

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

Работа допущена к защите

Директор высшей школы

_____ А.М. Кривцов

«__» _____ 2021 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

«Напряжения в цилиндрической оболочке с круглым отверстием под действием внутреннего давления»

по направлению подготовки

01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

профиль

01.04.03_01 «Механика деформируемого твердого тела»

Выполнил

М.А.Капитанская

студент гр. 3640103/90101

Руководитель

С.В.Каштанова

доцент, к.ф.-м.н.

Санкт-Петербург–2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

УТВЕРЖДАЮ
Директор высшей школы

_____ А.М. Кривцов

«___» _____ 2021 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту _____ Капитанской Марии Александровны, гр. 3640103/90101

1. Тема работы: напряжение в цилиндрической оболочке с круглым отверстием под действием внутреннего давления.
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 7 июня 2021 г.
3. Исходные данные по работе: учебно-методические пособия, научные статьи, справочные данные.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
 1. Изучение задачи о напряжениях в цилиндрической оболочке с круглым отверстием.
 2. Исследование различных методов и подходов решения подобных задач.
 3. Получение аналитического решения.
 4. Получение численных значений.
 5. Проведение сравнительного анализа.
5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей): .
6. Консультанты по работе:
7. Дата выдачи задания: «25» 012021 г.

Руководитель ВКР

С.В. Каштанова

Задание принял к исполнению: «25012021г.

студент гр. 3640103/90101

М.А. Капитанская

РЕФЕРАТ

На 30с., 10 рисунков.

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА, КРУГЛОЕ ОТВЕРСТИЕ, НАПРЯЖЕНИЯ, ВНУТРЕННЕЕ ДАВЛЕНИЕ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Напряжения в цилиндрической оболочке с круглым отверстием под действием внутреннего давления».

Данная работа посвящена решению задачи о нахождении напряжений в цилиндрической оболочке с круглым отверстием под действием внутреннего давления

В ходе написания выпускной квалификационной работе была исследована задача о нахождении напряжений в цилиндрической оболочке при равномерном внутреннем давлении.

Так же были исследованы различные методы и подходы решения задачи. Проведен анализ решений. Был выбран и изучен неклассический подход. Данный подход имеет преимущество: позволяет находить численные значения напряжений и аналитически исследовать их.

Решение, полученное аналитическим методом, сходится с решением, полученным методом коллокаций.

ABSTRACT

30 pages, 10 figures

CYLINDRICAL SHELL, ROUND HOLE, STRESSES, INTERNAL PRESSURE.

The topic of the final qualification work: "Stresses in a cylindrical shell with a round hole under the action of internal pressure".

This paper is devoted to solving the problem of finding stresses in a cylindrical shell with a round hole under the action of internal pressure

In the course of writing the final qualifying work, the problem of finding stresses in a cylindrical shell at a uniform internal pressure was investigated.

Various methods and approaches to solving the problem were also investigated. The analysis of solutions is carried out. A non-classical approach was chosen and studied. This approach has the advantage of: allows you to find numerical values of stresses and analyze them analytically.

The solution obtained by the analytical method converges with the solution obtained by the collocation method.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
ГЛАВА 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ..	8
1.1 Вывод уравнений.....	8
1.2 Постановка задачи и решение	13
ГЛАВА 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ	16
2.1 Граничные условия	16
2.2 Общая система уравнений	20
2.3 Анализ полученных результатов	22
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	28
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	29
Приложение 1.....	31

ВВЕДЕНИЕ

В XX в. проводилось много исследований по теории оболочек. Большое внимание было уделено исследованиям по поиску эффективных методов решения краевых задач теории оболочек. Большинство достижений в этой области принадлежит нашим ученым. Появилась необходимость о решении вопроса о структуре разрабатываемых методов.

У зарубежных коллег основное внимание было направлено на построение точных решений краевых задач теории оболочек. Это не соответствовало тому, что исходные уравнения имели приближенный характер.

Впервые в 1924 году И.Я.Штаерман обратил на это внимание и внедрил асимптотические методы для решения краевых задач. Так же А.И.Лурье использовал асимптотические методы при построении решений, а В.В.Новожилов при преобразовании уравнений теории оболочек.

В работах А.Л. Гольдейнвейзера так же детально рассмотрены асимптотические методы решения задач теории оболочек. Он дал другую формулировку кинематических и статических гипотез и получил новые соотношения упругости.

Цилиндрические оболочки являются достаточно распространенным элементом разных конструкций в таких областях, как машиностроение, судостроение, авиастроение.

Концентрация напряжений вокруг отверстий в оболочках имеет большое значение при проектировании конструкций оболочек. Во многих случаях концентрация напряжений влияет на их несущую способность.

Проблема напряжений вокруг круглых отверстий широко исследовалась [5,8,10,12-14]. В 40-х годах XX века А.И.Лурье первый сформулировал постановку задачи и пытался получить решение для цилиндрической оболочки с

круглым отверстием. В своем решении он использовал метод разложения по малому параметру кривизны β .

Лурье допустил ошибку в постановке граничных условий на границе отверстия. Поэтому эту задачу пересмотрели Эринген [7] и Леккеркеркер [10]. Они использовали численные методы для получения напряжений в оболочке для трех условий нагружения.

В решении Леккеркеркера каждый член ряда Фурье удовлетворял граничным условиям на границе отверстия. Эринген использовал метод коллокации, которой заключается в том, что искомую функцию аппроксимируют последовательным рядом, вводят в расчетное уравнение. Уравнение должно удовлетворять не во всей области, а лишь в отдельных точках.

Полученное аналитическое решение было трудоемким и ограниченным по параметру кривизны β , которое практически не отличалось от плоской задачи Кирша. Результаты, полученные с помощью метода коллокаций расходились.

В статье С.В.Каштановой и А.В.Ржонсницкого [15] был предложен новый подход для нахождения напряжений в цилиндрической оболочке с круглым отверстием при растяжении. Данный метод позволяет незатруднительно находить численные решения и при этом оставляет возможность для аналитического исследования.

Цель работы: применить новый подход для нахождения напряжений в цилиндрической оболочке с круглым отверстием под действием равномерного внутреннего давления.

Интерес к подобным задачам есть и сегодня. Например в статье авторов Meng-Kao Yeh и Ming-Chyuan Lin «Bending buckling of an elastoplastic cylindrical shell with a cutout» было аналитически и экспериментально исследовано поведение упругопластической цилиндрической оболочки с вырезом при чистом

изгибе. С появлением новых технологических возможностей задачи теории оболочек можно решать разными способами. Данная задача решалась методом конечных элементов.

ГЛАВА 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ..

1.1 Вывод уравнений

Рассматриваем цилиндрическую оболочку ослабленную круглым отверстием, которое влияет на поле напряжений оболочки.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + X_x = 0$$

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + X_y = 0$$

$$Q_x = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_{xy}}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial G_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 G_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 G_y}{\partial y^2} - \frac{1}{R} T_y + X_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{Eh} \cdot X_x = 0$$

$$\frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1-\nu^2}{Eh} \cdot X_y = 0$$

$$\frac{\nu}{R} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{R^2} w + \frac{h^2}{12} \Delta \Delta w - \frac{1-\nu^2}{Eh} \cdot X_y = 0$$

T_x, T_y, T_{xy} – усилия;

X_x, X_y, X_y – составляющие вектора внешних сил;

Q_x, Q_y – перерезывающие силы;

G_x, G_y, G_{xy} – моменты;

$2H_{xy} = G_{xy} + G_{yx}$;

R – кривизна оболочки;

u_x, u_y – компоненты вектора перемещений;

ν – коэффициент Пуассона;

w – прогиб;

E – модуль Юнга;

h – толщина оболочки;

Δ – оператор Лапласа;

Условия совместности деформаций:

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \chi_\beta}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{2}{RA} \cdot \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = \frac{1}{BR} \cdot \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \beta}$$

$$\frac{\chi_\alpha}{R} + \frac{1}{A^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\beta}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\alpha}{\partial \beta^2} - \frac{2}{AB} \cdot \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

$\chi_\alpha, \chi_\beta, \tau_{\alpha\beta}$ – изгибные деформации срединной поверхности;

$\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \omega_{\alpha\beta}$ – тангенсальные деформации срединной поверхности

Вводим функцию U таким образом:

$$T_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; T_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; T_{xy} = T_{yx} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Уравнения равновесия и условия совместности сводятся к системе двух дифференциальных уравнений (при $X_x = X_y = 0$):

$$\begin{aligned} \Delta \Delta U - \frac{Eh}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \Delta \Delta w + \frac{1}{DR} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{1}{D} X_\gamma \end{aligned}, \text{ где} \quad (1)$$

U – функция напряжений;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость оболочки;

Δ – оператор Лапласа;

Система уравнений (1) эквивалентна уравнению:

$$\Delta \Delta \Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 8\beta^2 R X_\gamma, \text{ где} \quad (2)$$

$$\Phi = \frac{Eh}{8\beta^2 R} w - iU;$$

β^2 – параметр характеризующий отношение радиуса отверстия, толщины оболочки и радиуса кривизны;

$$\beta^2 = r^2 \cdot \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4Rh}$$

Проделанные манипуляция с дают одно комплексное дифференциальное уравнение, включающее безразмерный параметр β .

