*ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ* «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО»

*Институт прикладной математики и механики*

Кафедра теоретической механики

Курсовой проект на тему:

«Исследование фазовых портретов»

**Выполнила:**

Иванова Яна Викторовна

Группа: 23604/1

Семестр: весна 2017

Научный руководитель: Панченко Артем Юрьевич

Введение

Часто в ряде наук встречается ситуация, когда модель рассматриваемого процесса сводится к дифференциальному уравнению. Причём, в большинстве реальных задач это уравнение довольно сложно решить, или совсем невозможно.
Фазовый портрет — это то, как величины, описывающие состояние системы (динамические переменные), зависят друг от друга. В случае механического движения это координата и скорость, в электричестве это заряд и ток, в известной популяционной задаче это количество хищников и жертв и т.д.

Чем хороши фазовые портреты? Их можно построить не решая динамические уравнения системы. В некоторых случаях построение фазового портрета становится совсем простой задачей. Однако, одновременно с этим, фазовые портреты дают вдумчивому наблюдателю очень много информации о поведении системы.

В данной работе исследуются фазовые портреты для дифференциального уравнения второго порядка mх’’ + kx + bx’ = 0. Вид фазовых портретов зависит от параметров m, k и b, где m – масса, k – жесткость, а b – коэффициент затухания. Существует несколько стандартных типов фазовых портретов: фокус, центр, узел, седло. Они образуются при определенных сочетаниях заданных параметров. Рассмотрим подробнее все случаи.

$$m\ddot{х} + kx + b\dot{x}= 0$$

характеристическое уравнение:

$$mf^{2} + k + mf = 0$$

корни этого уравнения задаются формулами

$$f\_{1} =\frac{-b + \left(b^{2} – 4mk\right)^{\frac{1}{2}}}{2m}$$

$$f\_{2} =\frac{-b- \left(b^{2} – 4mk\right)^{\frac{1}{2}}}{2m}$$

1. $b^{2}>4mk$

В данном случае трение велико. Оба корня характеристического уравнения действительные, различные. Фазовый портрет типа «Устойчивый узел»

1. $b\^2 = 4mk $

Существует всего один действительный отрицательный корень. Фазовый портрет типа «Вырожденный устойчивый узел»

1. $0 < b\^2 < 4mk$

В данном случае трение мало. Оба корня комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью. Фазовый портрет типа «Фокус»

1. $k\ne 0 , b = 0$

В данном случае отсутствует трение. Оба корня характеристического уравнения действительные, различные и отрицательные. Фазовый портрет типа «Центр»

1. $k = 0, b \ne 0$

Отсутствует упругая сила. Оба корня действительные, один отрицательный, второй равен нулю. Фазовый портрет – прямые линии, параллельные друг другу

Конкретный вид функции зависит от коэффициентов . Но так как эти же коэффициенты определяют и корни характеристического уравнения данной системы. Существует однозначная зависимость между корнями $f\_{1,2}$и типом фазового портрета линейной системы 2-го порядка.

Рассмотрим различные ситуации.

Устойчивый узел

В системе есть апериодический затухающий переходной процесс и уравнение имеет решение

$x\left(t\right)=a\_{1}e^{-λ\_{1}t}$ ***+*** $a\_{2}e^{-λ\_{2}t}$

$λ\_{1,2}$ ***- действительные различные***

$\dot{x}$ ***= -*** $a\_{1}b\_{1}e^{-b\_{1}t}$ ***-*** $a\_{2}b\_{2}e^{-b\_{2}t}$

$\dot{x}$ ***+*** $b\_{1}$***x =*** $a\_{2}(b\_{1} -b\_{2})$$e^{-b\_{2}t}$

$\dot{x}$ ***+*** $b\_{2}$***x =*** $a\_{1}(b\_{2} -b\_{1})$$e^{-b\_{1}t}$

$$x = a\_{1}e^{⁡(-b\_{1} t)}+ a\_{2}e^{⁡(-b\_{2} t)}$$

$\dot{x}$ ***=*** $-b\_{1}a\_{1}e^{⁡(-b\_{1} t)}-b\_{2}a\_{2}e^{⁡(-b\_{2} t)}$

На фазовой плоскости все координаты пересекаются в начале координат.

Вырожденный устойчивый узел

$λ\_{1,2}$$=-\frac{b}{2m}<0$ ***–* корни характеристического многочлена**

$x\left(t\right)=(at+b)e^{-ct}$ **– общее решение, процесс затухающий**

$x$ ***=*** $(at+ c)e^{\frac{-b t}{(2m)} }$

$$\dot{x}= -\frac{b}{2m}at + a + c(-\frac{b}{2m})e^{\frac{-b t}{(2m)} }$$

Центр

Имеется следующее решение характеристического уравнения

$λ\_{1,2}$ **= ± i**$\sqrt{\frac{k}{m}}$

$$x\left(t\right)= acoswt + bsinwt$$

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+ \frac{\dot{x}^{2}}{w^{2}a^{2}}=1$$

$$x = a cos⁡(wt -β) $$

$$\dot{x}=-awsin(wt - β)$$

то есть фазовые плоскости являются эллипсами.

Фокус

$$x\left(t\right)=(c\_{1}cos wt+c\_{2}sin wt)e^{pt}$$

$p=Re λ\_{1,2}$$=-\frac{b}{2m}$

$$w=Imλ\_{1,2} =\frac{\sqrt{4mk -b^{2}}}{2m}$$

$$x=ae^{-bt}cos wt$$

$$\dot{x}=-ae^{-bt}\left(bcos wt+wsinwt\right)$$

то есть имеют место колебания с бесконечно возрастающей амплитудой. Фазовая траектория – плоская расходящаяся спираль;

Параллельные прямые

В случае равенства одного из собственных чисел характеристического уравнения нулю, имеем

$$λ\_{1}=-\frac{b}{m},  $$

$$λ\_{2}=0$$

$x$ **=** $c\_{1}e^{-λ\_{1}t}+c\_{2}$

$$\dot{x}=λ\_{1}(x -c\_{2})$$

Список используемой литературы

1. Я. Г. Пановко “Введение в теорию механических колебаний”
2. С. С. Степанов “Курс дифференциальных уравнений. Том 2“
3. А. А. Яблонский “Курс теоретической механики”