверждения принципиально не могут быть опровергнуты никакими опытными фактами. Поэтому область их применимости не имеет ограничений, и их можно использовать при любых скоростях движения как в макромире, так и в микромире, включая проблемы излучения черного тела. Многие физики не согласятся со сказанным, как это видно, например, из приведенной во введении цитаты М. Планка. Вместе с тем никто из физиков до сих пор не указал, что именно в этих законах неправильно или имеет ограниченную область применимости.

Фундаментальные законы формулируются исключительно в инерциальных системах отсчета, подробное рассмотрение которых можно найти в разделе 3.1.

Рассмотрим произвольное тело \mathcal{B} , состоящее из \mathbf{n} многоспиновых частиц. Через \mathcal{B}^e обозначим окружение тела \mathcal{B} , т. е. всю Вселенную за вычетом самого рассматриваемого тела \mathcal{B} . Тогда первый закон динамики гласит:

В инерциальной системе отсчета скорость изменения количества движения тела \mathcal{B} равна силе $\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e)$, действующей на тело \mathcal{B} со стороны его окружения \mathcal{B}^e , плюс скорость подвода количества движения в тело \mathcal{B} .

В математической записи первый закон имеет вид (3.51)

$$\dot{\mathbf{K}}_1(\mathcal{B}) = \mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) + \mathbf{k}_1(\mathcal{B}). \quad (12.24)$$

Определение сил и их свойства описаны в разделе 3.3. Если тело \mathcal{B} есть материальная точка и $\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$, то первый закон динамики совпадает со вторым законом Ньютона. В общем случае первый закон динамики значительно сильнее второго закона Ньютона. В частности, из него в качестве следствия вытекает третий закон Ньютона для закрытых тел \mathcal{A} и \mathcal{B} , т. е. тел, не обменивающихся массой:

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{F}(\mathcal{B}, \mathcal{A}). \quad (12.25)$$

Следует обратить внимание, что центральность сил при этом не обязательна и не имеет смысла. Если тела \mathcal{A} и \mathcal{B} являются материальными точками и, кроме того, выполняется второй закон динамики Эйлера, то справедливо равенство

$$\mathbf{F}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times (\mathbf{R}_\mathcal{A} - \mathbf{R}_\mathcal{B}) = \mathbf{0}, \quad (12.26)$$

т. е. силы являются центральными. Хотя все сказанное должно быть общеизвестным, тем не менее недоразумения встречаются здесь очень часто.

Рассмотрим один, но весьма типичный пример различия в рассуждениях, используемых физиками и механиками⁶. Пусть даны две материальные точки \mathcal{A} и \mathcal{B} с массами $m_\mathcal{A} \ll m_\mathcal{B}$. Пусть тело \mathcal{A} движется со скоростью $\mathbf{V}_\mathcal{A}$ и налетает на покоящееся тело \mathcal{B} . Физики рассуждают следующим образом. Считая рассматриваемую систему точек изолированной, выписываем закон сохранения количества движения

$$m_\mathcal{A} \mathbf{V}_\mathcal{A} = m_\mathcal{A} \mathbf{V}_\mathcal{A}^+ + m_\mathcal{B} \mathbf{V}_\mathcal{B}^+, \quad (12.27)$$

где плюсами помечены скорости после удара. Закон (12.27) многократно проверялся во многих экспериментах. Было установлено, что при малых скоростях $\mathbf{V}_\mathcal{A}$ он выполняется с высокой степенью точности, а при скоростях $\mathbf{V}_\mathcal{A}$,

⁶ Ни в данном месте, ни в последующем тексте автор не имеет намерения критиковать или давать оценки подходам, используемым в физике. Речь идет только о расхождениях в исходных позициях.

сравнимых со скоростью света в пустоте, закон (12.27) нарушается. Его справедливость практически восстанавливается, если принять, что масса m_d зависит от скорости по принятому в релятивистской физике закону. Этот факт рассматривается в физике как одно из доказательств зависимости массы от скорости. Столь простое устранение возникшего противоречия с экспериментом вполне устраивает большинство физиков. Однако для механика подобный способ рассуждений неприемлем, ибо с точки зрения рациональной механики масса не может зависеть от скорости, поскольку она, по определению, является объективным скаляром и потому не зависит от выбора системы отсчета. Поэтому трактовка результатов эксперимента, даваемая в физике, неприемлема в рамках рациональной механики. Механика должна найти свое объяснение результатам эксперимента.

С качественной точки зрения все выглядит достаточно понятно: поскольку закон (12.27) не выполняется, то допущение об изолированности рассматриваемой системы является неверным, т. е. на движущуюся частицу действуют какие-то силы. Чтобы выявить эти силы, необходимо принять во внимание, что известные эксперименты проводились с заряженными частицами, скорости которых доводились до нужных значений электромагнитным воздействием, которое затем выключалось. В физике считается, что электромагнитное поле порождается внешними источниками, при выключении которых оно исчезает⁷ и, следовательно, ни на что не действует.

С точки зрения механики данный эксперимент показывает, что, даже при отсутствии внешних источников, электромагнитное поле присутствует. Именно оно и воздействует на движущуюся заряженную частицу, причем это воздействие эквивалентно кажущемуся росту массы. Вопрос, следовательно, сводится к построению механической модели электромагнитного поля и изучению его взаимодействия с “видимым веществом”. К сожалению, сделать это значительно сложнее, чем ввести зависимость массы от скорости, но иного в механике не дано.

Второй закон динамики Эйлера гласит:

Скорость изменения кинетического момента тела \mathcal{B} , вычисленного относительно опорной точки Q , равна моменту, вычисленному относительно той же опорной точки и действующему на тело \mathcal{B} со стороны его окружения \mathcal{B}^e , плюс скорость подвода кинетического момента в тело \mathcal{B} .

В математической форме второй закон имеет вид (3.67)

$$\dot{\mathbf{K}}_2^Q(\mathcal{B}) = \mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e) + \mathbf{k}_2^Q(\mathcal{B}). \quad (12.28)$$

⁷ Поле, создаваемое самой заряженной частицей, на частицу не действует.

Дальнейшие подробности о понятии момента и способах его вычисления можно найти в разделе 3.3. Для закрытых тел на основании второго закона (12.28) легко доказывается равенство

$$\mathbf{M}^Q(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = -\mathbf{M}^Q(\mathcal{B}, \mathcal{A}). \quad (12.29)$$

Если тело \mathcal{B} является системой материальных точек, то из (12.28) следует, что силы взаимодействия между точками системы по необходимости являются центральными. Поэтому, если эксперименты показывают, что силы взаимодействия между объектами системы не центральны, то эти объекты не могут считаться материальными точками. Так обстоит дело в теориях для некоторых типов кристаллов.

Пусть тело \mathcal{B} является многоспиновой частицей. Тогда первый и второй законы дают нам шесть уравнений. В этой связи необходимо сформулировать еще N дополнительных уравнений. Для этого необходимо рассмотреть уравнения движения внутренних роторов многоспиновой частицы.

Уравнения движения роторов \mathcal{A}_i :

$$\dot{\mathbf{K}}_{1i} = \mathbf{F}_i; \quad \dot{\mathbf{K}}_{2i} = \mathbf{M}_i; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (12.30)$$

где \mathbf{F}_i и \mathbf{M}_i — сила и момент, действующие на ротор \mathcal{A}_i со стороны несущего тела \mathcal{A}_0 . Представим момент \mathbf{M}_i в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i &= \mathbf{R}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{L}_i, & \mathbf{L}_i &= L_i \mathbf{n}'_i + \mathbf{L}_i^*; \\ \mathbf{n}'_i \cdot \mathbf{L}_i^* &= 0; & L_i &= -\nu_i (\dot{\beta}_i - \Omega_i); & \nu_i &> 0, \end{aligned} \quad (12.31)$$

где $\Omega_i = \text{const}$ и $\nu_i = \text{const}$ являются параметрами частицы. Преобразуем уравнения баланса кинетического момента роторов с учетом уравнений баланса количества движения. В результате получим

$$(\mathbf{P}_i \cdot m_i \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{P}_i^T \cdot \boldsymbol{\omega}_i) \dot{} = \mathbf{L}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (12.32)$$

Умножая (12.32) скалярно на \mathbf{n}'_i и учитывая все указанное ранее, без труда получаем следующие N уравнений:

$$\lambda_i \left(\dot{\beta}_i + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}'_i \right) \dot{} + \nu_i \left(\dot{\beta}_i - \Omega_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (12.33)$$

Уравнения (12.24), (12.28), (12.33) дают полную систему уравнений движения многоспиновой частицы.

Второй закон динамики не входит в базисные законы современной теоретической физики, что имеет далеко идущие последствия. Рассмотрим простой

пример⁸. Возьмем несколько абсолютно твердых тел с одинаковыми тензорами инерции и одинаковой внешней формой. Допустим далее, что эти тела могут свободно вращаться вокруг неподвижной точки, относительно которой вычислялись тензоры инерции. Начальные условия для всех тел примем одинаковыми. Тогда наблюдаемые вращения всех тел будут совершенно одинаковыми. Измерим теперь реакции на опорах. В результате обнаружим, что они у всех тел различны. Причина состоит в том, что реакции на опорах определяются движением центра масс тела⁹. Тела, имеющие одинаковые тензоры инерции и одинаковую внешнюю форму, могут иметь различное расположение центров масс. Именно по этой причине реакции оказались разными.

В данном примере и механики, и физики пришли бы к одинаковым выводам, и, разумеется, ни о каком крушении классической динамики речь бы не шла. Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Реакции определяются движением центра масс, но само это движение **полностью** определяется вторым законом динамики Эйлера, который игнорируется в квантовой физике. В результате, если аналогичный эксперимент проводится в микромире, то движение центра масс (никто ничего не знает о центре масс электрона или протона) попадает в категорию ненаблюдаемых величин, в то время как силы (реакции связи) и сами вращательные движения попадают в категорию наблюдаемых величин. В квантовой физике устанавливаются связи между наблюдаемыми величинами [90], т. е. в данном случае между вращательными движениями и реакциями на опорах. Более того, если речь идет об элементарной частице, рассматриваемой как точечное тело, то ее трансляционное движение вообще отсутствует, но силы возникают. Вывод, к которому приходят физики, гласит, что в микромире классическая динамика терпит крах.

Вообразим теперь немного более сложную ситуацию. Пусть опорные точки рассматриваемых тел связаны жесткими связями, силы в которых (реакции на опорах или реакции связей) можно измерять. Тогда обнаружится возникновение огромных сил (при достаточно высоких скоростях вращения), которые не порождены трансляционными движениями. В таких случаях физики опять говорят о чисто квантово-механических эффектах, не предсказываемых классической динамикой. На этом простом, хотя и гипотетическом, примере хотелось показать, как могут возникать всякого рода странности при игнорировании второго закона динамики. Именно игнорирование спинорных

⁸ Пример служит только для иллюстрации способа рассуждений, принятого в квантовой физике.

⁹ Подробнее об этом примере см. подраздел 3.5.2. (*Примеч. ред.*)

движений, на которых держится весь микромир, и второго закона динамики привело к отказу от классической механики и созданию квантовой физики.

Первые два закона динамики относительно просты в приложениях. Этого нельзя сказать о третьем и четвертом законах механики, которые больше известны под именами первого и второго законов термодинамики. Здесь существует целый ряд еще не решенных проблем¹⁰, связанных с понятиями внутренней энергии, температуры и энтропии¹¹. Оставим обсуждение этих проблем и ограничимся только формулировками законов термодинамики. В частности, уравнение баланса энергии сводится к утверждению:

Скорость изменения полной энергии тела \mathcal{B} равна мощности внешних воздействий $\mathbf{N}(\mathcal{B}, \mathcal{B}^e)$ плюс скорость подвода энергии “немеханического происхождения”.

В дополнение к уже введенным понятиям здесь появляется новое понятие полной энергии, которая обычно представляется в виде суммы кинетической энергии тела \mathcal{B} и его внутренней энергии. Поскольку кинетическая энергия тела полностью определена, то проблема сводится к определению внутренней энергии. Во многих, но далеко не во всех случаях решение этой проблемы известно. Существуют серьезные затруднения и с полным формальным определением энергии “немеханического происхождения”. Вообще говоря, это та энергия, которой тело \mathcal{B} обменивается со своим окружением в дополнение к обмену энергией через посредство мощности внешних воздействий. Обычно это происходит в форме тепловой энергии, но это не обязательно так. Просто для иллюстрации приведем математическую форму уравнения баланса энергии применительно к одной многоспиновой частице:

$$(\mathbf{K} + \mathcal{U}_p)' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} + \delta, \quad (12.34)$$

где \mathcal{U}_p — внутренняя энергия частицы; δ — скорость подвода энергии “немеханического происхождения” в частицу.

Для “стандартных” частиц¹² внутренняя энергия сохраняется постоянной, т. е. $\mathcal{U}_p = \text{const.}$ Это означает, что частица не содержит внутренних накопителей энергии типа упругих элементов. В таком случае легко вычислить

¹⁰ В учебниках теоретической физики создается впечатление, что здесь все ясно. Однако принятый там уровень строгости неприемлем для рациональной механики.

¹¹ О понятиях внутренней энергии, температуры и энтропии см. подраздел 3.5.3. (*Примеч. ред.*)

¹² Под “стандартной” здесь понимается частица, которая не может деформироваться. Частица, содержащая внутренние роторы, которые могут свободно вращаться относительно несущего тела, обладает дополнительной кинетической энергией. На внутреннюю энергию наличие роторов не влияет. (*Примеч. ред.*)

величину δ . В самом деле, умножая (12.24) на вектор \mathbf{V} и так далее, получаем

$$\dot{K} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} - \sum_{i=1}^N \nu_i \dot{\beta}_i (\dot{\beta}_i - \Omega_i). \quad (12.35)$$

Из сравнения уравнений (12.35) и (12.34) видим, что

$$\delta = - \sum_{i=1}^N \nu_i \dot{\beta}_i (\dot{\beta}_i - \Omega_i). \quad (12.36)$$

Величина δ порождается внешним источником энергии, например электрическим прибором. Все указанное ранее крайне схематично и просто перечисляет моменты, на которые следует обратить внимание. Второй закон термодинамики будет введен в дальнейшем.

12.2. Пространственное описание кинематики полярной среды

Материал этого раздела важен при построении теории движущихся сплошных сред. При изучении движения материальных точек ситуация весьма проста. В самом деле, положение материальной точки в системе отсчета определялось заданием вектора положения $\mathbf{R}(\mathbf{t})$. Скорость и ускорение материальной точки вычислялись как соответствующие производные от вектора положения. Вообразим теперь другую ситуацию. Пусть мы сидим на берегу реки и наблюдаем за течением воды напротив нас. Даже без специальных ухищрений мы можем видеть, что вода как бы расслоена на отдельные струи. Движение отдельных частиц воды мы не различаем, но потоки этих частиц (струй) ведут себя более или менее закономерным образом. Допустим теперь, что мы хотим изучить поведение реки в данном месте пространства. Для этого мы должны написать соответствующие законы механики и затем извлекать из них интересующие нас следствия. Вот здесь-то и возникают проблемы. Действительно, законы механики формулируются для тел, а вовсе не для областей пространства, в которых тела находятся в рассматриваемый момент времени. Мы же наблюдаем именно за областью пространства. Тела, которые входят в эту область и выходят из нее, постоянно меняются. Разумеется, мы можем назвать телом все то множество частиц, которое в данный момент времени находится внутри рассматриваемой области. Однако это тело будет

иметь переменный состав. Тела такого рода называют открытыми — они обмениваются частицами со своим окружением¹³.

Выберем некоторую инерциальную систему отсчета, с помощью которой будут записываться все основные уравнения. Эта система отсчета движется относительно среды. Поэтому в некоторой фиксированной области системы отсчета в разные моменты времени оказываются разные части среды. Это означает, что необходимо использовать так называемое пространственное описание. Для этого нам понадобится понятие материальной производной, играющей важную роль при пространственном описании сплошных сред.

Рассмотрим сплошную среду, целиком заполняющую односвязную или многосвязную область в выбранной системе отсчета. Эта среда как-то движется относительно системы отсчета. В частности, среда может покоиться, а система отсчета двигаться относительно среды. С кинематической точки зрения это безразлично.

При пространственном описании важную роль играет поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, где вектор \mathbf{x} задает точку системы отсчета, называемую точкой наблюдения. Тогда вектор $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ определяет скорость той частицы среды, которая в данный момент времени \mathbf{t} находится в точке \mathbf{x} . В качестве точки наблюдения можно выбрать точку $\mathbf{y}(\mathbf{t})$, движущуюся относительно системы отсчета по заданному закону. Введение подвижной точки наблюдения оказывается необходимым, например, при замене системы отсчета или применении принципа относительности Галилея.

Пусть нам дано некоторое поле $\mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$, которое может быть скаляром, вектором или тензором любого ранга. Оно описывает некую физическую характеристику частицы, находящейся в данное время в данной точке $\mathbf{y}(\mathbf{t})$ системы отсчета.

Определение. Материальной производной свойства $\mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t})$ называется предел отношения

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t} + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, \mathbf{t} + \Delta t) - \mathbf{K}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t})}{\Delta t}, \quad (12.37)$$

где

$$\Delta \mathbf{s} = \left(\mathbf{V}(\mathbf{y}(\mathbf{t}), \mathbf{t}) - \frac{d\mathbf{y}(\mathbf{t})}{dt} \right) \Delta t \quad (12.38)$$

есть путь, пройденный частицей, которая в момент времени \mathbf{t} находилась в точке $\mathbf{y}(\mathbf{t})$, за время Δt .

¹³ Подробнее об открытых телах см. в подразделе 3.2.2. (Примеч. ред.)

В правую часть равенства (12.38) входит скорость частицы относительно движущейся точки $\mathbf{y}(t)$. Числитель в (12.37) можно переписать в виде следующего разложения:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}(\mathbf{y}(t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s}, t + \Delta t) = \\ & = \mathbf{K}(\mathbf{y}(t + \Delta t), t + \Delta t) + \Delta \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{y}(t + \Delta t), t + \Delta t). \end{aligned}$$

Теперь из определения (12.37) следует:

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t) + \left(\mathbf{V}(\mathbf{y}(t), t) - \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{y}(t), t). \quad (12.39)$$

Если точка наблюдения неподвижна относительно системы отсчета, то выражение (12.39) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) & = \frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (12.40)$$

Понятно, что замена оператора полного дифференцирования по времени в правой части выражения (12.40) на оператор частного дифференцирования по времени возможна тогда и только тогда, когда вектор \mathbf{x} не зависит от времени. При этом получается общепринятое выражение для материальной производной, которое используется во всех работах по гидромеханике. Поскольку правая часть (12.40) внешне похожа на полную производную, то в физической литературе материальную производную нередко трактуют как полную производную по времени. В самом деле, если вектор \mathbf{x} считать вектором положения частицы в системе, т. е. считать его зависящим от времени, то получим

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{K}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}. \quad (12.41)$$

Выражение (12.41) действительно похоже на определение материальной производной, но только внешне. Смешивать понятия материальной производной и полной производной ни в коем случае нельзя. В то же время следует отметить, что во многих случаях упомянутое смешение не приводит к ошибкам в конечных результатах. Определение материальной производной (12.39) было введено в работе [83] и ранее не использовалось. Между тем переход от общего определения (12.39) к частному представлению (12.40) возможен далеко не всегда. Подробнее об этом будет сказано немного ниже.

Для материальной производной справедливы все правила дифференцирования. Например,

$$\frac{\delta}{\delta t}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \frac{\delta \mathbf{a}}{\delta t} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \frac{\delta \mathbf{b}}{\delta t}. \quad (12.42)$$

С другой стороны, известно, что оператор полного дифференцирования по времени и оператор-градиент перестановочны¹⁴. Для материальной производной, как видно из определения, это неверно:

$$\frac{d}{dt} \nabla = \nabla \frac{d}{dt}, \quad \frac{\delta}{\delta t} \nabla \neq \nabla \frac{\delta}{\delta t}. \quad (12.43)$$

В важном частном случае, когда скорость $\mathbf{V} = \text{const}$, операторы градиента и материальной производной перестановочны:

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla = \nabla \frac{\delta}{\delta t}. \quad (12.44)$$

Обратимся к рассмотрению некоторых кинематических соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Вычислим, например, материальную производную от вектора положения \mathbf{x} частицы, находящейся в данный момент времени в точке \mathbf{x} системы отсчета¹⁵:

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{x} = \frac{d}{dt} \mathbf{x} + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{x} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \quad (12.45)$$

Вычисляя материальную производную от вектора скорости частицы, находим вектор ее ускорения:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (12.46)$$

Здесь было принято, что точка наблюдения неподвижна относительно системы отсчета. В литературе на это ограничение часто не обращается должного внимания. В результате легко прийти к следующему недоразумению.

¹⁴ В механике сплошных сред при использовании материального описания вводится в рассмотрение два оператора-градиента: один в отсчетной конфигурации, другой в актуальной. В первом из указанных операторов базисные векторы не зависят от времени, и именно он имеется в виду, когда говорят о перестановочности оператора полного дифференцирования по времени и оператора-градиента. Оператор-градиент в актуальной конфигурации отличается тем, что в нем базисные векторы являются функциями времени. Поэтому данный оператор не перестановочен с оператором полного дифференцирования по времени. (*Примеч. ред.*)

¹⁵ Точка \mathbf{x} считается неподвижной, поэтому $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$. (*Примеч. ред.*)

Рассмотрим две частицы \mathcal{A} и \mathcal{B} , которые в начальный момент времени занимали одно и то же положение \mathbf{x}_0 . Зададим движения этих частиц в следующей форме:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_A(t) &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t), & \mathbf{x}_B(t) &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{V}_0 &= \text{const} & \Rightarrow & \mathbf{x}_B = \mathbf{x}_A + \mathbf{V}_0 t.\end{aligned}\quad (12.47)$$

Для скоростей этих частиц получаем:

$$\mathbf{V}_A = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}, \quad \mathbf{V}_B = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} + \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}_A = \mathbf{W}_B = \frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2}, \quad (12.48)$$

т. е. ускорения обеих частиц в один и тот же момент времени одинаковы. Посмотрим, что дает для ускорения формула (12.46):

$$\mathbf{W}_A(\mathbf{x}_A, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) + \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) \cdot \nabla\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t). \quad (12.49)$$

Для ускорения частицы \mathcal{B} имеем аналогичную формулу:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_B(\mathbf{x}_B, t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) + \mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) \cdot \nabla\mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) = \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) + \mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) \cdot \nabla\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla\mathbf{V}_A = \\ &= \mathbf{W}_A + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla\mathbf{V}_A \neq \mathbf{W}_A.\end{aligned}\quad (12.50)$$

В результате пришли к абсурдному результату. Причина ошибки очевидна: формула

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$$

правильна тогда и только тогда, когда точка наблюдения неподвижна относительно системы отсчета. В общем случае при пространственном описании для вычисления ускорения необходимо пользоваться определением материальной производной (12.39). В этом случае для ускорения имеем равенство

$$\mathbf{W}_A(\mathbf{x}_A, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) + \left(\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) - \frac{d\mathbf{x}_A}{dt} \right) \cdot \nabla\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t). \quad (12.51)$$

Для ускорения частицы \mathcal{B} получим аналогичное выражение:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_B(\mathbf{x}_B, t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) + \left(\mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) - \frac{d\mathbf{x}_B}{dt} \right) \cdot \nabla\mathbf{V}_B(\mathbf{x}_B, t) = \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_0) + \left(\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_0 - \frac{d(\mathbf{x}_A + \mathbf{V}_0 t)}{dt} \right) \cdot \nabla(\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_0) = \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) + \left(\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) - \frac{d\mathbf{x}_A}{dt} \right) \cdot \nabla\mathbf{V}_A(\mathbf{x}_A, t) = \mathbf{W}_A(\mathbf{x}_A, t).\end{aligned}\quad (12.52)$$

Иными словами, определение ускорения посредством материальной производной (12.39) инвариантно относительно наложения трансляционного движения с постоянной скоростью. Это обстоятельство оказывается важным во многих случаях.

В качестве примера рассмотрим знаменитые уравнения Эйлера, которые традиционно записываются в следующей форме:

$$-\nabla p + \rho \mathbf{F} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \right), \quad (12.53)$$

где p , ρ , $\rho \mathbf{F}$ — давление, массовая плотность и объемная плотность внешней силы соответственно. Уравнения Эйлера выведены в 1755 г. и описывают движение идеальной жидкости. Они, конечно, правильны, но при условии, что они записаны в точке, неподвижной относительно системы отсчета. Поэтому они не удовлетворяют и не должны удовлетворять принципу относительности Галилея. Кроме того, пользоваться ими можно не во всех ситуациях. Например, их нельзя использовать при введении подвижной системы координат, что часто делается. Например, при изучении движения тела в жидкости часто вводят систему координат, движущуюся вместе с телом. В этом случае пользоваться уравнением (12.53), строго говоря, нельзя. Его необходимо заменить на следующее:

$$-\nabla p + \rho \mathbf{F} = \rho \left[\frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \left(\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \right], \quad (12.54)$$

где \mathbf{x} есть точка наблюдения, которая может двигаться по заданному закону.

К значительно более серьезным последствиям привело использование представления (12.46) в электродинамике. Подобно тому, как в случае с уравнениями Эйлера (12.53), уравнения Максвелла не удовлетворяют принципу относительности Галилея по тем же самым причинам, которые только что обсуждались. Но вместо того, чтобы записать уравнения Максвелла в правильной форме типа (12.54), была создана специальная теория относительности, в основе которой лежат не преобразования Галилея, а преобразования Лоренца.

Пример. Чтобы яснее представить себе смысл материальной производной, рассмотрим простую задачу. Пусть дан шар, занимающий область $0 \leq R \leq a_0$ в системе отсчета. Пусть далее этот шар деформируется, оставаясь шаром, и в момент времени t занимает область $0 \leq r \leq a$, причем центры недеформированного шара и деформирующегося шара совпадают при всех t . Задачу решаем в сферической системе координат. Пусть точка с координатой R в момент времени t занимает положение с координатой r .

Примем следующий закон деформации шара:

$$\mathbf{r}\mathbf{e}_r = \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \mathbf{R}\mathbf{e}_r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = -\frac{\mathbf{R}}{\tau} \mathbf{e}_r, \quad (12.55)$$

т. е. точка, которая в момент времени $t = 0$ имела координату \mathbf{R} , движется с постоянной скоростью $\mathbf{V}(\mathbf{R})$. Заметим, что точки с разными координатами \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 движутся с разными скоростями. Например, центр шара вообще не движется, а скорость точки с координатой \mathbf{a}_0 максимальна. Понятно, что ускорение этой точки равно нулю. Вычислим теперь ускорение этой точки, пользуясь пространственным описанием и понятием материальной производной (12.45).

При пространственном описании мы наблюдаем не за фиксированной точкой шара с координатой \mathbf{R} , а за фиксированной точкой \mathbf{r} в системе отсчета. При этом через эту точку проходят разные точки шара. Таким образом, мы наблюдаем поле скоростей

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{R}}{\tau} \mathbf{e}_r = -\frac{\mathbf{r}}{\tau - t} \mathbf{e}_r, \quad (12.56)$$

где мы воспользовались формулой (12.55). Вычислим теперь производные, входящие в правую часть (12.46):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{dt} &= -\frac{\mathbf{r}}{(\tau - t)^2} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mathbf{r}}{\tau - t} \mathbf{e}_r \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{\tau - t} \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{(\tau - t)^2} \mathbf{e}_r. \end{aligned} \quad (12.57)$$

Подставляя эти результаты в (12.46), получаем нулевое ускорение. В этом примере мы ясно видим смысл каждого слагаемого в (12.46). Читателю следует очень внимательно обдумать этот простой пример, чтобы ясно осознать смысл величин, входящих в определение ускорения частицы с помощью понятия материальной производной (12.46).

Рассмотрим менее привычную ситуацию. Пусть $\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ есть тензор поворота частицы, находящейся в точке \mathbf{x} в момент времени t . Как найти ее угловую скорость?

Нетрудно понять, что для этого необходимо использовать следующую модификацию уравнения Пуассона (2.95):

$$\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{P}(\mathbf{x}, t). \quad (12.58)$$

Присутствие в этом определении скорости $\mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ вносит дополнительные усложнения при написании уравнения баланса энергии, как это будет видно ниже.

В дальнейшем нам понадобится преобразовывать градиент угловой скорости $\nabla \boldsymbol{\omega}$. Будем действовать следующим образом. Введем в рассмотрение тензор второго ранга $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, называемый второй мерой деформации, и вектор $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, называемый вектором угловой деформации, посредством уравнений

$$\nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{f} \equiv \mathbf{F}_\times. \quad (12.59)$$

Используя уравнение Пуассона (12.58), определение второй меры деформации (12.59) и свойство перестановочности операторов градиента и полной производной по времени, после некоторых преобразований получаем¹⁶:

$$\nabla \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}, \quad (12.60)$$

откуда для ротора вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеем

$$\nabla \times \boldsymbol{\omega} = \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + (\mathbf{F}^\top - (\text{tr } \mathbf{F}) \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{\omega} + (\nabla \mathbf{V} \cdot \mathbf{F})_\times. \quad (12.61)$$

Последние два равенства справедливы для любого вектора \mathbf{V} и будут использованы позднее.

Введем в рассмотрение вектор перемещений. Пусть частица, которая в данный момент времени \mathbf{t} находится в точке \mathbf{x} , в момент времени $\mathbf{t}_0 \leq \mathbf{t}$ находилась в точке \mathbf{x}_0 . Вектор $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$, который переводит частицу из положения \mathbf{x}_0 в точку \mathbf{x} , называется вектором перемещений. Приняв, что вектор скорости связан с вектором перемещений посредством материальной производной, получим очевидное равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &\equiv \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{t}) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \end{aligned} \quad (12.62)$$

где принято обозначение

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \equiv (\mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{t})), \quad \det \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) > 0. \quad (12.63)$$

¹⁶ Вывод соотношений (12.60) и (12.61) можно найти в приложении D к книге [1]. (Примеч. ред.)

Вычисляя градиент от обеих частей второго из равенств (12.62) и учитывая перестановочность операторов градиента и полной производной по времени, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \nabla V(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla V(\mathbf{x}, t) &= \left(\frac{\delta}{\delta t} \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (12.64)$$

Эти равенства можно найти в книгах [84, 85]. Последнее равенство можно переписать в эквивалентной форме:

$$\nabla V(\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{\delta}{\delta t} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \right) \cdot \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (12.65)$$

Данное соотношение используется при записи приведенного диссипативного неравенства.

12.3. Динамика сред, состоящих из многоспиновых частиц

12.3.1. Интегральная и локальная формы закона сохранения частиц

Выберем некоторую инерциальную систему отсчета. Пусть Z есть данное множество многоспиновых частиц. Пусть V есть некоторая фиксированная область в системе отсчета. Граница V есть замкнутая поверхность $S = \partial V$. Пусть далее $\eta(\mathbf{x}, t) dV$ есть число частиц в бесконечно малой окрестности точки $\mathbf{x} \subset V$ в актуальный момент времени t :

$$\eta(\mathbf{x}, t) \geq 0.$$

Закон сохранения частиц в интегральной форме имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) dV = - \int_{(S)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} dS, \quad \int_{(S)} \mathbf{n} \cdot (\eta \mathbf{V}) dS = \int_{(V)} \nabla \cdot (\eta \mathbf{V}) dV. \quad (12.66)$$

Учитывая произвольность выбора области интегрирования, получаем локальную форму закона сохранения частиц:

$$\frac{d\eta}{dt} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{V}) = 0. \quad (12.67)$$

С использованием материальной производной уравнение (12.67) принимает вид

$$\frac{\delta \eta}{\delta t} + \eta \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta(\ln \eta)}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (12.68)$$

12.3.2. Интегральная и локальная формы первого закона динамики

Количество движения частиц, находящихся в области V , определяется следующим выражением:

$$\mathbf{K}_1 = \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) m \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t), \quad (12.69)$$

где $m = \text{const}$ есть масса частицы, находящейся в точке \mathbf{x} в актуальный момент времени, величина $m\eta$ есть плотность массы. Массовая плотность количества движения \mathcal{K}_1 определена выражением (12.19).

Первый закон динамики Эйлера записывается в виде равенства

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta m \mathcal{K}_1 dV = \int_{(V)} \eta \mathbf{F} dV + \int_{(S)} \mathbf{T}_{(n)} dS - \int_{(S)} \eta m (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_1 dV, \quad (12.70)$$

где \mathbf{F} — внешняя сила, приходящаяся на одну частицу, $\mathbf{T}_{(n)} dS$ — сила, действующая на площадку dS с единичной внешней нормалью \mathbf{n} , последнее слагаемое в правой части уравнения определяет подвод количества движения в область V . Подвод количества движения происходит за счет движения среды или за счет движения системы отсчета относительно среды.

Введем в рассмотрение тензор напряжений

$$\mathbf{T}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}. \quad (12.71)$$

Таким образом, имеем

$$\int_{(V)} \left[\frac{d}{dt} (\eta m \mathcal{K}_1) - \eta \mathbf{F} + \nabla \cdot (\eta \mathbf{V}) m \mathcal{K}_1 + \eta m \mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{K}_1 - \nabla \cdot \mathbf{T} \right] dV = 0.$$

В локальной форме первый закон динамики принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \eta \mathbf{F} = \eta m \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}. \quad (12.72)$$

12.3.3. Интегральная и локальная формы второго закона динамики

Кинетический момент частиц, находящихся в области V , определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 = \int_{(V)} \eta(\mathbf{x}, t) m \mathcal{K}_2(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} \times \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + \\ + \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\delta \beta_i(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \mathbf{n}'_i(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (12.73)$$

где массовая плотность кинетического момента \mathcal{K}_2 определена выражением (12.22).

Запишем второй закон динамики Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta m \mathcal{K}_2 dV = \int_{(V)} \eta (\mathbf{x} \times \mathbf{F} + \mathbf{L}) dV + \\ + \int_{(S)} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}_{(n)} + \mathbf{M}_{(n)}) dS - \int_{(S)} \eta m (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_2 dS, \end{aligned} \quad (12.74)$$

где \mathbf{L} — внешний момент, приходящийся на одну частицу, $\mathbf{M}_{(n)} dS$ — момент, действующий на площадку dS , последнее слагаемое в правой части уравнения есть скорость подвода кинетического момента.

Стандартные рассуждения позволяют получить формулу Коши для тензора моментных напряжений

$$\mathbf{M}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \quad (12.75)$$

и локальную форму второго закона

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \eta \mathbf{L} = \eta m \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t), \quad (12.76)$$

где через вектор \mathcal{L} обозначен динамический спин одной частицы

$$m \mathcal{L} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot m \mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{\delta \beta_i(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \mathbf{n}'_i(\mathbf{x}, t), \quad (12.77)$$

тензор $m \mathbf{C}_*$ определен выражением (12.17).

К уравнению (12.77) необходимо добавить уравнения движения роторов (12.33), которые при пространственном описании принимают вид

$$\lambda_i \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i(\mathbf{x}, t)}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}'_i(\mathbf{x}, t) \right) + \nu_i \left(\frac{\delta \beta_i(\mathbf{x}, t)}{\delta t} - \Omega_i(\mathbf{x}) \right) = 0, \quad (12.78)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

12.3.4. Интегральная и локальная формы уравнения баланса энергии

Полная энергия частиц, попадающих в область V в системе отсчета, может быть представлена в следующем виде:

$$E = \int_{(V)} \eta (m\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV,$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega} +$$

$$+ \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N \lambda_i \left[\left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} \right)^2 + 2 \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}'_i \right], \quad (12.79)$$

где \mathcal{K}, \mathcal{U} суть плотности кинетической и внутренней энергий соответственно, причем плотность кинетической энергии определена выражением (12.16).

Уравнение баланса энергии, или первый закон термодинамики, для произвольной сплошной среды записывается в форме равенства:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta (m\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV = \int_{(V)} \eta (\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q}) dV +$$

$$+ \int_{(S)} (\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_n \cdot \boldsymbol{\omega} + h_{(n)}) dS - \int_{(S)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} (m\mathcal{K} + \mathcal{U}) dS, \quad (12.80)$$

где $\eta \mathcal{U}$ — объемная плотность внутренней энергии; \mathbf{q} — подвод тепла, приходящийся на одну частицу; последнее слагаемое в правой части уравнения есть скорость подвода энергии через поверхность; $h_{(n)}$ — тепловой поток, который выражается через вектор потока тепла \mathbf{h} по закону Фурье–Стокса:

$$h_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}.$$

В локальной форме уравнение баланса энергии записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right). \end{aligned} \quad (12.81)$$

В такой форме уравнение баланса энергии еще мало о чем говорит. В частности, отсюда не видно, от каких аргументов зависит внутренняя энергия. При построении конкретных теорий уравнение баланса энергии должно быть преобразовано к следующей форме:

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{T}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \eta \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right), \quad (12.82)$$

где тензоры \mathbf{A} и \mathbf{B} называются первой и второй мерой деформации, соответственно. При пространственном описании введение мер деформации часто оказывается весьма не простой процедурой. Если эту процедуру делать корректно, то сразу выяснится, что меры деформации отнюдь не являются чисто геометрическими параметрами, а зависят от свойств материала. Указанное оказывается важным, например, при описании неупругих материалов. В данном случае нет необходимости выполнять обсуждаемую процедуру в общем виде. Для электромагнитного поля она будет описана далее. Из уравнения (12.82) видно, что внутренняя энергия зависит от тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B} , но это уравнение нуждается в дальнейших преобразованиях.