Так как внешние силы отсутствуют, то уравнение (2) принимает вид:

$$\Delta\Delta\Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

Основное напряженное состояние оболочки характеризуется:

$$T_x = q; T_y = 2q; T_{xy} = 0 \quad w = 0, \text{ где} \quad (4)$$

q – давление;

Рассмотрим коммутирующие линейные операторы

$$\begin{cases} L_1 = \left(\Delta - 2i\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ L_2 = \left(\Delta + 2i\alpha \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{cases}, \text{ где } \alpha = (1+i)\beta \quad (5)$$

Уравнение (3) с учетом (5) записываем в виде

$$L_1 L_2 \Phi = 0 \quad (6)$$

Из уравнений (5) – (6) видно, что решениями являются решения двух уравнений в частных производных второго порядка:

$$\Delta\Phi^{(1)} - 2i\alpha \frac{\partial}{\partial x} \Phi^{(1)} = 0$$

$$\Delta\Phi^{(2)} + 2i\alpha \frac{\partial}{\partial x} \Phi^{(2)} = 0$$

Для решения задачи необходимо решить

$$\begin{cases} L_1\Phi = 0 \\ L_2\Phi = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Сделаем подстановку:

$$\Phi^{(1)} = e^{i\alpha x} \Psi^{(1)}(x, y)$$

$$\Phi^{(2)} = e^{-i\alpha x} \Psi^{(2)}(x, y)$$

Получаем уравнение Гельмгольца:

$$\Delta\Psi^{(1,2)} + \alpha^2\Psi^{(1,2)} = 0, \text{ где}$$

Δ – оператор Лапласа в полярных координатах r и ϑ ;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

Разделяем переменные и получаем:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \text{ где}$$

$$\Phi_1 = e^{i\alpha x} \sum_{-\infty}^{\infty} i^{-n} e^{in\vartheta} \left[a_n^{(1)} H_n^{(1)}(\alpha r) + b_n^{(1)} J_n(\alpha r) \right]$$

$$\Phi_2 = e^{-i\alpha x} \sum_{-\infty}^{\infty} i^n e^{in\vartheta} \left[a_n^{(2)} H_n^{(1)}(\alpha r) + b_n^{(2)} J_n(\alpha r) \right]$$

где

$H_n^{(1)}(\alpha r)$ – функция Ханкеля первого рода;

J_n – функция Бесселя;

$a_n^{(j)}, b_n^{(j)}$ – неизвестные комплексные постоянные;

Применяем формулу Якоби-Ангера:

$$e^{\pm i\alpha r \cos \vartheta} = \sum_{-\infty}^{\infty} i^{\pm n} e^{in\vartheta} J_n(\alpha r)$$

С помощью замены переменных и разделения переменных получаем решение (7) в виде:

$$e^{\pm i\alpha x} \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot e^{\pm in\vartheta}, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

Перейдем к тригонометрической форме (8) и учитываем, что круговое отверстие симметрично, то получаем решение (3) – (4) в виде:

$$\Phi = -i \frac{qy^2}{2} - i \frac{2qx^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + iB_n) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha x) \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(n\vartheta) \\ \sin(\alpha x) \cdot H_n^{(1)}(\alpha r) \cdot \cos(n\vartheta) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Для нахождения решения (3) необходимо найти коэффициенты A_n и B_n , которые будут удовлетворять условиям на границе отверстия.

В этом заключается основная часть работы.

1.2 Постановка задачи и решение

Полностью сформулируем постановку задачи.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с круглым отверстием под действием равномерного внутреннего давления (рис.1).

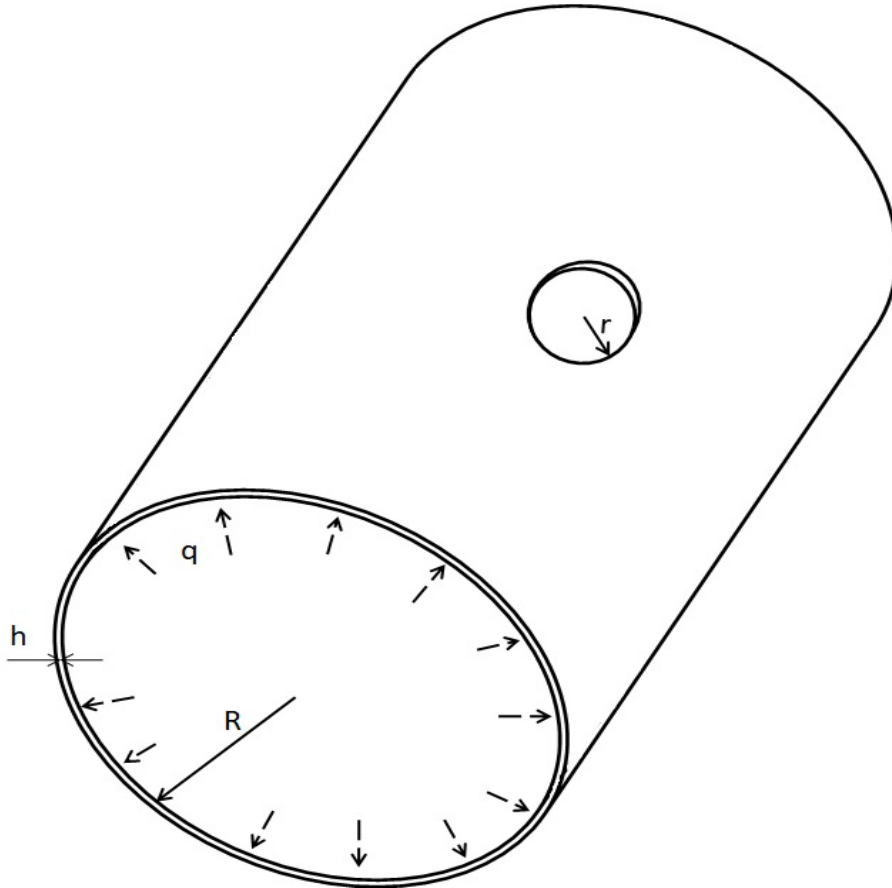


Рис.1. Цилиндрическая оболочка с круглым отверстием под действием равномерного внутреннего давления.

Система равновесия оболочки выражается уравнением (3).

$$\Delta\Delta\Phi + 8i\beta^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0$$

Граничные условия:

Напряженное состояние оболочки:

$$T_x = q; T_y = 2q; T_{xy} = 0 \quad (10)$$

или в координатах r, ϑ :

$$T_r = \frac{q}{2}(3 - \cos 2\vartheta); T_{r\vartheta} = \frac{q}{2}\sin 2\vartheta; T_\vartheta = \frac{q}{2}(3 + \cos 2\vartheta),$$

На контуре отверстия:

$$\begin{cases} T_{rr}|_{r=r_0} = 0 \\ T_{r\vartheta}|_{r=r_0} = 0 \\ M_r|_{r=r_0} = 0 \\ Q_r|_{r=r_0} = -\frac{q_0 r_0}{2} \end{cases}, \text{ где} \quad (11)$$

$$2q = q_0 R;$$

M_r – момент;

Q_r – обобщенное граничное условие на свободном крае;

$T_{rr}, T_{r\vartheta}$ – усилия;

Основная идея подхода заключается в том, чтобы разделить переменные r и ϑ в каждой базисной функции. Для этого используется разложение в тригонометрический ряд Фурье [15].

