

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа теоретической механики и математической физики

Работа допущена к защите
Директор ВШТМиМФ,
д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН
_____ А.М. Кривцов
«__» _____ 2023г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

магистерская диссертация

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА-ТОЧКИ В ПРОСТРАНСТВЕ

по направлению подготовки
01.04.03 «Механика и математическое моделирование»

Направленность
01.04.03_01 «Механика деформируемого твердого тела»

Выполнил
студент гр.5040103/00101

А.А. Утеулина

Руководитель
д.ф.-м.н., проф. ВШТМиМФ

Е.А. Иванова

Консультант
по нормоконтролю

Е.А. Хайбулова

Санкт-Петербург – 2023

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА
ВЕЛИКОГО**

Физико-механический институт

Высшая школа теоретической механики и математической физики

УТВЕРЖДАЮ

Директор ВШТМиМФ

А.М. Кривцов

«__» _____ 2023г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы

студенту Утеулиной Алине Адибкалиевне гр. 5040103/10101

1. Тема работы: Движение тела-точки в пространстве
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 26.05.2023
3. Исходные данные по работе: актуальные исследования и научные статьи по теме “Динамика твердого тела”.
4. Содержание работы (перечень подлежащих разработке вопросов):
построение математической модели движения тела-точки вблизи отталкивающего центра; написание программы для численных расчетов; проведение расчетов; сравнение с результатами решения соответствующей задачи в случае материальной точки; анализ результатов.
5. Перечень графического материала: графики исследований по данной теме.
6. Консультанты по работе: отсутствуют.
7. Дата выдачи задания: 27.02.2023

Руководитель ВКР _____ Е.А. Иванова, д.ф-м.н.,
проф. ВШТМиМФ

Задание принял к исполнению 27.02.2023 г.

Студент _____ А.А. Утеулина

РЕФЕРАТ

На 42 с., 31 рисунок.

ЭЙЛЕРОВА МЕХАНИКА, ТЕЛО-ТОЧКА, МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА.

Тема выпускной квалификационной работы: «Движение тела-точки в пространстве».

Данная работа посвящена исследованию отклонения тела-точка вблизи отталкивающего центра. Задачи, которые решались в ходе исследования:

1. Построение математической модели движения тела-точки вблизи отталкивающего центра
2. Написание программы для численных расчетов
3. Проведение расчетов
4. Сравнение с результатами решения соответствующей задачи в случае материальной точки
5. Анализ результатов

В настоящей работе было проведено исследование как отталкивается тело-точка вблизи отталкивающего центра, подобрали такие численные значения, чтобы отклонение было наиболее ярко выражено. Для материальной точки выразили три случая нахождения скорости, в одном из которых еще отдельно находили масса.

ABSTRACT

42 pages, 31 figures.

EULER MECHANICS, BODY-POINT, MATERIAL POINT

The topic of the final qualification work: "The motion of a point-body in space".

This work is devoted to the study of the deflection of a point-body near the repulsive center. Tasks that were solved during the research:

1. Constructing a mathematical model of point-body motion near the repulsive center
2. Writing a program for numerical calculations
3. Making calculations
4. Comparison with the results of solving the corresponding problem in the case of a material point
5. Analysis of results

In the present work, we investigated how a body-point is repelled near the repulsive center, we selected such numerical values so that the deviation was most pronounced. Three cases of finding velocity were expressed for a material point, in one of which the mass was also found separately.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. МОДЕЛЬ МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА	6
1.1. Задание динамических структур.	6
1.2. Уравнения движения.....	7
ГЛАВА 2. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА-ТОЧКИ.....	10
2.1 Модель тела-точки	10
2.2 Постановка задачи.....	13
2.3 Численное решение	19
ГЛАВА 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ	23
3.1 Частный случай: скорость по оси z.	23
3.2 Частный случай: скорость от K1	26
3.2.1 Дополнительный случай.....	27
3.3 Частный случай: кинетическая энергия	28
ГЛАВА 4. АНАЛИЗ	32
4.1 Параметр d	32
4.2 Параметр Kz	35
4.3 Параметры K1 и Ku	37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	40
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	41

ВВЕДЕНИЕ

При создании моделей кристаллических решеток в рамках классической механики в большинстве случаев атомы вещества рассматриваются либо как материальные точки, либо как абсолютно твердые тела, которые соединены пружинами. Хотя такие модели, состоящие из сосредоточенных масс и пружинок, не идентичны настоящим кристаллическим решеткам и не учитывают основные взаимодействия системы согласно кулоновскому закону, они могут решать основную задачу - выводить макропараметры материалов, основываясь на их микропараметрах.

В классической механике объектом является материальная точка с массой, в то время как в электродинамике наряду с массой у частиц существует заряд. Вместе с тем, в эйлеровой механике тело-точка является исходным объектом, которое имеет трансляционные и спинорные движения. Аксиальный вектор описывает спинорное движение, в то время как значения функции времени отображают ортогональные тензоры размерности, характеризующие трансляционные движения.

Для моделирования электронов в атоме используются модели материальной точки и абсолютно твердого тела, имеющие плоскую траекторию в центральном потенциальном поле притяжения. Однако эти модели не применимы для описания явлений на микроуровне. Вместо этого, для моделирования поведения элементарных частиц используют модель тела-точки из работы [1], которая позволяет получить решение в виде винтовой линии и соотносится с экспериментальными данными. Также в данной работе использовалась та же модель тела-точки, что и в работе [1].

ГЛАВА 1. МОДЕЛЬ МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА

В этой главе представлена модель материальной точки, включающая кинетическую энергию и формулы для количества движения и кинетического момента. Также описаны начальные условия для системы дифференциальных уравнений, описывающей материальную точку.

1.1. Задание динамических структур.

В данной задаче мы рассматриваем движение материальной точки и тела-точки в Ньютоновской механике. В то время как для движения материальной точки используется радиус-вектор, тело-точка имеет вращательные степени свободы. Важно отметить, что траектория движения материальной точки всегда лежит в плоскости, проходящей через начало координат.