12.3.5. Приведенное неравенство диссипации энергии

Четвертый фундаментальный закон механики — это второй закон термодинамики, или неравенство производства энтропии. В основании второго закона термодинамики лежит экспериментальный факт, согласно которому вся механическая работа может быть переведена в тепло, но полностью перевести тепло в работу невозможно. За этим экспериментальным фактом стоит теоретическая идея фундаментальной важности о несуществовании изолированных систем, если только под системой не понимать всю проявленную и непроявленную Вселенную. Механическая работа совершается рассматриваемой системой, и потому она полностью может быть учтена и переведена в тепло. В противоположность этому тепло — это глобальная характеристика, которую принципиально нельзя локализовать. Тепло неизбежно излучается из

системы, в том числе и в непроявленную, т. е. в неучитываемую, Вселенную. Если внимательно проанализировать рассмотренное, то можно прийти к выводу, что второй закон термодинамики утверждает существование эфира вообще и электромагнитного поля в частности. Отсюда следует невозможность последовательного введения понятия температуры без привлечения электромагнитного поля.

Второй закон термодинамики будем использовать в форме неравенства Клаузиуса–Дюгема–Трусделла [14]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V)} \eta \mathcal{H} dV + \int_{(S)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \mathcal{H} dS \geq \int_{(S)} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}}{\vartheta} dV + \\ + \int_{(V)} \frac{1}{\vartheta} \left[\eta q + \eta \sum_{i=1}^N v_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right) \right] dV, \end{aligned} \quad (12.83)$$

где функция \mathcal{H} есть плотность энтропии; ϑ — температура. В локальной форме это неравенство сводится к следующему:

$$\eta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} \geq \frac{1}{\vartheta} \left[\nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta \sum_{i=1}^N v_i \frac{\delta \beta_i}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta_i}{\delta t} - \Omega_i \right) \right] - \frac{1}{\vartheta^2} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta. \quad (12.84)$$

Исключая отсюда тепловые слагаемые с помощью уравнения баланса энергии (12.81), получаем приведенное неравенство диссипации:

$$\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} \geq \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} - \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta. \quad (12.85)$$

Если в рассмотрение ввести плотность свободной энергии $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}$, то этому неравенству можно придать вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \mathbf{T}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{M}^T \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (12.86)$$

Приведенное неравенство диссипации должно выполняться при всех мыслимых процессах, протекающих в среде. Поскольку в это неравенство никакие внешние параметры не входят, то оно налагает ограничения на определяющие уравнения среды. Чтобы воспользоваться этим неравенством, его необходимо преобразовать к виду, аналогичному (12.82):

$$\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \mathbf{T}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t} - \mathbf{M}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (12.87)$$

12.4. Полярная среда и основные уравнения квантовой механики

12.4.1. Уравнения динамики полярной среды специального вида

Г. Лоренц в заключении книги [86, с. 66] пишет: “В последнее время механические объяснения происходящих в эфире процессов все более отступают на задний план. Для многих физиков основной частью теории является точное количественное описание явлений, как, например, данное в уравнениях Максвелла. Однако, даже если стоять на такой точке зрения, механические аналогии все же сохраняют некоторое значение. Они помогают нам думать о явлениях и могут явиться источником идей для новых исследований”. Эти слова произнесены великим физиком в 1902 г., и, очевидно, для физики это было прощание перед окончательным разрывом с классической механикой. Описание Г. Лоренцом старых теорий эфиров ясно показывает, что они были обречены на неудачу, так как, с одной стороны, все эти теории демонстрируют явное желание их авторов ввести в рассмотрение спинорные движения, но, с другой стороны, подходящий для этого математический аппарат в то время не был разработан. Книга Е. и Ф. Коссера [87], в которой впервые рассмотрены мультиполярные среды, опубликована в 1909 г. Впрочем, и эта книга еще не давала всех необходимых средств. Настоящее развитие мультиполярных теорий в механике началось после 1958 г.

Обратимся к выводу уравнений динамики полярной среды. Рассмотрим инерциальную систему отсчета \mathcal{S} . Выделим в ней кусочно-гладкую замкнутую поверхность Σ , не имеющую точек самопересечения и фиксированную в \mathcal{S} -системе. Через $n(\Sigma)$ обозначим число частиц, находящихся в данный момент времени t внутри Σ . Как и всегда в феноменологических теориях, число $n(\Sigma)$ не обязательно является целым, что не имеет значения, так как по предположению $n(\Sigma)$ велико. Тогда для $n(\Sigma)$ получаем

$$n(\Sigma) = \int_{(V_\Sigma)} \eta(\mathbf{x}, t) dV, \quad (12.88)$$

где $\eta(\mathbf{x}, t)$ — объемная плотность частиц; \mathbf{x} — вектор положения точки тела отсчета; V_Σ — объем, заключенный внутри Σ . Включение времени t в $\eta(\mathbf{x}, t)$ показывает, что число частиц внутри Σ переменено. Множество частиц внутри Σ назовем телом \mathcal{A} . Кинетическую энергию тела \mathcal{A} представим в виде

$$K(\mathcal{A}) = \int_{(V_\Sigma)} \eta(\mathbf{x}, t) m\mathcal{K}(\mathbf{x}, t) dV, \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P} \cdot \Theta_0 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (12.89)$$

где \mathcal{K} — массовая плотность кинетической энергии; $\eta \mathbf{m} dV$ — масса объема среды dV ; $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ — тензор поворота частицы; $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ — ее угловая скорость; $\mathbf{m}\boldsymbol{\Theta}_0$ — тензор инерции в отсчетной конфигурации; \mathbf{m} и $\mathbf{m}\boldsymbol{\Theta}_0$ не зависят ни от \mathbf{x} , ни от t , так как все частицы однотипны. Количество движения \mathbf{K}_1 и кинетический момент \mathbf{K}_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1(\mathcal{A}) &= \int_{(V_\Sigma)} \eta(\mathbf{x}, t) \mathbf{m} \mathcal{K}_1(\mathbf{x}, t) dV, & \mathcal{K}_1 &= \mathbf{V}; \\ \mathbf{K}_2(\mathcal{A}) &= \int_{(V_\Sigma)} \eta(\mathbf{x}, t) \mathbf{m} \mathcal{K}_2(\mathbf{x}, t) dV, & & (12.90) \\ \mathcal{K}_2 &= \mathbf{x} \times \mathbf{V} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Theta}_0 \cdot \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\omega},\end{aligned}$$

где второе слагаемое в выражении для \mathcal{K}_2 — массовая плотность динамического спина.

Далее будем считать, что $\mathbf{V} = \text{const}$. Это предположение можно трактовать как то, что частицы среды неподвижны в абсолютном пространстве, а мы пользуемся движущейся \mathcal{S} -системой отсчета.

При $\mathbf{V} = \text{const}$ закон сохранения частиц (12.68) принимает вид

$$\frac{\delta \eta(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \equiv \frac{d\eta(\mathbf{x}, t)}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla \eta(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (12.91)$$

Уравнение (12.91) показывает, что изменение плотности частиц происходит только за счет движения среды относительно \mathcal{S} -системы. Если среда однородна, то

$$\nabla \eta = \mathbf{0}, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0.$$

Запишем первый закон динамики Эйлера (12.70), считая, что массовые силы отсутствуют:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V_\Sigma)} \eta \mathbf{m} \mathbf{V} dV = \int_{(\Sigma)} \mathbf{T}_{(n)} d\Sigma - \int_{(\Sigma)} \eta \mathbf{m} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V} d\Sigma. \quad (12.92)$$

Принимая во внимание (12.91) и условие $\mathbf{V} = \text{const}$, получаем локальную форму (12.92):

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad (12.93)$$

где \mathbf{T} — тензор напряжений.

Запишем второй закон динамики Эйлера (12.74) при условии отсутствия массовых сил:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V_\Sigma)} \eta m \mathcal{K}_2 dV &= \int_{(V_\Sigma)} \eta \mathbf{L} dV + \\ &+ \int_{(\Sigma)} (\mathbf{x} \times \mathbf{T}_{(n)} + \mathbf{M}_{(n)}) d\Sigma - \int_{(\Sigma)} \eta m (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \mathcal{K}_2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (12.94)$$

С учетом (12.91), (12.93) получаем локальную форму (12.94):

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \eta \mathbf{L} = \eta m \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta t}; \quad \mathcal{L} = \mathbf{P} \cdot \Theta_0 \cdot \mathbf{P}^\top \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (12.95)$$

где \mathbf{M} — тензор моментных напряжений.

Система уравнений (12.93), (12.95) содержит 21 неизвестную функцию (по девять координат \mathbf{T} и \mathbf{M} и три параметра, определяющие тензор \mathbf{P}), т. е. она не замкнута. Для замыкания системы (12.93), (12.95) необходимо привлечь определяющие уравнения.

Трудность в том, что мы не знаем, от каких аргументов зависят \mathbf{T} и \mathbf{M} . Чтобы преодолеть это затруднение, воспользуемся уравнением баланса энергии.

Запишем уравнение баланса энергии (12.80), игнорируя массовые силы и тепловые эффекты:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{(V_\Sigma)} \eta (m\mathcal{K} + \mathcal{U}) dV &= \int_{(V_\Sigma)} \eta \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} dV + \\ &+ \int_{(\Sigma)} (\mathbf{T}_n \cdot \mathbf{V} + \mathbf{M}_n \cdot \boldsymbol{\omega}) d\Sigma - \int_{(\Sigma)} \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} (m\mathcal{K} + \mathcal{U}) d\Sigma. \end{aligned} \quad (12.96)$$

В локальной форме уравнение (12.96) принимает вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{M}^\top \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + 2\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (12.97)$$

где учтены уравнения (12.93), (12.95); условие $\mathbf{V} = \text{const}$ и разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{D} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^\top \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}_\times = -2\mathbf{D} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \nabla \times \mathbf{D} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (12.98)$$

С учетом тождеств (12.58), (12.60) преобразуем уравнение (12.97) к виду

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{M}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \left[\left(\frac{1}{2} (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F})_{\times} + \mathbf{D} \right) \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}, \quad (12.99)$$

где тензор деформации \mathbf{F} определяется формулами (12.59).

Если взаимодействия считаются упругими (а именно это будет предполагаться в дальнейшем), уравнение баланса энергии в форме (12.99) позволяет определить, от каких переменных зависит плотность внутренней энергии \mathcal{U} , а также входящие в это уравнение тензор \mathbf{M} и вектор \mathbf{D} :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbf{F}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{F}, \mathbf{P}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{F}, \mathbf{P}). \quad (12.100)$$

Учитывая равенство

$$\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{F}} \right)^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{P}} \right)^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t},$$

уравнение (12.99) переписываем в виде

$$\left(\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{F}} - \mathbf{M} \right)^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \left[\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{P}} - \left(\frac{1}{2} (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F})_{\times} + \mathbf{D} \right) \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = 0. \quad (12.101)$$

Получили линейную функцию скоростей $\frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t}$ и $\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}$, которая должна тождественно обращаться в нуль. Поскольку тензор поворота содержит только три независимые компоненты, не все скорости в (12.101) линейно независимы. В самом деле, из уравнения Пуассона имеем

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} = 0, \quad \forall \mathbf{A} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T. \quad (12.102)$$

С учетом равенства (12.102) можно утверждать, что для справедливости (12.101) при всех возможных процессах необходимо выполнение соотношений:

$$\mathbf{M} = \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{F}}, \quad \left[\frac{1}{2} (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F})_{\times} + \mathbf{D} \right] \times \mathbf{P} = \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{P}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (12.103)$$

Второе из этих равенств, после умножения на \mathbf{P}^T справа и вычисления векторного инварианта с учетом тождества $(\mathbf{c} \times \mathbf{E})_{\times} = -2\mathbf{c}$ и свойства симметричного тензора $\mathbf{A}_{\times} = \mathbf{0}$, дает

$$\mathbf{D} = -\frac{1}{2} \eta \left[\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T + \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathbf{F}} \right)^T \cdot \mathbf{F} \right]_{\times}. \quad (12.104)$$

Соотношениями (12.100), (12.103), (12.104) определяются тензор моментных напряжений \mathbf{M} и антисимметричная часть тензора напряжений \mathbf{T} . Симметричная часть \mathbf{T} должна находиться по (12.98) и дополнительным определяющим уравнениям. Однако в дальнейшем $\boldsymbol{\tau}$ нас интересовать не будет. Обращает на себя внимание тот факт, что $\boldsymbol{\tau}$ не влияет на внутреннюю энергию. Удивляться этому не приходится. Здесь можно вспомнить, что внутренняя энергия абсолютно твердого тела не зависит от напряжений в теле.

12.4.2. Метафизические представления о строении физического мира

В традициях метафизических учений всякую сущность принято делить на семь градаций. Седьмой градацией Космоса является Физический Мир (Мир плотный, седьмой космический эфир, космическое твердое тело). Физический Мир, в свою очередь, делится на семь градаций, называемых эфирами. Каждый из этих эфиров имеет дискретное строение, т. е. атомную структуру. Плотности этих эфиров заметно различаются, они как бы вложены один в другой. Эфиры взаимодействуют между собой сложным образом и подчиняются так называемому “закону действия тройной силы в четырех мирах”.

Другое название этого закона — “принцип додекаэдра Пифагора”. Точный смысл этого закона нам неизвестен и упоминается он для того, чтобы читатель мог осознать трудности, возникающие при попытках изучить метафизические учения. Описанию подлежит только то, что поддается анализу методами современной рациональной науки. Итак, Физический Мир расслаивается на семь эфиров.

Первый эфир состоит из быстровращающихся частиц одного сорта, образующих как бы кристаллическую решетку. По этой причине его часто именуют “подвижная неподвижность”. Частицы первого эфира неделимы на уровне Физического Мира, а их массы настолько малы, что даже фотоны в сравнении с ними обладают невообразимо огромными массами. Первый эфир практически неощутим на уровне макромира, но на микрочастицы вплоть до электронов оказывает влияние.

Комментарий. Первый эфир не рассматривается и не упоминается в современной физике. Однако он вовсе не является совершенно незнакомым современной науке. Прежде всего, первый эфир является едва ли не единственным претендентом на то, что субъективно ощущается человеком как время. Вдумаемся в следующее заявление И. Ньютона [32, с. 45]: «Таким образом, повсюду, где в дальнейшем встречается слово “время”... под ним нуж-

но понимать не время в его формальном значении, а только ту отличную от времени величину, посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время». Существует ли эта “отличная от времени величина”? А если существует, то какую бы природу она могла иметь? Легко понять, что время не может быть связано с какими-либо характеристиками трансляционного движения. Однако, если вообразить, что в каждой точке пространства имеется некое тело, совершающее перманентное вращение, то субъективное ощущение времени становится физической реальностью. Угол, накручиваемый упомянутым телом, как раз и может служить той величиной, о которой говорит Ньютон. Более определенно пишет об этом наш современник Н. А. Козырев в своих работах, посвященных причинной механике [91]. Работы Н. А. Козырева чрезвычайно уязвимы для формальной критики, но стоит заменить в них термин “время” на термин “первый эфир”, как многое в его рассуждениях становится ясным, по крайней мере, на интуитивном уровне. В следующем разделе будет показано, что типичными уравнениями, описывающими первый эфир, являются уравнения Шредингера и Клейна–Гордона.

Второй эфир — электромагнитное состояние материи. Атомы второго эфира являются уже сложными образованиями, но и эти атомы чрезвычайно малы — их массы много меньше массы фотона. Возмущения в этом эфире распространяются со скоростью света и более высокими.

Комментарий. Второй эфир — это то, что в современной физике называется электромагнитным полем. Но стоит подчеркнуть, что в отличие от воззрений физиков, электромагнитное поле не имеет никакого отношения к зарядам, хотя заряженные микротела (например электроны) вносят сильные возмущения в электромагнитное поле. Типичными уравнениями, описывающими динамику второго эфира, являются уравнения максвелловского типа, но более сложные¹⁷.

Третий эфир, или световое состояние материи. Это, собственно говоря, взвесь мельчайших частиц в электромагнитном поле. Массы этих частиц, называемых фотонами, уже известны, вероятно, достоверно. Они имеют порядок 10^{-65} г. Весьма похоже на то, что свет — это движение упомянутых мельчайших частиц в электромагнитном поле на скорости распространения сигналов во втором эфире. Какие при этом происходят явления, легко представить себе, если рассмотреть движение самолета в атмосфере со скоростью, в точности равной скорости звука. Если третий эфир действительно реален,

¹⁷ Нелинейные уравнения, описывающие динамику второго эфира (электромагнитного поля), обсуждаются в подразделе 12.5.3. (*Примеч. ред.*)

то корпускулярно-волновая природа света становится самоочевидной.

Четвертый эфир, или тепловое состояние материи. Этот эфир уже достаточно хорошо известен под названием плазмы. Отличие его от плазмы заключено в том, что в плазме недостаточно учитываются спинорные движения (вращательные степени свободы). Именно в этом эфире зарождается то свойство тел, которое проявляется как заряд в последующих эфирах. Однако, например, фрикционное электричество, не имеющее прямого отношения к привычному нам электричеству, объясняется именно на уровне четвертого эфира. Четвертый эфир играет исключительно важную роль во многих метафизических учениях.

Пятый, шестой и седьмой эфиры не нуждаются в комментариях, ибо это газообразное, жидкое и твердое состояние тел, соответственно. Отметим только, что электричество является атрибутом этих эфиров.

В заключение еще раз подчеркнем, что все указанное ранее является не более, чем предположением для рациональной науки. Это можно рассматривать как нулевое приближение к Реальности. Тщательный анализ математических моделей описанных эфиров покажет, насколько они приемлемы, а в чем потребуют значительных уточнений. Данный анализ, конечно, проявит дополнительные возможности интуиции, и тогда возникнет новое приближение к Реальности. Как бы плохи ни были сформулированные представления, они все-таки, за неимением лучших, необходимы для рациональной механики.

12.4.3. Квантово-механические аналогии

В подразделе 12.4.1 представлена, по существу, общая теория чисто моментной среды, в которой частицы только вращаются, их трансляционные движения обусловлены исключительно движением системы отсчета. Выведенные уравнения являются более общими, чем это необходимо для первого эфира. Они просто показывают, в каком классе уравнений следует искать динамические уравнения первого эфира. Далее примем значительные ограничения, которые, разумеется, не обязательны с чисто теоретической точки зрения и оправдываются на этапе их построения исключительно интуитивными представлениями. Важно, чтобы эти ограничения не вступали в противоречия ни с формальной логикой, ни со всеми предыдущими рассуждениями.

Прежде всего, примем, что частицы первого эфира обладают трансверсально-изотропными тензорами инерции

$$m\Theta_0 = \lambda \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}), \quad (12.105)$$

где λ и μ — осевой и экваториальный моменты инерции, единичный вектор \mathbf{e} задает ось изотропии. Вектор \mathbf{e} фиксирован в \mathcal{S} -системе.

Стационарное состояние первого эфира является для нас основным и определяется заданием тензора поворота вида

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\Omega t \mathbf{e}) \equiv (1 - \cos \Omega t) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \cos \Omega t \mathbf{E} + \sin \Omega t \mathbf{e} \times \mathbf{E}, \quad (12.106)$$

где $\Omega = \text{const}$ есть угловая скорость вращения частицы.

Тензору поворота (12.106) отвечают угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ и тензор деформации \mathbf{F} следующего вида:

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Считаем, что тензору деформации $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ и тензору поворота (12.106) отвечают нулевой тензор \mathbf{M} и нулевой вектор \mathbf{D} :

$$\mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(\Omega t \mathbf{e})) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}(\Omega t \mathbf{e})) = \mathbf{0}.$$

Эти допущения аналогичны гипотезе натурального состояния в механике сплошных сред. Очевидно, что при стационарном состоянии эфира основное уравнение динамики эфира (12.95) выполняется тождественно.

Таким образом, стационарное состояние первого эфира, если он вообще существует, дает нам то, что субъективно воспринимается как время: в каждой точке пространства угол $\alpha = \Omega t$, накручиваемый частицей, по существу не отличим от времени.

Может вызвать удивление тот факт, что в пространстве (системе отсчета) появилась выделенная ось \mathbf{e} , т. е. появилась определенная анизотропия. Соответствует ли она Реальности? Трудно ответить на этот вопрос, но нельзя и отрицать такую возможность. Например, строение Солнечной системы и Галактик указывает на их стремление расположиться в одной плоскости, а нормаль к этой плоскости, возможно, и дает нам ось \mathbf{e} . Можно указать и другие соображения. В любом случае требуется тщательный анализ. Пока рассматриваем все указанное как сугубо теоретическую возможность и не более того.

Обратимся к выводу уравнений, описывающих распространение возмущений в первом эфире. Примем, что эти возмущения малы по норме.

Тензор поворота представим в виде композиции поворота (12.106) и малого поворота:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\theta \mathbf{m}) \cdot \mathbf{Q}(\varphi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{Q}(\Omega t \mathbf{e}), \quad (12.107)$$

$$|\mathbf{m}| = 1, \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{e} = 0,$$

где ψ , θ , φ — углы прецессии, нутации и собственного вращения, т. е. углы Эйлера, описывающие малый поворот. Малым здесь является только угол нутации θ : $|\theta| \ll 1$.

Выражение (12.107) легко переписать в другом виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathbf{E} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}(\beta \mathbf{e}), \\ \beta &= \Omega t + \psi + \varphi, \quad \boldsymbol{\gamma} = \theta \mathbf{Q}(\psi \mathbf{e}) \cdot \mathbf{m}, \end{aligned} \quad (12.108)$$

где вращающийся вектор нутации $\boldsymbol{\gamma}$ ($\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{e} = 0$) мал по модулю: $|\boldsymbol{\gamma}| = |\theta|$. Малой считается и сумма $\varphi + \psi$.

Нетрудно вычислить вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и тензор деформации \mathbf{F} , отвечающие тензору поворота (12.108):

$$\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{e} + \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} + \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e} + \left(\frac{\delta \psi}{\delta t} + \frac{\delta \varphi}{\delta t} \right) \mathbf{e}, \quad (12.109)$$

$$\mathbf{F} = \nabla [\boldsymbol{\gamma} + (\varphi + \psi) \mathbf{e}]. \quad (12.110)$$

Видим, что $\boldsymbol{\omega}$ содержит большое слагаемое $\Omega \mathbf{e}$, а тензор деформации \mathbf{F} является малой величиной.

Примем основные допущения, характерные не для всякой моментной среды, а только для первого эфира:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \varphi + \psi = 0. \quad (12.111)$$

Тогда линейризованное выражение для динамического спина принимает вид

$$m\mathcal{L} = \lambda \Omega \mathbf{e} + \mu \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} + \lambda \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \quad m\mathcal{L} \cdot \mathbf{e} = \lambda \Omega = \text{const}. \quad (12.112)$$

Выражения (12.109), (12.110) и (12.60) принимают вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \Omega \mathbf{e} + \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} + \Omega \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}, \quad \mathbf{F} = \nabla \boldsymbol{\gamma}, \\ \nabla \boldsymbol{\omega} &= \frac{\delta(\nabla \boldsymbol{\gamma})}{\delta t} + \nabla \boldsymbol{\gamma} \times \Omega \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (12.113)$$

Уравнение баланса энергии (12.97) переписывается в виде

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{M}^\top \cdot \frac{\delta(\nabla \boldsymbol{\gamma})}{\delta t} + 2\mathbf{D} \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} + \Omega [\mathbf{M}^\top \cdot (\nabla \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) + 2\mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e})].$$

Инвариантность внутренней энергии по отношению к замене системы отсчета приводит к условию, которое в линеаризованном случае дает равенство¹⁸

$$\mathbf{M}^T \cdot \cdot (\nabla \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) + 2\mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}) = 0. \quad (12.114)$$

Поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \mathbf{M}^T \cdot \cdot \frac{\delta(\nabla \boldsymbol{\gamma})}{\delta t} + 2\mathbf{D} \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} = \mathcal{U}(\nabla \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (12.115)$$

Соотношения Коши–Грина (12.103), (12.104) принимают совсем простой вид:

$$\mathbf{M} = \frac{\delta \eta \mathcal{U}}{\delta \nabla \boldsymbol{\gamma}}, \quad 2\mathbf{D} = \frac{\delta \eta \mathcal{U}}{\delta \boldsymbol{\gamma}} \quad (\eta = \text{const}). \quad (12.116)$$

В линейной теории для внутренней энергии можно принять квадратичную форму

$$\eta \mathcal{U} = \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdot \cdot \mathbf{A} \cdot \cdot \nabla \boldsymbol{\gamma} + \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdot \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad (12.117)$$

где тензоры четвертого ранга \mathbf{A} , третьего ранга \mathbf{B} и второго ранга \mathbf{C} трансверсально изотропны с осью изотропии \mathbf{e} и удовлетворяют ограничениям

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \cdot \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{d}, & \mathbf{e} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{e} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{0}, & \mathbf{B} \cdot \mathbf{e} &= \mathbf{0}, & \mathbf{C} &= \mathbf{C}^T, & \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

причем тензор второго ранга \mathbf{d} здесь произволен. Эти ограничения, очевидно, не уменьшают степени общности (12.117).

Общий вид трансверсально-изотропных тензоров, удовлетворяющих приведенным ограничениям, определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_0 \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{e} \otimes \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{e} + \mathbf{A}_1 (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \otimes (\mathbf{E} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) + \\ &+ \mathbf{A}_2 (\mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\beta \otimes \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\alpha \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{i}_\alpha) + \mathbf{A}_3 (\mathbf{e} \times \mathbf{E}) \otimes (\mathbf{e} \times \mathbf{E}), \end{aligned} \quad (12.118)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{a}, \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = 0, \quad \mathbf{e} = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2, \quad |\mathbf{i}_\alpha| = 1,$$

где подразумевается суммирование по греческим индексам от 1 до 2.

¹⁸ Если выбрать систему отсчета, вращающуюся с постоянной угловой скоростью вокруг вектора \mathbf{e} , то уравнение баланса энергии, записанное в новой системе отсчета, будет отличаться от исходного только тем, что вместо $\boldsymbol{\Omega}$ будет другая угловая скорость. Следовательно, в силу инвариантности внутренней энергии по отношению к замене системы отсчета коэффициент при угловой скорости должен быть равен нулю. (*Примеч. ред.*)

Энергия деформации (12.117) положительно определена, если выполнены неравенства

$$A_0 > 0, \quad A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0, \quad C > 0.$$

Условие (12.114) будет выполнено, если $A_3 = A_1 + A_2$.

Простейшая форма энергии для первого эфира имеет вид

$$\eta \mathcal{U} = \frac{1}{2} A \nabla \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla \boldsymbol{\gamma}^T + \frac{1}{2} C \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad A > 0, \quad C > 0. \quad (12.119)$$

В этом случае

$$\mathbf{M} = A \nabla \boldsymbol{\gamma}, \quad 2\mathbf{D} = C \boldsymbol{\gamma}. \quad (12.120)$$

Уравнение баланса кинетического момента, т. е. второй закон динамики Эйлера (12.95), в случае (12.120) принимает простой вид

$$A \Delta \boldsymbol{\gamma} - C \boldsymbol{\gamma} = \eta \mu \frac{\delta^2 \boldsymbol{\gamma}}{\delta t^2} + \eta \lambda \Omega \frac{\delta \boldsymbol{\gamma}}{\delta t} \times \mathbf{e}. \quad (12.121)$$

Приняв условие

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} \equiv \frac{d}{dt}, \quad (12.122)$$

уравнение (12.121) можно переписать в виде

$$A \Delta \boldsymbol{\gamma} - C \boldsymbol{\gamma} = \eta \mu \frac{d^2 \boldsymbol{\gamma}}{dt^2} + \eta \lambda \Omega \frac{d \boldsymbol{\gamma}}{dt} \times \mathbf{e}. \quad (12.123)$$

На первый взгляд кажется, что уравнение (12.123) не встречалось ранее в физике. Однако это не совсем так. Запишем уравнение (12.123) в скалярной форме. Представим вектор $\boldsymbol{\gamma}$ в виде разложения по базису

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1 \mathbf{i}_1 + \gamma_2 \mathbf{i}_2$$

и введем функцию

$$\Psi = \gamma_1 + i \gamma_2, \quad i^2 = -1. \quad (12.124)$$

Тогда уравнение (12.123) записывается в виде

$$-\eta \mu \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + i \eta \lambda \Omega \frac{d \Psi}{dt} = -A \Delta \Psi + C \Psi. \quad (12.125)$$

Если в этом уравнении отбросить первое слагаемое в левой части, то получаем хорошо известное уравнение Шредингера. Если отбросить второе слагаемое, то получаем не менее известное уравнение Клейна–Гордона. Оба уравнения лежат в основаниях квантовой механики. Напомним, что “вывод” этих

уравнений в квантовой механике основан на весьма неубедительных для механиков рассуждениях. По сути, единственное оправдание этих уравнений — вытекающие из них результаты.

Более удобной является форма (12.123). Для разделения переменных в (12.123) будем искать его решение в виде

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, t) \cdot \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{p} \mathbf{e} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \ddot{\boldsymbol{\gamma}} = -p^2 \boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{e} = 0.$$

Тогда для вектора $\boldsymbol{\Gamma}$ получаем уравнение

$$A\Delta\boldsymbol{\Gamma} - C\boldsymbol{\Gamma} = -(\eta\mu p^2 - \eta\lambda\Omega p)\boldsymbol{\Gamma}. \quad (12.126)$$

Частные решения этого уравнения ищутся в виде

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_* \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}),$$

где \mathbf{k} называется волновым вектором. Подставляя это выражение в (12.126), получаем дисперсионное уравнение

$$\eta\mu p^2 - \eta\lambda\Omega p - (C + Ak^2) = 0, \quad k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}.$$

Откуда получаем

$$p_{1,2} = \frac{\lambda\Omega}{2\mu} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda\Omega}{2\mu}\right)^2 + \frac{C + Ak^2}{\eta\mu}}. \quad (12.127)$$

Итак, в первом эфире имеется две скорости распространения волн, значительно различающиеся по величине.

Заметим, что угловая скорость Ω существенно влияет на структуру уравнения (12.123) и именно она, видимо, в первую очередь может претендовать на роль фундаментальной мировой константы.

Можно предположить, что первый эфир играет главную роль в объяснении строения ядер и атомов. Для макротел первый эфир практически не ощутим, если не принимать во внимание особо тонких экспериментов.

12.5. Мультиполярная среда и электродинамика Максвелла

12.5.1. Механика и электромагнетизм

Между механикой, с одной стороны, и электродинамикой, с другой стороны, существуют огромные различия. Строго говоря, эти две науки нельзя

сопоставлять. В самом деле, механика как наука — это не теория каких бы то ни было явлений Природы. Механика — это метод исследования Природы. Мнение о том, что механика имеет ограниченную область применимости, основано, главным образом, на ее фактической неспособности в настоящее время описать целый ряд явлений, известных в экспериментальной физике. Тем не менее никто не доказал, что механика принципиально не способна описать эти явления. Электродинамика, в противоположность механике, — это теория определенного класса явлений Природы. Поэтому на самом деле речь должна идти не об объединении механики и электродинамики, а о включении электродинамики в механику, т. е. об описании электромагнитных явлений на основе принципов механики. Современная теоретическая физика признала эту задачу неразрешимой. Уравнения Максвелла считаются чем-то вроде божественного откровения, не требующего обоснования. Последующее развитие физики все дальше уводило ее от классической механики. В настоящее время главную роль исполняет квантовая физика, которая объявила о “решительном разрыве с классической механикой”.

Следует подчеркнуть, что включение электродинамики в механику менее всего диктуется намерением возвести “венiec теоретической физики” (см. [88]). В настоящее время подобная цель выглядит, по меньшей мере, наивно. Существование проблемы носит вполне прагматический, если не сказать утилитарный, характер. Фактически, уже в настоящее время проблемы механики и электродинамики переплелись настолько тесно, что их невозможно разделить. В самом деле, механические свойства деформируемых тел, внутреннее трение в идеальных кристаллах, теория пьезоэлектрических и ферромагнитных материалов, динамика электрических машин и многие другие проблемы не могут рассматриваться без учета взаимодействия “чисто механических” и электромагнитных явлений. Поэтому чрезвычайно важно описывать эти явления на одном языке и в рамках единой непротиворечивой логики. В настоящее время этого нет. Например, известна важнейшая роль, которую играет в электромеханике сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}),$$

где q — заряд; \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля; \mathbf{B} — вектор магнитной индукции; \mathbf{V} — скорость движения заряда. С точки зрения механики это выражение для силы неприемлемо, поскольку оно не удовлетворяет принципу материальной объективности. К сожалению, указанным обстоятельством отнюдь не исчерпывается список претензий к силе Лоренца.

Таким образом, перед механикой как методом исследования природных

явлений уже давно поставлена очень трудная задача о расширении сферы действия на область электромагнитных явлений. Следуя установившимся взглядам, можно, видимо, признать, что в основе теории электромагнитных явлений лежит концепция электромагнитного поля. Для того чтобы применить метод механики к описанию и исследованию электромагнитного поля, прежде всего, необходимо выбрать определенную точку зрения. Необходимо ответить на вопрос: “Что такое электромагнитное поле: некая материальная среда или способ описания взаимодействий между объектами, которые в физике принято называть зарядами?” В зависимости от ответа на этот вопрос механика, будучи именно методом исследования, приведет к совершенно различным теориям. Если электромагнитное поле есть некая среда, то следует использовать методы механики сплошных сред. Если это способ описания взаимодействий между зарядами, то предварительно необходимо определить, что такое заряд. Ответа на последний вопрос в настоящее время никто не знает. Неизвестно даже, является ли заряд формой некоей субстанции или это характеристика некоей формы движения чего-то, или это вообще что-то совершенно иное. Без ясного определения понятия заряда, т. е. без явного включения заряда в одну из основных структур механики, метод механики совершенно бессилён и бесполезен. Поэтому в настоящее время механика имеет шансы на успех только в том случае, если электромагнитное поле является некоей сплошной средой или, точнее говоря, может моделироваться некоей сплошной средой. Последняя концепция известна очень давно под названием эфира. Тем не менее всякое упоминание об эфире вызывает у физиков-теоретиков нечто вроде аллергии. Профессионалам легко понять причины неприятия концепции эфира. Дело в том, что профессиональных теоретиков не устраивают разговоры об эфире. Необходимы корректные математические формулировки концепции эфира. В этой связи было предпринято много серьезных попыток построить удовлетворительную теорию эфира [86], но все они при внимательном рассмотрении оказались неприемлемыми в теоретическом отношении. Поэтому наименьшим из зол оказалось принятие уравнений Максвелла как данность, без увязки их с какими бы то ни было механическими моделями. Так, собственно, и возник разрыв между механикой и теорией электромагнитных явлений. Вернемся к концепции эфира, рассматриваемого с позиций рациональной механики сплошных сред. Впрочем, термин “эфир” в дальнейшем использоваться не будет, поскольку фактически эфир напоминает “слоеный пирог”. Электромагнитное поле есть только верхний и наиболее грубый слой этого пирога. Вернувшись к концепции эфира следует, прежде всего, уяснить причины неудовлетворительности прежних подходов, изложенных в [86], и способы их

устранения. Сформулируем концепцию электромагнитного поля в том виде, в каком она будет реализована далее в рамках рациональной механики.

Итак, будем считать, что электромагнитное поле может моделироваться некоей сплошной средой. Эта среда принципиально отличается по своей структуре от всех рассмотренных ранее. По современной терминологии ее можно назвать жидким кристаллом. Электромагнитное поле играет огромную роль в Природе, ибо без его участия мир видимых вещей вообще не смог бы возникнуть. Процесс рождения видимых вещей во многом напоминает сбивание масла из молока. При этом электромагнитное поле играет роль вибратора или болтушки, однако важны не эти метафизические заявления, которые едва ли доказуемы, но одна важная особенность, которая должна быть присуща удовлетворительной модели электромагнитного поля: оно должно обладать собственной энергией для функционирования в качестве вибратора. Классическая модель электромагнитного поля этим свойством не обладает. Основным видом движения в электромагнитном поле являются спиновые движения, игнорируемые в ньютоновской механике. Иными словами, электромагнитное поле есть среда, состоящая из быстровращающихся частиц¹⁹. Именно посредством энергии вращений частиц электромагнитное поле запасает собственную энергию, хотя оно, кроме того, обладает внутренней энергией, которую принято называть энергией деформации или упругим потенциалом. Поэтому старые теории эфира, основанные на ньютоновской механике, не имели шансов на успех.