Решение будем искать в таком виде:

$$\Phi(r, \vartheta) = -i \frac{qy^2}{2} - i \frac{2qx^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot f_n(r, \vartheta) \quad (12)$$

$$f_n(r, \vartheta) = \frac{g(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} g(r, n, l) \cdot \cos 2l\vartheta$$

Функция Φ это решение уравнения (3) и удовлетворяет граничным условиям (10). Необходимо найти коэффициенты a_n и b_n , удовлетворяющие граничным условиям (11).

Введем обозначения для коэффициентов Фурье в тригонометрическом разложении базисной функции $g(r, n, l)$:

$$g(r, n, l) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + l} \cdot \frac{H_n((1+i)\beta r)}{H_n((1+i)\beta)}$$

$$\cdot \left(J_{n+2l}((1+i)\beta r) + J_{n-2l}((1+i)\beta r) \right), \text{ где}$$

$$n=0,1,\dots,\infty.$$

$$l=0,1,\dots,\infty,$$

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ – целая часть числа;

$H_n^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода;

$J_{n\pm 2l}$ – функции Бесселя;

ГЛАВА 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

2.1 Граничные условия

Подробнее рассмотрим граничные условия на контуре отверстия.

Так как система координат полярная, то:

$$x = r \cos \vartheta ; y = r \sin \vartheta$$

1. Первое граничное условие

$$\mathcal{L}_1(U) = \mathcal{L}_1(-Im\Phi) = 0$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Уравнение (12) подставляем в первое граничное условие и получаем уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cos 2\vartheta - q \cos 2\vartheta + q \\ & - Im \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \\ & \cdot \left(\frac{g'(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (-4l^2 \cdot g(r, n, l) + g'(r, n, l)) \cdot \cos 2l\vartheta \right) = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты при \cos :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 0: \quad \frac{q}{2} + q - Im \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot \left(\frac{g'(n, 0)}{2} \right) = 0 \\ \cos 2\vartheta: \quad \frac{q}{2} - q + Im \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (4g(n, 1) - g'(n, 1)) = 0 \\ \cos 4\vartheta: \quad Im \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (16g(n, 2) - g'(n, 2)) = 0 \\ \dots \\ \cos 2l\vartheta: \quad Im \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (4l^2 g(n, l) - g'(n, l)) = 0 \end{array} \right.$$

2. Второе граничное условие:

$$\mathcal{L}_2(U) = \mathcal{L}_2(-Im\Phi) = 0$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta}$$

Получаем уравнение и коэффициенты при \sin :

$$-\frac{q}{2} \sin 2\vartheta + q \sin 2\vartheta$$

$$-Im \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot 2 \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot (g'(r, n, l) - g(r, n, l)) \cdot \sin 2l\vartheta = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\vartheta: \quad -\frac{q}{2} + q - Im \sum_{n=0}^{\infty} 2(a_n + ib_n) \cdot (g'(r, n, 1) - g(r, n, 1)) = 0 \\ \sin 4\vartheta: \quad -Im \sum_{n=0}^{\infty} 4(a_n + ib_n) \cdot (g'(r, n, 2) - g(r, n, 2)) = 0 \\ \dots \\ \sin 2l\vartheta: \quad -Im \sum_{n=0}^{\infty} 2l(a_n + ib_n) \cdot (g'(r, n, l) - g(r, n, l)) = 0 \end{array} \right.$$

3. Третье граничное условие:

$$\mathcal{L}_3(U) = \mathcal{L}_3(Re\Phi) = 0$$

$$\mathcal{L}_3 = -D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right), D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

Уравнение и коэффициенты при \cos :

$$Re \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \left(\frac{g''(r, n, 0)}{2} + v \frac{g'(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} [g''(r, n, l) + v(g'(r, n, l) - 4l^2 \cdot g(r, n, l))] \cdot \cos 2l\vartheta \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos 0: \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot \left(\frac{vg'(r, n, 0) + g''(r, n, 0)}{2} \right) = 0 \\ \cos 2\vartheta: \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (-4vg(r, n, 1) + vg'(r, n, 1) + g''(r, n, 1)) = 0 \\ \cos 4\vartheta: \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (-16vg(r, n, 2) + vg'(r, n, 1) + g''(r, n, 2)) = 0 \\ \dots \\ \cos 2l\vartheta: \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot (-4l^2vg(r, n, l) + vg'(r, n, 1) + g''(r, n, l)) = 0 \end{array} \right.$$

4. Четвертое граничное условие:

$$Q_r^* = -\frac{q_0 r_0}{2}$$

$$\mathcal{L}_4(U) = \mathcal{L}_4(\operatorname{Re}\Phi) = -\frac{q_0 r_0}{2}$$

$$\mathcal{L}_4 = -D \left(\frac{\partial}{\partial r} \Delta + (1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right),$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Уравнение:

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot \left(\frac{-g'(r, n, 0) + g''(r, n, 0) + g'''(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} [4l^2(3 - \nu)g(r, n, l) - (1 + 4l^2(2 - \nu))g'(r, n, l) + g''(r, n, l) + g'''(r, n, l)] \cdot \cos 2l\vartheta \right) = \frac{q}{2r^2}$$

коэффициенты при \cos :

$$\cos 0: -\frac{q}{2r^2} + \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot \left(\frac{-g'(r, n, 0) + g''(r, n, 0) + g'''(r, n, 0)}{2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \cos 2\vartheta: \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \\ \cdot (4(3 - \nu)g(r, n, 1) - (9 - 4\nu)g'(r, n, 1) + g''(r, n, 1) \\ + g'''(r, n, 1)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 4\vartheta: \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \\ \cdot (16(3 - \nu)g(r, n, 2) - (33 - 16\nu)g'(r, n, 2) + g''(r, n, 2) \\ + g'''(r, n, 2)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2l\vartheta: \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \\ \cdot (4l^2(3 - \nu)g(r, n, l) - (1 + 4l^2(2 - \nu))g'(r, n, l) + g''(r, n, l) \\ + g'''(r, n, l)) = 0 \end{aligned}$$

2.2 Общая система уравнений.

В итоге получаем систему уравнений:

$$1 \text{ ГУ: } \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cos 2\vartheta - q \cos 2\vartheta + q$$

$$- \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n)$$

$$\cdot \left(\frac{g'(r, n, 0)}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (-4l^2 \cdot g(r, n, l) + g'(r, n, l)) \cdot \cos 2l\vartheta \right) = 0$$

$$2 \text{ ГУ: } -\frac{q}{2} \sin 2\vartheta + q \sin 2\vartheta$$

$$- \operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \cdot 2 \sum_{l=1}^{\infty} l \cdot (g'(r, n, l) - g(r, n, l)) \cdot \sin 2l\vartheta = 0$$

$$3 \text{ ГУ: } \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n$$

$$+ ib_n) \left(\frac{g''(r, n, 0)}{2} + v \frac{g'(r, n, 0)}{2} \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{\infty} [g''(r, n, l) + v(g'(r, n, l) - 4l^2 \cdot g(r, n, l))] \cdot \cos 2l\vartheta \right) = 0$$

$$4 \text{ ГУ: } -\frac{q}{2r^2} + \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n)$$

$$\cdot \left(\frac{-g'(r, n, 0) + g''(r, n, 0) + g'''(r, n, 0)}{2} \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} [4l^2(3 - v)g(r, n, l) - (1 + 4l^2(2 - v))g'(r, n, l) + g''(r, n, l)$$

$$\left. + g'''(r, n, l)] \cdot \cos 2l\vartheta \right) = 0$$

Таким образом, выведена система с бесконечным числом уравнений и неизвестных. Для поиска решения всей задачи необходимо решить эту систему относительно коэффициенты a_n и b_n .

2.3 Анализ полученных результатов

С помощью математического пакета Maple была решена общая система и получены коэффициенты a_n и b_n для разного параметра кривизны β .

Решение системы реализуется численно с помощью методов линейной алгебры. (Приложение 1)

Найденные коэффициенты были подставлены в уравнение (9) и получено искомое решение задачи.

Так же были построены графики зависимости r и $\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{q}$.