В рамках данной задачи мы изучаем движение материальной точки массы m , взаимодействующей с отталкивающим центром, положение которого зафиксировано в начале координат. Согласно закону Кулона, сила взаимодействия между материальной точкой и отталкивающим центром определена формулой:

$$\underline{F} = -q \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|^3}, \quad (1)$$

где \underline{R} – вектор расстояния от начала координат до точки, где находится материальная точка, q – константа кулоновского взаимодействия. Второй закон Ньютона имеет вид:

$$m \underline{\ddot{R}} = -q \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|^3}, \quad (2)$$

Если умножим обе части на скорость и проинтегрируем, получим разность двух слагаемых, первое – это будет кинетическая энергия, второе – потенциальная.

Все динамические свойства тела-точки определяются их кинетической энергией. В общем случае кинетическая энергия тела-точки имеет вид квадратичной формы:

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

где \mathbf{v} — это скорость трансляционного движения, $\boldsymbol{\omega}$ — это скорость спирного движения, а \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{J} — это тензоры инерции второго ранга, которые зависят от поворотов. Без потери общности можно считать тензоры \mathbf{A} и \mathbf{J} симметричными.

Перекрестное слагаемое $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}$ в (1) соответствует взаимному влиянию трансляционных и спириных движений друг на друга. Модели материальной точки и абсолютно твердого тела не имеют этого слагаемого в кинетической энергии, поэтому для них подобное взаимное влияние принципиально невозможно.

Согласно [2], количество движения K_1 и собственный кинетический момент K_2 тела-точки определяются как:

$$K_1 = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{v}}, \quad (4)$$

$$K_2 = \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \quad (5)$$

1.2. Уравнения движения.

Уравнение движения материальной точки было получено и имеет такой вид:

$$m \ddot{\underline{R}} = -q \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|^3}, \quad (4)$$

где $\underline{R} = \underline{R}(y, z)$ – двумерный радиус-вектор материальной точки. Для этого уравнения зададим 2 векторных начальных условия:

$$\underline{R}(0) = \underline{R}_0, \underline{v}(0) = \underline{v}_0$$

Поскольку траектории движения материальной точки плоские, то получается, что для исследования ограничимся плоским случаем.

Уравнение для материальной точки имеет вид:

$$\underline{\ddot{R}} = -\frac{1}{m} \frac{q}{R^3} \underline{R}, \quad (5)$$

Так как это дифференциальное уравнение 2-го порядка, приведем его к системе из двух дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{\underline{v}} = -\frac{1}{m} \frac{q}{R^3} \underline{R}, \\ \dot{\underline{R}} = \underline{v} \end{cases}, \quad (6)$$

в скалярном виде:

$$\begin{cases} \dot{v}_y = -\frac{1}{m} \frac{q}{(\sqrt{R_y^2 + R_z^2})^3} R_y \\ \dot{v}_z = -\frac{1}{m} \frac{q}{(\sqrt{R_y^2 + R_z^2})^3} R_z, \\ \dot{R}_y = v_y \\ \dot{R}_z = v_z \end{cases}, \quad (7)$$

$$R_y(0) = R_{y0}, R_z(0) = R_{z0}, v_y(0) = v_{y0}, v_z(0) = v_{z0}$$

На Рис. 1, приведена траектория тела-точки, полученная в ходе численного решения системы (7).

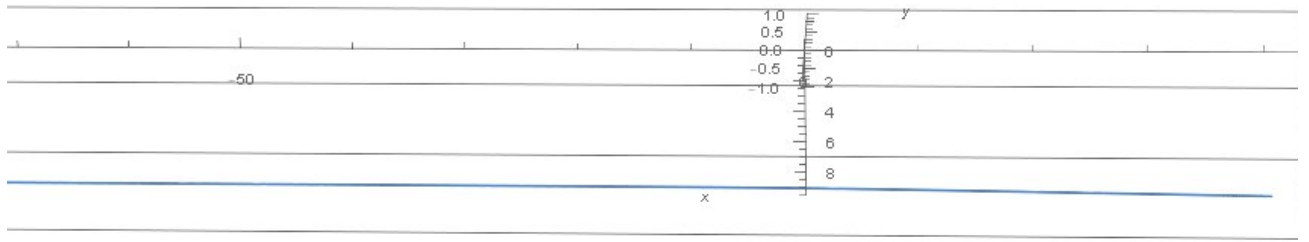


Рис. 1 – Траектория материальной точки.

ГЛАВА 2. ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА-ТОЧКИ

2.1 Модель тела-точки

Обозначим начало системы отсчета в отталкивающем центре. Определяющие соотношения кулоновского поля представляют собой:

$$\underline{F} = -q \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|^3}, \quad (8)$$

$$q > 0$$

где \underline{R} – вектор расстояния от начала координат до точки, где находится материальная точка, q – константа кулоновского взаимодействия.

Для анализа кинетического момента выберем опорную точку Q , которая совпадает с центром системы отсчета. Подставив в уравнения, получим:

$$\underline{\dot{K}}_1 = -q \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|^3}, \quad (9)$$

$$\underline{\dot{R}} \times \underline{K}_1 + \underline{\dot{K}}_2 = 0, \quad (10)$$

Используя наши уравнения, получим замкнутую систему уравнений движения, которую исследуем численно:

$$\underline{\dot{R}} = \frac{1}{mj - b^2} (j\underline{K}_1 - b\underline{K}_2), \quad (11)$$

$$\underline{\dot{K}}_1 = -q \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|^3}, \quad (12)$$

$$\underline{\dot{K}}_2 = -\frac{b}{mj - b^2} \underline{K}_1 \times \underline{K}_2, \quad (13)$$

Начальные условия в общем случае:

$$R|_{t=0} = R_0, \quad (14)$$

$$K_1|_{t=0} = K_1^{(0)}, \quad (15)$$

$$K_2|_{t=0} = K_2^{(0)}, \quad (16)$$

Траектория свободной тело-точки, представленная в работе [1] П.А. Жилина, является винтовой линией. В исследуемом случае тело-точка имеет кинетическую энергию вида:

$$K = \frac{1}{2}mv \cdot v + bv \cdot \omega + \frac{1}{2}j\omega \cdot \omega, \quad (17)$$

Подставим (17) в (4), (5), количество движения и собственный кинетический момент тела-точки будут иметь вид:

$$K_1 = mv + b\omega, \quad (18)$$

$$K_2 = bv + j\omega, \quad (19)$$

На Рис.2, Рис.3, Рис.4 изображены траектории тела-точки, которые были выведены численным методом для разных переменных m , b , j , q и разных начальных условий (14), (15), (16). Исходя из результатов численного решения, можно заметить, что общая траектория при центральном поле с кулоновским потенциалом имеет три измерения.

