УДК 531.01

*Т.А. Костарева*

Санкт - Петербургский политехнический университет

**ОТ ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ К ВИРТУАЛЬНЫМ СКОРОСТЯМ**

Предлагаются в курсе ТМ вместо бесконечно малых виртуальных перемещений перейти к конечным виртуальным скоростям как множеству скоростей по поверхности нестационарной связи, порождаемому множеством начальных условий. Сформулированы идеи метода Лагранжа.

**От бесконечно малых к конечным величинам**

В большинстве курсов ТМ [1-7] для технических вузов авторы оперируют понятиями элементарного d**r** и виртуального δ**r** перемещений. Элементарное перемещение

$$dr=vdt$$

направлено вдоль действительной скорости точки и определяется силами и начальными условиями движения.

 Виртуальное перемещение δ**r** направлено произвольно в касательной плоскости к поверхности связи и не связано с силами и начальными условиями движения.

Оба перемещения бесконечно малые величины. И здесь возникает первая условность, связанная с изображением бесконечно малых величин конечными векторами.

Виртуальное перемещение определяется как ***изохронная*** ***вариация*** радиуса вектора $r$. К какому виду вариаций относится понятие виртуального перемещения остается не ясным. И это вторая проблема при изложении понятия виртуального перемещения в курсе ТМ.

Избежать указанных проблем можно, если от туманного понятия бесконечно малой вариации радиуса вектора перейти к конечной, изображаемой и понятной студенту виртуальной скорости, как элемента множества относительных скоростей точки по поверхности связи, порождаемому множеством начальных условий движения точки.

Понятие виртуальной скорости упоминается в [2], но лишь для того, чтобы перейти к виртуальным перемещениям.

Во многих источниках [1,4,5,6] термины возможное, действительное и виртуальное трактуются по-разному. Часто под возможным и виртуальным понимается одно и то же перемещение [4,5,6].

**Действительная скорость точки.**

Рассмотрим простейший пример движения точки массы $m $под действием силы $F$ и нестационарной геометрической идеальной связи

$$Ф(r;t)=0$$

Уравнение связи можно трактовать как уравнение подвижной поверхности, по которой движется точка. Положение точки в пространстве определяется положением поверхности связи и положением точки на поверхности связи. На рисунке изображена фотография поверхности связи в момент времени t. Положение точки на поверхности связи можно задать двумя обобщенными криволинейными координатами q1 и q2. Радиус вектор точки есть функция обобщенных координат и времени.

$r(q\_{1},q\_{2};t)$(1)

Закон движения точки (1) определен законом Ньютона

$$mw=F+R (2) $$

и ***начальными условиями***. Здесь $F$ активная сила, $R$ реакция идеальной связи Дифференцируя закон (1), находим действительную скорость точки

$$v=\dot{r}=\frac{∂r}{∂q\_{1}}\dot{q}\_{1}+\frac{∂r}{∂q\_{2}}\dot{q}\_{2}+\frac{∂r}{∂t}=v\_{e}+ v\_{r} (3)$$

Здесь

$$v\_{e}=\frac{∂r}{∂t} (4) $$

переносная скорость точки поверхности связи, с которой совпадает изучаемая точка.

Она ***единственна***, поскольку определена уравнением движения связи (Рис.1).

Вторая составляющая действительной скорости

$$v\_{r}=\frac{∂r}{∂q\_{1}}\dot{q}\_{1}+\frac{∂r}{∂q\_{2}}\dot{q}\_{2} (5)$$

является относительной скоростью точки по поверхности связи. Она имеет две составляющие вдоль обобщенных координат q1 и q2.

Частные производные $\frac{∂r}{∂q\_{1}}$, $\frac{∂r}{∂q\_{2}}$являются направляющими векторами, касательными к координатным линиям $q\_{1},q\_{2}$ (Рис.2).