Важно подчеркнуть, что электромагнитное поле само по себе не имеет никакого отношения к тому, что в физике принято называть зарядом. В этом серьезное отличие от точки зрения, принятой в физике, согласно которой электромагнитное поле порождается зарядами. Однако заряженные тела вносят возмущения в электромагнитное поле. Если эти возмущения назвать электромагнитным полем, то терминологические расхождения с физикой исчезнут. Мы предпочитаем называть электромагнитным полем саму среду, а не возмущения в ней. Это дает возможность временно отложить обсуждение трудной и спорной проблемы заряда. Все указанное ранее является интуитивным представлением, которое должно быть реализовано на основе строгих методов и принципов рациональной механики.

Тем, кому по тем или иным причинам не нравится концепция эфира в любой ее форме, можно указать на другую трактовку получаемых далее уравнений. Суть трактовки поясним на примере. Допустим, что изучается некое явление, характеризуемое одним параметром x . Пусть в этом

¹⁹ Точнее говоря, двухспиновых частиц, которые будут введены позднее.

явлении параметр x удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t).$$

Тогда, независимо от природы параметра x , можно утверждать, что все обстоятельства, сопровождающие рассматриваемое явление, могут быть истолкованы в терминах груза на пружинке. Совершенно аналогично, если построить некую непротиворечивую механическую модель, поведение которой описывается уравнениями, в точности совпадающими с уравнениями Максвелла, то можно в рамках этой модели истолковать все явления, описываемые уравнениями Максвелла. Такое истолкование часто оказывается полезным. Приведем в этой связи высказывание Х. Лоренца [86]: “В последнее время механические объяснения происходящих в эфире процессов все более отступают на задний план. Для многих физиков основной частью теории является точное количественное описание явлений, как, например, данное в уравнениях Максвелла. Однако, даже если стоять на такой точке зрения, механические аналогии все же сохраняют некоторое значение. Они помогают нам думать о явлениях и могут явиться источником идей для новых исследований”.

12.5.2. Классическая электродинамика Максвелла

Рассмотрим континуум, состоящий из частиц с кинетической энергией (12.89). Вывод основных уравнений, описывающих динамику этой среды, содержится в разделе 12.4. Примем следующие предположения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \eta = \text{const.} \quad (12.128)$$

В рассматриваемом случае материальная производная совпадает с полной производной по времени. Первый закон динамики Эйлера выполняется тождественно. Второй закон динамики Эйлера имеет вид (12.95), где $\mathbf{T}_\times = \mathbf{0}$.

Тензор моментных напряжений будем считать антисимметричным:

$$\mathbf{M} = \omega^{-1} \mathbf{B} \times \mathbf{E}, \quad \omega = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = \omega^{-1} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (12.129)$$

где вектор \mathbf{B} будем называть вектором магнитной индукции; ω — размерная константа. Тогда второй закон динамики Эйлера (12.95) принимает вид

$$\omega^{-1} \nabla \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{L} = \eta m \frac{d\mathcal{L}}{dt}. \quad (12.130)$$

Уравнение баланса энергии (12.97) принимает совсем простой вид:

$$\eta \frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\omega^{-1} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (12.131)$$

Кинетический момент примем в простейшей из всех возможных форм:

$$m\mathcal{L} = \lambda\omega, \quad \mathcal{E} = \omega c^2 \eta m\mathcal{L}, \quad c = \text{const.} \quad (12.132)$$

Вектор \mathcal{E} , введенный вместо вектора кинетического момента частицы, будем называть вектором напряженности электрического поля; константа c — скорость света в вакууме.

Наконец, примем, что повороты частиц являются малыми. Тогда вектор угловой скорости вычисляется по вектору малого поворота θ посредством простейшей формулы:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \omega c^2 \eta \lambda \frac{d\theta}{dt}. \quad (12.133)$$

Подставляя (12.132) в уравнение (12.130), получаем

$$\nabla \times \mathcal{B} + \omega \eta \mathbf{L} = \frac{1}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt}. \quad (12.134)$$

Уравнение баланса энергии (12.131) с учетом (12.133) принимает вид

$$\eta \frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\omega^{-1} \mathcal{B} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \times \theta. \quad (12.135)$$

Для внутренней энергии также примем простейшее представление:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \kappa |\nabla \times \theta|^2, \quad \kappa = \text{const} > 0. \quad (12.136)$$

Тогда для вектора магнитной индукции \mathcal{B} , согласно (12.135), получим²⁰:

$$\mathcal{B} = -\omega \eta \kappa \nabla \times \theta. \quad (12.137)$$

Подставив (12.133) и (12.137) в (12.134), можно получить дифференциальное уравнение для вектора поворота θ :

$$\kappa (\Delta \theta - \nabla \nabla \cdot \theta) + \mathbf{L} = \lambda \frac{d^2 \theta}{dt^2}. \quad (12.138)$$

Однако можно действовать иначе. Исключая вектор поворота из выражений для вектора напряженности электрического поля \mathcal{E} и вектора магнитной индукции \mathcal{B} , получаем следующее уравнение неразрывности:

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{d\mathcal{B}}{dt}, \quad \kappa = \lambda c^2. \quad (12.139)$$

²⁰ Следствием определяющего уравнения (12.137) является закон Гаусса для магнитного поля $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$. (Примеч. ред.)

В физике это уравнение известно под именем закона индукции Фарадея. Именно с него начиналась электродинамика Максвелла. Сам Максвелл предложил уравнение (12.134), в котором роль момента $\omega\eta\mathbf{L}$ играет ток²¹:

$$\omega\eta\mathbf{L} = -\mu_0\mathbf{j} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j},$$

где \mathbf{j} — плотность тока; μ_0 — магнитная постоянная; ε_0 — электрическая постоянная.

Как видим, при рассматриваемом подходе уравнение (12.139) не выражает какого-либо физического закона, а является просто уравнением совместности. Выпишем теперь уравнения (12.134) и (12.139) в виде системы и в том порядке, как это принято в физике:

$$\nabla \times \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{d\mathcal{B}}{dt}, \quad \nabla \times \mathcal{B} + \omega\eta\mathbf{L} = \frac{1}{c^2} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}. \quad (12.140)$$

Пришли к уравнениям, которые по форме совпадают с классическими уравнениями Максвелла в трактовке Хевисайда. Имеется, впрочем, одно различие: в правых частях уравнений Максвелла, используемых в физике, стоят частные производные по времени, что невозможно с точки зрения механики, поскольку операторы частного дифференцирования по времени необъективны²².

Таким образом, ранее была рассмотрена некая сплошная среда. Используя стандартные рассуждения механики сплошных сред, мы вывели для нее

²¹ Если, следуя общепринятым представлениям, согласно которым плотность тока есть скорость протекания заряда сквозь единицу площади, принять закон сохранения заряда $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt}$, можно показать, что следствием уравнения (12.134) является закон Гаусса $\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Действительно, вычислив дивергенцию обеих частей уравнения (12.134) и

приняв во внимание соотношение $\omega\eta\mathbf{L} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}$, получим $\frac{d(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon})}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{j}$. Проинтегрировав по времени последнее уравнение с учетом закона сохранения заряда, получим закон Гаусса. Как отмечается в [1], по Максвеллу, ток не обязательно связан с движением зарядов. Это обстоятельство весьма существенно, поскольку закон сохранения заряда является необходимым условием разрешимости уравнений Максвелла. В седьмой главе [1] представлены модифицированные уравнения Максвелла, для которых вполне допустимо вместо закона сохранения заряда использовать закон изменения заряда $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{d\rho}{dt} + \mathbf{h}$, где \mathbf{h} — объемная плотность скорости подвода заряда в рассматриваемую систему. Модифицированные уравнения Максвелла можно получить при специальном выборе момента $\omega\eta\mathbf{L}$. (*Примеч. ред.*)

²² Вопрос о том, почему в уравнениях Максвелла частные производные по времени следует заменить полными производными, подробно обсуждается в седьмой главе книги П. А. Жилина [1]. (*Примеч. ред.*)

все основные соотношения и получили замкнутую систему уравнений, которая по своему виду совпала с уравнениями Максвелла, причем влияние заряда на поле учитывается вектором $\omega\eta\mathbf{L}$.

По воззрениям, принятым в современной теоретической физике, уравнения Максвелла описывают электромагнитное поле, которое, в свою очередь, является некоей абстракцией, дающей удобное описание электромагнитных взаимодействий, но не имеющей материального носителя. Подобная точка зрения принципиально отличается от точки зрения, которая была выдвинута М. Фарадеем и реализована, по мере возможностей того времени, Дж. Максвеллом. Как было отмечено во введении, наша точка зрения совпадает с позицией Фарадея и Максвелла. Обратимся к обсуждению полученных уравнений.

Во-первых, полное внешнее сходство полученных уравнений с уравнениями Максвелла не означает, что они полностью эквивалентны. Фактически уравнения (12.140) более информативны. В самом деле, в классических уравнениях неясен тип векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} . Известно только, что если \mathbf{E} полярен, то \mathbf{B} аксиален, и наоборот. Считается [18, с. 75], что выбор типа вектора напряженности электрического поля условен и может быть сделан произвольно. В современной физике принято, что вектор напряженности электрического поля полярен. Отмеченный произвол отсутствует в уравнениях (12.140), где вектор \mathbf{E} однозначно аксиален, а вектор \mathbf{B} полярен. Отсюда вытекают важные следствия. В частности, если посмотреть на формулу Лоренца $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$, то сразу видим, что либо сама формула Лоренца неприемлема, либо заряд является аксиальным скаляром, т. е. является некоей характеристикой вращательного движения. В данной работе проблема заряда не обсуждается, но указанное свойство заряда будет принципиально важным при построении теории взаимодействия электромагнитного поля с веществом.

Во-вторых, предлагаемые уравнения показывают, что говорить об их инвариантности относительно преобразований Галилея или преобразований Лоренца совершенно бессмысленно, ибо они справедливы в одной и только одной системе отсчета, которая неподвижна относительно электромагнитного поля. Это следует из ограничения (12.128).

В-третьих, уравнения (12.140) имеют ясную механическую интерпретацию. Это важно в силу следующих соображений. Допустим, что по тем или иным причинам нас не удовлетворяют классические уравнения Максвелла и в них нужно внести какие-то изменения. Это отнюдь не гипотетическое допущение, ибо известно, что классические уравнения не позволяют построить последовательную теорию атома²³. Следовательно, изменения нужны, но что

²³ По этому поводу можно посмотреть книги по квантовой физике.

именно нужно менять? Классические уравнения не дают никакого ответа на этот вопрос. Наличие механической интерпретации не только дает направление уточнений, но и показывает их настоятельную необходимость, что и будет сделано в следующем разделе. Отметим, что механическую интерпретацию собственно уравнений Максвелла можно дать и в рамках ньютоновской механики [89]. Различие с данным исследованием заключается в том, что вектор поворота заменен вектором перемещения²⁴. При этом возникает одна проблема. В самом деле, допустим, что в формуле (12.133) мы заменили вектор $\lambda\theta$ на вектор перемещения \mathbf{u} . Тогда в электростатике вектор перемещения линейно зависит от времени и нарастает во времени до бесконечности, что никому не может понравиться. Возрастание во времени вектора поворота не противоречит здравому смыслу, поскольку частица вращается, не меняя своего положения в пространстве.

В-четвертых, механический смысл уравнений (12.140) дает ответ на вопрос: “Как может Земля двигаться сквозь упругую среду, какой по существу является светонесущий эфир?” (Лорд Кельвин, 1900 г.). Ранее была рассмотрена среда, которая по построению является упругой, но она не может оказывать силового воздействия на тела, поскольку эта среда может взаимодействовать с другими телами только посредством моментов.

12.5.3. Общая нелинейная теория электромагнитного поля

В разделе 12.5 мы рассмотрели классическую электродинамику и видели, что для ее получения пришлось принять значительные ограничения. Например, ограничение $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ исключает возможность замены системы отсчета. Поэтому необходимо рассмотреть более общую ситуацию. Ниже мы будем использовать обозначения подраздела 12.5.2. Примем следующие допущения:

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{D} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T, \quad \mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}^{-1} \mathcal{B} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{V} = \text{const.} \quad (12.141)$$

Последнее ограничение не препятствует замене инерциальных систем отсчета. При принятых ограничениях из закона сохранения частиц (12.67) следует, что плотность частиц удовлетворяет условию²⁵

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \eta(\mathbf{x} - \mathbf{V}t).$$

²⁴ Механическая интерпретация, основанная на трансляционных степенях свободы, подробно обсуждается в седьмой главе книги П. А. Жилина [1]. (*Примеч. ред.*)

²⁵ Решение уравнения баланса частиц в случае $\mathbf{V} = \text{const}$ можно найти, например, в [1]. (*Примеч. ред.*)

В частности, для однородной среды имеем $\eta = \text{const}$. Первый закон динамики (12.72) при условии $\eta \mathbf{F} = \mathbf{0}$ принимает вид

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \omega^{-1} \nabla \times \mathcal{D} = \mathbf{0}. \quad (12.142)$$

Это равенство налагает ограничение на симметричную часть тензора напряжений, который в дальнейшем нам не понадобится. Важно только то, что тензор напряжений в среде самоуравновешен, т. е. такая среда не оказывает силового воздействия на другие тела. Второй закон динамики (12.76) принимает вид

$$\omega^{-1} (\nabla \times \mathcal{B} - 2\mathcal{D}) + \eta \mathbf{L} = \eta m \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta t}. \quad (12.143)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только двухспиновых частиц, т. е. частиц, состоящих из несущего тела и ротора. Тогда для кинетического момента вместо (12.77) будем иметь представление

$$m\mathcal{L} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot m\mathbf{C}_* \cdot \mathbf{P}^T(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \lambda_r \frac{\delta \beta(\mathbf{x}, t)}{\delta t} \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t), \quad (12.144)$$

где λ_r — осевой момент инерции ротора; β — угол поворота ротора относительно несущего тела.

Примем, что несущее тело частицы обладает трансверсально изотропным тензором инерции с осью изотропии \mathbf{n} , совпадающей с осью вращения ротора. Кроме того, будем считать, что центры масс несущего тела и ротора расположены на прямой \mathbf{n} . В таком случае тензор инерции $m\mathbf{C}_*$, определенный формулой (12.17), принимает вид

$$m\mathbf{C}_* = \lambda \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \quad (12.145)$$

где приняты обозначения

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_r, \quad \mu = \mu_0 + \mu_r + m_0 l_0^2 + m_r l_r^2, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = l_0 \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_r = l_r \mathbf{n},$$

индекс 0 относится к несущему телу, а ротору отвечает индекс r.

В принятых обозначениях кинетический момент (12.144) можно представить в следующей форме:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \omega c^2 \eta m \mathcal{L} = \omega c^2 \eta \left[\mu \boldsymbol{\omega} + \left((\lambda - \mu) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}') + \lambda_r \frac{\delta \beta}{\delta t} \right) \mathbf{n}' \right], \quad (12.146)$$

$$\mathbf{n}' = \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n},$$

где вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ по-прежнему будем называть вектором напряженности электрического поля.

К уравнению (12.143) необходимо добавить уравнение движения ротора

$$\lambda_r \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}' \right) + \nu \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right) = 0, \quad (12.147)$$

где ν и Ω_0 суть заданные параметры.

Обратимся к приведенному неравенству диссипации (12.86). С учетом допущений (12.141) оно принимает вид

$$\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} - 2\varpi^{-1} \mathcal{D} \cdot \boldsymbol{\omega} + \varpi^{-1} \mathcal{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \quad (12.148)$$

Теперь необходимо преобразовать это выражение к виду (12.87). Из уравнения (12.58) имеем

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} \cdot \mathbf{P}^T \right]_{\times} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t}, \quad (12.149)$$

где последнее тождество справедливо для любого вектора \mathbf{a} .

Посредством соотношений (12.59) введем в рассмотрение вторую меру деформации $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$:

$$\nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}. \quad (12.150)$$

Воспользовавшись тождеством (12.61) и проведя рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены в разделе 12.4, с учетом условия $\mathbf{V} = \text{const}$, получим

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} + \varpi^{-1} [-2\mathcal{D} + \mathbf{F} \cdot \mathcal{B} - (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}] \cdot \boldsymbol{\omega} + \\ + \varpi^{-1} \mathcal{B} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}_{\times}. \end{aligned} \quad (12.151)$$

Наконец, используя (12.149), получаем окончательный вид приведенного неравенства диссипации энергии:

$$\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} + \frac{1}{2} (\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \varpi^{-1} \mathcal{B} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0, \quad (12.152)$$

где вектор \mathbf{a} определяется формулой

$$\mathbf{a} \equiv \varpi^{-1} [-2\mathcal{D} + \mathbf{F} \cdot \mathcal{B} - (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}]. \quad (12.153)$$

Дальнейший ход рассуждений является стандартным для механики сплошных сред [14].

Примем следующие определяющие уравнения для рассматриваемой среды:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \vartheta), \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{f}, \vartheta), \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{P}, \mathbf{f}, \vartheta). \quad (12.154)$$

Теперь нетрудно вывести соотношения Коши–Грина. Согласно (12.154) имеем

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^{\top} \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \frac{\delta \vartheta}{\delta t}. \quad (12.155)$$

Подставляя это равенство в (12.152), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\omega^{-1} \mathcal{B} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} \right) \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \left(\frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{P} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^{\top} \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \\ & + \eta \left(\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta} \right) \frac{\delta \vartheta}{\delta t} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0. \end{aligned} \quad (12.156)$$

Левая часть неравенства (12.156) является линейной формой материальных производных от аргументов, которые линейно независимы. Поэтому выполнение этого неравенства возможно при условии, что коэффициенты при материальных производных равны нулю. Исключение составляет коэффициент при материальной производной от тензора поворота: он не обязан равняться нулю. Действительно, согласно модифицированному уравнению Пуассона (12.58) имеем ограничение на материальную производную от тензора поворота (12.102).

Таким образом, для выполнения неравенства (12.156) необходимы следующие соотношения Коши–Грина:

$$\mathcal{B} = -\omega \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}; \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}; \quad \frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{P} = -\eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (12.157)$$

Последнее соотношение необходимо преобразовать, чтобы исключить из него произвольный симметричный тензор \mathbf{A} . Для этого необходимо сначала скалярно умножить это соотношение на тензор \mathbf{P}^{\top} справа, а затем вычислить векторный инвариант от обеих частей получившегося равенства. В результате с учетом (12.153) и первого уравнения (12.157) получим следующее соотношение для вектора \mathcal{D} :

$$2\mathcal{D} = -\omega \eta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{\top} \right)_{\times} + \omega \eta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} - \omega \eta (\text{tr } \mathbf{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}. \quad (12.158)$$

В данном случае было использовано обозначение (12.153). Теперь приведенное неравенство диссипации сводится к простому неравенству

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \geq 0. \quad (12.159)$$

Запишем уравнение баланса энергии (12.81) с учетом соотношений (12.61), (12.141), (12.149):

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{P})^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - \omega^{-1} \mathcal{B} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \eta \nu \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \end{aligned} \quad (12.160)$$

Приняв во внимание первое и третье из соотношений (12.157), перепишем (12.160) в виде

$$\begin{aligned} \eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = & \eta \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{P}} \right)^T \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta t} + \\ & + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \eta \nu \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \end{aligned} \quad (12.161)$$

Учитывая (12.155) и второе из соотношений (12.157), получаем

$$\eta \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta t} = \eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta t} + \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \eta \nu \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \quad (12.162)$$

Используя соотношение $\mathcal{F} = \mathcal{U} - \vartheta \mathcal{H}$, получаем уравнение теплопроводности

$$\eta \vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} = \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta \mathbf{q} + \eta \nu \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \quad (12.163)$$

Чтобы завершить построение нелинейной модели электромагнитного поля, осталось задать конкретный вид свободной энергии. Следует, впрочем, отметить, что задание свободной энергии как функции тензора поворота частиц среды часто бывает затруднительным. Значительно удобнее пользоваться понятием вектора поворота $\boldsymbol{\theta}$, который связан с тензором поворота следующей формулой (2.46):

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \exp[\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \times \mathbf{E}]. \quad (12.164)$$

Во второй главе доказаны формулы (2.136), (2.138), которые при переходе от полных производных по времени к материальным производным выглядят следующим образом:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t}, \quad \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t} = \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (12.165)$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2} \mathbf{R}^2, & g &= \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \\ \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2, & & (12.166) \\ \mathbf{R} &= \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, & \theta &= |\boldsymbol{\theta}|, & \det \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\theta^2}{2(1 - \cos \theta)}.\end{aligned}$$

Используя представление для угловой скорости через материальную производную от вектора поворота, приведенное неравенство диссипации (12.151) переписываем в виде

$$\begin{aligned}\eta \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{t}} + \eta \mathcal{H} \frac{\delta \vartheta}{\delta \mathbf{t}} + \omega^{-1} [-2\mathcal{D} + \mathbf{F} \cdot \mathcal{B} - (\text{tr } \mathbf{F}) \mathcal{B}] \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta \mathbf{t}} + \\ + \omega^{-1} \mathcal{B} \cdot \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{t}} - \frac{1}{\vartheta} \mathbf{h} \cdot \nabla \vartheta \leq 0.\end{aligned}\quad (12.167)$$

Свободную энергию можно считать функцией аргументов $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{f} , ϑ . Тогда для вектора \mathcal{D} вместо (12.158) получим соотношение

$$2\mathcal{D} = \omega \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) + \omega \eta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} - \omega \eta (\text{tr } \mathbf{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}. \quad (12.168)$$

Остальные соотношения Коши–Грина остаются без изменений.

В заключение выпишем сводку основных уравнений среды, моделирующей электромагнитное поле. Впрочем, полученные уравнения лучше рассматривать как некую заготовку, которую можно использовать для различных целей. Чтобы называть их уравнениями электромагнитного поля, необходимо дать электромагнитные истолкования всем введенным величинам.

Второй закон динамики принимается в виде двух уравнений (12.143) и (12.147), где вектор $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ определяется уравнением (12.146):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{B} - 2\mathcal{D} + \omega \eta \mathbf{L} &= \frac{1}{c^2} \frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\delta \mathbf{t}}, \\ \lambda_r \frac{\delta}{\delta \mathbf{t}} \left(\frac{\delta \beta}{\delta \mathbf{t}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}' \right) + \nu \left(\frac{\delta \beta}{\delta \mathbf{t}} - \Omega_0 \right) &= 0, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}} &= \omega c^2 \eta \left[\mu \boldsymbol{\omega} + \left((\lambda - \mu)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}') + \lambda_r \frac{\delta \beta}{\delta \mathbf{t}} \right) \mathbf{n}' \right], \\ \mathbf{n}' &= \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}.\end{aligned}\quad (12.169)$$

Только первое из уравнений (12.169) представляет собой одно из уравнений Максвелла, в котором учтено слагаемое $(-2\mathcal{D})$, отвечающее за джоулево тепло [92].

Векторы \mathcal{E} и \mathcal{B} будем называть вектором напряженности электрического поля и вектором магнитной индукции, соответственно. В классической теории вектор $(-2\mathcal{D})$ связывается с вектором \mathcal{E} известным определяющим уравнением. В рассматриваемой теории это не так.

Соотношения Коши–Грина имеют вид (12.157), (12.168), уравнение теплопроводности (12.163) остается в прежнем виде:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D} &= \varpi\eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) + \varpi\eta \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}} - \varpi\eta (\text{tr } \mathbf{F}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}, \\ \mathcal{B} &= -\varpi\eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{f}}, \quad \mathcal{H} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}, \\ \eta\vartheta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta t} &= \nabla \cdot \mathbf{h} + \eta q + \eta v \frac{\delta \beta}{\delta t} \left(\frac{\delta \beta}{\delta t} - \Omega_0 \right). \end{aligned} \quad (12.170)$$

Наконец, к этим уравнениям следует присоединить кинематические и геометрические уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \exp \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t}, \\ \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2, \\ \nabla \mathbf{P} &= \mathbf{F} \times \mathbf{P}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{F}_\times. \end{aligned} \quad (12.171)$$

Система уравнений (12.169)–(12.171) замкнута при условии, что задана конкретная зависимость свободной энергии от параметров состояния ϑ , $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{f} . В представленном виде система уравнений (12.169)–(12.171) описывает нелинейную модель жидкокристаллической среды. Чтобы эта среда моделировала электромагнитное поле, необходимо использовать некие дополнительные данные, включая результаты экспериментальных исследований и интуитивные соображения.

Что касается экспериментальных исследований, то на рассматриваемом этапе они более чем затруднены. В самом деле, в экспериментах всегда рассматривается взаимодействие электромагнитного поля с веществом. Но для этого необходимо разработать основные принципы такого взаимодействия, что в настоящий момент еще не сделано. Впрочем, один экспериментальный

факт, относящийся непосредственно к электромагнитному полю, нам известен — это закон электромагнитной индукции Фарадея. В математической форме он имеет вид²⁶

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\delta t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = f(\mathbf{x} - \mathbf{V}t). \quad (12.172)$$

Если считать, что этот закон является абсолютно точным, то он налагает очень жесткие ограничения на всю теорию. Действительно, из уравнения (12.172) следует, что векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции должны порождаться одним вектором $\boldsymbol{\mathcal{A}}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \nabla Q(\mathbf{x}, t) - \frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\delta t}, \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}_0(\mathbf{x} - \mathbf{V}t) + \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}. \quad (12.173)$$

Как нетрудно убедиться²⁷ с помощью представления (12.169), вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ нельзя представить в виде (12.173). Отсюда следует альтернатива: либо закон электромагнитной индукции (12.172) не является абсолютно точным, либо вся рассматриваемая теория не описывает электромагнитного поля. При условии, что верна первая из этих двух возможностей, закон электромагнитной индукции Фарадея справедлив только приближенно и не для самого электромагнитного поля, а для возмущений, распространяющихся в электромагнитном поле. Поэтому для общей теории, описываемой уравнениями (12.169)–(12.171), нельзя требовать выполнения закона Фарадея (12.172).

²⁶ Первое из уравнений (12.172) является естественным обобщением на нелинейный случай уравнения $\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{d\boldsymbol{\mathcal{B}}}{dt}$. Второе из уравнений (12.172) получается следующим образом. Вычислив дивергенцию обеих частей первого из уравнений (12.172), получим $\nabla \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\delta t} = 0$. Учитывая, что $\mathbf{V} = \text{const}$, последнее уравнение можно переписать в виде $\frac{\delta(\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}})}{\delta t} = 0$. Решение этого уравнения в случае постоянной скорости имеет вид $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = f(\mathbf{x} - \mathbf{V}t)$. (Примеч. ред.)

²⁷ Согласно формулам (12.169), (12.171) выражение для вектора напряженности электрического поля имеет вид $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \omega c^2 \eta \left([\boldsymbol{\mu} \mathbf{E} + (\lambda - \mu) \mathbf{n}' \mathbf{n}'] \cdot \mathbf{Z}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t} + \lambda_r \frac{\delta \beta}{\delta t} \mathbf{n}' \right)$. Это выражение не приводится к виду (12.173), поскольку коэффициенты при производных $\frac{\delta \boldsymbol{\theta}}{\delta t}$ и $\frac{\delta \beta}{\delta t}$ не являются константами. (Примеч. ред.)

Библиографический список

- [1] **Жилин П. А.** Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. — 584 с.
- [2] **Ньютон И.** Оптика / И. Ньютон. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 367 с.
- [3] **Бернулли И.** Избранные сочинения по механике / И. Бернулли; ОНТИ. — М.-Л., 1937. — 297 с.
- [4] **Даламбер Ж.** Динамика / Ж. Даламбер. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — 343 с.
- [5] **Мах Э.** Механика (историко-критический очерк ее развития) / Э. Мах. — СПб.: Общественная польза, 1909. — 448 с.
- [6] **Эйлер Л.** Открытие нового принципа механики / Л. Эйлер // Opera omnia, II-5, 1752 (на латинском языке).
- [7] **Михайлов Г. К.** Леонард Эйлер и его вклад в развитие механики / Г. К. Михайлов // Advances in Mechanics. — Vol. 8. — 1985. — N 1. — P. 3-58.
- [8] **Эйлер Л.** Новый метод определения движения твердых тел / Л. Эйлер // Novi commentarii Acad. sci. imp. Petrop., p. 20, 1775, p. 208-238, 1776 (Opera omnia, II — p. 9) (на латинском языке).
- [9] **Лагранж Ж.** Аналитическая механика. Т. I / Ж. Лагранж; ОНТИ. — М.; Л., 1938. — 348 с.
- [10] **Планк М.** Избранные труды / М. Планк. — М.: Наука, 1975. — 788 с.
- [11] **Zaremba S. R.** Réflexions sur les fondements de la mecanique rationnelle / S. R. Zaremba // Enseignement Math. — Vol. 38. — 1940. — P. 59-69.
- [12] **Сомов П. О.** Векторіальный анализ и его приложения / П. О. Сомов. — СПб.: изд. Стасюлевичъ, 1907. — 263 с.
- [13] **Silberstein L.** Vectorial mechanics / L. Silberstein. — London: Macmillan and Co., 1913. — 197 p.
- [14] **Трусделл К.** Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / К. Трусделл. — М.: Мир, 1975. — 592 с.
- [15] **Эйнштейн А.** Неевклидова геометрия и физика / А. Эйнштейн // Эйнштейн и развитие физико-математической мысли. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — С. 5-9.

- [16] **Эйнштейн А.** Автобиографические заметки. Собр. научных трудов. Т. IV / А. Эйнштейн. — М.: Наука, 1967. — С. 259–293.
- [17] **Пуанкаре А.** Измерение времени / А. Пуанкаре // Избранные труды А. Пуанкаре. Т. III. — М.: Наука, 1974. — 771 с.
- [18] **Най Дж.** Физические свойства кристаллов / Дж. Най. — М.: Мир, 1967. — 385 с.
- [19] **Гельфанд И. М.** Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. — М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. — 320 с.
- [20] **Люстерник Л. А.** Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М.: Наука, 1965. — 520 с.
- [21] **Галилео Галилей.** Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки / Галилео Галилей // Избранные труды. Т. 2. — М.: Наука, 1964. — С. 109–410.
- [22] **Жилин П. А.** Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П. А. Жилин. — СПб.: Нестор, 2001. — 276 с.
- [23] **Лурье А. И.** Аналитическая механика / А. И. Лурье. — М.: GIFML, 1961. — 824 с.
- [24] **Argyris J.** An excursion into large rotations / J. Argyris. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — Vol. 32, N 1–3. — 1982. — P. 85–155.
- [25] **Киттель Ч.** Механика. Берклевский курс физики. Т. 1 / Ч. Киттель, В. Найт, М. Рудерман. — М.: Наука, 1983. — 447 с.
- [26] **Жилин П. А.** Теоретическая механика: учеб. пособие / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2001. — 146 с.
- [27] **Жилин П. А.** Тензор поворота в описании кинематики твердого тела / П. А. Жилин // Труды СПбГТУ N 443. — 1992. — С. 100–121.
- [28] **Крутков Ю. А.** Об одной нерешенной задаче эйлеровой *Theoriae motus* / Ю. А. Крутков // Леонард Эйлер. Сборник статей и материалов к 150-летию со дня смерти. — М.; Л.: Изд. АН СССР, 1935. — 249 с.
- [29] **Курант Р.** Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
- [30] **Эйзенхарт Л. П.** Непрерывные группы преобразований / Л. П. Эйзенхарт. — М.: ИЛ, — 1947. — 359 с.
- [31] **Ньютон И.** Математические начала натуральной философии / И. Ньютон // Собрание трудов А. Н. Крылова. Т. VII. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936.
- [32] **Ньютон И.** Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых / И. Ньютон // Ньютон И. Математические работы; ОНТИ. — М.; Л., 1937. — С. 25–166.

- [33] **Boltzmann L.** Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik, Teil I. / L. Boltzmann. — Leipzig, 1897. — 241 p.
- [34] **Боль П.** О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике / П. Боль. // Собрание трудов; под ред. Л. Э. Рейзиня. — Рига: Зинатне, 1974. — С. 73–198.
- [35] **Пуанкаре А.** О науке / А. Пуанкаре. — М.: Наука, 1983. — 560 с.
- [36] **Эйлер Л.** Основы динамики точки / Л. Эйлер. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1938. — 500 с.
- [37] **Гельмгольц Г.** О сохранении силы / Г. Гельмгольц. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1934. — 143 с.
- [38] **Эйлер Л.** Открытие нового принципа механики (Découverte d'un nouveau principe de mécanique) / L. Euler // Mem. Acad.roy. sci. et belles-lettres, Berlin, **6** (1750), 185–217, 1752 (Opera omnia, II–5) (на латинском языке).
- [39] **Truesdell C.** Essays in the History of Mechanics / C. Truesdell. — Springer-Verlag, New-York, 1968.
- [40] **Маркеев А. П.** Теоретическая механика / А. П. Маркеев. — М.: Наука, 1990. — 414 с.
- [41] **Трусделл К.** Очерки по истории механики / К. Трусделл. — Москва–Ижевск: Институт Компьютерных Исследований, 2002. — 315 с.
- [42] **Лойцянский Л. Г.** Курс теоретической механики. Т. 1 / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. — М.: Наука, 1982. — 352 с.
- [43] **Лойцянский Л. Г.** Курс теоретической механики. Т. 2 / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. — М.: Наука, 1983. — 540 с.
- [44] **Успенский В. А.** Теорема Геделя о неполноте / В. А. Успенский. — М.: Наука, 1982. — 111 с.
- [45] **Truesdell C.** Rational thermodynamics / C. Truesdell. — Springer-Verlag, New-York, 1984. — 578 p.
- [46] **Никольский С. М.** Курс математического анализа. Т. 2 / С. М. Никольский. — М.: Наука, 1983. — 464 с.
- [47] **Магнус К.** Гироскоп. Теория и применение / К. Магнус. — М.: Мир, 1974. — 525 с.
- [48] **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории оболочек / П. А. Жилин // Динамика и прочность машин: труды ЛПИ N 386. — 1982. — С. 29–46.
- [49] **Zhilin P. A.** A new approach to the analysis of free rotations of rigid bodies / P. A. Zhilin // Z. angew. Math. Mech. (ZAMM) — Vol. 76. — 1996. — P. 187–204.
- [50] **Куликов К. А.** Вращение Земли / К. А. Куликов. — М.: Недра, 1985. — 159 с.
- [51] **Матвеев А. Н.** Атомная физика / А. Н. Матвеев. — М.: Высшая школа, 1989. — 439 с.

- [52] **Мак-Миллан В. Д.** Динамика твердого тела / В. Д. Мак-Миллан. — М.: ИЛ, 1951. — 467 с.
- [53] **Четаев Н. Г.** Теоретическая механика / Н. Г. Четаев. — М.: Наука, 1987. — 367 с.
- [54] **Арнольд В. И.** Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — М.: Наука, 1979. — 431 с.
- [55] **Суслов Г. К.** Теоретическая механика / Г. К. Суслов. — М.: Гостехиздат, 1944. — 655 с.
- [56] **Жилин П. А.** Динамика и устойчивость положений равновесия твердого тела на нелинейно упругом основании / П. А. Жилин // Труды XXIV летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. — СПб., 1997. — С. 90–122.
- [57] **Zhilin P. A.** Rigid body oscillator: a general model and some results / P. A. Zhilin // Acta Mechanica. — Vol. 142. — 2000. — P. 169–193.
- [58] **Журавлев В. Ф.** Основы теоретической механики / В. Ф. Журавлев. — М.: Наука, 1997. — 320 с.
- [59] **Жилин П. А.** Спинорные движения и устойчивость равновесных конфигураций тонких упругих стержней / П. А. Жилин // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ N 458. — 1995. — С. 56–73.
- [60] **Жилин П. А.** Реальность и механика / П. А. Жилин // Труды XXIII летней школы “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. — 1996. — С. 6–49.
- [61] **Николаи Е. Л.** Труды по механике / Е. Л. Николаи. — М.: Гостехиздат, 1955. — 584 с.
- [62] **Циглер Г.** Основы теории упругой устойчивости конструкций / Г. Циглер. — М.: Мир, 1971. — 192 с.
- [63] **Меркин Д. Р.** Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
- [64] **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи упругой устойчивости / В. В. Болотин. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 339 с.
- [65] **Жилин П. А.** Экспериментальное исследование устойчивости консольного стержня при кручении / П. А. Жилин, А. Д. Сергеев // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ N 446. — 1993. — С. 174.
- [66] **Жилин П. А.** Мультироторный гироскоп на нелинейно упругом основании / П. А. Жилин, С. А. Сорокин // ИПМаш РАН: Препринт N 140. — 1997. — 83 с.
- [67] **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. — М.: Наука, 1980. — 512 с.