Для построения графиков были использованы следующие выражения:

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial^2(U)}{\partial r^2}$$

$$U = -Im\Phi$$

- Для $\beta = 0.212$:

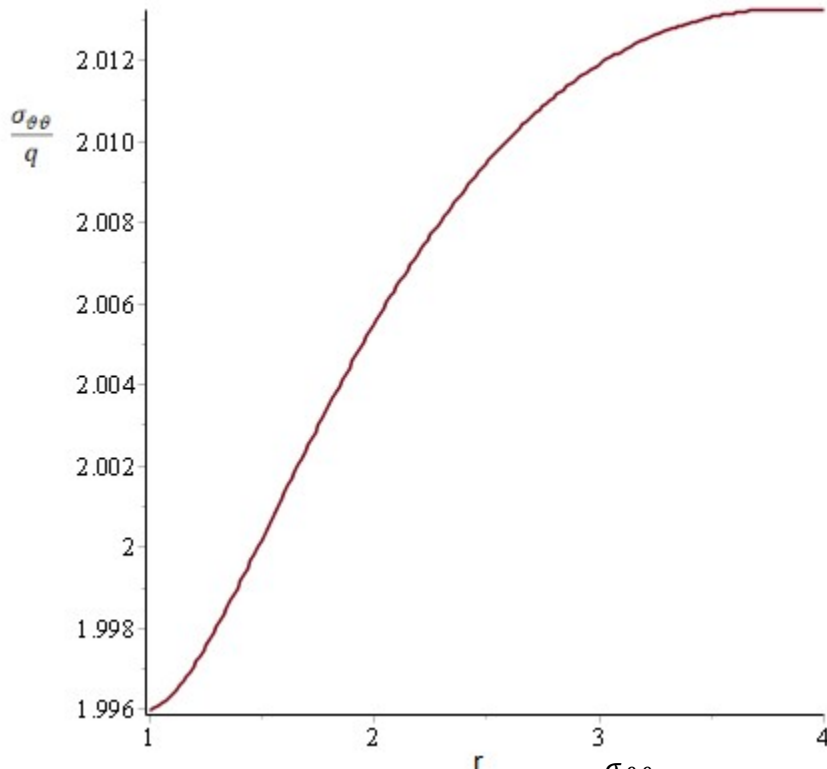


Рис.2. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{q}$ при $\vartheta = 0$.

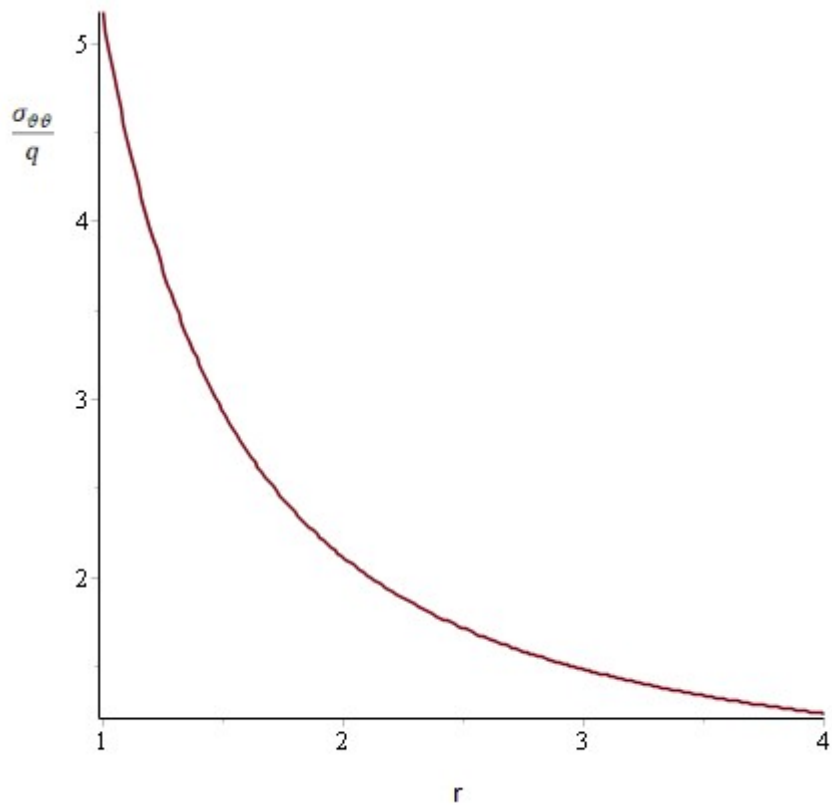


Рис.3. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q}$ при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

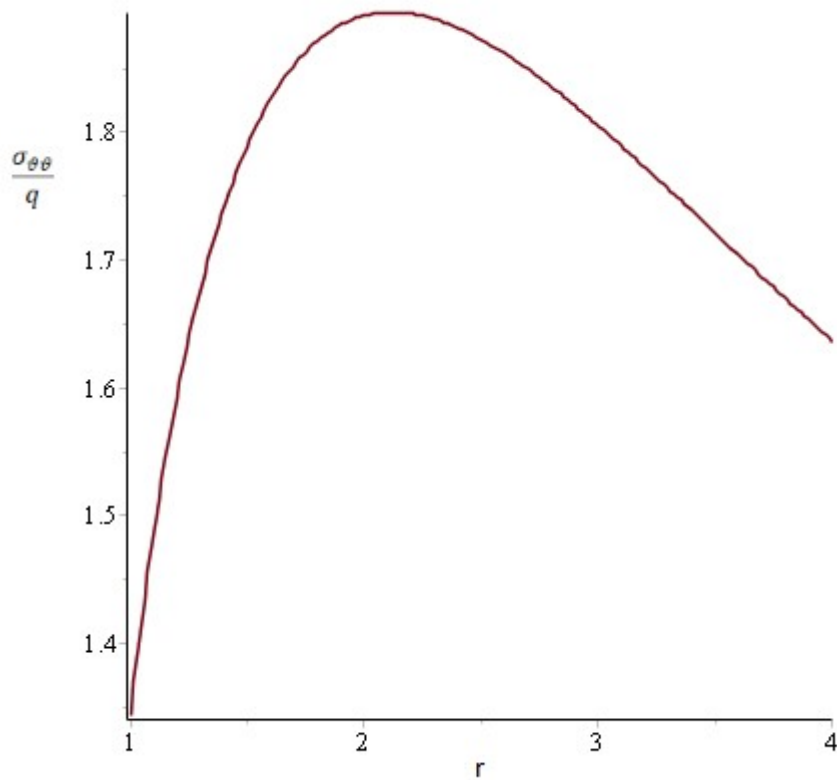


Рис.4. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q}$ при $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

- Для $\beta = 2$:

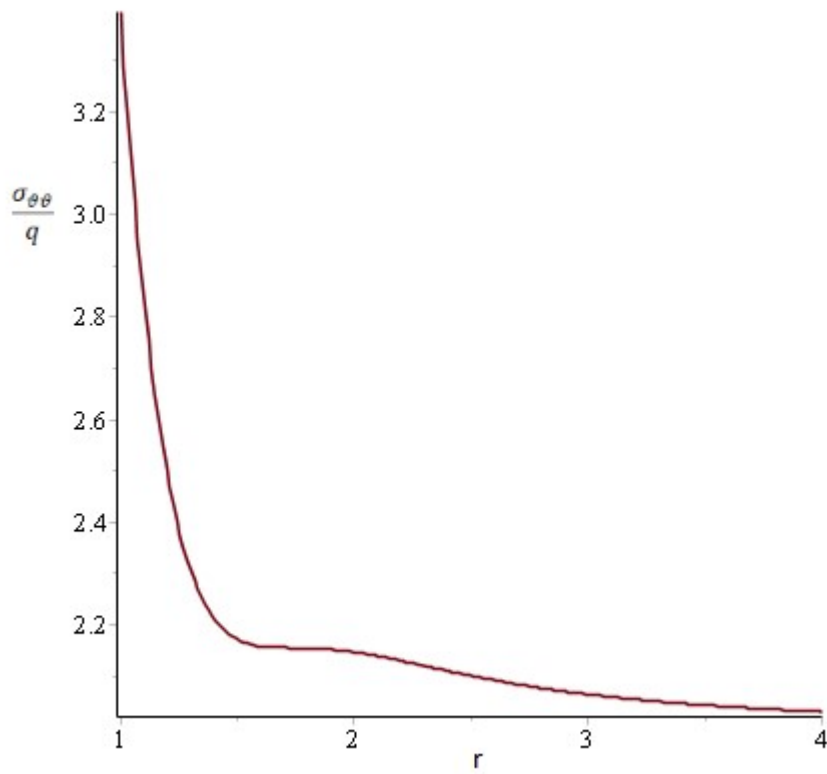


Рис.5. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q}$ при $\vartheta = 0$.