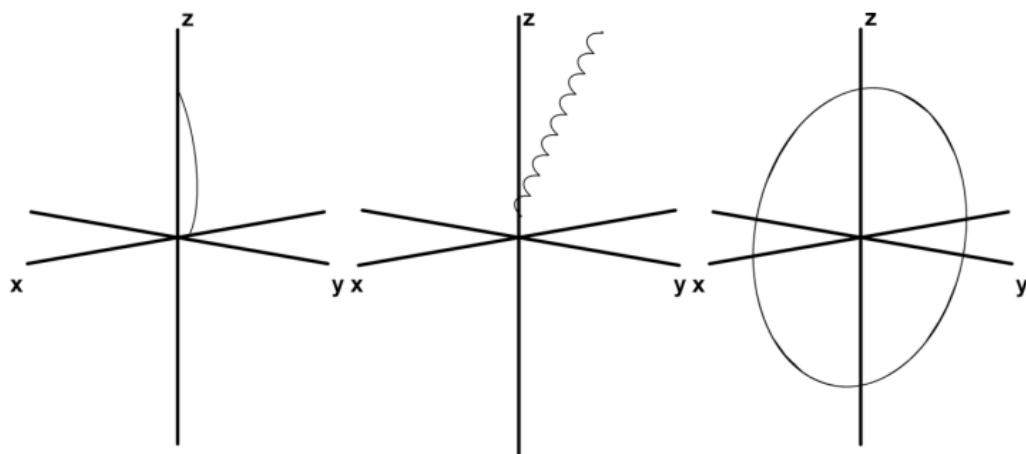


Рис. 2 – “Вырожденные” траектории.

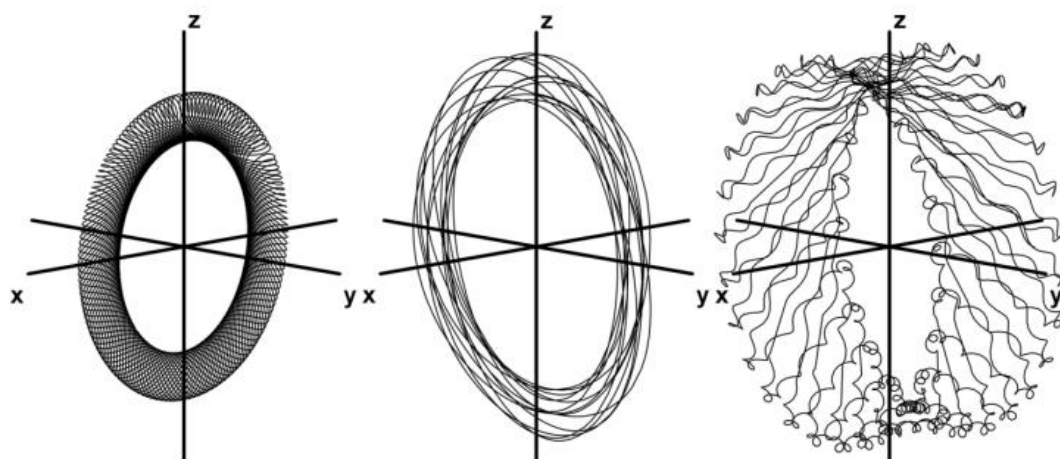


Рис. 3 – “Периодические” траектории.

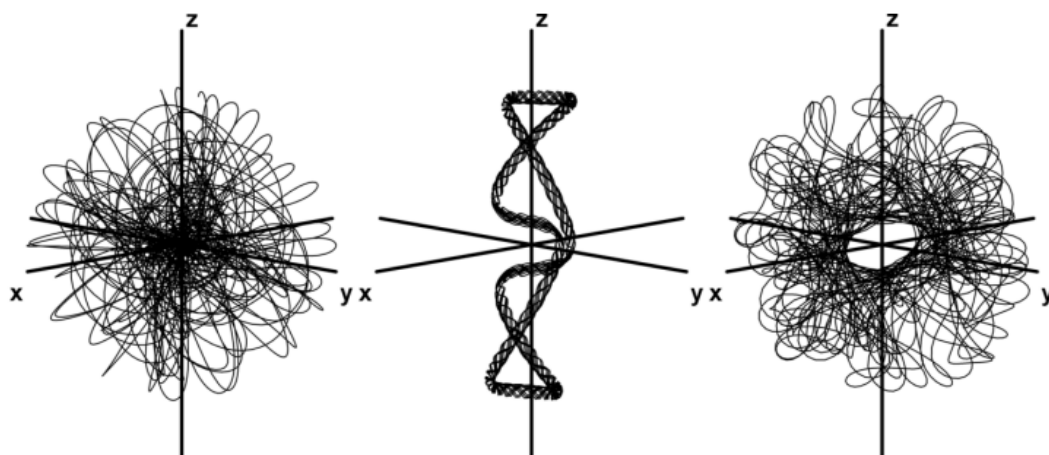


Рис. 4 – “Произвольные” траектории.

2.2 Постановка задачи

В данном параграфе будет рассматриваться два случая:

1. Притягивающий центр;
2. Отталкивающий центр

т.е. рассмотрим когда $\underline{K}_1 = -\frac{q}{R^3}\underline{R}$ и $\underline{K}_1 = \frac{q}{R^3}\underline{R}$.