- [68] **Жилин П. А.** Нелинейная теория стержней и ее приложения / П. А. Жилин, А. Д. Сергеев, Т. П. Товстик // Труды XXIV школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем”. — 1997. — С. 313–337.
- [69] **Ляв А.** Математическая теория упругости / А. Ляв; ОНТИ, — М.–Л., 1935. — 674 с.
- [70] **Zhilin P. A.** Mechanics of deformable directed surfaces / P. A. Zhilin // Int. J. Solids Structures. — Vol. 12. — 1976. — P. 635–648.
- [71] **Жилин П. А.** Основные уравнения неклассической теории оболочек / П. А. Жилин // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ N 386. — 1982. — С. 29–46.
- [72] **Жилин П. А.** Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: учеб. пособие. / П. А. Жилин. — СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. — 101 с.
- [73] **Жилин П. А.** Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом / П. А. Жилин, А. Д. Сергеев // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ N 448. — 1994. — С. 47–56.
- [74] **Келлер Дж. Б.** Теория ветвлений и нелинейные задачи на собственные значения / Дж. Б. Келлер; под ред. С. Антман. — М.: Мир, 1974. — 254 с.
- [75] **Попов Е. П.** Нелинейные задачи статики тонких стержней / Е. П. Попов. — Л.–М.: ГИТТЛ, 1948. — 170 с.
- [76] **Пановко Я. Г.** Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. — М.: Наука, 1987. — 352 с.
- [77] **Баргер И. Б.** Самовозбуждение гибкого вала / И. Б. Баргер // Труды ЛПИ им. Калинина N 3. — 1947. — С. 41–61.
- [78] **Жилин П. А.** Вращение твердого тела на инерционном стержне / П. А. Жилин, Т. П. Товстик // Механика и процессы управления: труды СПбГТУ N 458. — 1995. — С. 78–83.
- [79] **Ivanova E. A.** Non-stationary regime of the motion of a rigid body on an elastic plate / E. A. Ivanova, P. A. Zhilin // Proc. of the XXIX Summer School “Advanced Problems in Mechanics”. — 2002. — P. 357–363.
- [80] **Тихонов А. Н.** Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 735 с.
- [81] **Reissner E.** On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. Math. and Phys. — Vol. 23, N 4. — 1944. — P. 184–191.
- [82] **Mindlin R. D.** Influence rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates / R. D. Mindlin // J. Appl. Mech. — Vol. 18, N 1. — 1951. — P. 31–38.
- [83] **Жилин П. А.** Основные уравнения теории неупругих сред / П. А. Жилин // Труды XXVIII летней школы “Актуальные проблемы механики”. — СПб., 2001. — С. 14–58.
- [84] **Пальмов В. А.** Колебания упруго-пластических тел / В. А. Пальмов. — М.: Наука, 1976. — 328 с.

- [85] **Palmov V. A.** Vibrations of elasto-plastic bodies / V. A. Palmov. — Berlin: Springer, 1998.
- [86] **Лоренц Г.** Теории и модели эфира / Г. Лоренц; ОНТИ. — М.; Л., 1936. — 68 с.
- [87] **Cosserat E. et F.** Theorie des corps deformables / E. et F. Cosserat. — Hermann: Paris, 1909.
- [88] **Девис П.** Суперсила / П. Девис. — М.: Мир, 1989. — 272 с.
- [89] **Жилин П. А.** Реальность и Механика / П. А. Жилин // Труды XXIII школы-семинара “Анализ и синтез нелинейных механических систем”. — СПб., 1996. — С. 6–49.
- [90] **Дирак П.** Принципы квантовой механики / П. Дирак. — М.: Наука, 1979. — 480 с.
- [91] **Козырев Н. А.** Избранные труды / Н. А. Козырев. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1991. — 445 с.
- [92] **Планк М.** Введение в теоретическую физику. Т. 3. Электричество и магнетизм / М. Планк; ОНТИ ГТТИ. — М.; Л., 1934. — 183 с.
- [93] **Кривцов А. М.** Теоретическая механика. Элементы кинематики симметричного твердого тела: учеб. пособие / А. М. Кривцов. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1996. — 38 с.
- [94] **Жилин П. А.** О законе трения Кулона и парадоксах Пэнлеве / П. А. Жилин, О. П. Жилина // Труды СПбГПУ N 446. Механика и процессы управления. — СПб., 1993. — С. 52–81.
- [95] **Zhilina O. P.** One peculiarity of problems with the Coulomb friction / O. P. Zhilina, P. A. Zhilin // Proc. of the XXV–XXVI Summer Schools “Nonlinear oscillations in mechanical systems”. Vol. 1. — St. Petersburg, 1998. — P. 315–320.
- [96] **Wiercigroch M.** On the Painleve paradoxes / M. Wiercigroch, P. A. Zhilin // Proc. of the XXVII Summer School “Nonlinear oscillations in mechanical systems”. — St. Petersburg, 2000. — P. 1–22.
- [97] **Moreau J. J.** Nonsmooth mechanics and applications / J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos (EDS) // CISM. Vol. 302. — Springer Verlag Wien, 1988.
- [98] **Painleve P.** Lecons sur le frottement / P. Painleve. — Paris, 1895.
- [99] **Пэнлеве П.** Лекции о трении / П. Пэнлеве. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 316 с.
- [100] **De Sparre.** Sur le frottement de glissement / De Sparre // Comptes Rendus. — B. 141, S. 310. — 1905.
- [101] **Hamel G.** Bemerkungen zu den vorstehenden Aufsätzen der Herren F. Klein und R. v. Mises / G. Hamel // Ztschr. f. Math. u. Physik. — B. 58, S. 195. — 1909.
- [102] **Klein F.** Zur Painleves Kritik der Coulombschen Reibungsgesetze / F. Klein // Ztschr. f. Math. u. Physik. — B. 58, S. 186. — 1909.

- [103] **Lecornu L.** Sur le frottement de glissement / L. Lecornu // Comptes Rendus. — В. 140, S. 635. — 1905.
- [104] **Lecornu L.** Sur la loi de Coulomb / L. Lecornu // Comptes Rendus. — В. 140, S. 847. — 1905.
- [105] **Mises R.** Zur Kritik der Reibungsgesetze / R. Mises // Ztschr. f. Math. u. Physik. — В. 58, S. 191. — 1909.
- [106] **Painleve P.** Sur les lois du frottement de glissement / P. Painleve // Comptes Rendus. — В. 140, S. 702. — 1905.
- [107] **Painleve P.** Sur les lois du frottement de glissement / P. Painleve // Comptes Rendus. — В. 141, S. 401. — 1905.
- [108] **Painleve P.** Sur les lois du frottement de glissement / P. Painleve // Comptes Rendus. — В. 141, S. 546. — 1905.
- [109] **Pfeifer F.** Zur Frage der sogenannten Coulombshen Reibungsgesetze / F. Pfeifer // Ztschr. f. Math. u. Physik. — В. 58, S. 273. — 1909.
- [110] **Prandtl L.** Bemerkungen zu den Aufsätzen der Herren F. Klein, R. v. Mises und G. Hamel / L. Prandtl // Ztschr. f. Math. u. Physik. — В. 58, S. 196. — 1909.
- [111] **Бутенин Н. В.** Рассмотрение “вырожденных” динамических систем с помощью гипотезы “скачка” / Н. В. Бутенин // ПММ. — Т. 12, N 1. — 1948. — С. 3–22.
- [112] **Ле Суан Ань.** К динамике механизмов с трением / Ле Суан Ань // Машиноведение. N 4. — 1988. — С. 62–68.
- [113] **Ле Суан Ань.** Парадоксы Пэнлеве и закон движения механических систем с трением / Ле Суан Ань // ПММ. — Т. 54, N 4. — 1990. — С. 520–529.
- [114] **Le Suan Anh.** Dynamics of systems with the Coulomb friction (theory and experiment) / Le Suan Anh. — St. Petersburg: Nestor, 1999.
- [115] **Аппель П.** Теоретическая механика. Т. 2 / П. Аппель. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 487 с.

Приложения

Приложение А

Основные кинематические соотношения и тензорные тождества¹

В данном приложении представлены тензорные тождества и основные кинематические соотношения, используемые в книге.

А.1. Произвольные векторы и тензоры второго ранга

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{a}$;
2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{A}^T) = (\mathbf{A} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$;
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{C}) = \mathbf{b} \otimes (\mathbf{a} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
4. $\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{C}) = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T)_{\times} \cdot \mathbf{b}$;
5. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}^T = 0$;
6. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$;
7. $\mathbf{E} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{E}$;
8. $\mathbf{a} \times \mathbf{E} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{E}$;

¹ Приложение написано Е. Н. Вильчевской и Е. А. Подольской. (Примеч. ред.)

9. $(\mathbf{E} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{A}$;
10. $\mathbf{E} \times \times \mathbf{E} = 2\mathbf{E}$;
11. $(\mathbf{c} \times \mathbf{E})_{\times} = -2\mathbf{c}$;
12. $(\mathbf{c} \times \mathbf{A})_{\times} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \operatorname{tr} \mathbf{A}$;
13. $\det \mathbf{A} = \frac{[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b})] \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{c})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}$;
14. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{A} \cdot \mathbf{c}) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-\top} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$;
15. $\exp \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k$.

А.2. Антисимметричные тензоры \mathbf{S}

1. $\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}$;
2. $\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \mathbf{S}_{\times}$ — сопутствующий вектор;
3. $\mathbf{S} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{E}$;
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = 0$.

А.3. Симметричные тензоры Θ

1. $\Theta \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \Theta$;
2. Спектральное разложение:

$$\Theta = \Theta_{(1)} \mathbf{m}_{(1)} \otimes \mathbf{m}_{(1)} + \Theta_{(2)} \mathbf{m}_{(2)} \otimes \mathbf{m}_{(2)} + \Theta_{(3)} \mathbf{m}_{(3)} \otimes \mathbf{m}_{(3)},$$

где $\Theta_{(k)}$ — собственные числа Θ , $\mathbf{m}_{(k)}$ — собственные векторы ($\mathbf{m}_{(k)} \cdot \mathbf{m}_{(s)} = \delta_{ks}$).

А.4. Ортогональные тензоры \mathbf{Q}

1. $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$;
2. $\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{Q}^T) = \det \mathbf{Q} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}]$;
3. $(\mathbf{Q} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{Q}^T = \det \mathbf{Q} [(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{E}]$;
4. $(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

А.5. Тензор поворота \mathbf{P}

1. Теорема Эйлера:

$$\mathbf{P}(\theta \mathbf{m}) = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \cos \theta (\mathbf{E} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + \sin \theta \mathbf{m} \times \mathbf{E},$$

где \mathbf{m} — орт оси поворота, θ — угол поворота, $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{m}$ — вектор поворота;

2. $\mathbf{P}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P}(\theta \mathbf{m}) = \mathbf{P}((\varphi + \theta) \mathbf{m})$.
3. Квазикоммутативность поворотов:

$$\mathbf{P}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P}(\theta \mathbf{n}) = \mathbf{P}(\theta \mathbf{n}') \cdot \mathbf{P}(\varphi \mathbf{m}), \quad \mathbf{n}' = \mathbf{P}(\varphi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}.$$

4. Представление тензора поворота через углы Эйлера:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\psi \mathbf{m}) \cdot \mathbf{P}(\vartheta \mathbf{e}) \cdot \mathbf{P}(\varphi \mathbf{m}), \quad \mathbf{e} \perp \mathbf{m},$$

где φ — угол собственного вращения, ϑ — угол нутации, ψ — угол прецессии.

5. $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}$, где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор поворота;
6. $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \exp \mathbf{R}$, где $\mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E}$ — логарифмический тензор поворота;

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{R} + \frac{1 + \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R}^2.$$

А.6. Тензоры спина и угловые скорости

1. $\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t)$ — левый тензор спина;
2. $\mathbf{S}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{E}$, где $\boldsymbol{\omega}(t)$ — вектор левой угловой скорости;
3. $\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{P}^T(t) \right)_{\times}$;
4. $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\theta} \mathbf{m} + \sin \theta \dot{\mathbf{m}} + (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}$;
5. $\mathbf{S}_r = \mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t)$ — правый тензор спина;
6. $\mathbf{S}_r(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{E}$, где $\boldsymbol{\Omega}(t)$ — вектор правой угловой скорости;
7. $\boldsymbol{\Omega}(t) = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{P}^T(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) \right)_{\times}$;
8. $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\theta} \mathbf{m} + \sin \theta \dot{\mathbf{m}} - (1 - \cos \theta) \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}}$;
9. $\mathbf{S}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{S}_r(t) \cdot \mathbf{P}^T(t)$;
10. $\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}(t)$.
11. Правило сложения угловых скоростей:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_2(t) \cdot \mathbf{P}_1(t) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_2(t) + \mathbf{P}_2(t) \cdot \boldsymbol{\omega}_1(t),$$

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}_1(t) + \mathbf{P}_1^T(t) \cdot \boldsymbol{\Omega}_2(t);$$
12. $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}$;
13. Левое уравнение Пуассона: $\dot{\mathbf{P}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{P}(t)$.
14. Правое уравнение Пуассона: $\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t)$.
15. $\mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$;
16. $\mathbf{A}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{P}^T(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}$;
17. $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega}) \cdot = \mathbf{P} \cdot \left(\mathbf{A}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}_0 \cdot \boldsymbol{\Omega} \right)$;
18. $\frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}$;
19. $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = \frac{2(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}$.

A.7. Тензор-интегратор \mathbf{Z} и вектор поворота $\boldsymbol{\theta}$

$$1. \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{R} + \frac{1-g}{\theta^2} \mathbf{R}^2, \quad g = \frac{\theta \sin \theta}{2(1 - \cos \theta)}, \quad \mathbf{R} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{E};$$

$$2. \det \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\theta^2}{2(1 - \cos \theta)};$$

$$3. \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{E} + \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \mathbf{R} + \frac{\theta - \sin \theta}{\theta^3} \mathbf{R}^2;$$

$$4. \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega});$$

$$5. \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{Z}^T \cdot \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta^2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega});$$

$$6. \dot{\boldsymbol{\theta}} = g\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1-g}{\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}};$$

$$7. \dot{\boldsymbol{\theta}} = g\boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1-g}{\theta} \dot{\boldsymbol{\theta}};$$

$$8. \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta});$$

$$9. \mathbf{Z}^T(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{Z}(\boldsymbol{\theta});$$

$$10. \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{-T}) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}.$$

О парадоксе Николаи¹

В.1. Вводные замечания

В данном приложении приводятся материалы двух неопубликованных работ А. М. Кривцова, которые упоминались выше П. А. Жилиным при анализе парадокса Николаи (главы 7 и 9). В частности, в одной из данных работ было получено равенство, характеризующее подвод энергии в систему на движениях, близких к стационарным, что иллюстрирует механизм реализации парадокса Николаи как в линейной, так и в нелинейной областях. Именно на это равенство ссылался П. А. Жилин в своих статьях. Материалы, предлагаемые вниманию читателя, были подготовлены А. М. Кривцовым 24–25 июля 1995 года для П. А. Жилина в качестве аргументов в возникшей у них полемике о природе парадокса Николаи. Один из основных обсуждавшихся вопросов был — является ли парадокс Николаи артефактом той или иной теории стержней или он связан с характером внешних воздействий?

Ниже указанные материалы приводятся в виде разделов В.2 и В.3. В разделе В.2 показывается (из общих соображений, без решения задачи) что существуют такие движения консольного стержня вблизи положения равновесия, при которых следящий или мертвый моменты осуществляют неограниченный подвод энергии, а, следовательно, приводят к неустойчивости. В этом разделе получено и упомянутое выше равенство. Позже П. А. Жилин выводил это равенство в своих работах, основываясь на более подробном рассмотрении задачи о движении консольного стержня. В разделе В.3 показывается, что эффект, аналогичный парадоксу Николаи, реализуется для твердого тела на простейшем упругом основании — т. е. в системе, значительно более простой для анализа, чем нелинейный упругий стержень. Впоследствии П. А. Жи-

¹ Приложение написано А. М. Кривцовым. (*Примеч. ред.*)

лин эффективно использовал модель твердого тела на обобщенном упругом основании для анализа парадокса Николаи — см. главу 7.

Редакцией сохранен полемический стиль указанных работ. Надо отметить, что особенностью научной школы П. А. Жилина было то, что он позволял своим ученикам (в том числе и А. М. Кривцову, только защитившему кандидатскую диссертацию под его руководством), не соглашаться и доказывать свою точку зрения, что приносило ученикам несомненную пользу, но иногда в результате этих споров рождались и новые результаты, как получилось с указанным равенством. В целом стороны пришли к общему мнению, что в возникновении парадокса Николаи существенную роль играет подвод энергии от внешних воздействий (точка зрения А. М. Кривцова), однако П. А. Жилин показал, что это не дает полного объяснения возникающих вопросов — подробнее см. главы 7 и 9.

В.2. Стационарные движения стержня и моментные нагрузки

Задача данной работы² состоит в том, чтобы показать, что существуют такие движения консольного стержня вблизи положения равновесия, при которых следящий или мертвый моменты осуществляют неограниченный подвод энергии, а, следовательно, приводят к неустойчивости. Уравнения трехмерной нелинейной теории стержней весьма сложны даже при использовании простейших моделей описания стержня. Учет поперечного сдвига, инерции вращения и других факторов может привести к задачам, практически не поддающимся аналитическому исследованию. Поэтому в данной работе предлагается подход, использующий в основном геометрические соображения, а потому не зависящий от того, какой моделью описывается стержень.

Будем рассматривать прямолинейный трансверсально-изотропный консольный стержень. Для определенности будем считать, что в свободном состоянии он расположен вертикально и заделан на нижнем крае. Верхний край стержня будем считать свободным³. Обозначим: \mathbf{k} — орт вертикали, \mathbf{n} — орт нормали к верхнему сечению стержня (для недеформированного стержня $\mathbf{n} = \mathbf{k}$), \mathbf{P} — тензор поворота верхнего сечения стержня. Для тензора \mathbf{P}

² А. М. Кривцов. “Стационарные движения стержня и моментные нагрузки”. Рукопись, набранная на компьютере 24 июля 1995 г.

³ Полученные ниже результаты легко обобщаются на случай, когда к верхнему краю стержня прикреплено твердое тело, главная центральная ось инерции которого является продолжением оси недеформированного стержня.

воспользуемся представлением [93]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{P}(\varphi \mathbf{k}). \quad (\text{B.1})$$

Здесь $\mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ — тензор наклона (поворота от \mathbf{k} к \mathbf{n} вокруг оси, лежащей в горизонтальной плоскости), $\mathbf{P}(\varphi \mathbf{k})$ — тензор собственного поворота. Соответствующая \mathbf{P} угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{1 + \eta} (\mathbf{n} + \mathbf{k}) \times \dot{\mathbf{n}} + \dot{\varphi} \mathbf{n}, \quad \eta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}. \quad (\text{B.2})$$

Примем без доказательства следующие два утверждения. Они достаточно очевидны для любой модели стержня.

1. При отсутствии диссипации свободный стержень может совершать круговые стационарные движения вокруг вертикали (СД). На СД производная орта \mathbf{n} может быть представлена в виде $\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{n}$, где $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$ — угловая скорость прецессии.
2. Для СД угол φ в представлении (B.1) постоянен: $\varphi = \varphi_0$, т. е. ориентация верхнего сечения в пространстве определяется наклоном и, возможно, поворотом на постоянный угол⁴.

Вычислим угловую скорость верхнего сечения при СД. Для этого подставим в (B.2) условия стационарности движения: $\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{n}$, $\dot{\varphi} = 0$. После преобразований получим

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(\mathbf{k} - \mathbf{n}). \quad (\text{B.3})$$

Предположим теперь, что на верхний край стержня действует очень малый внешний момент \mathbf{M} . Тогда, по крайней мере в течение некоторого промежутка времени, движение стержня будет близко к стационарному и поэтому мощность момента можно приближенно определить по формуле $\mathcal{N} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость верхнего сечения при СД, определяемая формулой (B.3). Вычислим таким способом мощность следящего и мертвого моментов.

- Следящий момент $\mathbf{M} = M\mathbf{n}$:

$$\mathcal{N} = M\omega \mathbf{n} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{n}) = -M\omega(1 - \eta) \quad \Rightarrow \quad \text{sign} \mathcal{N} = -\text{sign}(M\omega). \quad (\text{B.4})$$

⁴ Для простейших моделей стержня, очевидно, $\varphi_0 = 0$. В более сложных, например при учете инерции вращения, может возникнуть стационарное закручивание: $\varphi_0 \neq 0$.

- Мертвый момент $\mathbf{M} = M\mathbf{k}$:

$$\mathcal{N} = M\omega\mathbf{n} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{n}) = +M\omega(1 - \eta) \quad \Rightarrow \quad \text{sign } \mathcal{N} = +\text{sign}(M\omega). \quad (\text{B.5})$$

Таким образом, знак мощности постоянен⁵ и зависит только от соотношения знаков M и ω .

Теперь обратимся к вопросу об устойчивости равновесия вертикального положения стержня при наличии мертвого или следящего момента. Зададим такое возмущение начальных условий, при котором возникнет движение, близкое к стационарному, причем направление вращения выберем так, чтобы знак мощности согласно формулам (B.4), (B.5) был положительный. Тогда внешний момент будет осуществлять в систему *постоянный подвод энергии*. Если система консервативна, то это должно вести к росту амплитуды колебаний, а следовательно к *неустойчивости*. Причем представляется вполне очевидным, что при достаточно малом моменте будет существовать квазистационарное движение, близкое к стационарному, но с медленно изменяющимися параметрами движения, при котором отклонение от вертикали будет неограниченно возрастать. То есть для консервативной системы будет иметь место неустойчивость не только в малом, но и в *большом*. Никакая нелинейность эту ситуацию не исправит, ограничить амплитуды сможет только отвод энергии, т. е. диссипация.

Обсуждение. Таким образом, мертвый или следящий моменты обязательно должны приводить к неустойчивости консервативного стержня, независимо от того, насколько сложной моделью он описывается. Однако никакого парадокса здесь нет. Дело не в стержне, а в нагрузке. В реальных системах обязательно возникают дополнительные силовые факторы, да и момент не остается чисто следящим или мертвым. Кроме того, чтобы раскачать стержень до значительных амплитуд, небольшая внешняя нагрузка должна иметь возможность поддерживать в течение длительного времени знакопостоянную мощность, накачивая таким образом в систему огромную энергию. Реальные нагрузки такими возможностями обычно не обладают.

В трехмерной теории стержней действительно заключена серьезная проблема, однако она не в том, что модели стержня плохи, а в том, что мы не умеем правильно задавать нагрузки при трехмерном движении. Например, неустойчивость стержня под действием мертвого изгибающего момента свидетельствует о том, что при переходе от плоской задачи к пространственной

⁵ Напомним, что $\eta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = \cos \vartheta$, где ϑ — угол нутации для \mathbf{n} . Следовательно, выражение $1 - \eta$ неотрицательно, в нуль обращается только при $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ и возрастает при удалении \mathbf{n} от вертикали.

нельзя сохранять то же простейшее представление для внешнего момента. Действительно, в реальном устройстве при уходе стержня из плоскости изгиба момент вряд ли сможет оставаться чисто мертвым, появятся дополнительные составляющие. Кроме того, реальное устройство, создающее изгибающий момент, скорее всего не позволит стержню совершать значительные колебания в направлении вектора момента.

Выход, видимо, состоит в том, чтобы использовать нагрузки, для которых можно предложить реальный механический путь осуществления. Например, нагрузки, создаваемые в поле силы тяжести подвешенными к стержню дополнительными массами, не должны приводить к неустойчивости. Возникновение растущих амплитуд для подобных силовых факторов действительно будет свидетельствовать о неприемлемости используемой модели стержня. Таким образом, основная проблема состоит в том, чтобы *определить условия, которым должна удовлетворять нагрузка, чтобы она не могла вызывать парадоксальной неустойчивости в реальных упругих системах*. Вопрос в том, как различить неустойчивость, индуцированную внешней нагрузкой, и неустойчивость, свойственную собственно упругой системе.

В.3. Твердое тело на упругом основании и моментные нагрузки

В данной работе⁶ будет показано, что эффект, аналогичный парадоксу Николаи, имеет место и в *реальной* упругой системе с конечным числом степеней свободы. Рассмотрим осесимметричное твердое тело, имеющее неподвижную точку O (рис. В.1). Тело опирается на N одинаковых амортизаторов ($N \geq 3$), расположенных равномерно по окружности радиуса R — см. рис. В.1. Обозначим \mathbf{k} — орт вертикали, \mathbf{n} — орт оси симметрии системы, $\eta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}$. Для тензора поворота тела \mathbf{P} воспользуемся представлением [93]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{P}(\varphi \mathbf{k}). \quad (\text{В.6})$$

Здесь $\mathbf{P}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$ — тензор наклона (поворота от \mathbf{k} к \mathbf{n} вокруг оси, лежащей в горизонтальной плоскости); $\mathbf{P}(\varphi \mathbf{k})$ — тензор собственного поворота. Согласно (В.6), ориентация тела однозначно определяется ортом \mathbf{n} и углом собственного поворота φ .

⁶ А. М. Кривцов. “Твердое тело на упругом основании и моментные нагрузки”. Рукопись, набранная на компьютере 25 июля 1995 г.

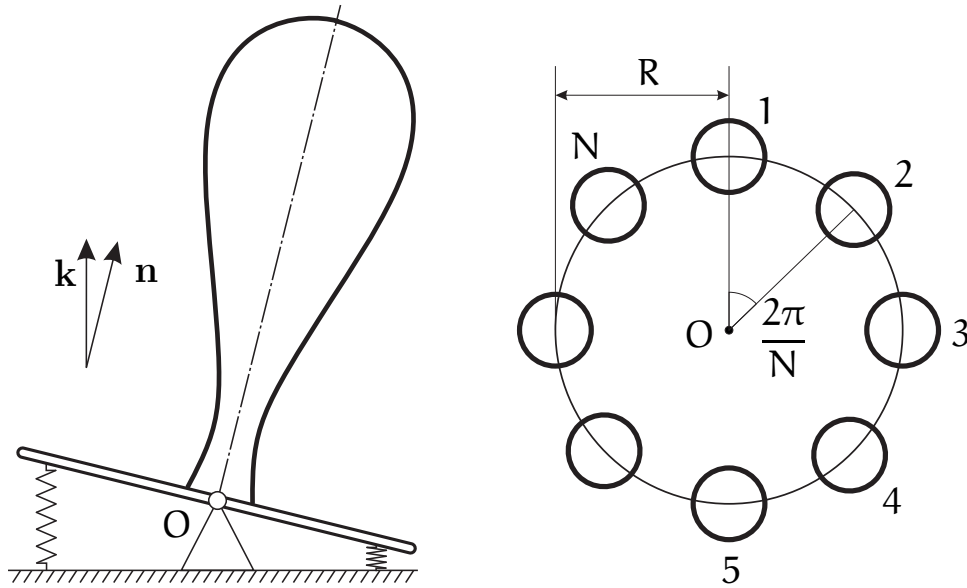


Рис. В.1. Твердое тело на упругом основании

В [93] получена формула для момента, создаваемого данным упругим основанием:

$$\mathbf{M}_e = \frac{R^2}{2} (C_3\eta + C_1(\cos \varphi - \eta)) \mathbf{n} \times \mathbf{k} - \frac{R^2}{2} C_1 \sin \varphi (\mathbf{n} + \mathbf{k}). \quad (\text{B.7})$$

Здесь C_3 и C_1 — суммарные вертикальная и поперечная жесткости амортизаторов. Отметим, что при получении формулы (B.7) предположение о малости перемещений не использовалось, так что (B.7) дает точное геометрически нелинейное выражение для упругого момента (физические свойства амортизаторов предполагались линейными)⁷.

Рассмотрим динамику подобной системы при действии на нее одновременно мертвого $\mathbf{M}_1\mathbf{k}$ и следящего $\mathbf{M}_2\mathbf{n}$ моментов. Кинетический момент твердого тела может быть записан в виде [93]:

$$\mathcal{L} = \Theta_1 \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} + \Theta_3 \Omega \mathbf{n}, \quad (\text{B.8})$$

где Θ_1 , Θ_3 — экваториальный и полярный моменты инерции тела, $\Omega = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость собственного вращения. Тогда уравнение движения в принимает вид

$$\Theta_1 \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}} + \Theta_3 (\Omega \mathbf{n})' - \mathbf{M}_e = \mathbf{M}_1 \mathbf{k} + \mathbf{M}_2 \mathbf{n}, \quad (\text{B.9})$$

где \mathbf{M}_e — упругий момент, определяемый формулой (B.7).

⁷ Не учитывались также собственные моменты, создаваемые амортизаторами.

Рассмотрим положение равновесия, отвечающее вертикальному положению оси тела. Подставив в (В.9) условия равновесия $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $\Omega = 0$, $\varphi = \varphi_0$, получим уравнение для определения угла статического закручивания φ_0 :

$$R^2 \Theta_1 \sin \varphi_0 = M_1 + M_2. \quad (\text{В.10})$$

Теперь перейдем к исследованию устойчивости положения равновесия. Для этого будет варьироваться полное нелинейное уравнение (В.9), а в коэффициенты при вариациях будут подставляться условия равновесия $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $\Omega = 0$, $\varphi = \varphi_0$.

Вариация кинетического момента:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathcal{L}} &= \Theta_1 (\delta \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{n} \times \delta \ddot{\mathbf{n}}) + \Theta_3 (\mathbf{n} \delta \Omega + \Omega \delta \mathbf{n}) \cdot = \\ &= \Theta_1 \mathbf{k} \times \delta \ddot{\mathbf{n}} + \Theta_3 \mathbf{k} \delta \dot{\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{В.11})$$

Вариация момента, создаваемого упругим основанием:

$$\begin{aligned} \frac{2}{R^2} \delta M_e &= \delta (C_3 \eta + C_1 (\cos \varphi - \eta)) \mathbf{n} \times \mathbf{k} + \\ &+ (C_3 \eta + C_1 (\cos \varphi - \eta)) \delta \mathbf{n} \times \mathbf{k} - \\ &- C_1 \delta (\sin \varphi) (\mathbf{n} + \mathbf{k}) - C_1 \sin \varphi \delta \mathbf{n} = \\ &= (C_3 + C_1 (\cos \varphi_0 - 1)) \delta \mathbf{n} \times \mathbf{k} - 2C_1 \cos \varphi_0 \mathbf{k} \delta \varphi - C_1 \sin \varphi_0 \delta \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (\text{В.12})$$

Вариация внешнего момента:

$$\delta (M_1 \mathbf{k} + M_2 \mathbf{n}) = M_2 \delta \mathbf{n}. \quad (\text{В.13})$$

Подставив выражения (В.11)–(В.13) в уравнение движения (В.9), получим:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \mathbf{k} \times \delta \ddot{\mathbf{n}} + \Theta_3 \mathbf{k} \delta \dot{\Omega} + \frac{R^2}{2} (C_3 - C_1 (1 - \cos \varphi_0)) \mathbf{k} \times \delta \mathbf{n} + \\ + R^2 C_1 \cos \varphi_0 \mathbf{k} \delta \varphi + \left(\frac{R^2}{2} C_1 \sin \varphi_0 - M_2 \right) \delta \mathbf{n} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{В.14})$$

Используя тождество (В.10) для угла φ_0 , преобразуем последнее слагаемое в уравнении (В.14):

$$\left(\frac{R^2}{2} C_1 \sin \varphi_0 - M_2 \right) \delta \mathbf{n} = \frac{M_1 - M_2}{2} \delta \mathbf{n}.$$

Разложим орт \mathbf{n} на горизонтальную составляющую $\boldsymbol{\varepsilon}$ и вертикальную $\boldsymbol{\eta} \mathbf{k}$:

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\eta} \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0.$$

Домножив теперь уравнение возмущенного движения (В.14) векторно на \mathbf{k} , получим уравнение возмущенного движения в горизонтальной плоскости:

$$\Theta_1 \delta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{R^2}{2} (C_3 - C_1(1 - \cos \varphi_0)) \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{M_2 - M_1}{2} \mathbf{k} \times \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}. \quad (\text{В.15})$$

Если угол закручивания φ_0 мал, то $\cos \varphi_0 \approx 1$ и полученное уравнение можно записать в упрощенной форме:

$$\Theta_1 \delta \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{R^2}{2} C_3 \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{M_2 - M_1}{2} \mathbf{k} \times \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}. \quad (\text{В.16})$$

Известно⁸, что уравнение вида (В.15), (В.16) с положительными коэффициентами в первых двух слагаемых описывает финитные движения тогда и только тогда, когда последнее слагаемое тождественно равно нулю, т. е. $M_1 = M_2$. Следовательно, мы получаем неустойчивость во всех случаях кроме полукасательного момента $\mathbf{M} = M(\mathbf{k} + \mathbf{n})/2$.

Итак, мы показали, что для данной упругой системы мертвый или следящий внешний моменты приводят к неустойчивости. Отметим, что рассмотренная модель *реальна* в том смысле, что она вполне может быть создана практически. Этим она выгодно отличается от моделей, используемых в теории стержней, где вопрос об адекватности модели и реальности далеко не так очевиден. А так как парадокс Николаи реализуется и для реальной системы, то нельзя делать вывод о неприменимости теорий стержней, для которых он имеет место.

В заключение покажем, что вертикальная проекция уравнения возмущенного движения (В.14) на устойчивость влияния не оказывает. Умножив (В.14) на \mathbf{k} скалярно, получим

$$\Theta_3 \delta \dot{\Omega} + R^2 C_1 \cos \varphi_0 \delta \varphi + \frac{M_1 - M_2}{2} \delta \eta = 0. \quad (\text{В.17})$$

Для Ω и η справедливы представления [93]:

$$\Omega = \dot{\varphi} + \omega_n, \quad \omega_n = -\frac{1}{1 + \eta} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}}), \quad \eta^2 = 1 - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (\text{В.18})$$

Непосредственным варьированием (В.18) легко доказать, что в окрестности рассматриваемого положения равновесия $\delta \omega_n = 0$, $\delta \eta = 0$. Тогда уравнение (В.17) принимает вид

$$\Theta_3 \delta \ddot{\varphi} + R^2 C_1 \cos \varphi_0 \delta \varphi = 0,$$

отвечающий устойчивым крутильным колебаниям.

⁸ См. главу 7.

О парадоксе Николаи в консервативных системах¹

С.1. Введение

В разделе 7.7 рассматривалась проблема устойчивости твердого тела на упругом основании под действием консервативных и неконсервативных крутящих моментов. Было показано, что положение равновесия, соответствующее повороту тела вокруг его оси изотропии, при некоторых параметрах упругого основания оказывается неустойчивым для сколь угодно малого значения внешнего момента. В случае неконсервативного внешнего момента данный результат интуитивно понятен. В систему постоянно накачивается энергия, в результате чего и происходит потеря устойчивости. Однако как показано в подразделе 7.7.5, потеря устойчивости возможна и при действии сколь угодно малого *консервативного* момента. Ниже приведено простое качественное объяснение этого факта, основанное на анализе потенциальной энергии системы.

С.2. Качественный анализ потенциальной энергии

Рассмотрим систему, состоящую из твердого тела на упругом основании и консервативного внешнего момента. Потенциальная энергия упругого основания имеет вид (7.45):

$$U = \frac{C_1}{2} (\theta^2 - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2) + \frac{C_3}{2} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta})^2, \quad (\text{С.1})$$

где \mathbf{k} — вектор, направленный по оси изотропии тела в отсчетном положении; C_1 , C_3 — жесткости упругого основания, отвечающие наклону тела и повороту тела вокруг \mathbf{k} . Консервативный внешний момент и соответствующая ему

¹ Приложение написано В. А. Кузькиным и А. М. Кривцовым. (*Примеч. ред.*)

потенциальная энергия задаются выражениями:

$$V = -M|\boldsymbol{\theta}|, \quad \mathbf{M}_{\text{ext}} = -\mathbf{Z}^T \cdot \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\theta}} = M \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|}, \quad M > 0. \quad (\text{C.2})$$

Нетрудно показать, что потенциал (С.2) является расширением потенциала, предложенного в подразделе 7.6.5, на случай произвольных углов поворота. Далее будет показано, что такое изменение потенциала приводит к появлению дополнительных положений равновесия, соответствующих наклону тела. В результате полная потенциальная энергия системы, состоящей из твердого тела на упругом основании и действующего на тело момента, выражается соотношением

$$U + V = \frac{C_1}{2} (\theta_x^2 + \theta_y^2) + \frac{C_3}{2} \theta_z^2 - M \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}. \quad (\text{C.3})$$

Здесь θ_x , θ_y , θ_z — проекции вектора поворота в ортонормированном базисе \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z , где векторы \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y выбираются произвольно, $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$. Приведенная зависимость энергии от проекций вектора поворота имеет простую геометрическую интерпретацию. Первые два слагаемых в формуле (С.3) определяют параболическую поверхность, соответствующую энергии упругого основания. Последнее слагаемое задает коническую поверхность, соответствующую энергии внешнего момента. В устойчивом положении равновесия потенциальная энергия системы должна иметь минимум, а ее вторые производные по всем аргументам должны быть положительны. Используя формулу (С.3) и приведенные геометрические соображения, нетрудно показать, что вторые производные функции U всюду положительны, а вторые производные функции V — всюду меньше либо равны нулю. Следовательно, воздействие консервативного внешнего момента, задаваемого функцией V , можно интерпретировать, как добавление к телу на упругом основании системы с отрицательной жесткостью, что и может приводить к потере устойчивости.