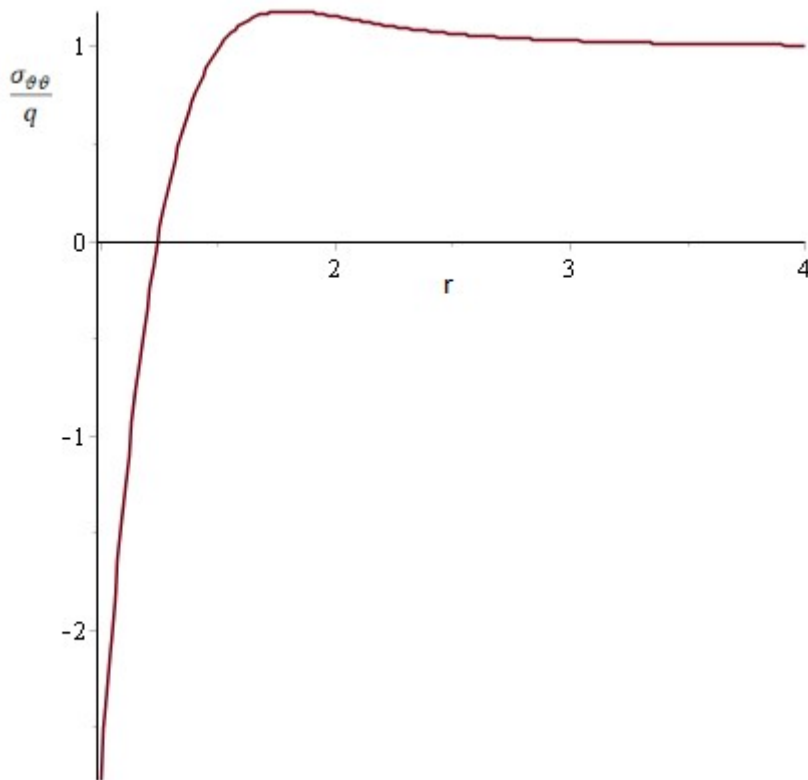


Рис.6. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q}$ при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

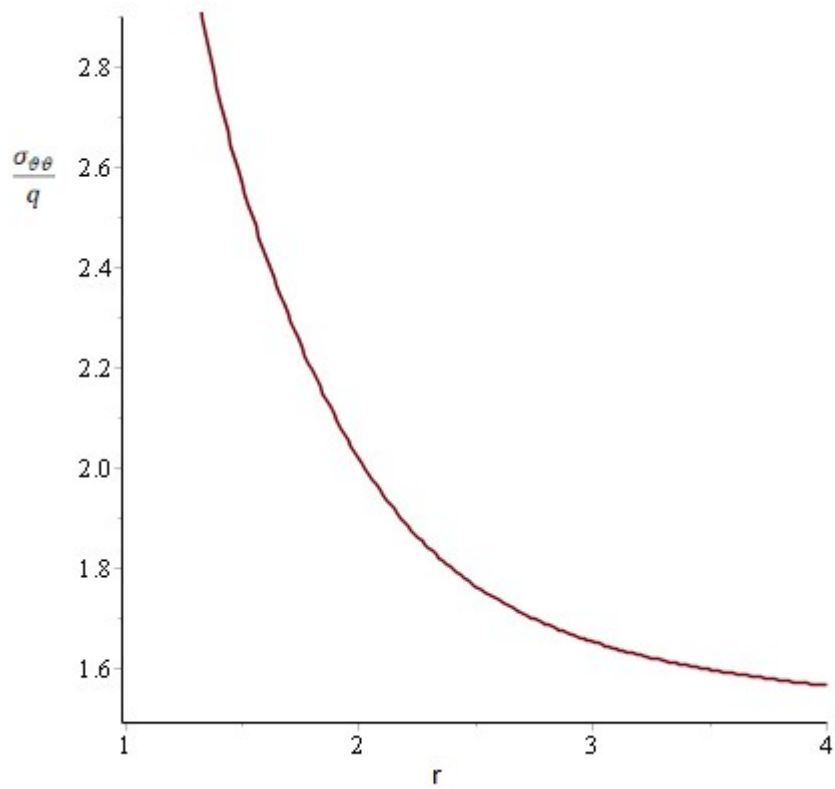


Рис.7. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q}$ при $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

- Для $\beta = 3.5$:

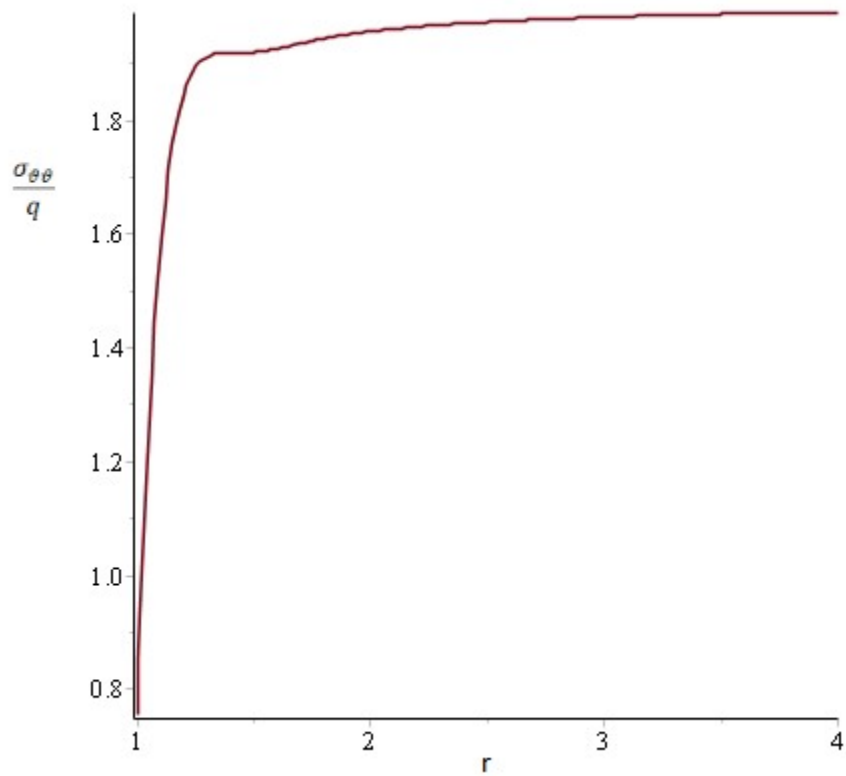


Рис.8. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{q}$ при $\vartheta = 0$.

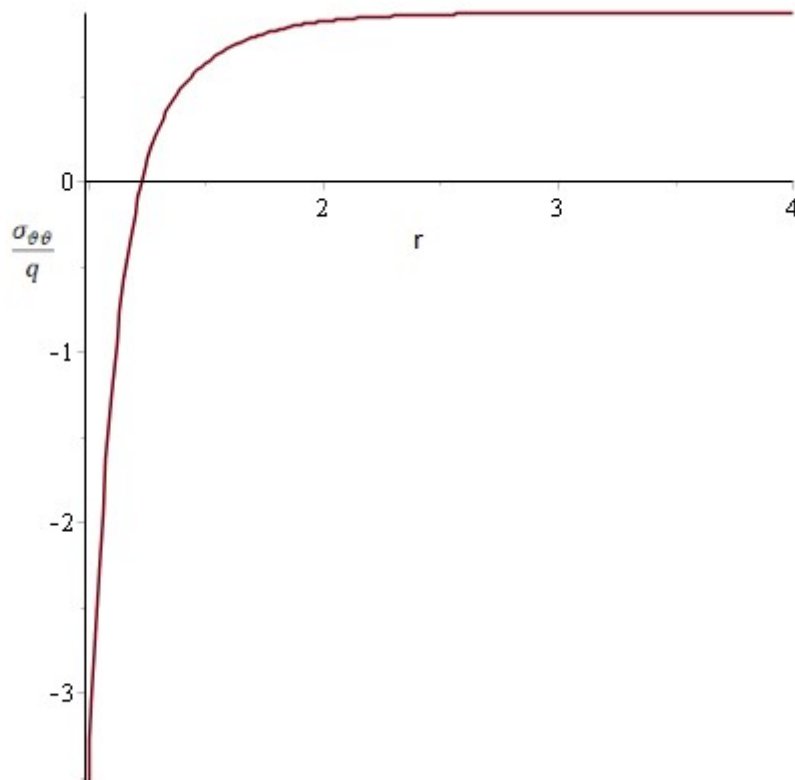


Рис.9. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{q}$ при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