Для этого преобразуем нашу систему уравнений к удобному виду для численного интегрирования. Разложим наши уравнения на x, y, z

Выразим $\dot{K}_{1x}, \dot{K}_{2x}, \dot{R}_x$:

$$\dot{K}_{1x} = -q \frac{R_x}{\left(\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\right)^3}$$

$$\dot{R}_x = \frac{1}{mj - b^2} (jK_{1x} - bK_{2x})$$

Для слагаемого K_2 распишем векторное умножение:

$$\begin{aligned} \underline{K}_1 \times \underline{K}_2 &= (K_{1x}\underline{i} + K_{1y}\underline{j} + K_{1z}\underline{k}) \times (K_{2x}\underline{i} + \\ &+ K_{2y}\underline{j} + K_{2z}\underline{k}) = K_{1x} (K_{2y}\underline{k} - K_{2z}\underline{j}) + \\ &+ K_{1y} (-K_{2x}\underline{k} + K_{2z}\underline{i}) + K_{1z} (K_{2x}\underline{j} - K_{2y}\underline{i}) = \\ &= (K_{1y}K_{2z} - K_{1z}K_{2y})\underline{i} + (-K_{1x}K_{2z} + K_{1z}K_{2x})\underline{j} + \\ &+ (K_{1x}K_{2y} - K_{1y}K_{2x})\underline{k} \end{aligned}$$

Получим:

$$\dot{K}_{2x} = -\frac{b}{mj - b^2} (K_{1y}K_{2z} - K_{1z}K_{2y})$$

Аналогично проведем расчеты для оставшихся слагаемых и получим систему из 9 скалярных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{K}_{1x} = -q \frac{R_x}{\left(\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\right)^3} \\ \dot{K}_{1y} = -q \frac{R_y}{\left(\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\right)^3} \\ \dot{K}_{1z} = -q \frac{R_z}{\left(\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\right)^3} \\ \dot{K}_{2x} = -\frac{b}{mj - b^2} (K_{1y}K_{2z} - K_{1z}K_{2y}), \\ \dot{K}_{2y} = -\frac{b}{mj - b^2} (K_{1z}K_{2x} - K_{1x}K_{2z}) \\ \dot{K}_{2z} = -\frac{b}{mj - b^2} (K_{1x}K_{2y} - K_{1y}K_{2x}) \\ \dot{R}_x = \frac{1}{mj - b^2} (jK_{1x} - bK_{2x}) \\ \dot{R}_y = \frac{1}{mj - b^2} (jK_{1y} - bK_{2y}) \\ \dot{R}_z = \frac{1}{mj - b^2} (jK_{1z} - bK_{2z}) \end{array} \right. \quad (20)$$

начальные условия:

$$\bar{K}_1(0) = K_1 \underline{k}, \quad (21)$$

$$\bar{K}_2(0) = -K_y \underline{j} + K_z \underline{k}, \quad (22)$$

$$\bar{R}(0) = \left(d - \frac{K_y}{K_1}\right) \underline{i} - L \underline{k}, \quad (23)$$

дополнительные условия:

$$K_1 > 0, \quad d > 0, \quad L > 0$$

$$d \gg \frac{K_y}{K_1}, \quad L \gg d$$

Начальные условия можно вывести на график, для большего понимания.

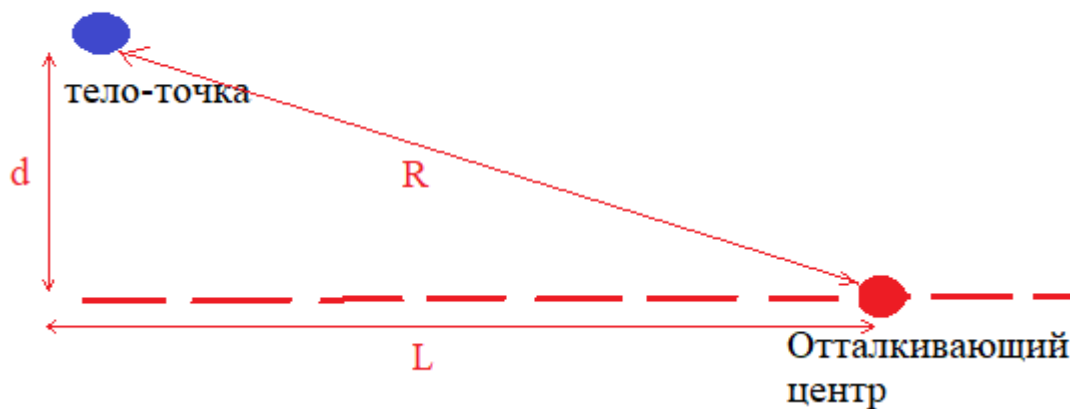


Рис. 5 – Начальные условия

Выведем траекторию тела-точки в K_1, K_2, R

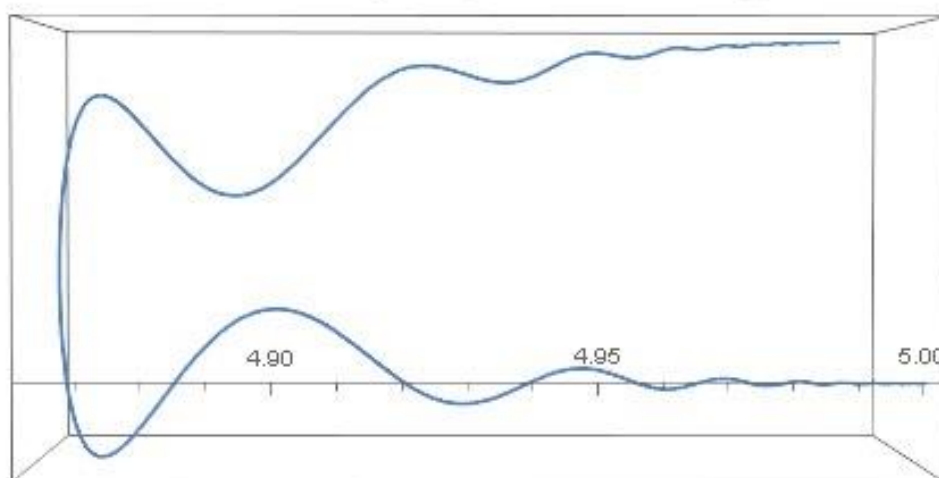


Рис. 6 – График в K_1 .