Осталось ответить на вопрос, почему неустойчивость реализуется при сколь угодно малом консервативном моменте. Для этого рассмотрим поведение потенциальной энергии (С.2), соответствующей внешнему моменту, в окрестности некоторого положения равновесия, определяемого углом поворота $\boldsymbol{\theta}_0$. Зададим малое отклонение $\boldsymbol{\varepsilon}$ от данного положения такое, что $\boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Нетрудно показать, что энергия в отклоненном положении приближенно определяется соотношением

$$V(\boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) \approx V(\boldsymbol{\theta}_0) - \frac{M}{2|\boldsymbol{\theta}_0|} \boldsymbol{\varepsilon}^2. \quad (\text{C.4})$$

Формула (С.4) показывает, что вклад внешнего момента в жесткость системы отрицателен и пропорционален $M/|\theta_0|$. В положении равновесия данное отношение определяется жесткостью упругого основания и не зависит от величины внешнего момента. Поэтому неустойчивость может возникать при сколь угодно малом внешнем моменте.

С.3. Разложение потенциальной энергии в ряд вблизи положений равновесия

Определим соотношение параметров упругого основания при котором возникает неустойчивость. Найдем положения равновесия системы, используя уравнение равновесия:

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial\theta} = (C_3 - C_1) \theta \cdot \mathbf{k}\mathbf{k} + \left(C_1 - \frac{M}{|\theta|} \right) \theta = 0. \quad (\text{С.5})$$

Рассматривая последовательно случаи $\theta \cdot \mathbf{k} \neq 0$ и $\theta \cdot \mathbf{k} = 0$, получим:

$$\theta_* = \pm \frac{M}{C_3} \mathbf{k}. \quad (\text{С.6})$$

$$\theta_{**} = \frac{M}{C_1} \mathbf{e}, \quad \forall \mathbf{e}: \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (\text{С.7})$$

Таким образом, при использовании потенциала (С.2) существуют два положения равновесия (С.6), соответствующих повороту вокруг \mathbf{k} и бесконечное множество положений равновесия (С.7), соответствующих наклону тела.

Исследуем устойчивость положений равновесия (С.6) и (С.7). Рассмотрим сначала малые отклонения от положений равновесия (С.6). Пусть возмущенный вектор поворота имеет вид

$$\theta_\varepsilon = \pm \frac{M}{C_3} \mathbf{k} + \varepsilon_k \mathbf{k} + \varepsilon_e \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad |\varepsilon_k| \ll 1, \quad |\varepsilon_e| \ll 1. \quad (\text{С.8})$$

Проведем разложение функций U и V в ряд по ε_k , ε_e с сохранением слагаемых до второго порядка малости включительно:

$$U_\varepsilon \approx \frac{M^2}{2C_3} \pm M\varepsilon_k + \frac{C_1}{2} \varepsilon_e^2 + \frac{C_3}{2} \varepsilon_k^2, \quad (\text{С.9})$$

$$V_\varepsilon \approx -\frac{M^2}{C_3} \mp M\varepsilon_k - \frac{C_3}{2} \varepsilon_e^2.$$

Согласно второй из формул (С.9), воздействие консервативного момента аналогично добавлению к твердому телу на упругом основании системы с отрицательной жесткостью, что в итоге и может приводить к неустойчивости. При этом жесткость не зависит от величины внешнего момента M , а определяется исключительно свойствами упругого основания. Складывая формулы (С.9), получим

$$U_\varepsilon + V_\varepsilon \approx -\frac{M^2}{2C_3} + \frac{C_1 - C_3}{2} \varepsilon_e^2 + \frac{C_3}{2} \varepsilon_k^2. \quad (\text{С.10})$$

Видно, что положения равновесия (С.6), соответствующие повороту тела вокруг вектора \mathbf{k} : 1) устойчивы при $C_1 > C_3$; 2) неустойчивы (являются седловыми точками) при $C_1 < C_3$; 3) являются безразличными положениями равновесия при $C_1 = C_3$. При этом в случае $C_1 < C_3$ неустойчивость реализуется при сколь угодно малом внешнем моменте M . В силу определения вектора \mathbf{e} к потере устойчивости приводит отклонение в любом направлении, перпендикулярном вектору \mathbf{k} .

Рассмотрим теперь малые отклонения от положений равновесия (С.7). При этом возмущенный вектор поворота имеет вид

$$\boldsymbol{\theta}_\varepsilon = \frac{M}{C_1} \mathbf{e} + \varepsilon_e \mathbf{e} + \varepsilon_n \mathbf{n} + \varepsilon_k \mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e} \times \mathbf{k}, \quad (\text{С.11})$$

где $|\varepsilon_e| \ll 1$, $|\varepsilon_n| \ll 1$, $|\varepsilon_k| \ll 1$. Проводя разложение потенциалов (С.1), (С.2), аналогичное разложению (С.9), получим:

$$U_\varepsilon \approx \frac{M^2}{2C_1} + M\varepsilon_e + \frac{C_1}{2} (\varepsilon_e^2 + \varepsilon_n^2) + \frac{C_3}{2} \varepsilon_k^2, \quad (\text{С.12})$$

$$V_\varepsilon \approx -\frac{M^2}{C_1} - M\varepsilon_e - \frac{C_1}{2} (\varepsilon_n^2 + \varepsilon_k^2).$$

Как и в предыдущем случае, воздействие консервативного момента эквивалентно добавлению системы с отрицательной жесткостью. Суммарная потенциальная энергия в возмущенном состоянии имеет вид

$$U_\varepsilon + V_\varepsilon \approx -\frac{M^2}{2C_1} + \frac{C_1}{2} \varepsilon_e^2 + \frac{C_3 - C_1}{2} \varepsilon_k^2. \quad (\text{С.13})$$

Из формулы (С.13) видно, что положения равновесия, соответствующие наклону тела: 1) неустойчивы при $C_1 > C_3$; 2) являются безразличными при $C_1 \leq C_3$, так как возмущения ε_n в рассматриваемом приближении не приводят к изменению энергии.

С.4. Заключение

Приведенные рассуждения позволяют объяснить появление неустойчивости при действии на твердое тело на упругом основании сколь угодно малого консервативного момента. Формулы (С.4), (С.9), (С.12) показывают, что воздействие консервативного момента с точки зрения исследования устойчивости эквивалентно добавлению системы с отрицательной жесткостью. Ясно, что если к устойчивой системе добавить систему с отрицательной жесткостью, то получившаяся система может оказаться неустойчивой. При этом в силу формулы (С.4) величина жесткости определяется свойствами упругого основания и не зависит от величины внешнего момента M . Поэтому потеря устойчивости может происходить при сколь угодно малом консервативном внешнем моменте. Однако в отличие от случая неконсервативного момента неустойчивость реализуется только когда жесткость упругого основания C_1 , соответствующая наклону тела, меньше жесткости на кручение C_3 .

Динамика систем с кулоновым трением¹

D.1. Закон трения Кулона

Трение является одним из самых распространенных явлений в природе. Проявления трения весьма разнообразны. Законы, описывающие трение в конкретных ситуациях, также разнообразны. В приложениях чаще всего используются два закона трения: линейный закон вязкого трения и закон так называемого сухого трения. Вязкое трение хорошо изучено, его проявления ясны и легко предсказуемы. Этого нельзя сказать о законах сухого трения, хотя они исследуются и применяются на практике уже более двухсот лет.

Сухим трением называется трение, возникающее при скольжении одного твердого тела по другому при отсутствии смазки. Силы трения, возникающие при относительном скольжении тел, находящихся в контакте, как правило, оказывают значительное влияние на динамические процессы в различных технических устройствах. Первые исследования сухого трения были проведены Кулоном в конце XVIII века. Схема эксперимента Кулона представлена на рис. D.1.

В 1781 г. Шарль Кулон опубликовал результаты своих экспериментов по измерению силы трения, возникающей при скольжении без смазки одного твердого тела по другому. Кулон установил, что при скольжении сила трения

¹ Материал приложения основан на трех статьях [94–96]: П. А. Жилин, О. П. Жилина. О законе трения Кулона и парадоксах Пэнлеве (Труды СПбГПУ. N 446. Механика и процессы управления. СПб., 1993. С. 52–81), О. Р. Zhilina, P. A. Zhilin. One peculiarity of problems with the Coulomb friction (Proc. of the XXV–XXVI Summer Schools “Nonlinear oscillations in mechanical systems”, Vol. 1. St. Petersburg, 1998. P. 315–320), M. Wiercigroch, P. A. Zhilin. On the Painleve paradoxes (Proc. of the XXVII Summer School “Nonlinear oscillations in mechanical systems”. St. Petersburg, 2000. P. 1–22). Последние две статьи написаны на английском языке. Перевод Е. А. Ивановой. (*Примеч. ред.*)

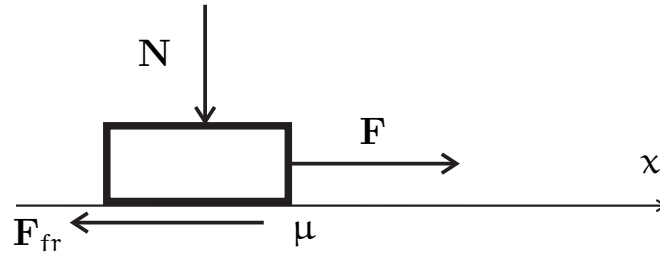


Рис. D.1. Эксперимент Кулона

пропорциональна величине поджатия тел и их относительной скорости. Кулон опубликовал первую формулировку закона сухого трения в следующей простейшей форме:

$$F_{\text{fr}} = -\mu N \operatorname{sign} \dot{x}, \quad \text{если } \dot{x} \neq 0. \quad (\text{D.1})$$

Именно такая формулировка закона сухого трения Кулона обычно приводится в учебниках. Внешняя простота этого закона обманчива. На самом деле закон трения Кулона является самым сложным уравнением состояния в механике. В простейших ситуациях закон Кулона позволяет полностью решить поставленную задачу. Этим объясняется тот факт, что на протяжении примерно ста лет после появления закона Кулона считалось, что этот закон не содержит в себе ничего, что было бы неясно с теоретической точки зрения. В то же время бурное развитие станкостроения во второй половине XIX века выявило множество случаев, когда применение закона Кулона, на первый взгляд, приводит к противоречиям. Особое беспокойство вызвали колебания станков, которые через несколько десятилетий были исследованы и получили название фрикционных автоколебаний. Из-за этих колебаний резко снижалась точность обработки выпускаемых изделий. Характер движений, возникающих при определенных условиях, иногда оказывался очень странным, почти скачкообразным. В настоящее время такие скачкообразные движения стали объектом интенсивных исследований — см. [97]. Перечисленные обстоятельства, а также теоретический интерес, вновь привлекли внимание исследователей к закону сухого трения Кулона. Интерес к парадоксальным ситуациям во всех областях чрезвычайно велик, и это не случайно, ибо их внимательное рассмотрение всегда способствовало прогрессу в той или иной области знаний. В полной мере это относится и к парадоксам, связанным с применением закона Кулона.

Приведенная выше формулировка закона Кулона (D.1) — это лишь малая часть общего утверждения. В экспериментах Кулона сила сдвигания тел N

задавалась, и следовательно, была известна. Однако в большинстве нетривиальных задач эта сила неизвестна и должна определяться в ходе решения задачи. В некоторых случаях функция $\mathbf{N}(\mathbf{t})$ может иметь сложный вид и зависеть от многих физических характеристик рассматриваемой задачи. Коэффициент трения μ принято считать характеристикой тел, находящихся в контакте. В настоящее время в справочниках можно найти коэффициенты трения для различных пар тел.

Общепринятой и единой с формальной точки зрения формулировки закона Кулона в настоящее время не существует, несмотря на то, что с физической точки зрения этот закон понимается достаточно единообразно. Поэтому, прежде чем обсуждать применение закона Кулона, необходимо дать его точную формулировку.

Рассмотрим два тела \mathcal{A} и \mathcal{B} , находящиеся в контакте. Сила трения \mathbf{F}_{fr} есть сила, действующая со стороны тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} , но это не вся сила реакции. Закон Кулона утверждает, что

$$\mathbf{F}_{\text{fr}} = \begin{cases} -\mu|\mathbf{P}|\frac{\mathbf{v}_\tau}{|\mathbf{v}_\tau|}, & \mathbf{v}_\tau \neq \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0, & \mathbf{v}_\tau = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

где $\mathbf{v}_\tau = (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)$ — касательная составляющая вектора относительной скорости в зоне контакта; \mathbf{n} — вектор нормали к площади контакта, направленной от тела \mathcal{B} к телу \mathcal{A} ; \mathbf{v}_A и \mathbf{v}_B — скорости контактирующих точек соприкосновения; $\mu \geq 0$ — коэффициент трения зависящий только от свойств материалов контактирующих тел; \mathbf{P} — величина поджатия; \mathbf{F} — сила трения покоя. Дополнительного обсуждения требуют величины \mathbf{P} и \mathbf{F} , входящие в закон Кулона. Обозначим через \mathbf{Q} полную силу реакции, действующую со стороны тела \mathcal{B} на тело \mathcal{A} . Тогда имеем: $\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}$, причем $\mathbf{P} \geq 0$, если контакт неудерживающий, и $\mathbf{P} > 0$ или $\mathbf{P} < 0$, если контакт удерживающий. Обычно считается, что модуль силы трения покоя \mathbf{F} не превосходит величины $\mu|\mathbf{P}|$: $|\mathbf{F}| \leq \mu|\mathbf{P}|$. Это требование, возможно, является излишним и может быть заменено другими требованиями, вытекающими из критериев устойчивости положений равновесия. Тем не менее ниже будет принято наиболее популярное условие

$$|\mathbf{F}| \leq \mu|\mathbf{P}|, \quad (\text{D.3})$$

хотя далеко не очевидно, что это условие приемлемо во всех случаях.

На первый взгляд кажется, что формулировка закона Кулона (D.2) излишне усложнена. В самом деле, если тела находятся в контакте, то, казалось бы, нормальная составляющая вектора относительной скорости $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)$

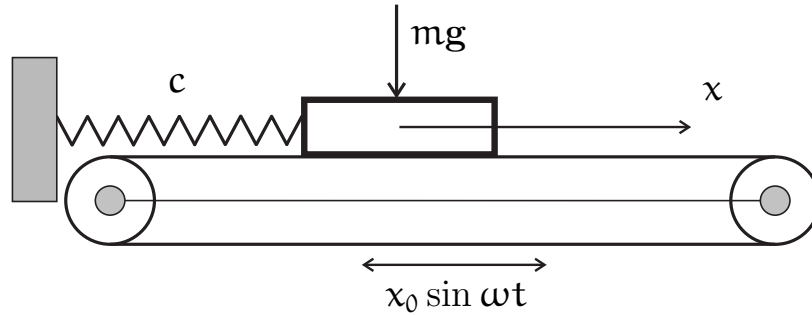


Рис. D.2. Тело на вибротранспортере

должна равняться нулю. Поэтому в (D.2) можно включить не вектор \mathbf{v}_τ , а вектор $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$. Тем не менее этот вытекающий из здравого смысла вывод неверен. Если контакт не является удерживающим, то мы обязаны допустить, что для контактирующих тел проекция относительной скорости на нормаль к площади контакта $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B)$ не обязательно равняется нулю. Иллюстрирующий это утверждение пример будет рассмотрен в подразделе D.4.2.

Рассмотрим систему, изображенную на рис. D.2. Воспользовавшись законом сухого трения Кулона в форме (D.1), можно записать следующее уравнение движения:

$$m\ddot{x} + \mu mg \operatorname{sign}(\dot{x} - x_0 \omega \cos \omega t) = 0. \quad (\text{D.4})$$

Начальные условия имеют вид

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = 0. \quad (\text{D.5})$$

Задачу Коши (D.4), (D.5) можно решить, но ее решение не будет соответствовать реальному движению массы m . Причина в том, что равенство (D.1) выражает лишь часть закона сухого трения Кулона. Общая формулировка этого закона определяется соотношениями (D.2), которые в случае движения тела вдоль оси x принимают вид

$$F_{\text{fr}} = \begin{cases} -\mu N \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \\ f_{\text{st}}, & |f_{\text{st}}| \leq \mu N, \text{ если } \dot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

где f_{st} должно определяться из уравнения статики. Более точное выражение закона трения Кулона дается представлением

$$F_{\text{fr}} = \begin{cases} -\mu N \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \tau^2 \ddot{x}^2 + \dot{x}^2 \neq 0, \\ f_{\text{st}}, & |f_{\text{st}}| \leq \mu N, \text{ если } \ddot{x} = 0, \dot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

где τ — параметр, имеющий размерность времени. Следует помнить, что сила нормальной реакции \mathbf{N} не может быть отрицательной: $\mathbf{N} \geq 0$. При двухстороннем контакте соотношения (D.7) заменяются соотношениями

$$F_{\text{fr}} = \begin{cases} -(\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2) \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \tau^2 \ddot{x}^2 + \dot{x}^2 \neq 0, \\ f_{\text{st}}, \quad |f_{\text{st}}| \leq \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2, & \text{если } \ddot{x} = 0, \quad \dot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

где μ_1, μ_2 — коэффициенты трения на нижней и верхней сторонах контакта соответственно; N_1, N_2 — силы нормальной реакции на нижней и верхней сторонах контакта соответственно, при этом $N_1 \geq 0$ и $N_2 \geq 0$, а кроме того, иногда бывает необходимо принять условие $N_1 N_2 = 0$.

Таким образом, для системы, изображенной на рис. D.2, имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - F_{\text{fr}} &= 0, \quad y = x - x_0 \sin \omega t, \\ F_{\text{fr}} &= \begin{cases} -\mu mg \operatorname{sign} \dot{y}, & \text{если } \tau^2 \ddot{y}^2 + \dot{y}^2 \neq 0, \\ f_{\text{st}}, \quad |f_{\text{st}}| \leq \mu mg, & \text{если } \ddot{y} = 0, \quad \dot{y} = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

К системе (D.9) нужно добавить начальные условия (D.5). Основная трудность исследования данной задачи заключается в том, что нужно искать не гладкие решения. Например, функция $\dot{y}(t)$ может быть разрывной. Для пояснения сказанного, рассмотрим простую систему, представленную на рис. D.1 при $F = 0$. В этом случае имеем уравнение

$$m\ddot{x} - F_{\text{fr}} = 0 \quad (\text{D.10})$$

и начальные условия

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = v. \quad (\text{D.11})$$

Если сила трения F_{fr} определяется выражением (D.1), задача имеет единственное решение:

$$\dot{x} = \begin{cases} v - \mu N t / m, & 0 < t < \tau_{\text{cl}} = m v / \mu N, \\ 0, & \tau_{\text{cl}} \leq t. \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

Решение (D.12) — это классическое решение. Если сила трения F_{fr} определяется соотношениями (D.6) или (D.7), задача имеет два решения:

$$\text{a) } \dot{x}_1 = \begin{cases} v - \mu N t / m, & 0 < t < \tau_{\text{cl}}, \\ 0, & \tau_{\text{cl}} \leq t; \end{cases} \quad \text{b) } \dot{x}_2 = \begin{cases} v, & t = 0, \\ 0 & t > 0. \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

Второе решение в (D.13) является точным решением задачи (D.10), (D.11) и (D.7). Однако это решение является разрывным. По этой причине оно игнорировалось большинством исследований. Заметим, что первым на важность разрывных решений указал Ф. Клейн [102]. Заметим также, что при анализе ряда задач разрывные решения использовал Н. В. Бутенин [111]. Физический смысл разрывного решения будет показан в разделе D.8.

В заключении этого раздела отметим, что приведенные выше формулировки закона трения Кулона не достаточны для того, чтобы применять их формально в любой ситуации. Можно сказать, что для правильного применения этого закона требуется глубокое понимание всех особенностей рассматриваемой задачи. Невозможно избежать всех проблем только лишь с помощью новых экспериментов и новых теоретических соображений.

D.2. Парадоксы Пэнлеве

В 1895 г. Поль Пэнлеве опубликовал книгу [98], которая вызвала бурную дискуссию. Поскольку данное издание является труднодоступным, в дальнейшем мы будем ссылаться на книгу [99], содержащую другие важные работы по этой тематике, а именно [100–110]. В работе [108] Пэнлеве высказал мнение, что закон Кулона несовместим с основными принципами механики. Проанализировав многочисленные примеры применения закона Кулона в задачах динамики систем с трением, он пришел к совершенно неожиданному для того времени выводу: “... пока отмеченные особые условия осуществляются, законы Кулона находятся в противоречии с динамикой абсолютно твердого тела” [99, с. 246] и далее “... между динамикой твердого тела и законами Кулона возникает логическое противоречие при условиях, которые могут осуществляться в реальности” [99, с. 248]. Логические противоречия Пэнлеве видит в ситуациях, когда решение задачи динамики либо не существует, либо не является единственным.

В настоящее время выводы Пэнлеве, даже если бы они были совершенно правильными, уже никого бы не удивили, в особенности специалистов по механике сплошных сред. В последней есть раздел, посвященный теории определяющих уравнений, где основная проблема заключается в определении условий, при которых те или иные определяющие уравнения приводят к корректно поставленным задачам. Закон Кулона — типичное определяющее уравнение. Поэтому, в принципе, оно может оказаться неприемлемым. Заслуга Пэнлеве заключается в том, что он первый заострил внимание на этой центральной в механике проблеме.

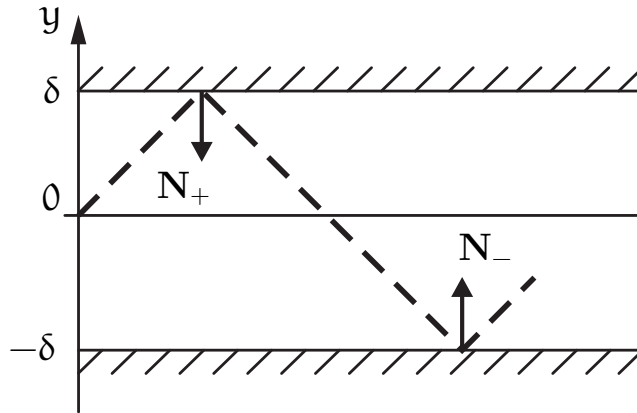


Рис. D.3. Движение частицы между двумя идеально гладкими плоскостями

Важными и нерешенными до настоящего времени являются следующие вопросы. Насколько физически оправдано требование обязательности для задач механики быть корректно поставленными? Может быть определенный “уровень некорректности” допустим, оправдан и необходим? Дискуссия по данным вопросам ведется очень широко, высказываются противоположные точки зрения. Камнем преткновения здесь является тот факт, что в механике рассматриваются модели, которые получаются путем предельных переходов по отношению к реальным телам. А это означает, что решения, найденные для моделей, являются некими пределами решений, построенных для “реальных” тел. И эти предельные решения могут обладать свойствами, противоречащими на первый взгляд здравому смыслу.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим совсем простую задачу о “плоском” движении частицы (материальной точки) между двумя идеально гладкими плоскостями (рис. D.3). Расстояние между поверхностями обозначим через 2δ . В качестве начальных условий примем:

$$t = 0: \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \dot{y} = b > 0, \quad \dot{x} = a > 0.$$

В момент времени $t = 0$ частица массой m вылетает из начала координат, и в момент времени $t_1 = \delta/b$ она отражается от верхней плоскости. Происходит удар, в результате которого компонента скорости v_y меняет знак на противоположный при условии, что удар рассматривается как абсолютно упругий. Величина реакции N_+ находится из уравнения баланса количества движения:

$$mv_y^+ - mv_y^- = N_+ \tau,$$

где $v_y^- = b > 0$ — скорость точки до удара, $v_y^+ = -b < 0$ — скорость точки

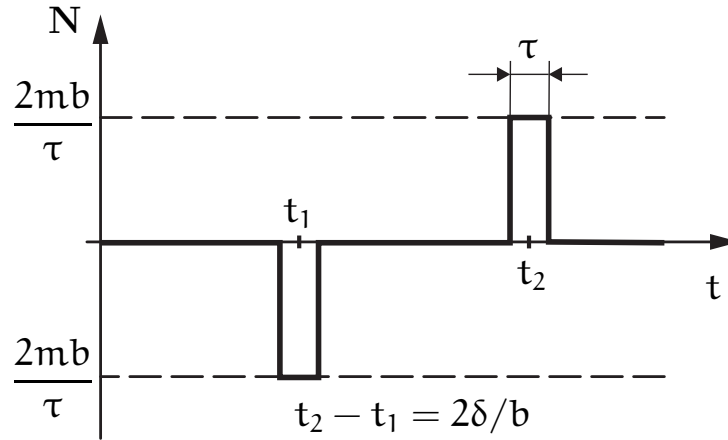


Рис. D.4. График реакции

после удара, τ — время соударения, которое в механике абсолютно твердого тела обычно много меньше других характерных временных интервалов и потому молчаливо игнорируется.

Итак, реакция определяется выражением $N_+ = -2mb/\tau < 0$. При $t > t_1$ частица летит вперед и вниз, и в момент времени $t_2 = 3\delta/b$ отражается от нижней плоскости. Возникшая реакция N_- определяется по формуле

$$mv_y^+ - mv_y^- = N_- \tau,$$

где $v_y^+ = b$, $v_y^- = -b$ и, следовательно, $N_- = 2mb/\tau > 0$. В момент времени $t_3 = 5\delta/b$ произойдет удар о верхнюю плоскость и возникнет реакция N_+ . Далее картина будет повторяться.

Итак, решение задачи при условии, что удар считается упругим, имеет вид

$$(y(t), \dot{y}(t)) = \begin{cases} (bt, b), & 0 \leq t \leq \frac{\delta}{b}; \\ (2\delta - bt, -b), & \frac{\delta}{b} \leq t \leq \frac{3\delta}{b}; \\ (-4\delta + bt, b), & \frac{3\delta}{b} \leq t \leq \frac{5\delta}{b}; \\ \text{и т. д.} \end{cases}$$

Ясно, что координата x меняется по закону $x = at$. Время между соседними ударами о верхнюю и нижнюю плоскости, очевидно, постоянно и равно $2\delta/b$. График реакции представлен на рис. D.4.

Заметим, что скорость меняется скачком, т. е. нет непрерывной дифференцируемости по времени. Однако это явление никто не считает некоррект-

ностью, поскольку все принятые условности хорошо понятны и легко интерпретируются. Если устремить δ к нулю, получится решение

$$x = at, \quad y = 0, \quad N = \pm \frac{2mb}{\tau}.$$

В этом предельном случае знак скорости \dot{y} и знак реакции плоскостей N не только не определены, но в каждый момент времени реализуются (!) сразу оба знака. Абсурдна ли эта ситуация? По нашему мнению — это нормальный, легко интерпретируемый в рамках принятых условностей результат. Более того, этим результатом можно пользоваться для вполне практических целей. В противоположность этой точке зрения, Пэнлеве, изучая ситуации с удерживающими контактами, и получая, что подходят реакции обоих знаков, связывает это явление со спецификой закона Кулона и объявляет его “вне закона”. Даже если считать решения такого типа неприемлемыми (а это зависит от точки зрения), нельзя возлагать вину на закон Кулона. Отмеченное обстоятельство далеко не единственное, и даже не главное из тех, на которые обратил внимание Пэнлеве. В постановках задач содержатся элементы, которые “подозрительны” сами по себе, независимо от того, используется закон Кулона или нет. То, что “странности” в решениях модельных (слишком идеализированных) задач могут возникать, видно хотя бы из приведенного выше примера. Поэтому претензии к закону Кулона не кажутся достаточно обоснованными. Разумеется, речь идет о логической допустимости закона Кулона, а не его соответствии реальности.

Обсудим итоги дискуссии, последовавшей за работами Пэнлеве. В дискуссии приняли участие такие выдающиеся ученые, как Ф. Клейн, Р. Мизес, Г. Гамель, Л. Прандтль, имена которых не нуждаются в представлениях, и, разумеется, сам Поль Пэнлеве. Мнения участников дискуссии разделились. Л. Лекорню [103, 104], по существу признав наличие парадоксов, предлагал отказаться от модели абсолютно твердых тел. Ф. Клейн [102] пришел к выводу: “Законы трения Кулона не находятся в противоречии ни с принципами механики, ни с явлениями, наблюдаемыми в природе: их нужно только правильно толковать” [99, с. 256]. Своеобразие результатов Ф. Клейна обусловлено тем, что он впервые в задачах рассматриваемого типа использовал “гипотезу” мгновенного останова. В результате дискуссия обрела новые черты, и внимание участников сосредоточилось на гипотезе Ф. Клейна, которую сам Клейн гипотезой не считал, хотя и не вывел ее на уровень доказанного факта. Р. Мизес [105] по поводу гипотезы Ф. Клейна высказался так: “Клейн объясняет явление не с точки зрения законов Кулона, а пользуясь новым положением, полученным из опыта. ... Этому новому опытному положению

можно придать форму некоторого видоизменения закона Кулона” [99, с. 257]. Далее Р. Мизес приводит весьма интересные соображения и дает формулировку, дополняющую закон Кулона и позволяющую совместить взгляды Пэнлеве и Клейна. Тем не менее заключительный вывод Р. Мизеса таков: “Таким образом, не логика, но методология ньютоновской механики вынуждает нас отказаться от законов Кулона” [99, с. 259]. Г. Гамель [101], по существу, присоединился к точке зрения Лекорню и встал на позицию отказа от модели абсолютно твердого тела. Весьма определенно высказался Л. Прандтль [110]: “В высказываниях Мизеса и Гамеля речь идет о “гипотезе” мгновенного самоторможения. В противоположность этому, я подчеркиваю, что в данном случае можно говорить лишь о результате, полученном при помощи предельного перехода. Исследование упругих систем дает, вообще говоря, нечто большее: оказывается, что из двух возможных движений, которые дает для положительных импульсов обыкновенная теория, одно, а именно ускоренное, будет устойчивым, а другое, замедленное, будет, наоборот, неустойчивым. В пределе мы получаем бесконечно большую неустойчивость, так что спокойно можно сказать, что это второе движение является практически невозможным. ... можно считать установленным, что нельзя никоим образом выставлять логических сомнений против кулоновых законов” [99, с. 263–264]. По поручению Л. Прандтля, Ф. Пфейфер провел большое исследование — см. [109], однако, убедительного подтверждения сказанному с позиций устойчивости не нашел. Даже те авторы, которые не были согласны с позицией Пэнлеве, не смогли указать, в каких пунктах рассуждений Пэнлеве содержатся ошибки.

Таким образом, в ходе дискуссии позиция Пэнлеве [106–108] не нашла убедительного опровержения, но было указано несколько путей выхода из парадоксальных ситуаций. Основной путь — это отказ от модели абсолютно твердого тела. Альтернативный путь — применение, при необходимости, “гипотезы” мгновенного самоторможения. Обоснование этого пути осталось за рамками проведенных исследований. За десятилетия, прошедшие со времени завершения дискуссии, интерес к парадоксам Пэнлеве то затухал, то снова возрастал. Плодотворность гипотезы Ф. Клейна была показана в большой работе Н. В. Бутенина [111]. Значительное развитие идей, связанных с частичным отказом от модели абсолютно твердого тела, содержится в работах Ле Суан Аня [112, 113].

Из изложенного следует, что необходимо, во-первых, показать особенности закона Кулона, не затуманенные никакими другими обстоятельствами, и, во-вторых, рассмотреть именно те условия, которые исследовал Пэнлеве. Только после этого можно будет либо признать позицию Пэнлеве, либо отверг-

нуть ее частично или полностью. Хорошо известно, что даже в простейших случаях задачи с кулоновым трением имеют не единственное решение. Впервые важность этого факта отметил Клейн, который обнаружил существование разрывных решений. Однако большинство ученых не приняли “гипотезу” мгновенного останова, которая, по мнению Клейна, позволяла избежать парадоксов Пэнлеве. Причину понять нетрудно: в решении проблемы, предложенном Клейном, мы имеем дело с мгновенной остановкой тела ненулевой массы. Хорошо известно, что в таком случае необходимо действие бесконечно большой силы, что в реальности невозможно. В работах [104, 114] пояснен физический смысл разрывных решений и указано, как из двух возможных решений выбрать нужное. Тем не менее последующие за этими работами дискуссии показали необходимость более внимательного рассмотрения решения Клейна.

Таким образом, законы сухого трения, подобно всем экспериментально установленным законам, требуют дальнейших исследований и уточнений. Однако нельзя согласиться с установившимся мнением, что закон трения Кулона является причиной некоторых парадоксальных результатов, противоречащих экспериментальным фактам или здравому смыслу. Анализируя случаи, известные в литературе под названием парадоксов Пэнлеве, нетрудно заметить, что все они относятся к задачам динамики систем твердых тел. Хорошо известно, что эти задачи очень часто бывают некорректно поставленными, хотя закон трения Кулона и не используется. Ситуации, когда решение неединственно или решения не существует, являются типичными проявлениями некорректно поставленных задач. Если мы хотим работать с твердыми телами, мы должны быть готовы к появлению неединственных решений, которые, к тому же, могут быть негладкими. Вопрос, следовательно, состоит не в том, как избавиться от них, а в том, как дать им правильную интерпретацию.

Отметим, что в задачах динамики систем с кулоновым трением часто проявляются особенности, характерные для динамики систем при ударных нагрузках. Поясним сказанное на примере задачи, изображенной на рис. D.1. Предположим, что тело двигалось при $t < 0$ с постоянной скоростью. В момент времени $t = 0$ все активные силы прекратили действовать и тело стало двигаться по инерции. На самом деле при $t = 0$ происходит ударное нагружение тела силой трения. Действительно, при $t < 0$ на тело никакие силы не действовали, так как активная сила была уравновешена силой трения. Когда активная сила исчезла, произошло ударное нагружение тела силой трения. Иными словами, имело место столкновение твердых тел при отсутствии видимых признаков воздействия.

D.3. Задача Пэнлеве

Подробное и четкое изложение задачи Пэнлеве и возникающих здесь затруднений содержится в курсе П. Апеля [115, с. 117–120]. Ниже будет построено решение этой задачи и показано, что на самом деле нет никаких затруднений, кроме чисто технических. Одновременно будет показано, в каких именно пунктах своих рассуждений Пэнлеве допускает серьезные ошибки. Предполагается, что читатель знаком с изложением задачи Пэнлеве в [115].

Задача Пэнлеве формулируется так. Система, состоящая из двух материальных точек P и A , закрепленных на концах безынерционного абсолютно твердого стержня длины l , совершает движение в вертикальной плоскости xOy . Точка P , масса которой равна m_1 , может скользить с трением вдоль оси Ox по жестким направляющим, не позволяющим ей сойти с оси Ox . На систему действуют только сила тяжести, направленная вертикально вниз, и реакция направляющих в точке P . Масса точки A равна m_2 . Система и действующие на нее силы изображены на рис. D.5. Нужно исследовать движение этой системы.

D.3.1. Уравнения движения

Уравнения движения системы, изображенной на рис. D.5, очевидно, имеют вид

$$\begin{aligned} ml\ddot{\xi} + m_2l(\sin\theta)'' &= N_x, & mg - m_2l(\cos\theta)'' &= N_y, \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta &= -\ddot{\xi}\cos\theta, \end{aligned} \tag{D.14}$$

где $m = m_1 + m_2$; безразмерная координата ξ точки P на оси Ox введена равенством $x = l\xi$; угол между стержнем и осью Oy обозначен θ , он обращается в нуль когда точка A находится в нижнем положении; g — ускорение свободного падения; N_x и N_y — горизонтальная и вертикальная составляющие реакции направляющих. Начальные условия будут сформулированы позднее.