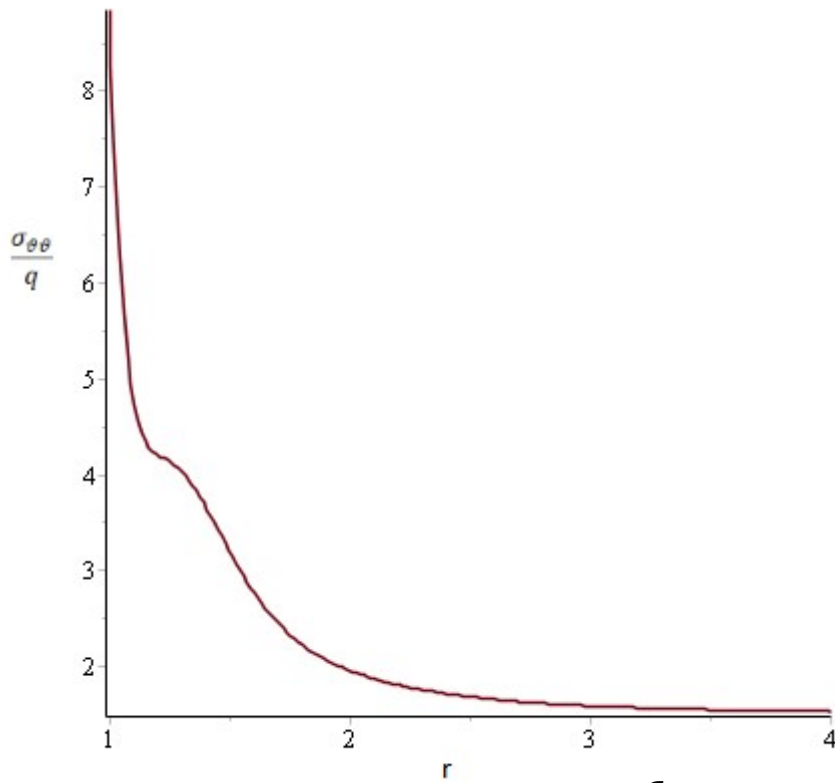


Рис.10. График зависимости r и $\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{q}$ при $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

Анализируя графики зависимости r и $\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{q}$ можно наблюдать, что при увеличении радиуса r значение $\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{q}$ практически перестает меняться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определение напряжений, возникающих вокруг отверстий в цилиндрических оболочках представляет определенный интерес, отчасти из-за отсутствия ранее теоретических решений, выходящих за рамки тех, которые существуют для малых β значений параметра кривизны.

А так же из-за широкого практического применения цилиндрических оболочек. Точность расчетов на прочность тесно связана надежностью конструкций. При этом концентрация напряжений является одним из важнейших факторов, влияющих на прочность и надежность.

В выпускной квалификационной работе была исследована задача о напряжениях в цилиндрической оболочке с круглым отверстием при равномерном внутреннем давлении.

Так же были исследованы разные способы решения задачи. Проведен анализ решений. Был выбран неклассический подход. Данный выбор обоснован тем, что он позволяет находить численные значения напряжений и аналитически исследовать их.

Решение, полученное аналитическим методом сходится с решением, полученным методом коллокаций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ватсон Дж. Н. Теория бесселевых функций [Текст] / Г. Н. Ватсон; Пер. со 2-го англ. изд. В. С. Бермана; [Под ред. и с доп. Г. Шилова]. - Москва : Изд-во иностр. лит., 1949
2. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple: учеб. пособие для вузов. – Спб.: ООО «ПаркКом», 2010. – 643 с.
3. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки. – М. - 1970. – 556 с. – Изд. «Наука»
4. Гузь А.Н.: Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями, Наукова Думка, Киев 1974
5. Лурье А.И. Концентрации напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра // ПММ. – 1946. – Т. 10. – № 3. – С. 397–406
6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Изд. «Наукова думка», Киев – 1968
7. Dixon R.C., Eringen A.C., Jordan N.F., Kline L.V., Koh S.L., Naghdi A.K., and Thiel C.C., Report on stresses and stress concentrations in a circular cylindrical shell with a circular cutout, General Technology Corp., Aug. 1961
8. Eringen A. C, Naghdi A. K and Thiel, C. C, State of Stress in a Circular Cylindrical Shell With a Circular Hole, Welding Research Council Bulletin, No. 102, Jan. 1965.
9. Lekkerkerker, J. G.: On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole. Delft: Uitgeverij Waltman (1965)
10. Lekkerkerker, J. G., Stress Concentration Around Circular Holes in Cylindrical Shells, Proceedings of the Eleventh International Congress of Applied Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1964.
11. Murthy, V. V. M.: Stresses Around an Elliptic Hole in a Cylindrical Shell. J. of App. Mech. 36, 39–46 (1969)
12. Shevliakov, I. A., and Zigel, F. S., The Torsion of an Empty Cylinder With a Hole on Its Side Surface, Dopocidi Annaly USSR, Vol. 1, 1954, pp. 41-44.

13. Van Dyke P., Stresses About a Circular Hole in a Cylindrical Shell, AIAA Journal, Vol. 3, No. 9, Sept. 1965, pp. 1733-1742
14. Withum D., The Cylindrical Shell With a Circular Hole Under Torsion, Ingenieur-Archiv, Vol. 26, 1958, pp. 435-446.
15. С.В. Каштанова, А.В. Ржонсницкий, Аналитический подход к выводу поля напряжений цилиндрической оболочки с круговым отверстием при растяжении, ИП Маш РАН, СПбГТИ (ТУ), Санкт-Петербург, 2020

$\beta = 0.212$

> restart :

> with(LinearAlgebra) :

> $g(r, n, l) := (-1)^{\text{iquo}(n, 2) + l} \cdot \frac{\text{HankelH1}(n, ((1 + I) \cdot B \cdot r))}{\text{HankelH1}(n, ((1 + I) \cdot B))} \cdot (\text{BesselJ}(n + 2l, ((1 + I) \cdot B \cdot r)) + \text{BesselJ}(n - 2l, ((1 + I) \cdot B \cdot r))) :$

> $g(r, n, l) :$

> $r1 := 1 : v1 := 0.3 : B := 0.212 :$

> #1ГУ

> $F1 := \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cdot \cos(2 \cdot \text{theta}) - q \cdot \cos(2 \cdot \text{theta}) + q - \text{Im} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \cdot \left(\frac{\text{diff}(g(r, n, 0), r)}{2} + \sum_{l=1}^1 (-4 \cdot l^2 \cdot (g(r, n, l) + \text{diff}(g(r, n, l), r)) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right) \right) \right) = 0 :$

> $z1 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r = r1, F1)))) :$

> #2ГУ

> $F2 := -\frac{q}{2} \cdot \sin(2 \cdot \text{theta}) + q \cdot \sin(2 \cdot \text{theta}) - \text{Im} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^1 (l \cdot (\text{diff}(g(r, n, l), r) - g(r, n, l)) \cdot \sin(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right) \right) = 0 :$

> $z2 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r = r1, F2)))) :$

> #3ГУ

> $F3 := \text{Re} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \cdot \left(\frac{\text{diff}(g(r, n, 0), r)}{2} + \frac{v \cdot \text{diff}(g(r, n, 0), r)}{2} + \sum_{l=1}^1 (\text{diff}(g(r, n, l), r) + v \cdot (\text{diff}(g(r, n, l), r) - 4 \cdot l^2 \cdot g(r, n, l))) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right) \right) \right) = 0 :$

> $z3 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r = r1, v = v1, F3)))) :$