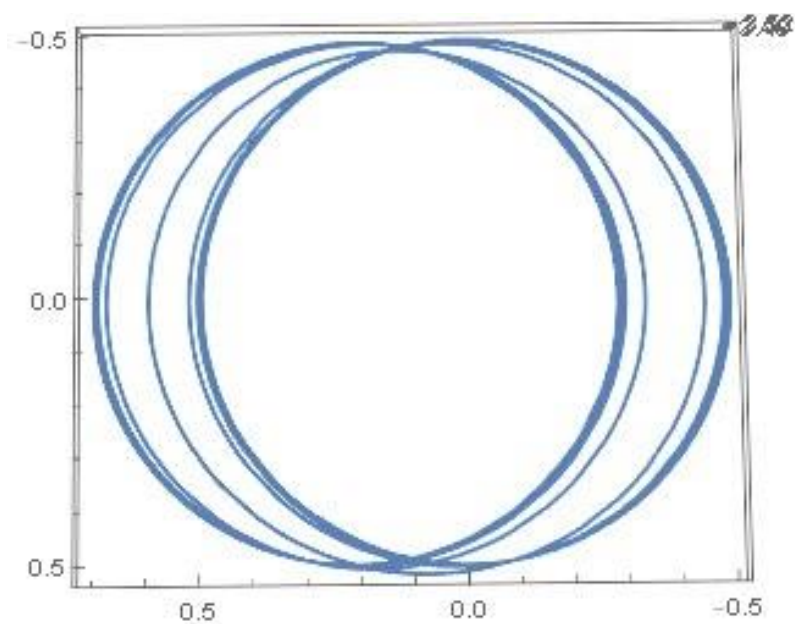


Рис. 7 – График в K_2 .

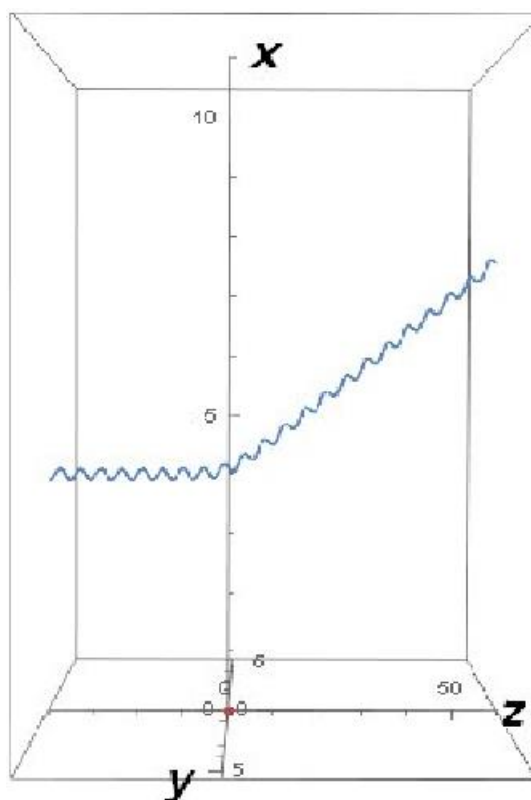


Рис. 8 – Траектория тела-точки и отталкивающего центра.

Для большего понимания и наглядности, выведем изображения проекций на осях.

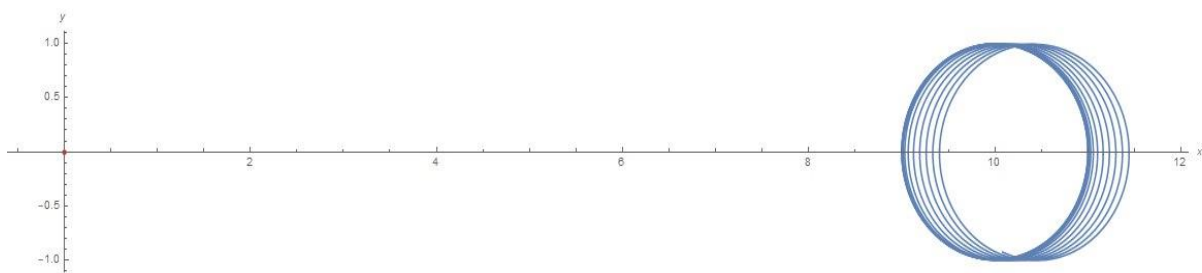


Рис. 9 – Проекция осей x, y .

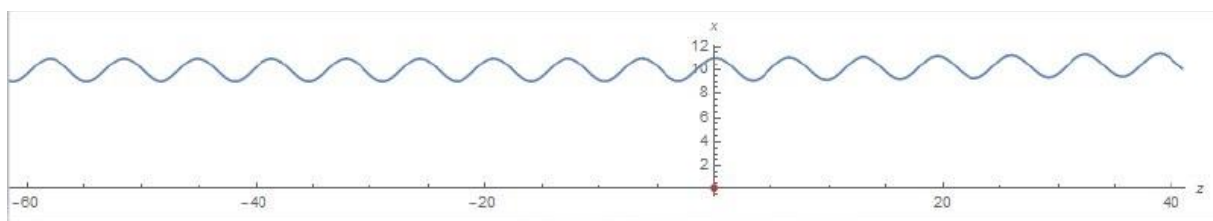


Рис. 10 – Проекция осей z, x .

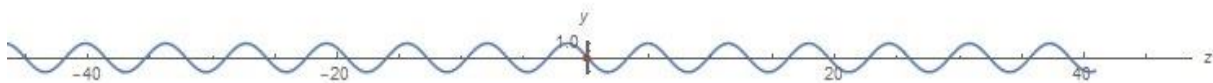


Рис. 11 – Проекция осей z, y .