Система трех уравнений (D.14) не замкнута, так как в нее входят четыре неизвестные функции $\xi(t)$, $\theta(t)$, $N_x(t)$, $N_y(t)$. Для замыкания этой системы необходимо сформулировать одно дополнительное соотношение. Последнее называется определяющим уравнением, при условии, что оно связывает силы и характеристики движения. Если дополнительное соотношение налагает на движение ограничения, не зависящие от воздействий, то оно называется связью. В данном случае горизонтальная реакция N_x задается законом

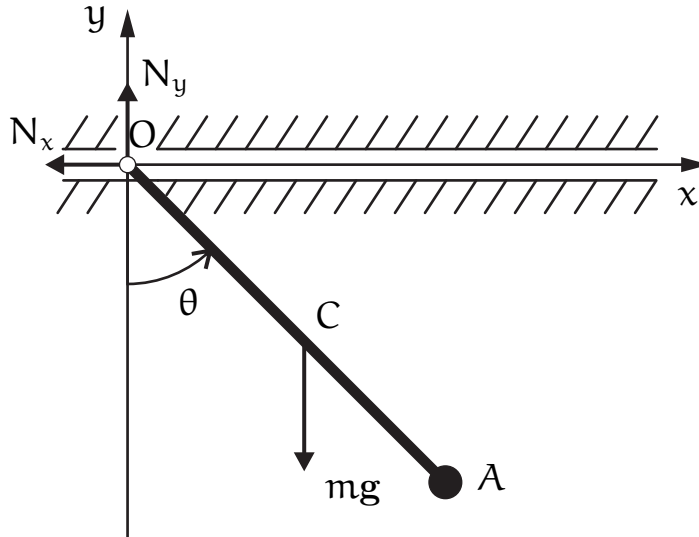


Рис. D.5. Задача Пэнлеве

Кулона, который, таким образом, является типичным определяющим уравнением. Как будет показано в последующих разделах, главная особенность закона Кулона состоит в том, что, как правило, его использование приводит к неединственности решения, и это связано не с порочностью закона Кулона, а с самой природой задач с сухим трением. Проблема выбора решения должна решаться отдельно, а сам выбор зависит от конкретной специфики движущихся тел, в частности, от их формы. Например, в разделе D.8 показано, что шкаф и горизонтальный плоский лист той же массы будут двигаться по-разному, несмотря на то, что их взаимодействие с поверхностью, по которой они движутся, описывается одним и тем же законом Кулона.

Если тело движется вдоль направляющих, т. е. контакт тел является удерживающим, то проблема выбора решения резко упрощается и сводится к следующему положению: при наличии удерживающего контакта тело может скользить по направляющим тогда и только тогда, когда активная сила, действующая на тело, по модулю превосходит максимальное значение модуля силы трения покоя. Подчеркнем, что данное положение принимать не обязательно — это можно получить как следствие полного анализа задачи². Однако в последнем случае все решение задачи становится чрезвычайно громоздким. Поэтому лучше принять это положение сразу, а затем просто показать, что оно ничему не противоречит и приводит к единственному решению задачи.

² Полный анализ задачи о движении тела конечных размеров при наличии удерживающих контактов проведен в разделе D.7. (*Примеч. ред.*)

Далее показано, как используется указанное положение при решении задачи Пэнлеве.

С использованием обозначения

$$z = \frac{m_2 l}{m_1 g} \left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \cos \theta \right), \quad (\text{D.15})$$

перепишем систему (D.14) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} (m_1 l + m_2 l \sin^2 \theta) \ddot{\xi} &= m_1 g z \sin \theta + N_x, \\ N_y &= m_1 g + m_1 g z \cos \theta - m_2 l \ddot{\xi} \sin \theta \cos \theta, \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= -\ddot{\xi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Величину $m_1 g z \sin \theta$ в уравнениях (D.16) следует считать активной силой (положительный множитель, стоящий при $\ddot{\xi}$ не имеет значения). Тогда высказанное выше положение записывается в виде

$$|m_1 g z \sin \theta| \leq \mu |N_y|_{\ddot{\xi}=0} = \mu |m_1 g + m_1 g z \cos \theta|.$$

Последнее неравенство удобно переписать, возведя обе его части в квадрат. В результате придем к неравенству

$$z^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{\mu^2} \sin^2 \theta \right) + 2z \cos \theta + 1 \geq 0, \quad (\text{D.17})$$

которое будем называть основным. Если оно выполнено, то точка P стоит на месте. Если оно нарушено, точка P движется с ненулевым ускорением.

D.3.2. Области движения и застоя

Вся фазовая плоскость переменных θ, z разбивается на области движения и застоя точки P . Границы раздела этих областей являются корнями уравнения, которое получается из (D.17) оставлением знака равенства. Корни z_1 и z_2 определяются выражениями

$$z_1 = -\frac{\mu}{\mu \cos \theta + |\sin \theta|}, \quad z_2 = -\frac{\mu}{\mu \cos \theta - |\sin \theta|}. \quad (\text{D.18})$$

Типичный вид областей движения и застоя точки P показан на рис. D.6, где область движения заштрихована. Следует помнить, что, согласно (D.15), функция $z(t)$ всегда удовлетворяет неравенству

$$z(t) \geq \frac{m_2}{m_1} \cos \theta(t).$$

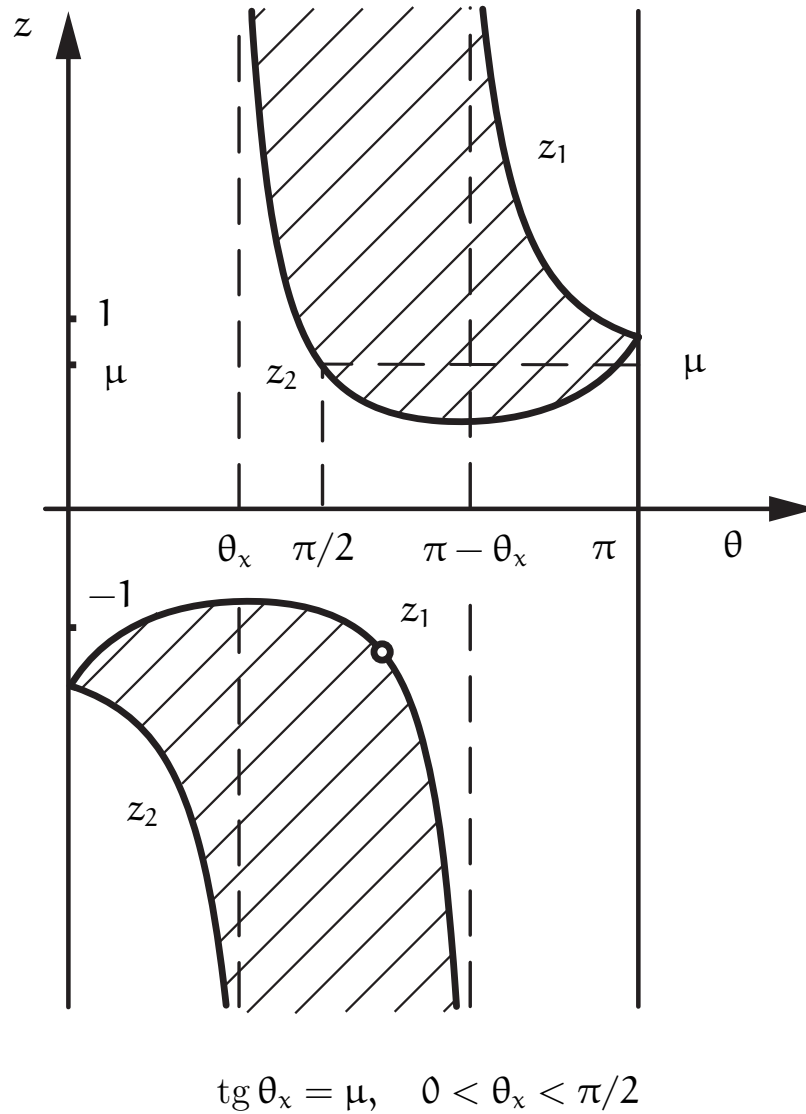


Рис. D.6. Типичный вид областей движения и застоя

Нетрудно убедиться, что области движения быстро уменьшаются с ростом коэффициента μ , а в пределе при $\mu \rightarrow \infty$ они вырождаются в линии $z = 1/\cos \theta$.

D.3.3. Схема решения задачи Пэнлеве

Пусть заданы начальные условия:

$$t = 0: \quad \xi = 0, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_0. \quad (\text{D.19})$$

По этим начальным условиям вычисляется значение функции $z_0 \equiv z(0)$. Возможны различные случаи.

1. Точка с координатами θ_0 и z_0 попадает в область, где неравенство (D.17) выполнено строго. В этом случае происходит мгновенный останов точки P при $t = +0$. Тогда при малых t нужно интегрировать систему уравнений:

$$\begin{aligned} N_x &= -m_2 l \left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \cos \theta \right) \sin \theta, \\ N_y &= m_1 g + m_2 l \left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \cos \theta \right) \cos \theta, \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0. \end{aligned} \quad (D.20)$$

Интегрирование системы (D.20) очевидно и не вызывает затруднений. По найденной функции $\theta(t)$ находится функция $z(t)$ и проверяется неравенство (D.17). В результате находится момент времени $t = \tau$, в который точка $\theta(\tau)$, $z(\tau)$ попадает на одну из линий (D.18). Может случиться так, что $\tau = \infty$. Тогда решение задачи на этом и заканчивается.

Если конечное τ существует, то в этот момент времени вычисляются новые начальные условия:

$$t = \tau: \quad \xi = 0, \quad \dot{\xi} = 0, \quad \theta = \theta_*(\tau), \quad \dot{\theta} = \dot{\theta}_*(\tau), \quad (D.21)$$

где $\theta_*(\tau)$ и $\dot{\theta}_*(\tau)$ находятся в результате интегрирования системы (D.20). При $t > \tau$, когда $\dot{\xi}(t) \neq 0$, нужно интегрировать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} D(\theta)\ddot{\xi} &= \left(\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \cos \theta \right) (\sin \theta - \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \theta) - \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{m_1 g}{m_2 l}, \\ D(\theta)N_y &= m_1 l \dot{\theta}^2 \cos \theta + \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) m_1 g, \\ D(\theta)\ddot{\theta} + \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{g}{l} \sin \theta &= \\ &= -\dot{\theta}^2 \cos \theta (\sin \theta - \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \theta) + \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \frac{g}{l} \cos \theta, \end{aligned} \quad (D.22)$$

где функция $D(\theta)$ имеет вид

$$D(\theta) = \frac{m_1}{m_2} + \sin^2 \theta - \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \theta \cos \theta, \quad (D.23)$$

и используются обозначения

$$\varepsilon_1 = \text{sign } \dot{\xi}, \quad \varepsilon_2 = \text{sign } N_y, \quad N_x = -\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 N_y. \quad (D.24)$$

Теорема. Функция $D(\theta)$, заданная выражением (D.23), положительна в области возможного движения точки P при всех значениях ε_1 и ε_2 и произвольном $\mu \in (0, \infty)$.

Доказательство. Допустим, что $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$. Тогда получим ($0 \leq \theta \leq \pi$):

$$D(\theta) = \frac{m_1}{m_2} + \sin \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta) = \frac{m_1}{m_2} + \sin \theta \frac{\mu}{z_2},$$

где z_2 определено второй из формул (D.18). Отсюда видно, что в интервале $0 \leq \theta \leq \pi$ функция $D(\theta)$ может стать неположительной только при отрицательных значениях величины z , т. е. когда $0 \leq \theta \leq \theta_*$. Но в этом интервале значений θ область движения отсутствует, ибо согласно (D.17) величина z положительна в интервале $[0, \theta_*]$.

Итак, при $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = +1$ величина $D(\theta)$ положительна в области возможного движения точки P при любом значении коэффициента трения.

Допустим теперь, что $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$. Тогда функция $D(\theta)$, где $\theta \in [0, \pi]$, принимает вид

$$D(\theta) = \frac{m_1}{m_2} + \sin \theta (\sin \theta + \mu \cos \theta) = \frac{m_1}{m_2} - \sin \theta \frac{\mu}{z_1},$$

где z_1 определено первой из формул (D.18). Видим, что $D(\theta)$ может принимать отрицательные значения только при $\pi - \theta_* \leq \theta \leq \pi$, где $z_1 > 0$ (рис. D.6). В этом интервале функция $D(\theta)$ непрерывна, а на концах интервала принимает значения

$$D(\pi - \theta_*) = D(\pi) = m_1/m_2 > 0.$$

Функция $D(\theta)$ может принимать отрицательные значения на интервале $[\pi - \theta_*, \pi]$ только в том случае, если внутри интервала она имеет минимум.

Найдем критическую точку θ_c функции $D(\theta)$:

$$D'(\theta_c) = \sin(2\theta_c) + \mu \cos(2\theta_c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_c = \frac{\pi - \theta_*}{2} \quad \left(0 \leq \theta_* < \frac{\pi}{2}\right).$$

Однако в этой точке функция $D(\theta)$ имеет не минимум, а максимум, так как

$$D(\theta_c) = \frac{m_1}{m_2} + \cos \frac{\theta_*}{2} \left(\cos \frac{\theta_*}{2} + \mu \sin \frac{\theta_*}{2} \right) > \frac{m_1}{m_2}.$$

Доказательство теоремы завершено.

Обратим внимание, что в рассуждениях Пэнлеве [99, 115] парадоксальные ситуации возникают только при отрицательных $D(\theta)$, когда, как мы только

что убедились, точка P должна стоять, и всякие манипуляции с величинами ε_1 и ε_2 становятся неприменимыми.

Поскольку во всей области движения точки P функция $D(\theta)$ положительна, то величины ε_1 и ε_2 , входящие в систему (D.22), определяются однозначно. В самом деле, знак реакции N_y определяется по второму уравнению системы (D.22) и начальным условиям (D.21). Поэтому при $t > \tau$ величина ε_2 определена. Знак реакции N_x удобнее находить не из системы (D.22), а из первого уравнения (D.16). В момент времени $t = \tau$ левая часть этого уравнения равнялась нулю. Следовательно, знак N_x противоположен знаку функции $m_1 g z(\tau) \sin \theta(\tau)$. Так как в момент времени $t = \tau$ система переходит из области застоя в область движения точки P, знак N_x будет сохраняться какое-то время и при $t > \tau$. Поскольку знак N_x известен, то известен и знак скорости $\dot{\xi}$.

Теперь в системе (D.22) уже не осталось неопределенностей, и задача Коши (D.21), (D.22) имеет единственное решение, которое будет справедливо до тех пор пока неравенство (D.17) вновь ни станет выполняться. После этого возвращаемся к интегрированию (D.20) при новых начальных условиях.

2. Может случиться, что координаты θ_0 и $\dot{\theta}_0$ из условий (D.19) попадут в область движения точки P, т. е. нарушат неравенство (D.17). В этом случае решение задачи начинается с интегрирования системы (D.22) при использовании процедуры, описанной в предыдущем пункте.

3. Координаты θ_0 и $\dot{\theta}_0$ могут попасть на границу раздела областей застоя и движения. В этом случае по знаку $\dot{\theta}_0$ определяется возрастание или убывание функции $\theta(t)$, при малых $t > 0$. По рис. D.6 легко установить, в какую область выходит система: в область движения или в область застоя.

D.3.4. Конкретный случай задачи Пэнлеве

Чтобы проиллюстрировать схему решения задачи Пэнлеве, рассмотрим конкретные начальные условия:

$$t = 0: \quad \xi = 0, \quad \dot{\xi} = \dot{\xi}_0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = 0. \quad (\text{D.25})$$

Для простоты положим массы m_1 и m_2 равными: $m_1 = m_2 = m$. Именно этот случай рассматривал Пэнлеве.

В соответствии с начальными условиями (D.25), $z(0) = 0$. Неравенство (D.17) строго выполнено. Следовательно, происходит мгновенный останов точки P, т. е. $\dot{\xi}(t) = 0$ при $t > 0$.

Решение системы (D.20) сводится к интегрированию уравнения математического маятника. Первый интеграл этого уравнения при условиях (D.25) имеет вид

$$\dot{\theta}^2(t) = \frac{2g}{l} \cos \theta. \quad (\text{D.26})$$

Решение уравнения (D.26) хорошо известно. Однако, чтобы не загромождать изложение, приведем приближенное решение этого уравнения. Заметим, что угол $\theta(t)$ всегда заключен в интервале $-\pi/2 \leq \theta(t) \leq \pi/2$. Функцию $\cos \theta(t)$ на этом интервале можно заменить выражением

$$\cos \theta(t) = 1 - \frac{4}{\pi^2} \theta^2.$$

Ошибка, возникающая при такой замене, относительно мала и для наших целей она несущественна. Уравнение

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \theta^2 \right)$$

имеет очевидное точное решение

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{8g}{l}} \frac{t}{\pi} \right), \quad (\text{D.27})$$

удовлетворяющее начальным условиям (D.25). Неравенство (D.17) принимает вид

$$q = \mu^2(9p^2 + 6p + 1) + 9p(p - 1) \geq 0, \quad (\text{D.28})$$

где введено обозначение $p \equiv \cos^2 \theta$. Очевидно, что функция $q(p)$ имеет минимум в точке p_* :

$$p_* = \frac{3 - 2\mu^2}{6(1 + \mu^2)} \Rightarrow q_{\min} = \frac{16\mu^2 - 9}{4(1 + \mu^2)}.$$

Поэтому, если μ удовлетворяет неравенству $\mu \geq 0,75$, то неравенство (D.28) всегда выполнено и (D.27) доставляет полное решение задачи. Напомним, что у Пэнлеве парадоксы возникают при $\mu > 1$. Если коэффициент трения μ меньше значения $0,75$, то решение (D.27) справедливо только до первого нарушения (D.28).

Нули функции $q(p)$ определяются выражениями

$$p_{1,2} = \frac{3 - 2\mu^2 \pm \sqrt{9 - 16\mu^2}}{6(1 + \mu^2)} \geq 0.$$

Пусть, например, μ^2 мало в сравнении с единицей. Тогда, отбросив величины $O(\mu^4)$, получим $p_1 = \mu^2/9$, $p_2 = 1 - 16\mu^2/9$. Решение (D.27) справедливо в интервале $0 \leq t \leq \tau$, где τ определяется из уравнения

$$\cos \left[\frac{\pi}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{8g}{l}} \frac{\tau}{\pi} \right) \right] = \sqrt{p_1} \equiv \mu/3.$$

При малых μ решением этого уравнения является значение

$$\tau = \sqrt{\mu\pi l / (6g)}. \quad (D.29)$$

В момент времени $t = \tau$ имеем

$$\theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \frac{\mu}{3}, \quad \dot{\theta}(\tau) = -2\sqrt{\frac{2\mu g}{3\pi l}}, \quad z(\tau) = \frac{\mu}{3} \left(1 + \frac{8}{\pi} \right).$$

Из второго уравнения системы (D.22) сразу же видно, что $N_y > 0$, т. е. $\varepsilon_2 = 1$. Из первого уравнения (D.16) видим, что при $t = \tau$ реакция N_x отрицательна. Из второго уравнения (D.24) находим, что $\varepsilon_1 = 1$. Теперь система (D.22) полностью определена и поставлена задача Коши (D.21), (D.22), которая интегрируется стандартными (численными) методами. Решение ведется до тех пор, пока $\dot{\xi}(t)$ не обратится в нуль. Затем процедура повторяется: находят новые начальные условия для $\theta(t)$ и $\dot{\theta}(t)$ и интегрируется система (D.20).

D.4. Задача Пэнлеве–Клейна

D.4.1. Традиционный подход

Рассмотрим систему, представленную на рис. D.7. Движение этой системы исследовал Пэнлеве [98] и именно в этой задаче он впервые обнаружил парадоксальные ситуации. Позднее данную задачу исследовал Клейн [102]. Продемонстрируем путь рассуждений Пэнлеве и Клейна. Заметим, что далее представлен расширенный анализ, однако все основные результаты совпадают с результатами Пэнлеве и Клейна.

Уравнения движения системы, изображенной на рис. D.7, можно представить в виде

$$m_1 \ddot{x} = R + P_1 + S \cos \alpha, \quad m_2 \ddot{x} = P_2 - S \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi/2, \quad (D.30)$$

где R — сила трения; S — продольная сила в стержне. В этой задаче нужно использовать закон Кулона в виде (D.8), где

$$|N| = |S \sin \alpha| = |S| \sin \alpha = S \varepsilon_2 \sin \alpha, \quad \varepsilon_2 = \text{sign } S. \quad (D.31)$$

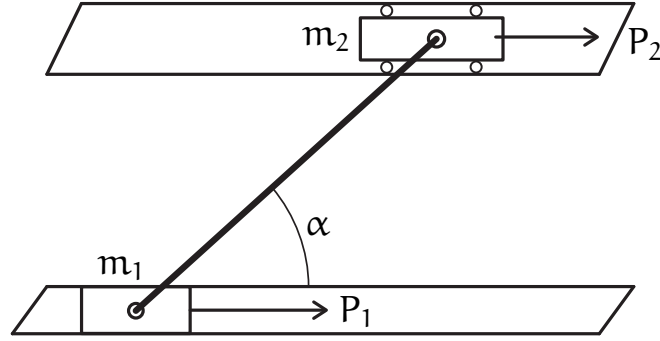


Рис. D.7. Задача Пэнлеве–Клейна

Таким образом, сила трения R определяется как

$$R = \begin{cases} -\mu S \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \alpha, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \\ f, \quad |f| \leq \mu |S| \sin \alpha, & \text{если } \dot{x} = 0, \quad \ddot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.32})$$

где $\varepsilon_1 = \text{sign } \dot{x}$. Начальные условия имеют вид

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = v, \quad (\text{D.33})$$

где v — начальная скорость.

Предположим, что при $t > 0$ массы m_1 и m_2 не движутся: $\dot{x} \equiv 0$. Тогда вместо уравнений движения (D.30) нужно решать уравнения статики:

$$f + P_1 + S \cos \alpha = 0, \quad P_2 - S \cos \alpha = 0. \quad (\text{D.34})$$

Из уравнений (D.34) с учетом (D.32) получаем:

$$f = -(P_1 + P_2), \quad S = P_2 / \cos \alpha, \quad |P_1 + P_2| \leq \mu |P_2| \tan \alpha. \quad (\text{D.35})$$

Последнее неравенство определяет область на плоскости (P_1, P_2) , где существует статическое решение. Таким образом, с теоретической точки зрения статическое решение существует всегда, когда удовлетворяется неравенство (D.35).

Если $P_2 = 0$, то система может быть в покое только тогда, когда $P_1 = 0$. Но начальная скорость v может отличаться от нуля!

Если $P_1 = 0$, то при $v \neq 0$ статическое решение существует только если выполняется условие $\mu \tan \alpha \geq 1$.

Предположим, что при $t > 0$ массы m_1 и m_2 движутся так, что $\dot{x} \neq 0$. Тогда сила S определяется выражением

$$S = \frac{\gamma P_2 - P_1}{(1 + \gamma) \cos \alpha - \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \alpha}, \quad \gamma = \frac{m_1}{m_2}. \quad (\text{D.36})$$

В исследованиях Пэнлеве–Клейна принималось ограничение

$$\gamma = 1, \quad P_2 = 0. \quad (\text{D.37})$$

Умножив выражение (D.36) на ε_2 и приняв во внимание равенство $|\mathbf{S}| = S\varepsilon_2$, получим

$$\frac{\varepsilon_2 (\gamma P_2 - P_1)}{(1 + \gamma) \cos \alpha - \mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin \alpha} > 0. \quad (\text{D.38})$$

Для малых значений $\mu > 0$ имеем

$$(1 + \gamma) \cos \alpha - \mu \sin \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \operatorname{tg} \alpha < 1 + \gamma. \quad (\text{D.39})$$

Тогда из (D.38) следует

$$\varepsilon_2 = \operatorname{sign} (\gamma P_2 - P_1). \quad (\text{D.40})$$

Таким образом, при малых μ существует два решения: одно определяется формулами (D.35), другое имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\gamma P_2 - P_1)/d, \quad \mathbf{R} = -\mu \operatorname{sign} \dot{x} |\mathbf{S}| \sin \alpha, \\ d &= (1 + \gamma) \cos \alpha - \mu \operatorname{sign} \dot{x} \operatorname{sign} (\gamma P_2 - P_1) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Пэнлеве не рассматривал этот случай, поскольку с его точки зрения здесь нет никаких проблем. Как видим, это не так.

На данный момент у нас нет оснований для выбора одного из двух возможных решений. Тем не менее закон трения Кулона не несет ответственности за подобную ситуацию. На самом деле, наша модель во многих важных аспектах не адекватна реальности. В следующем подразделе будет показано, как решить проблему выбора.

Предположим, что коэффициент трения μ не мал, так что справедливо неравенство

$$(1 + \gamma) \cos \alpha - \mu \sin \alpha < 0. \quad (\text{D.42})$$

Неравенство (D.42) определяет область параметров, при которых возникают парадоксы Пэнлеве. Здесь нужно рассматривать различные случаи.

1. Случай, когда $\gamma P_2 - P_1 = 0$. Согласно первым двум уравнениям (D.41) получаем $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. Таким образом, трение отсутствует и нет предмета для обсуждения.

2. Случай, когда $\varepsilon_1 = \operatorname{sign} \dot{x} = \operatorname{sign} v = 1$ и $\gamma P_2 - P_1 < 0$. С учетом данных условий неравенство (D.38) можно переписать в виде

$$\frac{\varepsilon_2 (\gamma P_2 - P_1)}{(1 + \gamma) \cos \alpha - \mu \varepsilon_2 \sin \alpha} > 0. \quad (\text{D.43})$$

При выполнении неравенства (D.43) имеем два решения

$$S = \frac{\gamma P_2 - P_1}{(1 + \gamma) \cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \quad \varepsilon_2 = -1, \quad (\text{D.44})$$

$$S = \frac{\gamma P_2 - P_1}{(1 + \gamma) \cos \alpha - \mu \sin \alpha}, \quad \varepsilon_2 = +1. \quad (\text{D.45})$$

Таким образом, в общей сложности есть три различных решения: (D.44), (D.45) и (D.35).

3. Случай, когда $\varepsilon_1 = 1$, $\gamma P_2 - P_1 > 0$. При данных условиях неравенство (D.43) не выполняется ни при каких значениях ε_2 . Таким образом, имеем единственное решение (D.35), соответствующее мгновенному останову системы.

4. Случай, когда $\varepsilon_1 = -1$, $\gamma P_2 - P_1 < 0$. С учетом этих условий неравенство (D.38) принимает вид

$$\frac{\varepsilon_2 (\gamma P_2 - P_1)}{(1 + \gamma) \cos \alpha + \mu \varepsilon_2 \sin \alpha} > 0. \quad (\text{D.46})$$

Значений ε_2 , удовлетворяющих неравенству (D.46), не существует. Следовательно, имеем единственное решение (D.35).

5. Случай, когда $\varepsilon_1 = -1$, $\gamma P_2 - P_1 > 0$. Данные условия допускают два решения:

$$S = \frac{\gamma P_2 - P_1}{(1 + \gamma) \cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \quad \varepsilon_2 = +1, \quad (\text{D.47})$$

$$S = \frac{\gamma P_2 - P_1}{(1 + \gamma) \cos \alpha - \mu \sin \alpha}, \quad \varepsilon_2 = -1. \quad (\text{D.48})$$

Снова в общей сложности имеем три различных решения: (D.47), (D.48) и (D.35).

Пэнлеве предположил, что именно закон трения Кулона несет ответственность за такую неудовлетворительную ситуацию. Позднее с выводом Пэнлеве согласился Аппель [115, с. 117]: “Не надо думать, что только в исключительных случаях возможны такие трудности. Напротив, они возникают в большинстве случаев, по крайней мере при достаточно больших значениях коэффициента трения μ . Поэтому необходимы новые эксперименты для нахождения законов трения, которые не будут создавать подобных проблем.” Тем не менее Ф. Клейн [102] и Л. Прандтль [110] придерживались другой точки зрения. Клейн, в частности указал, что при $v < 0$ есть единственное решение $\dot{x} = 0$. Чтобы избежать противоречий в случае $v > 0$, Клейн предложил привлечь во внимание статическое решение $\dot{x} = 0$. Однако он не объяснил, почему это нужно сделать.

D.4.2. Альтернативный подход

Нетрудно видеть, что исследование Пэнлеве, представленное в предыдущем подразделе, нуждается в некоторых уточнениях и дополнениях. Действительно, некоторые важные физические аспекты постановки задачи о движении системы, изображенной на рис. D.7, остались неопределенными.

В механике существует полезный эвристический принцип: если принимаются некоторые предположения, то необходимо продемонстрировать модель, в которой эти предположения могут быть в точности реализованы. Только тогда можно быть уверенными, что принятые предположения имеют физический смысл.

В задаче Пэнлеве–Клейна модель описывается уравнениями (D.30), (D.32). С чисто математической точки зрения эта модель — определенный математический объект, и мы должны изучить его свойства. Какими бы ни оказались эти свойства, мы не можем говорить о парадоксах, поскольку математический объект может иметь самые фантастические свойства. Если посмотреть с физической точки зрения, ситуация меняется. Мы говорим о парадоксах, когда результаты решения той или иной задачи противоречат здравому смыслу. Но тогда сама физическая постановка задачи не должна противоречить здравому смыслу.

Обсудим модель, которая описывается уравнениями (D.30), (D.32). Из уравнений (D.30) видно, что на концах стержня нет никаких моментов. Это означает, что массы m_1 и m_2 могут свободно поворачиваться относительно стержня. Нетрудно понять, что уравнения (D.30), (D.32) соответствуют случаю, изображенному на рис. D.8, *a*. Подчеркнем, что масса m_1 соприкасается либо с верхней стороной зазора, либо с нижней. Из рис. D.8, *a* видно, что в данном случае нельзя использовать закон трения Кулона, поскольку мы имеем вращательное движение m_1 , а не скольжение. Последнее станет возможным только если исключить поворот m_1 относительно стержня. Однако в этом случае сила в стержне уже не будет продольной, и уравнения (D.30) должны быть изменены.

Таким образом, постановка задачи, рассмотренная в предыдущем подразделе, не имеет физического смысла и закон трения Кулона не несет ответственности за возникающие парадоксы.

На рис. D.8, *b* изображена более реалистичная конструкция тормозной колодки. Здесь же показаны силы, действующие на тормозную колодку m_1 со стороны основания. Некоторые другие варианты конструкции тормозной колодки представлены на рис. D.9, *a–d*. Различие между вариантами рис. D.9, *a*

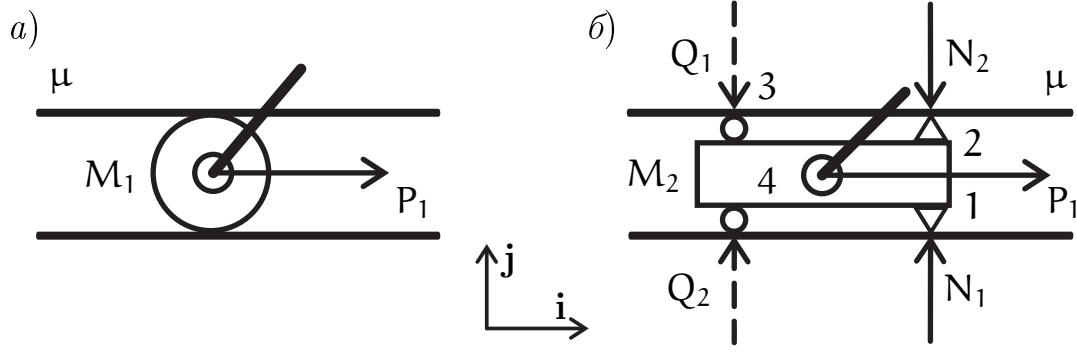


Рис. D.8. Конструкция тормозной колодки

и рис. D.9, б состоит в том, что во втором из указанных случаев тормозная колодка не может вращаться относительно стержня.

Далее исследуется движение системы, рассмотренной в предыдущем подразделе, с учетом конструкции тормозной колодки m_1 , изображенной на рис. D.8, б.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = P_1 \mathbf{i} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_4 + S(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}), \quad (\text{D.49})$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = P_2 \mathbf{i} - S(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) + \mathbf{R}_5 \mathbf{j}. \quad (\text{D.50})$$

Здесь S — продольная сила в стержне, $S > 0$ когда стержень сжат; вектор $\mathbf{R}_5 \mathbf{j}$ — реакция, действующая на тело M_2 ; векторы \mathbf{R}_k — реакции, действующие, соответственно, на точки $k = 1, 2, 3, 4$ тормозной колодки m_1 (см. рис. D.8, б).

Для реакций \mathbf{R}_k имеем выражения

$$\mathbf{R}_1 = R_1 \mathbf{i} + N_1 \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_2 = R_2 \mathbf{i} - N_2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_3 = -Q_1 \mathbf{j}, \quad \mathbf{R}_4 = Q_2 \mathbf{j}, \quad (\text{D.51})$$

которые должны удовлетворять ограничениям

$$N_1 \geq 0, \quad N_2 \geq 0, \quad N_1 N_2 = 0, \quad Q_1 \geq 0, \quad Q_2 \geq 0, \quad Q_1 Q_2 = 0. \quad (\text{D.52})$$

При этом величины R_1 и R_2 определяются законом трения Кулона. Из уравнений (D.49)–(D.51) следует

$$m_1 \ddot{x} = P_1 + R_1 + R_2 + S \cos \alpha, \quad m_2 \ddot{x} = P_2 - S \cos \alpha, \quad (\text{D.53})$$

$$N_1 - N_2 - Q_1 + Q_2 + S \sin \alpha = 0, \quad R_5 - S \sin \alpha = 0. \quad (\text{D.54})$$

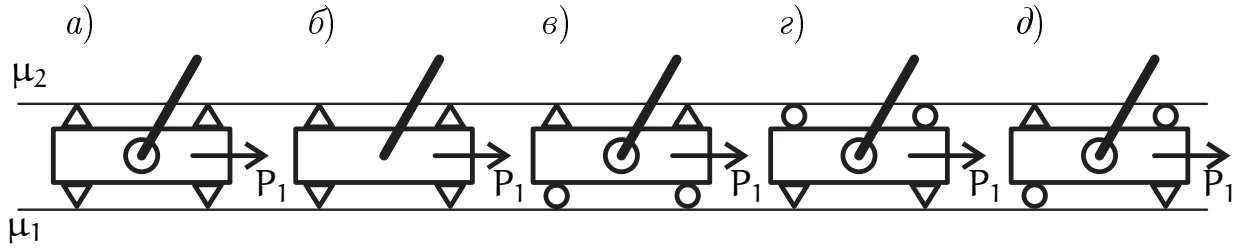


Рис. D.9. Тормозная колодка в зазоре

Закон трения Кулона можно записать в виде

$$R_1 = \begin{cases} -\mu N_1 \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \ddot{x} \neq 0, \\ f_1, |f_1| \leq \mu N_1, & \text{если } \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.55})$$

$$R_2 = \begin{cases} -\mu N_2 \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \ddot{x} \neq 0, \\ f_2, |f_2| \leq \mu N_2, & \text{если } \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0. \end{cases} \quad (\text{D.56})$$

На самом деле, как видно из первого уравнения (D.53), необходимо знать сумму

$$R_1 + R_2 = \begin{cases} -\mu (N_1 + N_2) \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \ddot{x} \neq 0, \\ f_1 + f_2, |f_1| \leq \mu N_1, |f_2| \leq \mu N_2, & \text{если } \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.57})$$

где должны быть учтены ограничения (D.52).

Теперь можно сравнить постановку задачи (D.30), (D.32), которую исследовали Пэнлеве и Клейн, и более реалистичную постановку задачи (D.53), (D.54), (D.57).

Если $Q_1 = Q_2 = 0$, то указанные выше формулировки идентичны. Подчеркнем, что закон трения Кулона применяется в обеих постановках задачи одинаковым образом.

Если $Q_1 \neq 0$ или $Q_2 \neq 0$, то обсуждаемые постановки задачи существенно различаются.

Прежде всего, система (D.53), (D.54), (D.57) с начальными условиями

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = v \quad (\text{D.58})$$

является неполной. К ней нужно добавить еще одно уравнение.

Существуют различные пути. Наиболее достоверный способ заключается в учете упругости стенок зазора. Строго говоря, в этом случае мы должны не

только добавить новое уравнение, но и заменить первое уравнение системы (D.54) следующим уравнением:

$$m_1 \ddot{y} = N_1 - N_2 - Q_1 + Q_2 + S \sin \alpha, \quad (D.59)$$

где y — вертикальная координата центра масс m_1 .

Предположим, что тормозная колодка m_1 может поворачиваться на малый угол φ . В этом случае вертикальные координаты точек 1, 2, 3, 4 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= y + l_1 \varphi, & y_2 &= y + l_1 \varphi, \\ y_3 &= y - l_1 \varphi, & y_4 &= y - l_1 \varphi. \end{aligned} \quad (D.60)$$

Для реакций N_1 , N_2 , Q_1 , Q_2 можно принять следующие определяющие уравнения³:

$$\begin{aligned} N_1 &= -c[1 - \theta_+](y + l_1 \varphi), & N_2 &= c\theta_+(y + l_1 \varphi), \\ Q_1 &= c\theta_-(y - l_1 \varphi), & Q_2 &= -c[1 - \theta_-](y - l_1 \varphi), \\ \theta_+ &\equiv \theta(y + l_1 \varphi), & \theta_- &\equiv \theta(y - l_1 \varphi), \end{aligned} \quad (D.61)$$

где l_1 — параметр, имеющий размерность длины, $c > 0$ — жесткость упругого основания, $\theta(z)$ — характеристическая функция области $z \geq 0$:

$$\theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{если } z \geq 0, \\ 0 & \text{если } z < 0. \end{cases} \quad (D.62)$$

Дополнительное уравнение, описывающее вращательное движение тормозной колодки, можно записать в виде

$$m_1 r^2 \ddot{\varphi} = l_1 (N_1 - N_2 + Q_1 - Q_2) + l_2 (R_1 - R_2) - \varepsilon P_1, \quad (D.63)$$

где l_2 , ε — параметры, имеющие размерность длины, r — радиус инерции тормозной колодки.