> #4ГУ

$$\begin{aligned} > F4 := -\frac{q}{2 \cdot r^2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^1 \left(a_n + I \cdot b_n \right) \right. \\ & \cdot \left(\frac{-\operatorname{diff}(g(r, n, 0), r) + \operatorname{diff}(g(r, n, 0), r\$2) + \operatorname{diff}(g(r, n, 0), r\$3)}{2} + \sum_{l=1}^1 (4 \cdot l \cdot (3 - v) \right. \\ & \left. \left. \cdot g(r, n, l) - (1 + 4 \cdot l^2 \cdot (2 - v)) \cdot \operatorname{diff}(g(r, n, l), r) + \operatorname{diff}(g(r, n, l), r\$2) + \operatorname{diff}(g(r, n, l), r \right. \right. \\ & \left. \left. \$3) \right) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta}) \right) \left. \right) = 0 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \\ > z4 := \operatorname{evalc}(\operatorname{evalf}(\operatorname{simplify}(\operatorname{subs}(r = r1, v = v1, F4)))) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \\ > eqs1 := \{z1, z2, z3, z4\} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > s1 := \operatorname{solve}(eqs1, \{a[0], b[0], a[1], b[1]\}) : \frac{s1[1]}{q}, \frac{s1[2]}{q}, \frac{s1[3]}{q}, \frac{s1[4]}{q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{beta} := 0.212 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > z := (1 + I) \cdot \text{beta} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F[0] := & \operatorname{simplify} \left(\operatorname{eval} \left(\operatorname{subs} \left(n = 0, \frac{(1 + I)}{\operatorname{HankelH1}(n, z)} \cdot (-1)^{\operatorname{iquo}(n, 2)} \cdot \operatorname{HankelH1}(n, z \cdot r) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot (\operatorname{BesselJ}(n, z \cdot r) + \operatorname{sum}((-1)^l \cdot (\operatorname{BesselJ}(n + 2l, z \cdot r) + \operatorname{BesselJ}(n - 2l, z \cdot r)) \cdot \cos(2l \right. \right. \\ & \left. \left. \cdot \text{theta}), l = 1) \right) \right) \right) : \\ F[1] := & \operatorname{eval} \left(\operatorname{subs} \left(n = 1, \frac{(1 + I)}{\operatorname{HankelH1}(n, z)} \cdot (-1)^{\operatorname{iquo}(n, 2)} \cdot \operatorname{HankelH1}(n, z \cdot r) \cdot (\operatorname{BesselJ}(n, z \cdot r) \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{sum}((-1)^l \cdot (\operatorname{BesselJ}(n + 2l, z \cdot r) + \operatorname{BesselJ}(n - 2l, z \cdot r)) \cdot \cos(2l \cdot \text{theta}), l = 1) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{Phi} := & (a[0] + I \cdot b[0]) \cdot F[0] + (a[1] + I \cdot b[1]) \cdot F[1] - \frac{r^2 \cdot \sin^2(\text{theta})}{2} \cdot I - r^2 \cdot \cos^2(\text{theta}) \\ & \cdot I : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > U := & -\text{Phi} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \sigma_{rr} := & \frac{1}{r^2} \cdot \operatorname{diff}(U, \text{theta}\$2) + \frac{1}{r} \cdot \operatorname{diff}(U, r) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \sigma_{r_\vartheta} := & \frac{1}{r^2} \cdot \operatorname{diff}(U, \text{theta}) - \frac{1}{r} \cdot \operatorname{diff}(U, r, \text{theta}) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \sigma_{\vartheta\vartheta} := & \operatorname{diff}(U, r\$2) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > d1 := & \operatorname{evalf}(\operatorname{subs}(\text{theta} = 0, \sigma_{\vartheta\vartheta})) : \operatorname{plot}(\operatorname{Im}(\%), r = 1..4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > d2 := & \operatorname{evalf}(\operatorname{subs}(\text{theta} = \frac{\text{Pi}}{2}, \sigma_{\vartheta\vartheta})) : \operatorname{plot}(\operatorname{Im}(\%), r = 1..4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > d3 := & \operatorname{evalf}(\operatorname{subs}(\text{theta} = \frac{\text{Pi}}{4}, \sigma_{\vartheta\vartheta})) : \operatorname{plot}(\operatorname{Im}(\%), r = 1..4); \end{aligned}$$

$$\beta = 2$$

$$\begin{aligned} > \operatorname{restart} : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \operatorname{with}(\operatorname{LinearAlgebra}) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > g(r, n, l) := & (-1)^{\operatorname{iquo}(n, 2) + l} \cdot \frac{\operatorname{HankelH1}(n, ((1 + I) \cdot B \cdot r))}{\operatorname{HankelH1}(n, ((1 + I) \cdot B))} \cdot (\operatorname{BesselJ}(n + 2l, ((1 + I) \cdot B \cdot r)) \\ & + \operatorname{BesselJ}(n - 2l, ((1 + I) \cdot B \cdot r))) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > g(r, n, l) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > r1 := 1 : v1 := 0.3 : B := 2 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \#I\%Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> F1 := \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cdot \cos(2 \cdot \text{theta}) - q \cdot \cos(2 \cdot \text{theta}) + q - \text{Im} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left(\frac{\text{diff}(g(r, n, 0), r)}{2} + \sum_{l=1}^1 (-4 \cdot l^2 \cdot (g(r, n, l) + \text{diff}(g(r, n, l), r)) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right) \right) \right) \\
&= 0 :
\end{aligned}$$

$$> z1 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r=r1, F1)))) :$$

> #2IY

$$\begin{aligned}
&> F2 := -\frac{q}{2} \cdot \sin(2 \cdot \text{theta}) + q \cdot \sin(2 \cdot \text{theta}) - \text{Im} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^1 (l \cdot (\text{diff}(g(r, n, l), r) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - g(r, n, l)) \cdot \sin(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right) \right) = 0 :
\end{aligned}$$

$$> z2 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r=r1, F2)))) :$$

> #3IY

$$\begin{aligned}
&> F3 := \text{Re} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \cdot \left(\frac{\text{diff}(g(r, n, 0), r\$2)}{2} + \frac{v \cdot \text{diff}(g(r, n, 0), r)}{2} + \sum_{l=1}^1 (\text{diff}(g(r, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. n, l), r\$2) + v \cdot (\text{diff}(g(r, n, l), r) - 4 \cdot l^2 \cdot g(r, n, l))) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right) \right) \right) = 0 :
\end{aligned}$$

$$> z3 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r=r1, v=v1, F3)))) :$$

> #4IY

$$\begin{aligned}
&> F4 := -\frac{q}{2 \cdot r^2} + \text{Re} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \left(\frac{-\text{diff}(g(r, n, 0), r) + \text{diff}(g(r, n, 0), r\$2) + \text{diff}(g(r, n, 0), r\$3)}{2} + \sum_{l=1}^1 (4 \cdot l \cdot (3 - v) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot g(r, n, l) - (1 + 4 \cdot l^2 \cdot (2 - v)) \cdot \text{diff}(g(r, n, l), r) + \text{diff}(g(r, n, l), r\$2) + \text{diff}(g(r, n, l), r \\
&\quad \left. \left. \left. \cdot \text{diff}(g(r, n, l), r\$3)) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right) \right) \right) \right) = 0 :
\end{aligned}$$

>

$$> z4 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r=r1, v=v1, F4)))) :$$

>

$$> \text{eqs1} := \{z1, z2, z3, z4\} :$$

$$> s1 := \text{solve}(\text{eqs1}, \{a[0], b[0], a[1], b[1]\}) : \frac{s1[1]}{q}; \frac{s1[2]}{q}; \frac{s1[3]}{q}; \frac{s1[4]}{q};$$

$$> \text{beta} := 2 :$$

>

$$> z := (1 + I) \cdot \text{beta} :$$

> $F[0] := \text{simplify}\left(\text{eval}\left(\text{subs}\left(n=0, \frac{(1+I)}{\text{HankelH1}(n,z)} \cdot (-1)^{\text{iquo}(n,2)} \cdot \text{HankelH1}(n,z \cdot r)\right.\right.\right.$
 $\cdot (\text{BesselJ}(n,z \cdot r) + \text{sum}((-1)^l \cdot (\text{BesselJ}(n+2l,z \cdot r) + \text{BesselJ}(n-2l,z \cdot r)) \cdot \cos(2l \cdot \text{theta}), l=1))\left.\left.\right)\right)$:

$F[1] := \text{eval}\left(\text{subs}\left(n=1, \frac{(1+I)}{\text{HankelH1}(n,z)} \cdot (-1)^{\text{iquo}(n,2)} \cdot \text{HankelH1}(n,z \cdot r) \cdot (\text{BesselJ}(n,z \cdot r)\right.\right.$
 $\left.\left.+ \text{sum}((-1)^l \cdot (\text{BesselJ}(n+2l,z \cdot r) + \text{BesselJ}(n-2l,z \cdot r)) \cdot \cos(2l \cdot \text{theta}), l=1)\right)\right)$:

> $\text{Phi} := (a[0] + I \cdot b[0]) \cdot F[0] + (a[1] + I \cdot b[1]) \cdot F[1] - \frac{r^2 \cdot \sin^2(\text{theta})}{2} \cdot I - r^2 \cdot \cos^2(\text{theta})$
 $\cdot I$:

> $U := -\text{Phi}$:

> $\sigma_{rr} := \frac{1}{r^2} \cdot \text{diff}(U, \text{theta}^2) + \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(U, r)$:

> $\sigma_{r_\vartheta} := \frac{1}{r^2} \cdot \text{diff}(U, \text{theta}) - \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(U, r, \text{theta})$:

> $\sigma_{\vartheta\vartheta} := \text{diff}(U, r^2)$:

> $d1 := \text{evalf}(\text{subs}(\text{theta}=0, \sigma_{\vartheta\vartheta}))$: $\text{plot}(\text{Im}(\%), r=1..4)$;

$d2 := \text{evalf}(\text{subs}(\text{theta}=\frac{\text{Pi}}{2}, \sigma_{\vartheta\vartheta}))$: $\text{plot}(\text{Im}(\%), r=1..4)$;

$d3 := \text{evalf}(\text{subs}(\text{theta}=\frac{\text{Pi}}{4}, \sigma_{\vartheta\vartheta}))$: $\text{plot}(\text{Im}(\%), r=1..4)$;

$\beta = 3.5$

> *restart* :

> *with(LinearAlgebra)* :

> $g(r, n, l) := (-1)^{\text{iquo}(n,2)+l} \cdot \frac{\text{HankelH1}(n, ((1+I) \cdot B \cdot r))}{\text{HankelH1}(n, ((1+I) \cdot B))} \cdot (\text{BesselJ}(n+2l, ((1+I) \cdot B \cdot r))$
 $+ \text{BesselJ}(n-2l, ((1+I) \cdot B \cdot r)))$:

> $g(r, n, l)$:

> $r1 := 1$: $v1 := 0.3$: $B := 3.5$:

> *#1GY*

> $F1 := \frac{q}{2} + \frac{q}{2} \cdot \cos(2 \cdot \text{theta}) - q \cdot \cos(2 \cdot \text{theta}) + q - \text{Im}\left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \right.\right.$
 $\left.\left. \cdot \left(\frac{\text{diff}(g(r, n, 0), r)}{2} + \sum_{l=1}^1 (-4 \cdot l^2 \cdot (g(r, n, l) + \text{diff}(g(r, n, l), r)) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right) \right)\right)$
 $= 0$:

> $z1 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r=r1, F1))))$:

> *#2GY*

> $F2 := -\frac{q}{2} \cdot \sin(2 \cdot \text{theta}) + q \cdot \sin(2 \cdot \text{theta}) - \text{Im}\left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \cdot 2 \cdot \sum_{l=1}^1 (l \cdot (\text{diff}(g(r, n, l), r) \right.\right.$
 $\left.\left. - g(r, n, l)) \cdot \sin(2 \cdot l \cdot \text{theta})) \right)\right) = 0$:

> $z2 := \text{evalc}(\text{evalf}(\text{simplify}(\text{subs}(r=r1, F2))))$:

> *#3GY*

$$\begin{aligned} > F3 := \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \cdot \left(\frac{\operatorname{diff}(g(r, n, 0), r\$2)}{2} + \frac{v \cdot \operatorname{diff}(g(r, n, 0), r)}{2} + \sum_{l=1}^1 (\operatorname{diff}(g(r, \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. n, l), r\$2) + v \cdot (\operatorname{diff}(g(r, n, l), r) - 4 \cdot l^2 \cdot g(r, n, l))) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta}) \right) \right) \right) = 0 : \end{aligned}$$

$$> z3 := \operatorname{evalc}(\operatorname{evalf}(\operatorname{simplify}(\operatorname{subs}(r=r1, v=v1, F3)))) :$$

> #4IY

$$\begin{aligned} > F4 := -\frac{q}{2 \cdot r^2} + \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^1 \left((a_n + I \cdot b_n) \right. \right. \\ & \quad \cdot \left(\frac{-\operatorname{diff}(g(r, n, 0), r) + \operatorname{diff}(g(r, n, 0), r\$2) + \operatorname{diff}(g(r, n, 0), r\$3)}{2} + \sum_{l=1}^1 (4 \cdot l \cdot (3 - v) \right. \\ & \quad \cdot g(r, n, l) - (1 + 4 \cdot l^2 \cdot (2 - v)) \cdot \operatorname{diff}(g(r, n, l), r) + \operatorname{diff}(g(r, n, l), r\$2) + \operatorname{diff}(g(r, n, l), r \\ & \quad \left. \left. \left. \$3) \right) \cdot \cos(2 \cdot l \cdot \text{theta}) \right) \right) = 0 : \end{aligned}$$

>

$$> z4 := \operatorname{evalc}(\operatorname{evalf}(\operatorname{simplify}(\operatorname{subs}(r=r1, v=v1, F4)))) :$$

>

$$> \text{eqs1} := \{z1, z2, z3, z4\} :$$

$$> s1 := \operatorname{solve}(\text{eqs1}, \{a[0], b[0], a[1], b[1]\}) : \frac{s1[1]}{q}, \frac{s1[2]}{q}, \frac{s1[3]}{q}, \frac{s1[4]}{q},$$

$$> \text{beta} := 3.5 :$$

>

$$> z := (1 + I) \cdot \text{beta} :$$

>

$$\begin{aligned} F[0] := & \operatorname{simplify} \left(\operatorname{eval} \left(\operatorname{subs} \left(n=0, \frac{(1+I)}{\operatorname{HankelH1}(n, z)} \cdot (-1)^{\operatorname{iquo}(n, 2)} \cdot \operatorname{HankelH1}(n, z \cdot r) \right. \right. \right. \\ & \cdot (\operatorname{BesselJ}(n, z \cdot r) + \operatorname{sum}((-1)^l \cdot (\operatorname{BesselJ}(n+2l, z \cdot r) + \operatorname{BesselJ}(n-2l, z \cdot r)) \cdot \cos(2l \cdot \text{theta}), l=1))) \right) : \\ F[1] := & \operatorname{eval} \left(\operatorname{subs} \left(n=1, \frac{(1+I)}{\operatorname{HankelH1}(n, z)} \cdot (-1)^{\operatorname{iquo}(n, 2)} \cdot \operatorname{HankelH1}(n, z \cdot r) \cdot (\operatorname{BesselJ}(n, z \cdot r) \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{sum}((-1)^l \cdot (\operatorname{BesselJ}(n+2l, z \cdot r) + \operatorname{BesselJ}(n-2l, z \cdot r)) \cdot \cos(2l \cdot \text{theta}), l=1) \right) \right) : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > \text{Phi} := & (a[0] + I \cdot b[0]) \cdot F[0] + (a[1] + I \cdot b[1]) \cdot F[1] - \frac{r^2 \cdot \sin^2(\text{theta})}{2} \cdot I - r^2 \cdot \cos^2(\text{theta}) \\ & \cdot I : \end{aligned}$$

$$> U := -\text{Phi} :$$

$$> \sigma_{rr} := \frac{1}{r^2} \cdot \operatorname{diff}(U, \text{theta}\$2) + \frac{1}{r} \cdot \operatorname{diff}(U, r) :$$

$$> \sigma_{r_\vartheta} := \frac{1}{r^2} \cdot \operatorname{diff}(U, \text{theta}) - \frac{1}{r} \cdot \operatorname{diff}(U, r, \text{theta}) :$$

$$> \sigma_{\vartheta\vartheta} := \operatorname{diff}(U, r\$2) :$$

$$> d1 := \operatorname{evalf}(\operatorname{subs}(\text{theta}=0, \sigma_{\vartheta\vartheta})) : \operatorname{plot}(\operatorname{Im}(\%), r=1..4);$$

$$d2 := \operatorname{evalf}(\operatorname{subs}(\text{theta}=\frac{\text{Pi}}{2}, \sigma_{\vartheta\vartheta})) : \operatorname{plot}(\operatorname{Im}(\%), r=1..4);$$

$$d3 := \operatorname{evalf}(\operatorname{subs}(\text{theta}=\frac{\text{Pi}}{4}, \sigma_{\vartheta\vartheta})) : \operatorname{plot}(\operatorname{Im}(\%), r=1..4);$$