Аналогично рассмотрим притягивающий центр. Наша система примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{K}_{1x} = q \frac{R_x}{\left(\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\right)^3} \\ \dot{K}_{1y} = q \frac{R_y}{\left(\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\right)^3} \\ \dot{K}_{1z} = q \frac{R_z}{\left(\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}\right)^3} \\ \dot{K}_{2x} = -\frac{b}{mj - b^2} (K_{1y}K_{2z} - K_{1z}K_{2y}), \\ \dot{K}_{2y} = -\frac{b}{mj - b^2} (K_{1z}K_{2x} - K_{1x}K_{2z}) \\ \dot{K}_{2z} = -\frac{b}{mj - b^2} (K_{1x}K_{2y} - K_{1y}K_{2x}) \\ \dot{R}_x = \frac{1}{mj - b^2} (jK_{1x} - bK_{2x}) \\ \dot{R}_y = \frac{1}{mj - b^2} (jK_{1y} - bK_{2y}) \\ \dot{R}_z = \frac{1}{mj - b^2} (jK_{1z} - bK_{2z}) \end{array} \right. \quad (24)$$

Траектория тела-точки:

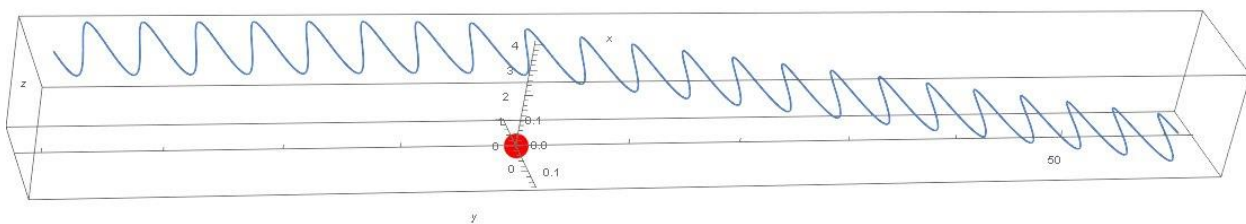


Рис. 12 – Траектория тела-точки и притягивающего центра.

На Рис.4 представлен пример численного расчета для набора значений параметров $m = 1$, $j = 1$, $b = 0.7$, $q = -3$, $K_1 = 5$, $K_y = 0.5$, $K_z = 3.5$, $d = 4$, $L = 10 \cdot d$.

На Рис.8 набор значений остался прежним, только заменили $q = 3$.

2.3 Численное решение

Численное решение было проведено в математическом пакете «Wolfram Mathematica 11.2», который позволяет использовать различные численные методы, изучающие приближенные способы решения похожих математических задач, которые либо не решаются, либо которые трудно решить аналитическими методами. Примерами таких задач являются численное решение уравнений, численные дифференцирование и интегрирование и др.

Во многих случаях аналитические методы называют точными, а численные – приближенными. Приведенные примеры показывают, что и аналитические методы могут приводить к приближенному результату. Кроме того, аналитические методы часто бывают приближенными, по существу, оставаясь аналитическими, например, когда функция заменяется первыми слагаемыми ее ряда Тейлора.

В настоящей работе, был использован метод Рунге-Кутты 1-го порядка, по-другому его называют метод Эйлера. Метод Рунге-Кутты один из самых знаменитых методов. Хотя он и считается сравнительно грубым методом решения дифференциальных уравнений. Тем не менее, принципы, которые в нем заложены, являются, по существу, исходными для большинства численных методов.

Рассмотрим математическое описание метода.

Требуется найти приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y)$$

Зададим начальные условия:

$$y(x_0) = y_0$$

В окрестности точки x_0 функцию $y(x)$ разложим в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}y''(x_0) + \dots$$

его в свою очередь можно применить для приближенного определения нашей функции $y(x)$. В точке $x_0 + h$ при малых значениях h вправо ограничимся двумя членами ряда, тогда:

$$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)\Delta x + O(h^2)$$

Представим метод Эйлера в виде последовательного применения формул:

$$x_1 = x_0 + h, y_1 = y_0 + hy'_0 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

$$x_2 = x_1 + h, y_2 = y_1 + hy'_1 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

$$x_{i+1} = x_i + h, y_{i+1} = y_i + hy'_i = y_i + hf(x_i, y_i),$$

В результате, формула Эйлера для общего случая примет вид:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), x_{i+1} = x_i + h$$

Название «метод ломаных» связано с его геометрической интерпретацией. Искомая функция заменяется ломаной линией, представляющей собой отрезки касательных к этой функции в узлах.

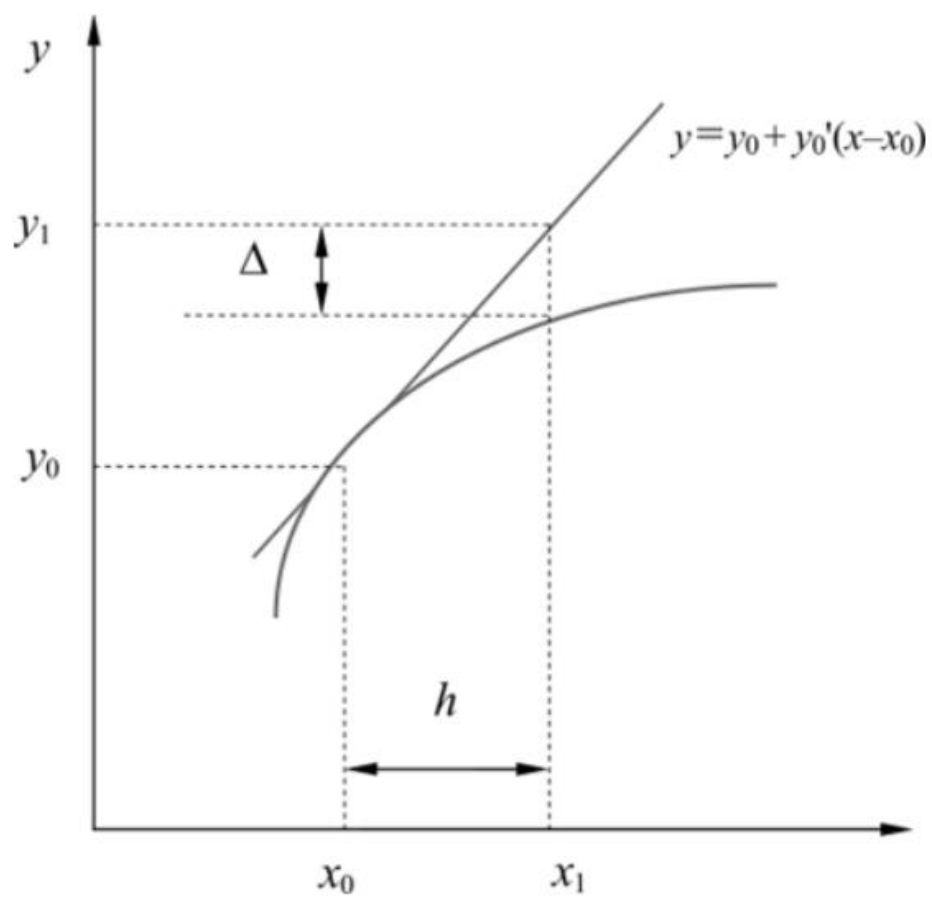


Рис. 13 – Интегральная кривая.