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (D.53), (D.55), (D.56), (D.59), (D.61), (D.63). Эту систему нужно дополнить начальными условиями, например, следующими:

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = v, \quad y = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = 0. \quad (D.64)$$

³ Определяющие уравнения для N_1 , N_2 , Q_1 , Q_2 сконструированы таким образом, чтобы эти величины были неотрицательны. Это достигается за счет характеристических функций θ_+ и θ_- , принимающих значение 0 или 1. (*Примеч. ред.*)

Только сейчас мы имеем задачу, хорошо определенную с физической точки зрения. Окончательную постановку можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= P_1 + R_1 + R_2 + S \cos \alpha, & m_2 \ddot{x} &= P_2 - S \cos \alpha, \\ m_1 \ddot{y} + 2cy &= S \sin \alpha, & m_1 r^2 \ddot{\varphi} + 2cl_1^2 \varphi &= l_2(R_1 - R_2) - \varepsilon P_1, \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

$$R_1 + R_2 = \begin{cases} -\mu c |y + l_1 \varphi| \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \ddot{x} \neq 0, \\ f_1 + f_2, & \text{если } \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.66})$$

$$R_1 - R_2 = \begin{cases} \mu c (y + l_1 \varphi) \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \ddot{x} \neq 0, \\ f_1 - f_2, & \text{если } \dot{x} = 0, \ddot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.67})$$

где функции f_1 и f_2 должны удовлетворять условиям $|f_1| \leq \mu N_1$, $|f_2| \leq \mu N_2$. С учетом выражений (D.61) для N_1 и N_2 , эти условия принимают вид

$$|f_1| \leq \mu c (1 - \theta_+) |y + l_1 \varphi|, \quad |f_2| \leq \mu c \theta_+ |y + l_1 \varphi|. \quad (\text{D.68})$$

Задача Коши (D.64)–(D.67) — это физически корректная постановка задачи Пэнлеве–Клейна. Если есть сомнения в законе трения Кулона, то нужно показать, что сформулированная выше задача Коши не очень хорошо определена. Ниже будет показано, что это не так.

Преобразуем систему (D.65). В целях упрощения примем ограничения $r = l_1$. В этом случае из (D.65) получаются уравнения

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} &= P_1 + P_2 + R_1 + R_2, \\ m_1 \ddot{y} + 2cy &= \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} P_2 - \frac{1}{1 + \gamma} P_1 \right) \operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} (R_1 + R_2), \\ m_1 \ddot{z} + 2cz &= \frac{l_2}{l_1} (R_1 - R_2) - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} (R_1 + R_2) + \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} P_2 - \left[\frac{\varepsilon}{l_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} \right] P_1, \\ z &= y + l_1 \varphi. \end{aligned} \quad (\text{D.69})$$

При этом сила S определяется выражением

$$S = (P_2 - m_2 \ddot{x}) / \cos \alpha. \quad (\text{D.70})$$

Отметим, что силы трения $R_1 + R_2$ и $R_1 - R_2$ выражаются через переменную z посредством (D.66) и (D.67). Начальные условия для системы (D.69) имеет вид

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = v, \quad y = z = 0, \quad \dot{y} = \dot{z} = 0. \quad (\text{D.71})$$

При малых $t > 0$ система движется. Воспользовавшись соотношениями (D.66) и (D.67), преобразуем систему (D.69) к следующему виду:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} &= -\mu\varepsilon_1\varepsilon_3cz + P_1 + P_2, \quad \varepsilon_1 = \text{sign } \dot{x}, \quad \varepsilon_3 = \text{sign } z, \\ m_1\ddot{y} + 2cy &= \mu\varepsilon_1\varepsilon_3cz \frac{\text{tg } \alpha}{1+\gamma} + \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}P_2 - \frac{1}{1+\gamma}P_1 \right) \text{tg } \alpha, \\ m_1\ddot{z} + 2c \left(1 - \frac{\mu\varepsilon_1}{2} \left[\frac{l_2}{l_1} + \frac{\varepsilon_3 \text{tg } \alpha}{1+\gamma} \right] \right) z &= \frac{\gamma \text{tg } \alpha}{1+\gamma}P_2 - \left[\frac{\varepsilon}{l_1} + \frac{\text{tg } \alpha}{1+\gamma} \right] P_1. \end{aligned} \quad (\text{D.72})$$

Задача Коши (D.71), (D.72) хорошо определена и, очевидно, имеет единственное решение⁴. Разумеется, надо иметь в виду, что эта задача имеет смысл, только когда

$$\begin{aligned} 0 \leq \dot{x} \leq v, \quad \text{если } \varepsilon_1 = +1, \\ v \leq \dot{x} \leq 0, \quad \text{если } \varepsilon_1 = -1. \end{aligned} \quad (\text{D.73})$$

Итак, мы видим, что при использовании закона трения Кулона в задаче Пэнлеве–Клейна не возникает никаких проблем. Хотя мы вынуждены были принять во внимание упругость стенок зазора, это не было связано с законом трения, а диктовалось исключительно физическими требованиями.

D.4.3. Предельный переход к модели абсолютно твердого тела

Для того чтобы использовать модель абсолютно твердого тела, нужно осуществить предельный переход, устремив жесткость упругого основания к бесконечности. Если $c \rightarrow \infty$, то $z \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$, но при этом

$$\lim_{c \rightarrow \infty} cy = T \neq 0, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} cz = Z \neq 0. \quad (\text{D.74})$$

В результате, вместо задачи Коши (D.69) получим:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} &= P_1 + P_2 + R_1 + R_2, \\ 2T &= \left(\frac{\gamma}{1+\gamma}P_2 - \frac{1}{1+\gamma}P_1 \right) \text{tg } \alpha - \frac{\text{tg } \alpha}{1+\gamma}(R_1 + R_2), \\ 2Z &= \frac{l_2}{l_1}(R_1 - R_2) - \frac{\text{tg } \alpha}{1+\gamma}(R_1 + R_2) + \frac{\gamma \text{tg } \alpha}{1+\gamma}P_2 - \left[\frac{\varepsilon}{l_1} + \frac{\text{tg } \alpha}{1+\gamma} \right] P_1. \end{aligned} \quad (\text{D.75})$$

⁴ Задачи подобного типа решаются следующим образом. Предполагается, что величины ε_1 и ε_3 имеют определенные априорно заданные значения. Затем строится решение системы (D.72), после чего проверяется, действительно ли значения ε_1 и ε_3 такие, как это предполагалось. В результате перебора всех возможных значений ε_1 и ε_3 доказывается, что система имеет единственное решение. (*Примеч. ред.*)

Равенства (D.66) и (D.67) принимают вид

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \begin{cases} -\mu |\mathbf{Z}| \operatorname{sign} \dot{\mathbf{x}}, & \text{если } \dot{\mathbf{x}} \neq 0, \ddot{\mathbf{x}} \neq 0, \\ \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, & \text{если } \dot{\mathbf{x}} = 0, \ddot{\mathbf{x}} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.76})$$

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \begin{cases} \mu \mathbf{Z} \operatorname{sign} \dot{\mathbf{x}}, & \text{если } \dot{\mathbf{x}} \neq 0, \ddot{\mathbf{x}} \neq 0, \\ \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, & \text{если } \dot{\mathbf{x}} = 0, \ddot{\mathbf{x}} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.77})$$

где

$$|\mathbf{f}_1| \leq \mu(1 - \eta) |\mathbf{Z}|, \quad |\mathbf{f}_2| \leq \mu\eta |\mathbf{Z}|. \quad (\text{D.78})$$

В неравенствах (D.78) используются следующие обозначения:

$$\eta = \lim_{z \rightarrow 0} \theta_+ = \begin{cases} 1, & \text{если } z \rightarrow +0, \\ 0, & \text{если } z \rightarrow -0, \end{cases} \quad (\text{D.79})$$

В качестве начальных условий следует принять (D.58).

Теперь можно сравнить постановку задачи Пэнлеве–Клейна (D.30)–(D.33) и постановку задачи (D.58), (D.75)–(D.79), полученную путем предельного перехода от уточненной формулировки, обсуждавшейся в предыдущем подразделе. Нетрудно видеть, что указанные постановки совершенно разные, хотя в обеих используется модель абсолютно твердого тела и стандартная форма закона трения Кулона. Рассмотрим решение системы (D.58), (D.75)–(D.79). Закон Кулона имеет различные формы при движении и для состояния покоя. Поэтому эти два случая следует рассматривать отдельно.

Предположим, что $\dot{\mathbf{x}} = 0$, $\ddot{\mathbf{x}} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 &= 0, \\ 2\mathbf{T} &= \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \mathbf{P}_2 - \frac{1}{1 + \gamma} \mathbf{P}_1 \right) \operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2), \\ 2\mathbf{Z} &= \frac{l_2}{l_1} (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2) - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2) + \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} \mathbf{P}_2 - \left[\frac{\varepsilon}{l_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} \right] \mathbf{P}_1, \\ |\mathbf{f}_1| &\leq \mu(1 - \eta) |\mathbf{Z}|, \quad |\mathbf{f}_2| \leq \mu\eta |\mathbf{Z}|. \end{aligned} \quad (\text{D.80})$$

Теперь нужно рассмотреть два случая:

$$\text{a) } \eta = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_1 = 0, \quad |\mathbf{f}_2| \leq \mu |\mathbf{Z}|, \quad \mathbf{Z} \geq 0, \quad (\text{D.81})$$

$$\text{b) } \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{f}_1| \leq \mu |\mathbf{Z}|, \quad \mathbf{f}_2 = 0, \quad \mathbf{Z} \leq 0. \quad (\text{D.82})$$

В случае (D.81) имеем

$$\begin{aligned} f_2 &= -(P_1 + P_2), \quad 2T = P_2 \operatorname{tg} \alpha, \\ 2Z &= \frac{l_2 - \varepsilon}{l_1} P_1 + \left(\frac{l_2}{l_1} + \operatorname{tg} \alpha \right) P_2 \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{D.83})$$

$$|P_1 + P_2| \leq \frac{\mu}{2} \left| \frac{l_2 - \varepsilon}{l_1} P_1 + \left(\frac{l_2}{l_1} + \operatorname{tg} \alpha \right) P_2 \right|. \quad (\text{D.84})$$

Неравенство (D.84) определяет область, где при $\eta = 1$ существует статическое решение.

В случае (D.82) получаем

$$\begin{aligned} f_1 &= -(P_1 + P_2), \quad 2T = P_2 \operatorname{tg} \alpha, \\ 2Z &= -\frac{l_2 + \varepsilon}{l_1} P_1 + \left(-\frac{l_2}{l_1} + \operatorname{tg} \alpha \right) P_2 \leq 0, \end{aligned} \quad (\text{D.85})$$

$$|P_1 + P_2| \leq \frac{\mu}{2} \left| \frac{l_2 + \varepsilon}{l_1} P_1 + \left(\frac{l_2}{l_1} - \operatorname{tg} \alpha \right) P_2 \right|. \quad (\text{D.86})$$

Нужно иметь в виду, что наличие двух случаев (D.81) и (D.82) не означает неединственности решения. Эти случаи соответствуют различным физическим условиям. Допустим, в задаче Пэнлеве–Клейна P_2 отсутствует. Тогда статическое решение существует только при $P_1 > 0$ и

$$\text{a) } \frac{\mu l_2 - \varepsilon}{2 l_1} \geq 1, \quad \text{b) } \frac{\mu l_2 + \varepsilon}{2 l_1} \geq 1. \quad (\text{D.87})$$

Пусть $\dot{x} = v = \text{const}$, $\ddot{x} = 0$. В этом случае система (D.75)–(D.78) принимает вид

$$\begin{aligned} -\mu \varepsilon_1 \varepsilon_3 Z + P_1 + P_2 &= 0, \quad \varepsilon_1 = \operatorname{sign} \dot{x}, \quad \varepsilon_3 = \operatorname{sign} Z, \\ 2T &= (\mu \varepsilon_1 \varepsilon_3 Z + \gamma P_2 - P_1) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma}, \end{aligned} \quad (\text{D.88})$$

$$\left(2 - \mu \varepsilon_1 \left[\frac{l_2}{l_1} + \frac{\varepsilon_3 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} \right] \right) Z = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} P_2 - \left[\frac{\varepsilon}{l_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} \right] P_1.$$

Исключив Z из первого и третьего уравнений системы (D.88), можно показать, что эта система имеет решение, только когда

$$P_2 = \frac{\mu \varepsilon_1 (l_2 - \varepsilon_3 \varepsilon) - 2l_1}{2l_1 - \mu \varepsilon_1 (l_2 + \varepsilon_3 l_1 \operatorname{tg} \alpha)} P_1. \quad (\text{D.89})$$

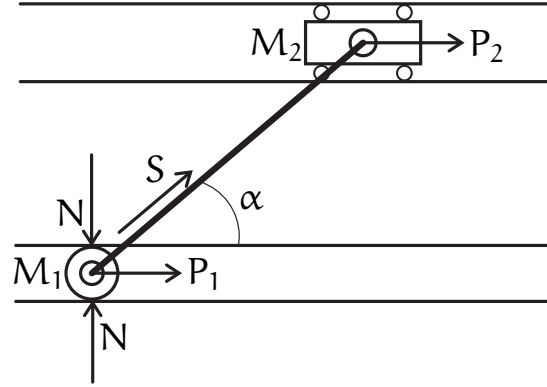


Рис. D.10. Модифицированная задача Пэнлеве

Наконец, рассмотрим случай $\ddot{x} \neq 0$. Уравнения (D.75)–(D.78) принимают вид

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} &= -\mu\varepsilon_1\varepsilon_3 Z + P_1 + P_2, \\ 2T &= (\mu\varepsilon_1\varepsilon_3 Z + \gamma P_2 - P_1) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma}, \end{aligned} \quad (\text{D.90})$$

$$\left(2 - \mu\varepsilon_1 \left[\frac{l_2}{l_1} + \frac{\varepsilon_3 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} \right] \right) Z = \frac{\gamma \operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} P_2 - \left[\frac{\varepsilon}{l_1} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} \right] P_1.$$

Нетрудно видеть, что эта система имеет единственное решение во всех случаях и парадоксы любого вида отсутствуют. Это означает, что парадоксы, продемонстрированные в подразделе D.4.1, являются результатом неудовлетворительной постановки задачи и не связаны с законом трения Кулона. Однако подчеркнем, что отсутствие парадоксов не означает, что задача (D.90) хороша с физической точки зрения. На самом деле, осуществив предельный переход $c \rightarrow \infty$, мы потеряли ряд важных свойств рассматриваемой системы. Например, задача Коши имеет смысл не только для начальных условий (D.71). Можно задать, например, следующие начальные условия:

$$t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = v, \quad y = a \neq 0, \quad z = 0, \quad \dot{y} = \dot{z} = 0. \quad (\text{D.91})$$

В этом случае предельный переход $c \rightarrow \infty$ приводит к противоречию, так как

$$\lim_{c \rightarrow \infty} cy \rightarrow \infty,$$

что естественно с физической точки зрения. Кроме того, из системы (D.72) видно, что если

$$\frac{\mu\varepsilon_1}{2} \left[\frac{l_2}{l_1} + \frac{\varepsilon_3 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \gamma} \right] > 1, \quad (\text{D.92})$$

то происходит почти мгновенный останов системы. Однако это невозможно увидеть из уравнения (D.90). Поэтому с практической точки зрения гораздо лучше использовать уравнения (D.72).

Итак, в подразделе D.4.1 показано, что классическая задача Пэнлеве–Клейна (см. рис. D.7 и рис. D.8, *a*) не имеет физического смысла. Поэтому в подразделе D.4.2 была предложена уточненная постановка задачи (см. рис. D.8, *b*). Разумеется, это не единственная возможность для улучшения постановки задачи Пэнлеве–Клейна. В качестве другого возможного варианта можно предложить, например, конструкцию, изображенную на рис. D.10.

D.5. Главная особенность закона Кулона

Вернемся к самой простой задаче динамики, в которой проявляется действие закона Кулона. Рассмотрим тело, движущееся по инерции по шероховатой поверхности — см. рис. D.1, где $F = 0$. В разделе D.1 показано, что эта задача имеет два решения — см. формулы (D.13). Впервые на важность второго (разрывного) решения обратил внимание Ф. Клейн. Чтобы прояснить физический смысл разрывного решения и понять, как выбрать нужное из двух возможных решений, необходимо более детально проанализировать данную задачу.

Итак, рассмотрим твердое тело массой m , которое движется по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью $v > 0$. Коэффициент трения в законе Кулона равен μ . В момент времени $t = 0$ сила, вынуждающая тело двигаться, внезапно прекращает свое действие и далее тело движется по инерции. Используя обозначения, представленные на рис. D.1, запишем следующую систему уравнений:

$$m\ddot{y} = F_{\text{fr}}, \quad F_{\text{fr}} = \begin{cases} -\mu mg\dot{x}/|\dot{x}|, & \text{если } \dot{x} \neq 0; \\ f_{\text{st}}, \quad |f_{\text{st}}| \leq \mu mg, & \text{если } \dot{x} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.93})$$

где F_{fr} определяется законом Кулона (D.2). Считается, что тело движется в направлении некоторой горизонтальной прямой. На этой прямой введены две координаты: координата y определяет положение центра масс тела, координата x определяет положение точки на поверхности контакта. Начальные условия можно выбрать следующим образом:

$$t = 0: \quad x = y = 0 \quad \dot{x} = \dot{y} = v. \quad (\text{D.94})$$

Теоретически система (D.93) является точной. Однако для решения задачи (D.93), (D.94) необходимо принять дополнительные соглашения, которые

могут быть различными. Простой и удобный путь — использовать модель абсолютно твердого тела. В этом случае имеем соотношение $z = x = y$ и вместо (D.93) получаем систему

$$m\ddot{z} = F_{\text{fr}}, \quad F_{\text{fr}} = \begin{cases} -\mu mg\dot{z}/|\dot{z}|, & \text{если } \dot{z} \neq 0; \\ f_{\text{st}}, \quad |f_{\text{st}}| \leq \mu mg, & \text{если } \dot{z} = 0, \end{cases} \quad (\text{D.95})$$

$$t = 0: \quad z = 0 \quad \dot{z} = v. \quad (\text{D.96})$$

которая решается без каких-либо затруднений.

Решение задачи (D.95), (D.96) в соответствии с законом Кулона должно разыскиваться для двух случаев: а) $\dot{z} \neq 0$ и б) $\dot{z} = 0$.

Если $\dot{z} \neq 0$, то решение поставленной задачи имеет вид

$$z = \begin{cases} vt - \frac{\mu g t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{v}{\mu g}; \\ \frac{v^2}{2\mu g}, & t > \frac{v}{\mu g}. \end{cases} \quad \dot{z} = \begin{cases} v - \mu g t, & 0 \leq t \leq \frac{v}{\mu g}; \\ 0, & t > \frac{v}{\mu g}. \end{cases} \quad (\text{D.97})$$

Если $\dot{z} = 0$, то решение поставленной задачи определяется формулами

$$z(t) = 0, \quad \dot{z} = \begin{cases} v, & t = 0; \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (\text{D.98})$$

В решении (D.97) скорость непрерывна, а ускорение претерпевает разрыв конечной величины. В решении (D.98) ускорение претерпевает бесконечный разрыв, что для реального тела считается невозможным. Решение (D.98) не обладает свойством непрерывности скорости, однако оно является точным решением задачи, т. е. допускается и законами динамики, и законом Кулона. Обычное возражение против решения (D.98) основано на совершенно верном утверждении: для того чтобы остановить тело конечной массы, необходим импульс силы бесконечной интенсивности, т. е. сила должна быть бесконечно большой. Тем не менее это возражение должно быть отвергнуто, ибо для того, чтобы решение (D.98) работало, нет необходимости мгновенно останавливать тело конечной массы, а достаточно, чтобы мгновенно остановилась контактирующая поверхность, т. е. тело нулевой массы⁵.

⁵ На первый взгляд кажется странным, что у абсолютно твердого тела мгновенно останавливается только контактирующая поверхность. Однако абсолютно твердое тело — это идеализированная модель, а реальное тело обладает конечной жесткостью, и для него мгновенный останов только контактирующей поверхности вполне возможен. Анализ задач, моделирующих эту ситуацию, проведен в разделе D.6 и подразделе D.8.3. (*Примеч. ред.*)

Итак, мы подошли к точке несовпадения мнений. Прежде всего, мы должны понять смысл функции $z(t)$ в системе (D.95), (D.96) или в решениях (D.97), (D.98). Если $z(t)$ является координатой центра масс, то она, конечно, определяется решением (D.97), тогда как второе решение не имеет физического смысла. Таким образом, если окажется возможным доказать, что функция $z(t)$ в задаче (D.95), (D.96) имеет смысл только положения центра масс, то решение Клейна (D.98) следует отбросить. Можно ли доказать это предположение? Заметим, что задача (D.95), (D.96) рассматривается с чисто математической точки зрения и в нее не заложена какая-либо концепция относительно смысла функции $z(t)$. На самом деле при переходе от системы (D.93), (D.94) к системе (D.95), (D.96), важное значение имеет только принятие соотношения $x = y$, и не важно, какие словесные объяснения при этом используются. Это означает, что без дополнительных исследований, просто путем формального анализа системы (D.95), (D.96), невозможно определить смысл величины $z(t)$. С физической точки зрения ясно, что трактовка функции $z(t)$ для решений (D.97) и (D.98) должна быть различной⁶. Например, если $z(t)$ определяет положение поверхности контакта, то решение (D.98) может быть реализовано в реальности, поскольку поверхность контакта не имеет массы, а центр масс может сохранять свое движение. В любом случае, для того чтобы осветить детали, необходимо внимательнее исследовать задачу. Это будет сделано в последующих разделах. В данном разделе мы сосредоточим внимание на другом.

Решения (D.97) и (D.98) вовсе не исчерпывают всего множества решений задачи (D.95), (D.96). Полное решение находится так. Весь временной интервал $t \in [0, 2v/(\mu g)]$ разбивается на произвольное число непересекающихся подынтервалов. На каждом из подынтервалов реализуется либо решение (D.97), либо решение (D.98). Но разумеется, в этих наборах на разных участках следует брать различные значения v . Наиболее простое однопараметрическое семейство решений представлено на рис. D.11 и выражается формулой

$$\dot{z}(t) = \begin{cases} v - \mu g t, & 0 \leq t \leq \tau; \\ 0, & \tau < t, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{2v}{\mu g}. \end{cases} \quad (\text{D.99})$$

⁶ Возможность для различной трактовки функции $z(t)$ заложена в системе уравнений (D.95). Действительно, в первом уравнении этой системы функция $z(t)$ имеет смысл координаты центра масс, а во втором — координаты точки на контактирующей поверхности. На первый взгляд кажется, что здесь есть некоторое противоречие, но ситуация проясняется путем введения рассмотрении расширенной модели — см. подраздел D.8.1. (*Примеч. ред.*)

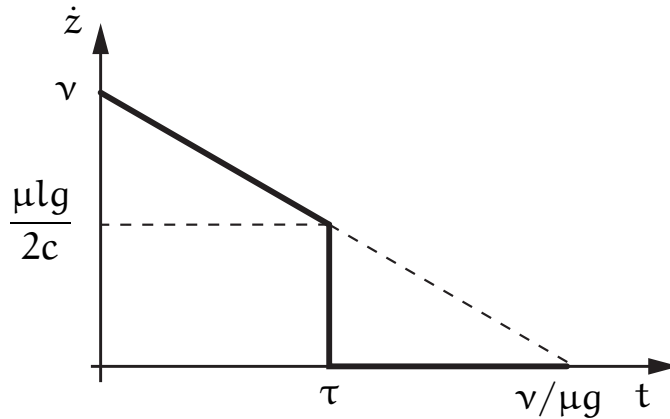


Рис. D.11. Однопараметрическое семейство решений

Это решение имеет всего одну точку разрыва скорости и содержит произвольный параметр τ , который меняется в заданном интервале. Но по ряду соображений здесь не рассматриваются решения, имеющие несколько точек разрыва. В принципе они существуют, а их отбрасывание требует отдельного обоснования. Важно подчеркнуть, что параметр τ есть физическая характеристика, которая может быть найдена экспериментально.

При построении решения рассматриваемой задачи следует иметь в виду, что уравнение динамики имеет форму (D.95), в которую входит именно $F_{\text{тр}}$, определяемая законом Кулона, но не отдельная составляющая силы трения. Иными словами, нельзя, игнорируя силу трения покоя, записывать уравнение движения в виде $m\ddot{z} = -\mu mg$, что часто делается на практике. Например, уравнение линейного осциллятора на плоскости при наличии кулоновского трения часто записывают в виде

$$m\ddot{z} - \mu mg \operatorname{sign} \dot{z} + cz = 0. \quad (\text{D.100})$$

Решение этого уравнения с соответствующими начальными условиями не описывает действительных колебаний осциллятора.

Таким образом, главной особенностью закона Кулона является то, что сам по себе он не позволяет находить однозначные решения задач динамики в самых общих случаях⁷, а не только в особых парадоксальных ситуациях. Именно это обстоятельство и ускользнуло от внимания исследователей, занимающихся данной проблемой. Теперь возникает центральный вопрос: «Как оценить описанную особенность закона Кулона? Является ли эта особенность

⁷ Исключение составляют такие типы движений, при которых скорость точки контакта никогда не обращается в нуль. (Примеч. ред.)

существенным недостатком закона Кулона или, напротив, его достоинством?” Понятно, что с чисто логической точки зрения допустимы оба возможных ответа на этот вопрос. Однако, по нашему мнению, отмеченная неединственность решения, допускаемая законом Кулона, является уникальным достоинством этого закона. Дело в том, что решение (D.99), полученное в рамках модели абсолютно твердого тела, демонстрирует качественное поведение системы. Если бы параметр τ был известен, то решение определялось бы однозначно. Однако в рамках модели абсолютно твердого тела этот параметр в принципе не может быть найден, если не считать возможности его экспериментального определения. В отличие, например, от массы тела, параметр τ зависит от того, как именно устроено тело, включая его форму. В последующих разделах будут показаны примеры теоретического определения параметра τ , основанные на использовании расширенных моделей.

Как видно из решения (D.99), “гипотеза” мгновенного самоторможения Клейна–Прандтля входит естественной составляющей частью в общее решение задачи динамики, включающей кулоново трение. Поэтому эта “гипотеза” не только не нуждается в логических обоснованиях, содержащих разного рода предельные переходы, а напротив, в обоснованиях нуждается ее игнорирование. Однако, если говорить с позиций здравого смысла, а не логических умозаключений, то ясные интерпретации решения (D.99), конечно, желательны. Именно этому и посвящен следующий раздел.

Отметим, что указанная неединственность имеет место и при наличии активной силы. Уравнение (D.95) при этом заменяется на следующее:

$$m\ddot{z} = F(t) + F_{fr}, \quad (D.101)$$

где $F(t)$ — активная сила, действующая на тело. Начальные условия (D.96) сохраняются. Здесь также возможны две ситуации. Пусть $\dot{z} \neq 0$ при $t > 0$. В этом случае уравнение (D.101) принимает вид

$$m\ddot{z} = F(t) - \mu mg$$

и интегрируется стандартно. Пусть $\dot{z} = 0$ при $t > 0$. Тогда вместо уравнения (D.101) следует использовать уравнение статики:

$$F(t) + F_{fr} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{fr} = -F(t).$$

В силу (D.3) активная сила должна удовлетворять условию

$$|F(t)| = |F_{fr}| < \mu mg. \quad (D.102)$$

Таким образом, при выполнении условия (D.102) в данной задаче возможны два решения — классическое и мгновенный останов.

D.6. Мгновенный останов и его физический смысл

Рассмотрим модельную задачу, качественно иллюстрирующую возможность мгновенного останова тела при действии только конечных сил. На примере этой же задачи покажем способ определения параметра τ , входящего в решение (D.99). Тело, изображенное на рис. D.12 и состоящее из двух безынерционных кубиков, соединенных инерционным стержнем, движется по горизонтальной шероховатой поверхности с постоянной скоростью $v > 0$ как абсолютно твердое тело.

Примем, что длина стержня в недеформированном состоянии равна l , а его масса равна m . Примем также, что при $t = 0$, левый конец стержня занимает положение $x = 0$, а правый конец — положение $x = l + \delta$, где δ — упругое растяжение которое, в принципе, может быть любым.

При $t < 0$ на опорные кубики действовали силы трения, определяемые по закону Кулона и равные $F_{\text{тр}} = -\mu mg/2$, так что полная сила трения была равна $-\mu mg$. Действие силы трения уравнивалось активными силами, что и обеспечивало движение тела с постоянной скоростью v .

В момент времени $t = 0$ активные силы мгновенно уничтожаются, но силы трения остаются. Поэтому к системе, фактически внезапно, прикладываются силы, т. е. происходит ударное нагружение тела. Разумеется, эти приложенные силы трения уже не обязательно равны $-\mu mg$, поскольку опорные кубики в силу своей безынерционности могут мгновенно остановиться и силы трения в этом случае находятся из условий статики. Выясним, при каких значениях начальной скорости v опорные кубики мгновенно останавливаются, что, в свою очередь, означает мгновенный останов всего тела. Действительно, хотя точки стержня будут совершать колебательные движения, однако эти движения на “макроуровне” не наблюдаемы.

Уравнение, описывающее продольные колебания стержня, краевые и начальные условия имеют вид

$$ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{D.103})$$

$$x = 0: \quad u = 0, \quad x = l: \quad u = \delta, \quad (\text{D.104})$$

$$t = 0: \quad u = \frac{x\delta}{l}, \quad \dot{u} = v. \quad (\text{D.105})$$

Здесь E — модуль Юнга; S — площадь поперечного сечения; ρ — плотность материала; u — продольное смещение.

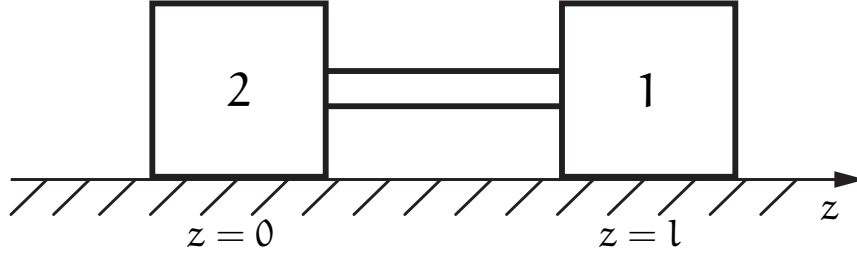


Рис. D.12. Тело, состоящее из двух безынерционных кубов, соединенных инерционным стержнем

Решение задачи (D.103)–(D.105) находится стандартными методами и имеет вид

$$u(x, t) = \frac{x\delta}{l} + \frac{4\nu}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_m ct), \quad \lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{l}, \quad (\text{D.106})$$

где $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость распространения продольных волн в стержне.

Нас интересуют реакции, действующие со стороны стержня на опорные кубики. Обозначим N_- и N_+ силы, действующие, на левый и правый кубик, соответственно. Тогда

$$N_- = ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad N_+ = -ES \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l}. \quad (\text{D.107})$$

При вычислении этих реакций с помощью ряда (D.106) необходимо соблюдать известную осторожность. Дело в том, что после почленного дифференцирования ряда (D.106), полученный в результате ряд сходится неравномерно и поэтому почленный предельный переход при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow l$ под знаком суммы недопустим.

Это затруднение легко устраняется следующим образом. Проинтегрируем обе части каждого из условий (D.107) по времени и получившиеся в результате величины снабдим тильдами. Например, \tilde{N}_- есть функция t , такая, что $N_- = \frac{d\tilde{N}_-}{dt}$. Тогда для функции $\tilde{u}(x, t)$ получим ряд

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{x\delta t}{l} - \frac{4\nu}{lc^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^3} \sin(\lambda_m x) \cos(\lambda_m ct). \quad (\text{D.108})$$

Выражение для $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ можно получить почленным дифференцированием ряда (D.108), причем оно представляется равномерно сходящимся рядом, в

котором допустим предельный переход при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow l$. Тогда для “импульсов” \tilde{N}_- и \tilde{N}_+ получим формулы

$$\tilde{N}_- = ES \left[\frac{\delta t}{l} + \frac{4v}{c^2} \varphi(ct) \right], \quad \tilde{N}_+ = -ES \left[\frac{\delta t}{l} - \frac{4v}{c^2} \varphi(ct) \right], \quad (D.109)$$

где введена функция

$$\varphi(ct) = - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m^2} \cos(\lambda_m ct). \quad (D.110)$$

Функция $\varphi(ct)$ периодична по аргументу ct с периодом $2l$. Сумма ряда (D.110) определяется выражением

$$\varphi(ct) = -\frac{l}{8} \begin{cases} l - 2ct, & 0 \leq ct \leq l, \\ -3l + 2ct, & l \leq ct \leq 2l. \end{cases} \quad (D.111)$$

Теперь для реакций N_- и N_+ получаются формулы

$$N_- = ES \left[\frac{\delta}{l} + \frac{v}{c} \psi(ct) \right], \quad N_+ = -ES \left[\frac{\delta}{l} - \frac{v}{c} \psi(ct) \right], \quad (D.112)$$

где функция $\psi(ct)$ периодична с периодом $2l$, а на периоде задается выражением

$$\psi(ct) = \begin{cases} 1, & 0 \leq ct \leq l, \\ -1, & l \leq ct \leq 2l. \end{cases} \quad (D.113)$$

Силы N_- и N_+ , действующие на опорные кубики, должны уравновешиваться силами трения, которые, согласно закону Кулона, по модулю не превосходят величину $\mu mg/2$. С учетом сказанного из (D.112) получаем условие, при выполнении которого опорные кубики не смещаются:

$$\frac{|\delta|}{l} + \frac{v}{c} \leq \frac{\mu mg}{2ES} = \frac{\mu gl}{2c^2}. \quad (D.114)$$

Это и есть условие мгновенного останова тела посредством сил трения. Конечно, если рассматриваемое тело изготовлено, например, из стали, то даже при $\delta = 0$ значение скорости v оказывается весьма малым при малом коэффициенте трения.

Пусть, например, $l = 1$ м, $c = 5 \cdot 10^5$ см/с, $\mu = 0,25$. Тогда

$$v \leq \mu gl / (2c) = 1,47 \text{ см/мин.}$$

Однако в других ситуациях эта скорость может быть значительно большей, что будет показано в разделе D.8.

Если начальная скорость $v > \mu gl/(2c)$, а $\delta = 0$, то тело не может мгновенно остановиться и продолжает движение до тех пор, пока скорость опорных кубиков не достигнет величины $\mu gl/(2c)$. Это и дает условие для определения параметра τ — см. рис. D.11.

Согласно (D.99), параметр τ определяется следующим образом:

$$v - \mu g \tau = \frac{\mu g l}{2c} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{v}{\mu g} - \frac{l}{2c}. \quad (\text{D.115})$$

Итак, мгновенный останов тела, рассматриваемый как мгновенный останов соприкасающихся поверхностей, вполне возможен, ибо мгновенно останавливается нулевая масса, и это не противоречит ни здравому смыслу, ни законам механики.

Это явление легко наблюдаемо, если в качестве тела рассмотреть, например, книжный шкаф с книгами. В этом случае шкафу понадобится очень большая начальная скорость, чтобы он хоть немного подвинулся бы по инерции после снятия активной силы (см. рис. D.12). Во всяком случае движение шкафа с книгами после снятия активной силы не будет иметь количественного совпадения с решением (D.97), т. е. пройденный по инерции путь не будет равен $v^2/(2\mu g)$. Однако виновником этого расхождения закон Кулона не является.

D.7. Мгновенный останов тел, имеющих конечные размеры, при наличии удерживающих контактов

Реальные тела имеют конечные размеры и часто движутся в разного рода зазорах, т. е. при наличии удерживающих контактов. В этих случаях появляется еще один, хорошо известный на практике, механизм мгновенного останова тела, а именно — заклинивание. Последнее играет важную роль при решении задачи Пэнлеве, рассмотренной в разделе D.3, и задачи Пэнлеве–Клейна, рассмотренной в разделе D.4. В данном разделе обсуждается специфика применения закона Кулона в задачах подобного типа.

Рассмотрим устройство, изображенное на рис. D.13, где указаны основные параметры и действующие силы. Для устранения каких бы то ни было неясностей будем считать, что только передние опоры способны создавать трение.