**Виртуальная и возможная скорость точки**

Множество начальных условий порождает множество решений (1) уравнения Ньютона (2). В начальный момент точку можно поместить в произвольное возможное положение на поверхности связи. В этом положении точка имеет определенную переносную скорость $v\_{e}$ (4) вместе с поверхностью связи.

$$v\_{е}$$

0

q1

**R**

$$v$$

$$ν$$

q2

***r***

Рис.1

В возможном положении точке можно дать произвольную начальную скорость $ν$в касательной плоскостик поверхности связи. Эта скорость называется ***виртуальной*** ***скоростью*** точки. Виртуальные скорости произвольны по модулю и направлению в касательной к связи плоскости:

$$ν =\frac{∂r}{∂q\_{1}}ν\_{1} +\frac{∂r}{∂q\_{2}}ν\_{2} (6)$$

где $ν\_{1}$ и $ν\_{2}$ – произвольные алгебраические числа.

Виртуальные скорости составляют множество и определяются только связью и не зависят от сил, определяющих действительное движение точки.

Ввиду произвольности виртуальных скоростей $ν$ абсолютная скорость точки образуют множество ***возможных*** скоростей

$$v=v\_{e}+ ν (7)$$

отвечающих уравнению Ньютона (2) и множеству начальных условий движения.

Очевидно, что действительная скорость точки (3) принадлежит множеству ее возможных скоростей (7).

Если связь стационарна, то множества возможных и виртуальных скоростей совпадают.

**Методы Ньютона и Лагранжа**

Важной задачей динамики является составление дифференциальных уравнений движения точки по поверхности нестационарной связи.

Закон ***Ньютона*** (2) позволяет найти как дифференциальные уравнения движения точки, так и реакцию идеальной связи. Его недостатком является векторный характер и относительная избыточность. Ведь обычно вычисления ведутся в скалярном виде, а интерес представляют только дифференциальные уравнения движения точки по связи.

$$\frac{∂r}{∂q\_{1}}$$

0

q1

**R(**$v)$

$$W\_{r1}$$

q2

q1

τ1

$$W$$

m

Рис.2

Аналитическим методом вывода дифференциальных уравнений движения по связям является метод ***Лагранжа,***основанный на двух идеях:

1. Рассматривать только идеальные связи.
2. Спроектировать закон Ньютона (2) на касательную к связи плоскость, скалярно умножив (2) на вектор произвольной виртуальной скорости $ν$.

Такое умножение:

1. приводит уравнения к скалярной форме,
2. исключает реакции идеальных связей, поскольку

$$R∙ν=0 (но R∙v\ne 0 ) $$

с) заменяет ускорение $W $его проекцией $W∙ν$ на касательную к связи плоскость, которая не зависит от виртуальных скоростей $ν$.

Действительно, согласно закону Ньютона (2) ускорение $W$ зависитот реакции $R,$ которая, в свою очередь, зависит от виртуальной скорости $ν$**.** Однако проекция ускорения $W $на касательную к связи плоскость не зависит от ортогональной к этой плоскости реакции $R $идеальной связи**,** а значит и от виртуальной скорости $ν$. Достаточно вспомнить движение автомобиля по мосту. Его касательное к мосту ускорение никак не зависит от скорости автомобиля.

**Литература**

1. *Лойцанский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механики, т.2/ Москва: Издательство «Наука», 1983. – 840с.
2. *Бутенин Н.В.* Введение в аналитическую механику/ Москва Издательство «Наука», 1971. – 264с.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике –/ Москва: Издательство «Физматгиз», 1960. – 296с.
4. *Геронимус Я.Л.* Теоретическая механика –/ Москва: Издательство «Физматгиз», 1973. – 511с.
5. *Гернет М.М.* Курс теоретической механики –/ Москва: Издательство «Высшая школа», 1970. – 439с.
6. Курс теоретической механики- под редакцией *Колесниква К.С.* –/ Москва: Издательство «МГТУ», 2000. – 735с.
7. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика –/ Москва: Издательство «Физмат литературы», 1990. – 414с.