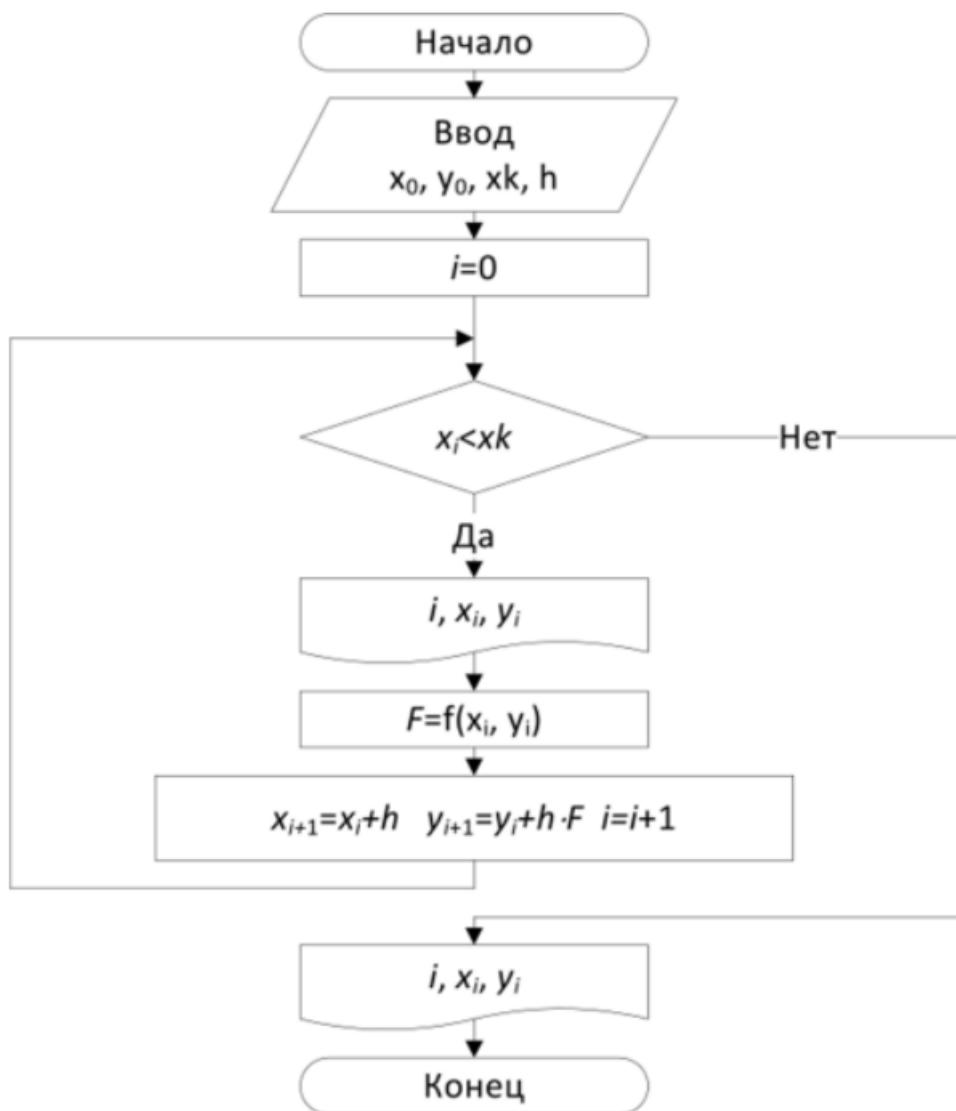


Рис. 14 – Блок схема метода Эйлера

ГЛАВА 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Для системы уравнений (6) взяли 3 частных решения, для нахождения массы и скорости материальной точки:

1. $M=m$

$$\underline{V}(0) = V_z(0)\underline{k}$$

2. $M=m$

$$\underline{V}(0) = \frac{1}{M} \underline{K}_1(0)$$

3. $\frac{1}{2} M \underline{V}(0) = \underline{K}_1(0)$

Для случая 2 дополнительно сделаем расчет, задав массу $M = m - \frac{b^2}{j}$.

В представленной главе выполняется построение решения в этих частных случаях. Для первого частного случая будем задавать скорость только по оси z . Для второго частного случая задаем скорость материальной точки по начальному условию. В третьем частном случае кинетическая энергия тела-точки будет равно кинетической энергии материальной точки.

3.1 Частный случай: скорость по оси z .

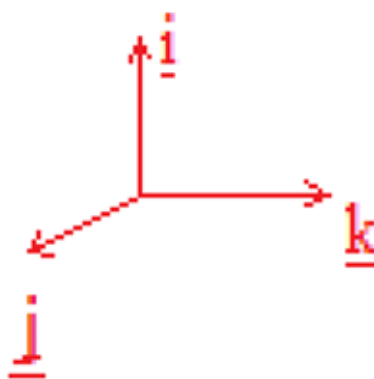


Рис. 15 – Система координат.

На Рис.13 представлена система координат, благодаря которой мы понимаем, что наше движение идет по \underline{k} .