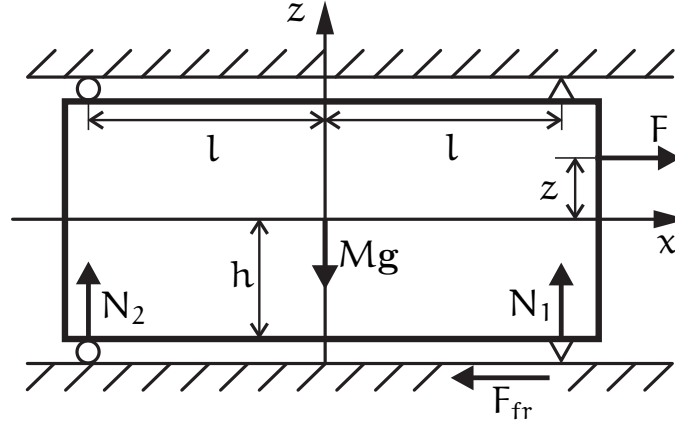


Рис. D.13. Мгновенный останов тела, имеющего конечные размеры, при наличии удерживающих контактов

Сначала рассмотрим движение тела массой m в зазоре под действием приложенной силы F — см. рис. D.13. Рассматривается движение с постоянной скоростью. В этом случае уравнения движения представляют собой уравнения статики:

$$F = F_{\text{fr}}, \quad N_1 + N_2 = mg, \quad N_1 - N_2 = \alpha F, \quad \alpha \equiv (h + z)/l \geq 0. \quad (\text{D.116})$$

Все обозначения приведены на рис. D.13. Сила трения F_{fr} определяется по закону Кулона. Если тело движется с постоянной скоростью $v \neq 0$, то $F_{\text{fr}} = \mu|N_1|$. Из уравнений (D.116) следует, что

$$N_1 = \frac{mg + \alpha F}{2} > 0, \quad N_2 = \frac{mg - \alpha F}{2}. \quad (\text{D.117})$$

Анализ этой задачи несложен, а результаты таковы. Если $\mu\alpha < 2$, то тело движется с заданной скоростью и сила $F = \mu mg / (2 - \mu\alpha)$. При $\mu\alpha > 2$ тело стоит при любой сколь угодно большой силе. Таким образом, движение тела при всех μ можно вызвать силой F только в том случае, если она приложена к нижнему основанию тела ($z = -h$, $\alpha = 0$). В остальных случаях при достаточно большом коэффициенте трения обязательно произойдет заклинивание. Отсюда видим, что задать начальную скорость тела в зазоре можно только при специальном выборе силы F .

Пусть при $t < 0$ тело двигалось в зазоре с постоянной скоростью $v > 0$. В момент времени $t = 0$ активная сила внезапно прекращает свое действие и далее тело движется по инерции. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_{\text{fr}}, & N_1 + N_2 &= mg, & l(N_1 - N_2) &= hF_{\text{fr}} \\ \dot{x}(0) &= v, & x(0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.118})$$

При $t > 0$ нужно рассматривать два случая. Допустим, что при малых $t > 0$ тело продолжает двигаться, т. е. $\dot{x}(t) \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} \left(mg + \frac{h}{l} F_{fr} \right), & N_2 &= \frac{1}{2} \left(mg - \frac{h}{l} F_{fr} \right), \\ F_{fr} &= \frac{\mu}{2} \left(mg + \frac{h}{l} F_{fr} \right) \Rightarrow \left(1 - \frac{\mu h}{2l} \right) F_{fr} = \frac{\mu mg}{2} > 0. \end{aligned} \quad (D.119)$$

Из (D.119) видно, что при $\mu h < 2l$ решение задачи (D.118) существует и выражается формулой

$$\dot{x}(t) = v - \frac{\mu g l t}{2l - \mu h} \Rightarrow \tau = \frac{(2l - \mu h)v}{\mu g l}, \quad (D.120)$$

где τ — время останова. Если же $\mu h \geq 2l$, то непрерывного решения задачи (D.118) не существует. Такого рода ситуацию Пэнлеве рассматривает как парадоксальную и ответственность за несуществование решения возлагает на закон Кулона. Однако последний всегда допускает решение

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} v, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (D.121)$$

Если $\mu h \geq 2l$, то решение (D.121) является единственным и снимает все вопросы. Если же $\mu h < 2l$, то существуют два решения (D.120) и (D.121) и необходимо сделать между ними выбор. Обратим внимание, что указанное затруднение возникает только при малых коэффициентах трения, т. е. как раз в тех случаях, где Пэнлеве не усматривает никаких проблем. Чтобы сделать выбор между решениями (D.120) и (D.121), рассмотрим расширенную задачу. А именно примем, что направляющие являются не абсолютно твердыми, а обладают очень большой жесткостью c . В этом случае тело обретает три степени свободы: $x(t)$, $y(t)$ и $\varphi(t)$, где $y(t)$ — вертикальное смещение центра масс, $\varphi(t)$ — угол поворота тела. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_{fr}, & m\ddot{y} &= -mg + N_1 + N_2, \\ J\ddot{\varphi} &= l(N_1 - N_2) - hF_{fr}, \end{aligned} \quad (D.122)$$

где J — момент инерции тела. Определяющие уравнения для реакций имеют вид

$$N_1 = -c(y + l\varphi), \quad N_2 = -c(y - l\varphi), \quad (D.123)$$

где c — жесткость направляющих. В качестве начальных условий примем

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & y(0) &= -mg/(2c), & \dot{x}(0) &= v, & \dot{y}(0) &= 0, \\ \varphi(0) &= -\varphi_0, & \varphi_0 &> 0, & \dot{\varphi}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (D.124)$$

При начальных условиях (D.124) реакция N_1 положительна, и она будет оставаться таковой до тех пор, пока выполняется неравенство

$$y(t) + l\varphi(t) < 0. \quad (D.125)$$

На интервале времени, когда выполняется неравенство (D.125), при условии, что $\dot{x} > 0$, сила трения определяется, согласно (D.2), формулой

$$F_{\text{fr}} = -\mu c(y + l\varphi). \quad (D.126)$$

Теперь задача (D.122)–(D.124), (D.126) для малых времен полностью поставлена. Она имеет единственное решение. Вертикальная координата центра масс сохраняет постоянное значение $y(t) = -mg/(2c)$. Нахождение функций $x(t)$ и $\varphi(t)$ сводится к интегрированию уравнений

$$\ddot{x} = \mu \left(-\frac{g}{2} + \frac{cl}{m} \varphi \right), \quad \ddot{\varphi} + \frac{cl(2l - \mu h)}{J} \varphi = -\frac{\mu mgh}{2J} \quad (D.127)$$

с начальными условиями (D.124). Решение задачи (D.124), (D.127) имеет различный вид в зависимости от знака величины $2l - \mu h$. Рассмотрим три возможных случая.

1. $\mu h < 2l$. В этом случае предельная задача ($c = \infty$) имела два решения. Расширенная задача (D.124), (D.127) имеет единственное решение. Поэтому из двух решений (D.120) и (D.121) на самом деле реализуется то, к которому стремится решение задачи (D.124), (D.127) при $c \rightarrow \infty$. Решение задачи (D.124), (D.127) при $\mu h < 2l$ имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v - \mu \left(\frac{g}{2} + \frac{cl\gamma}{m\omega^2} \right) t - \frac{\mu cl}{m\omega} \left(\varphi_0 - \frac{\gamma}{\omega^2} \right) \sin \omega t, \\ \varphi(t) &= -\varphi_0 \cos \omega t - (1 - \cos \omega t) \frac{\gamma}{\omega^2}, \end{aligned} \quad (D.128)$$

где использованы обозначения

$$\gamma = \frac{\mu mgh}{2J}, \quad \omega^2 = \frac{cl(2l - \mu h)}{J} > 0. \quad (D.129)$$

Решение задачи (D.128) справедливо до тех пор, пока $\dot{x}(t) > 0$. Тело останавливается в момент времени τ , определяемом из условия

$$v = \mu \left(\frac{g}{2} + \frac{cl\gamma}{m\omega^2} \right) \tau + \frac{\mu cl}{m\omega} \left(\varphi_0 - \frac{\gamma}{\omega^2} \right) \sin \omega \tau. \quad (D.130)$$

При больших c имеем оценки $\omega \sim \sqrt{c/(mg)}$ и $\tau \sim mg/c$. Поэтому величина $\omega\tau \sim \sqrt{mg/c}$ мала. С учетом этих оценок из (D.130) получаем приближенную формулу для τ :

$$\tau = \frac{2mv}{\mu(mg + 2cl\varphi_0)}. \quad (D.131)$$

Легко убедиться, что при этом неравенство (D.125) выполнено для всех t из интервала $0 \leq t \leq \tau$. При $t > \tau$ центр масс тела будет стоять на месте, а само тело будет совершать высокочастотные поворотные колебания.

Итак, при $\mu h < 2l$ и при $c \rightarrow \infty$ центр тяжести тела практически мгновенно останавливается. Следовательно, из двух решений (D.120) и (D.121), допускаемых законом Кулона для абсолютно твердого тела, на самом деле реализуется решение (D.121), при котором тело мгновенно останавливается. Это утверждение справедливо при любом сколь угодно малом коэффициенте трения μ .

2. $\mu h = 2l$. В этом случае система (D.127) легко интегрируется и имеет решение вида

$$\dot{x}(t) = v - \frac{\mu g t}{2} - \frac{\mu c l}{m} \left(\varphi_0 t + \frac{\gamma t^3}{6} \right), \quad \varphi(t) = -\varphi_0 - \frac{\gamma t^2}{2}. \quad (D.132)$$

Это решение справедливо при $0 \leq t \leq \tau$, где τ при больших c определяется выражением (D.131). При $t > \tau$ тело будет стоять на месте ($\dot{x}(t) = 0$) и совершать поворотные колебания с частотой $\omega = \sqrt{2cl^2/J}$. Обратим внимание, что при $t > \tau$ система (D.127) уже не пригодна, так как сила трения определяется не формулой (D.126), а равна нулю.

3. $\mu h > 2l$. Этот случай мало отличается от предыдущего. Тело останавливается в момент времени τ , который при больших c определяется формулой (D.131).

Таким образом, если тело движется по инерции, т. е. без действия внешней активной среды, то при жестких направляющих оно практически мгновенно останавливается, что и предсказывается законом Кулона.

D.8. Классическое решение и мгновенный останов как точные пределы решений расширенных задач

В разделе D.5 выписаны два решения (D.97) и (D.98) простейшей задачи о движении твердого тела по шероховатой плоскости, в которой используется закон трения Кулона. Второе из этих решений многими воспринимается как

неудачная шутка. Господствующая идея, объясняющая парадоксы Пэнлеве, основана на концепции учета деформируемости тел и введения тех или иных сил упругости. При устремлении коэффициента упругости (жесткости) к бесконечности получают классическое решение (D.97). Решение (D.98) при этом никогда не фигурировало. Покажем, что на самом деле оба решения (D.97) и (D.98) являются точными пределами некоей расширенной задачи, но пределами при стремлении к нулю (бесконечности) разных параметров. До сих пор это обстоятельство ускользало от внимания исследователей.

D.8.1. Расширенная модель

Как и в разделе D.5, в качестве основного объекта мы будем иметь в виду абсолютно твердое тело, скользящее по шероховатой горизонтальной поверхности. В качестве расширенной модели рассмотрим сложное тело, изображенное на рис. D.14. Это тело представляет собой абсолютно жесткий каркас с массой m и вделанным в него абсолютно твердым горизонтальным стержнем. По стержню может скользить без трения груз массой M . Груз соединен с каркасом пружиной жесткостью c . Понятно, что при стремлении жесткости пружины к бесконечности мы получаем абсолютно твердое тело. Примем теперь, что при $t < 0$ описанное тело двигалось как абсолютно твердое тело с постоянной скоростью $v > 0$, причем пружина находилась в недеформированном состоянии. В момент времени $t = 0$ активная сила внезапно прекращает свое действие и тело продолжает двигаться по инерции. Поскольку в отличие от задачи, рассмотренной в разделе D.6, здесь поверхность контакта есть часть абсолютно твердого тела, обладающего инерцией, то мгновенный останов каркаса невозможен без приложения неограниченно больших сил. Отсюда следует, что, по крайней мере при малых временах $t > 0$, каркас продолжает двигаться.

Введем следующие обозначения. Пусть x — положение какой-то точки (метки) каркаса, а y — положение точечного груза. Примем, что при $t = 0$ координаты x и y совпадают и равны нулю. При $t < 0$ имеем следующие уравнения:

$$x = y, \quad \dot{x} = \dot{y} = v.$$

Для вывода основных уравнений движения воспользуемся уравнением баланса энергии. Полная энергия E системы вычисляется по очевидной формуле

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} c (x - y)^2.$$

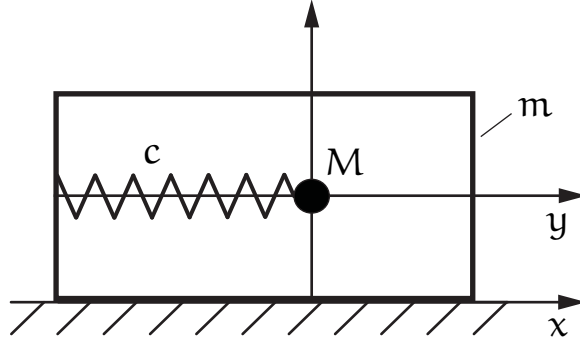


Рис. D.14. Расширенная модель

Уравнение баланса энергии для замкнутой системы записывается так:

$$\dot{E} = F_{\text{fr}} \dot{x} \Rightarrow (m\ddot{x} + c(x - y) - F_{\text{fr}})\dot{x} + (M\ddot{y} + c(y - x))\dot{y} = 0.$$

Поскольку это уравнение должно выполняться для произвольных значений \dot{x} и \dot{y} , то из него следуют уравнения движения:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x - y) = \frac{1}{m} F_{\text{fr}}, \quad \ddot{y} + \omega^2(y - x) = 0, \quad (\text{D.133})$$

где $\omega_0^2 = c/m$, $\omega^2 = c/M$. Начальные условия имеют вид

$$t = 0: \quad x = y = 0, \quad \dot{x} = \dot{y} = v. \quad (\text{D.134})$$

Систему (D.133) удобно переписать в виде

$$\omega^2 \ddot{x} + \omega_0^2 \ddot{y} = \frac{\omega^2}{m} F_{\text{fr}}, \quad (y - x)'' + \Omega^2(y - x) = -\frac{1}{m} F_{\text{fr}}, \quad (\text{D.135})$$

где $\Omega^2 = \omega^2 + \omega_0^2$. Введем обозначения:

$$u = x + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} y \equiv x + \frac{M}{m} y, \quad w = y - x.$$

Тогда уравнения (D.135) примут вид

$$\ddot{u} = \frac{1}{m} F_{\text{fr}}, \quad \ddot{w} + \Omega^2 w = -\frac{1}{m} F_{\text{fr}}. \quad (\text{D.136})$$

Начальные условия в переменных u , w выглядят так:

$$t = 0: \quad u = w = 0, \quad \dot{u} = \left(1 + \frac{M}{m}\right) v, \quad \dot{w} = 0. \quad (\text{D.137})$$

Задача (D.136), (D.137) также допускает неединственное решение, одно из которых разрывное. Это является характерной чертой закона Кулона, так что в некотором смысле Пэнлеве прав, утверждая что закон Кулона нуждается в неких формальных уточнениях. Однако, есть существенное отличие данной задачи от задачи (D.95), (D.96). Дело в том, что разрывное решение типа (D.98) для функции $\mathbf{y}(t)$ неприемлемо как противоречащее принципу инерции Галилея: тело не меняет своего состояния покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на него не действуют силы, вынуждающее тело изменить свое движение. В задаче (D.95), (D.96) такая сила была — это внезапно приложенная сила трения. Для груза M такой силы нет, ибо пружина еще не растянута и не оказывает действия на груз M . Поэтому разрывное решение задачи (D.136), (D.137) действительно противоречит основным принципам механики и должно быть отброшено. Непрерывное решение задачи (D.136), (D.137) единственно. Таким образом, из непрерывности следует, что при малых временах $t > 0$ функции $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ должны быть близки к начальной скорости $v > 0$. Пусть при $0 < t < \varepsilon$ выполняется условие $\dot{x} \neq 0$. Тогда \dot{x} положительно в этом интервале времени. Согласно закону Кулона, сила трения равна $F_{fr} = -\mu(M + m)g$. Решение задачи (D.136), (D.137) при этом значении силы трения имеет вид

$$u = \left(1 + \frac{M}{m}\right) (v - \mu g t), \quad w = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{\mu g}{\Omega} (1 - \cos \Omega t).$$

Возвращаясь к переменным x и y , получаем решение задачи (D.133), (D.134):

$$\begin{aligned} x &= vt - \frac{\mu g t^2}{2} - \frac{M \mu g}{m \Omega^2} (1 - \cos \Omega t), \\ y &= vt - \frac{\mu g t^2}{2} + \frac{\mu g}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t). \end{aligned} \tag{D.138}$$

Решение (D.138) справедливо для таких t , что

$$\dot{x} = v - \mu g t - \frac{M \mu g}{m \Omega} \sin \Omega t > 0. \tag{D.139}$$

Момент времени $t = \tau$, когда скорость каркаса \dot{x} обратится в нуль, находится из уравнения

$$v - \mu g \tau - \frac{M \mu g}{m \Omega} \sin \Omega \tau = 0. \tag{D.140}$$

В этот момент времени, согласно (D.138), имеем

$$\begin{aligned} t = \tau: \quad \dot{x} &= 0, \quad \dot{y} = \frac{m + M}{m} (v - \mu g \tau), \\ y(\tau) &= x(\tau) + \frac{\mu g (m + M)}{m \Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau). \end{aligned}$$

Уравнения (D.133) при $x(t) = x(\tau)$ принимают вид

$$F_{\text{fr}} = -c(y - x), \quad (y - x)'' + \omega^2(y - x) = 0. \quad (\text{D.141})$$

Первое из этих уравнений дает формулу для нахождения силы трения, а второе уравнение позволяет найти y . Движение груза после останова каркаса, т. е. при $t \geq \tau$, описывается формулой

$$\begin{aligned} y(t) - x(\tau) &= \frac{\mu g (m + M)}{m \Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau) \cos[\omega(t - \tau)] + \\ &+ \frac{(m + M)}{M \omega} (v - \mu g \tau) \sin[\omega(t - \tau)]. \end{aligned} \quad (\text{D.142})$$

Решение (D.142) справедливо до тех пор, пока выполняется условие

$$c|y(t) - x(\tau)| \leq \mu(M + m)g \approx \mu M g. \quad (\text{D.143})$$

Полный анализ этой задачи не вызывает затруднения, и мы оставляем его в стороне. Нас интересует поведение полученного решения при предельных значениях входящих в него параметров c , m и M .

D.8.2. Модель абсолютно твердого тела

Проанализируем решение (D.138) при $c \rightarrow \infty$. Очевидно, в этом случае расширенная модель стремится к модели абсолютно твердого тела. Это означает, что $\Omega \rightarrow \infty$. Тогда из выражений (D.138) следует:

$$y(t) = x(t) = vt - \frac{\mu g t^2}{2}, \quad t \leq \tau_{\text{cl}} \equiv \frac{v}{\mu g}, \quad (\text{D.144})$$

где τ_{cl} — классическое значение времени останова. После останова имеем: $x(t) = x(\tau_{\text{cl}})$. Выражение (D.142) при $\Omega \rightarrow \infty$ и $\tau = \tau_{\text{cl}}$ принимает вид

$$y(t) - x(\tau_{\text{cl}}) = 0, \quad t > \tau_{\text{cl}}. \quad (\text{D.145})$$

Решение (D.144), (D.145) изображено на рис. D.15. Таким образом, видим,

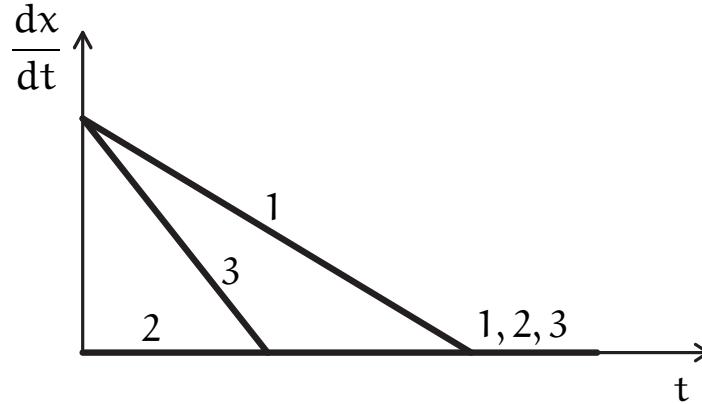


Рис. D.15. Различные варианты решения: 1 — классическое решение; 2 — решение для безмассового корпуса; 3 — решение при $m \ll M$

что одним из предельных случаев решения задачи для расширенной модели является решение

$$z(t) = \lim_{c \rightarrow \infty} x(t, c, m) = \lim_{c \rightarrow \infty} y(t, c, m) = \begin{cases} vt - \frac{\mu g t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{v}{\mu g}; \\ \frac{v^2}{2\mu g}, & t > \frac{v}{\mu g}, \end{cases}$$

совпадающее с классическим решением (D.97). Таким образом, физический смысл решения (D.97) стал очевидным.

D.8.3. Расширенная модель с безмассовым каркасом

Рассмотрим теперь случай, когда масса каркаса значительно меньше массы груза, который в пределе при $m/M \rightarrow 0$ позволяет получить модель с безмассовым каркасом. Данный случай представляет интерес, так как в реальном движении у тела останавливается только слой исчезающе малой толщины, прилегающий к контактирующей поверхности. Фактически, каркас символизирует собой нижнюю грань тела.

Если преставить себе тело в виде куба высотой h (далее считается, что h измеряется в сантиметрах) и предположить, что останавливается только один нижний атомарный слой, имеющий толщину 10^{-8} см, то масса всего тела $M + m$ будет относиться к массе m нижнего слоя как

$$\frac{m + M}{m} = \frac{h \text{ (см)}}{10^{-8} \text{ см}} = 10^8 h.$$

Таким образом, отношение M/m есть огромное число. Величина Ω также

представляет собой большое число:

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega_0^2 = c \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \approx \frac{c}{m},$$

поскольку масса m — мала, а жесткость c — велика.

Из выражения (D.139) видно, что \dot{x} может обратиться в нуль не только из-за слагаемого $\mu g t$, но также из-за последнего слагаемого. Причем время τ , когда \dot{x} обратиться в нуль, весьма мало, ибо Ωt велико даже при очень малых t . Предположим для простоты, что

$$\Omega \tau \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \Omega \tau \approx \Omega \tau. \quad (\text{D.146})$$

Обоснование данного предположения приводится ниже. С учетом (D.146) из уравнения (D.140) получаем:

$$v - \mu g \tau - \frac{M}{m} \mu g \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau \approx \frac{m}{M} \frac{v}{\mu g} \quad \Rightarrow \quad \Omega \tau \approx \sqrt{\frac{c}{M \mu g}} \frac{v}{\mu g}. \quad (\text{D.147})$$

Заметим, что $v/(\mu g)$ есть время останова системы, если ее рассматривать как абсолютно жесткое целое. Как видно из второй формулы (D.147), фактическое время останова, с учетом оценки для m/M , несоизмеримо меньше:

$$\tau = \frac{10^{-8} \tau_{cl}}{h_{(cm)}} \ll \tau_{cl}.$$

Оценим частоту Ω . Ее можно отождествлять с низшей частотой сдвиговых колебаний куба с закрепленной нижней гранью. Оценку проведем методом Ритца. Перемещение аппроксимируется функциями

$$u = Ay \cos(\omega_* t), \quad v = w = 0,$$

где u , v , w — смещение точек куба вдоль осей x , y , z соответственно. Здесь y имеет смысл координат и не совпадает с тем y , который использовался ранее.

Вычислим кинетическую энергию куба:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{(V)} \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV = \frac{1}{6} m \omega_*^2 A^2 \sin^2(\omega_* t) h^2 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_{\max} = \frac{1}{6} m \omega_*^2 h^2 A^2, \end{aligned}$$

где ρ — плотность материала куба. Энергия деформации куба равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} GA^2 V \cos^2(\omega_* t) \quad \Rightarrow \quad \Pi_{\max} = \frac{1}{2} GA^2 V,$$

где V — объем тела, G — модуль сдвига. Из условия $T_{\max} = P_{\max}$ находим, что низшая частота сдвиговых колебаний куба

$$\omega_*^2 \approx \frac{3G}{\rho h^2}. \quad (\text{D.148})$$

Учитывая, что $\Omega \approx \omega_*$, для жесткости c и величины $\Omega\tau$ получаем формулы

$$c = \frac{3GV}{h^2}, \quad \Omega\tau = \frac{mv}{\mu M g h} \sqrt{\frac{3G}{\rho}}. \quad (\text{D.149})$$

Допустим, куб изготовлен из стали:

$$G = 0,83 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \rho = 7,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}.$$

Тогда формулы (D.148) и (D.149) дают

$$\sqrt{\frac{c}{M}} = \frac{5,6}{h^{3/2}}, \quad \Omega\tau = \frac{0,00056}{h^2} \frac{v}{\mu g}. \quad (\text{D.150})$$

Из (D.150) видим, что соотношение (D.146) нарушается либо для больших скоростей v , либо для очень малых μ и h . Понятно, что для большинства реальных ситуаций (D.146) и вытекающие из него следствия справедливы.

Итак, из изложенного следует, что нижняя грань куба (каркас в задаче (D.133), (D.134)) останавливается практически мгновенно, в то время как оставшаяся часть тела продолжает двигаться.

Вернемся к анализу решения (D.138), (D.142). При $m/M \ll 1$ и $\Omega t \ll 1$ решение (D.138) можно записать в приближенной форме:

$$x = vt - \frac{\mu g M t^2}{2m}, \quad y = vt, \quad t \leq \tau, \quad (\text{D.151})$$

а решение (D.142) принимает вид

$$y(t) - x(\tau) = \frac{v}{\omega} \sin[\omega(t - \tau)], \quad t > \tau, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{M}}. \quad (\text{D.152})$$

Согласно (D.141), (D.152), сила, действующая на каркас при временах $t > \tau$, выглядит так:

$$F_{\text{fr}} \approx -c[y(t) - x(\tau)] = -v\sqrt{cM} \sin[\omega(t - \tau)].$$

Если модуль этой силы не превысит величину $\mu g M$, то при всех $t > \tau$ каркас будет оставаться в покое. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы начальная скорость удовлетворяла неравенству

$$v \leq v_c, \quad v_c = \mu g \sqrt{\frac{M}{c}} = \frac{\mu g}{\omega}, \quad (\text{D.153})$$

где v_c — критическая скорость.

Если условие (D.153) не выполняется, то неравенство $F_{fr} \leq \mu g M$ позволяет найти интервал времени, где справедливо решение (D.152). После этого необходимо решать задачу Коши с новыми начальными условиями.

При выполнении неравенства (D.153), с точки зрения применения закона Кулона рассматриваемое тело мгновенно останавливается, хотя его центр масс в момент времени $t = \tau$ имеет конечную скорость:

$$\dot{y}|_{t=\tau} = v - \mu g \tau + \frac{\mu g}{\Omega} \sin \Omega \tau \approx v - \mu g \tau + \mu g \tau = v.$$

При $t > \tau$ центр масс тела совершает малые колебания, а контактирующая поверхность неподвижна. С точки зрения поступательного движения тело находится в покое.

Из формулы (D.147) видим, что время до останова тела может быть значительно меньше, чем предписываемое “классическим” решением время $\tau_{cl} = v/(\mu g)$. В пределе при $m/M \rightarrow 0$ время до останова равняется нулю, и мы получаем решение (D.98):

$$z(t) = \lim_{m \rightarrow 0} x(t, c, m) = 0, \quad \dot{z} = \lim_{m \rightarrow 0} \dot{x}(t, c, m) = \begin{cases} v, & t = 0; \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Таким образом, оба решения (D.97) и (D.98), допускаемые законом Кулона, на самом деле должны приниматься во внимание, как являющиеся точными пределами расширенной задачи. Важно подчеркнуть, что выбор между этими двумя решениями невозможно осуществить без анализа того, как именно устроено тело, считающееся в пределе абсолютно твердым. Более надежным следует считать решение (D.99), в котором параметр τ следует рассматривать как физическую характеристику рассматриваемой задачи.

D.8.4. Обсуждение

Решение (D.98) называется гипотезой Клейна. Выше было показано, что на самом деле это не гипотеза, а весьма важное следствие стандартной постановки всех задач с кулоновским трением. Обычное возражение против гипотезы Клейна должно быть отклонено, если принимается правильная трактовка

функции $z(t)$ в системе (D.95). Для решения (D.97) вполне можно использовать две различных интерпретации, т. е. функцию $z(t)$ можно рассматривать либо как положение центра масс, либо как положение поверхности контакта. Однако для решения (D.98) есть только одна интерпретация. Это означает, что в общем случае функция $z(t)$ в системе (D.95) должна рассматриваться как положение точки на поверхности контакта.

Как было показано выше, точная постановка задачи о движении тела по шероховатой поверхности приводит к незамкнутой системе уравнений. Это прямое указание на сингулярность данной задачи, поскольку проблема замыкания задачи во многих случаях не может быть решена единственным образом. Выше использовалось стандартное замыкание системы (D.93). В результате получилась замкнутая система, но возникла новая проблема. А именно, смысл функции $z(t)$, строго говоря, остался неопределенным. Может быть, замыкание системы было сделано слишком грубо и прямолинейно, и задача отомстила нам, подбросив бессмысленное решение? Или, может быть, Природа сигнализирует нам о каком-то важном факте, который мы должны принимать во внимание? Ответам на эти вопросы посвящен данный подраздел.

Для практических целей намного лучше использовать расширенную модель. В этом случае нужно определить жесткость пружины c . Очевидно соотношение $c \sim 1/h$, где h — расстояние между центром масс и поверхностью контакта. Поэтому, если мы рассмотрим шайбу на льду, эксперимент подтвердит решение (D.97). Однако, если мы рассмотрим книжный шкаф на паркетном полу, эксперимент, несомненно, подтвердит решение (D.98). Это означает, что структура тела должна влиять на время останова. Заметим, что во многих случаях, если мы хотим избежать противоречий разного рода, очень важно принимать во внимание решение (D.98). В результате проведенного анализа сделано два ключевых вывода.

Во-первых, функция $z(t)$ характеризует положение точки поверхности контакта, а не положение центра масс. Это сразу снимает традиционные возражения против использования решения с мгновенной остановкой, поскольку мгновенно (или практически мгновенно) останавливается тело бесконечно малой массы.

Во-вторых, два решения (D.97) и (D.98) нельзя понимать так, что в действительности реализуется одно из них. На самом деле эти решения дают нам только верхнюю и нижнюю границы, между которыми находится истинное решение. При этом истинное движение тела невозможно найти из системы (D.95).

Как и любые теоретические утверждения, приведенные выводы требуют

экспериментальной проверки. Проведем следующий мысленный эксперимент. Возьмем книжный шкаф с рядом горизонтальных полок для книг. Шкаф должен быть легким и жестким, насколько это возможно. Кроме того, в шкафу должен быть большой груз, который можно разместить на одной полке. Теперь можно начать эксперименты. Предварительно заметим, что с точки зрения системы (D.95) не имеет никакого значения, на какой полке находится груз. Проведем серию экспериментов, в каждом из которых будем задавать одну и ту же начальную скорость. В первом эксперименте груз находится на нижней полке. Измерим расстояние, пройденное книжным шкафом по инерции. Если центр масс шкафа с грузом расположен достаточно близко к полу, то он пройдет расстояние, близкое к предсказанному классическим решением. График скорости точки на поверхности контакта будет близок к линии 1 на рис. D.15. Во втором эксперименте груз расположен на второй полке снизу. В этом случае центр масс шкафа с грузом будет выше, чем в первом эксперименте. Измерения покажут, что шкаф пройдет по инерции меньшее расстояние, чем в первом эксперименте. График скорости также переместится влево. Повторяя эти эксперименты и поднимая груз все выше и выше, мы увидим, что график скорости будет прижиматься к оси ординат, а пройденное по инерции расстояние будет становиться все меньше и меньше. Конечно, все сказанное носит спекулятивный характер. Однако трудно сомневаться в сказанном, поскольку именно такое поведение тела предсказывается результатами анализа поведения расширенной модели.

Итак, видим, что решения (D.97) и (D.98) действительно дают только границы, в которых расположено искомое решение, но само решение, описывающее истинное движение тела, существенно зависит от высоты расположения центра масс. Этот параметр вообще не входит в систему (D.95). Именно по этой причине появляется неопределенность в решении системы (D.95). Фактически эта система уравнений позволяет определить только границы, в которых находится решение, описывающее истинное движение тела, но не само решение.

Таким образом, вырисовывается следующая картина движения расширенной модели. Предположим, что корпус является непрозрачным и имеет пренебрежимо малую массу. Допустим, что мы наблюдаем только перемещение корпуса и ничего не знаем о том, что находится внутри. Пусть при $t < 0$ система двигалась с постоянной скоростью v под действием внешних сил, при этом пружина была не деформирована. В момент времени $t = 0$ действие внешних сил вдруг прекращается и тело продолжает двигаться под действием сил трения. Как движения этого тела будет выглядеть с точки зрения внешне-

го наблюдателя? Поскольку корпус считается безынерционным, он мгновенно остановится, но груз M продолжит движение, растягивая пружину. Сила упругости пружины, с одной стороны, замедляет движение груза M , а с другой стороны, действует на корпус. В дальнейшем возможны два варианта движения системы.

В первом варианте под действием силы упругости груз M остановится на какой-то момент времени $t > 0$. Это означает, что сила упругости не превышает максимально возможную силу трения покоя μgM . С точки зрения внешнего наблюдателя тело стоит на месте, хотя внутри корпуса происходят невидимые снаружи колебания груза M . Первый вариант реализуется, если начальная скорость была меньше некоторой критической скорости v_c , которая определяется формулой (D.153).

Второй вариант более интересен. Пусть начальная скорость превышает критическую скорость. Тогда в момент времени t_1 , когда груз M будет продолжать движение, сила упругости превысит максимальную силу трения покоя. В этот момент времени корпус сдвинется с места и мгновенно догонит груз M , т. е. восстановит исходное положение по отношению к грузу M . Напомним, что речь идет о безынерционном корпусе и безынерционной пружине. После этого корпус остановится, и этот процесс повторится, но уже с меньшей начальной скоростью.

Таким образом, внешний наблюдатель будет наблюдать странную картину передвижения корпуса. После исчезновения внешних сил корпус останавливается, некоторое время стоит на месте, затем делает скачок и снова останавливается. Число таких скачков зависит от величины начальной скорости. После соответствующего числа скачков корпус, наконец, остановится и невидимый для наблюдателя груз будет колебаться внутри корпуса. В сущности нечто подобное можно наблюдать в эксперименте. В этом гипотетическом случае не только скорость будет разрывной функцией времени, но и перемещение тоже. Разумеется, если корпус обладает сколь угодно малым весом, непрерывность движения восстанавливается. Но при очень малой массе это непрерывное движение будет достаточно близко к тому, что было описано выше.

D.9. Заключение

Применение закона Кулона имеет свою специфику, связанную с неединственностью решения задач динамики. Однако отмеченная неединственность связана не с тем, что закон Кулона логически противоречив, а с самой природой рассматриваемых задач. Основная ошибка Пэнлеве заключалась в том,

что он выдвигал априорные допущения и о характере движения, и о характере сил, необходимых для создания этого движения. На самом деле можно сделать что-то одно, например, движение задать, силы определить, или наоборот — силы задать, движение определить. При этом следует помнить, что не всякое движение возможно создать конечными силами. Например, для движения тела в зазоре часто требуется бесконечная сила, чтобы преодолеть заклинивание. Возвращаясь к обсуждавшейся в разделе D.2 дискуссии, следует заметить, что часто дело заключается не в учете сил упругости, а в том, что в действительности останавливаться может не все тело, а только контактирующая поверхность. Как ни парадоксально, но уравнения динамики абсолютно твердого тела при использовании закона Кулона очень хорошо улавливают это обстоятельство. Поэтому не стоило бы с такой легкостью объявлять модель абсолютно твердого тела неприменимой в задачах рассматриваемого типа.

ЖИЛИН Павел Андреевич

Динамика твердого тела

Учебное пособие

Редакторы: *О. К. Чеботарева, М. Б. Шишкова*
Технический редактор *А. И. Колодяжная*

Оригинал-макет подготовлен редакционной коллегией

Свод. темплан 2014 г.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 — учебная литература

Подписано в печать 14.05.2015.
Усл. печ. л. 51,5.

Тираж 100.

Формат 70×100/16.
Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного Издательством Политехнического университета,
в Типографии Политехнического университета,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812)552-77-17; 550-40-14.