Начальные условия, которые были представлены для точки-тела:

$$\bar{K}_1(0) = K_1 \bar{k}, \quad (25)$$

$$\bar{K}_2(0) = -K_y \bar{j} + K_z \bar{k}, \quad (26)$$

$$\bar{R}(0) = \left(d - \frac{K_y}{K_1} \right) \bar{i} - L \bar{k}, \quad (27)$$

Количество движения и собственный кинетический момент тела-точки будут иметь вид:

$$K_1 = mv + b\omega, \quad (28)$$

$$K_2 = bv + j\omega, \quad (29)$$

Из уравнений (28), (29) найдем скорость и угловую скорость, получится:

$$\underline{v}(0) = \frac{bK_y - jK_1}{b^2 - mj} \underline{k} - \frac{bK_z}{b^2 - mj} \underline{j} \quad (30)$$

$$\underline{\omega}(0) = \frac{bK_1 - mK_y}{b^2 - mj} \underline{k} + \frac{mK_z}{b^2 - mj} \underline{j} \quad (31)$$

Найдем скорость:

$$\underline{v} = \frac{0.7 \cdot 0.5 - 1 \cdot 5}{0.7^2 - 1} \underline{k} - \frac{0.7 \cdot 3.5}{0.7^2 - 1} \underline{j} = -\frac{0.35 - 5}{0.51} \underline{k} + \frac{2.45}{0.51} \underline{j} = 9.1 \underline{k} + 4.8 \underline{j}$$

Для тела-точки скорость будет иметь вид:

$$\underline{v} = (0, 4.8, 9.1)$$

Найдем угловую скорость:

$$\underline{\omega} = \frac{0.7 \cdot 5 - 1 \cdot 0.5}{0.7^2 - 1} \underline{k} + \frac{1 \cdot 3.5}{0.7^2 - 1} \underline{j} = -\frac{3.5 - 0.5}{0.51} \underline{k} - \frac{3.5}{0.51} \underline{j} = -5.88 \underline{k} - 6.86 \underline{j}$$

Для тела-точки:

$$\underline{\omega} = (0, -6.86, -5.88)$$

Радиус-вектор найдем из уравнения (27), подставив численные значения, получим:

$$\underline{r} = (4 - 0.1)\underline{i} - 40\underline{k} = 3.9\underline{i} - 40\underline{k}$$

Получим:

$$\underline{r} = (3.9, 0, -40)$$

Так как материальная точка движется в плоскости и у нее нет вращательных степеней свободы, для того чтобы задать ее движение, будет два уравнения:

$$\underline{v} = (0, 4.8, 9.1)$$

$$\underline{r} = (3.9, 0, -40)$$

В первом частном случае задаем скорость по оси z, значит:

$$\underline{v} = (0, 0, 9.1)$$

$$\underline{r} = (3.9, 0, -40)$$

Для построения траектории материальной точки, масса тела-точки и масса материальной точки равны, воспользуемся системой уравнений (7) и зададим начальные условия:

$$R_x(0) = 3.9, R_y(0) = 0, R_z(0) = -40, v_x(0) = 0, v_y(0) = 0, v_z(0) = 9.1$$

Выведем на график траекторию тела-точки и материальной точки:

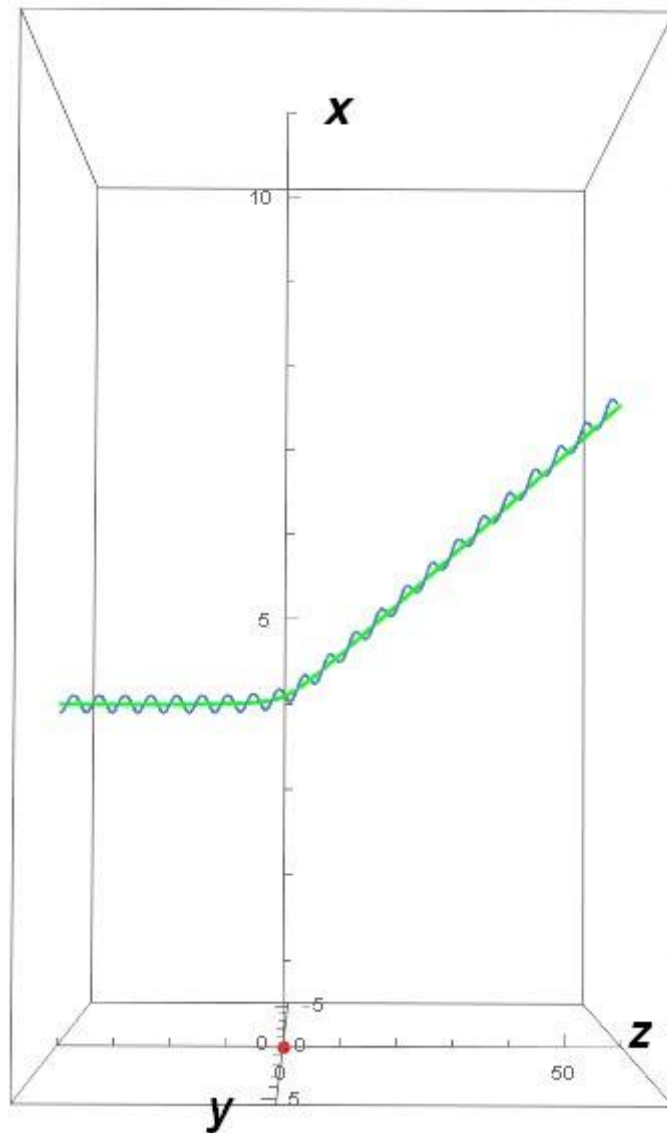


Рис. 16 – Траектории движения тела-точки и материальной точки.

3.2 Частный случай: скорость от K_1

Во втором частном случае зададим скорость материальной точки также по оси z , взяв наш численный параметр из начального условия в уравнении (25). Массы также равны, как и в первом случае.

По условию мы выбрали $K_1 = 5$, значит:

$$\underline{v} = (0, 0, 5)$$

$$\underline{r} = (3.9, 0, -40)$$

Также воспользуемся системой уравнений (7) и зададим начальные условия:

$$R_x(0) = 3.9, R_y(0) = 0, R_z(0) = -40, v_0(0) = 0, v_y(0) = 0, v_z(0) = 5$$

График будет выглядеть следующим образом:

Рис. 17 – Траектории движения тела-точки и материальной точки.

3.2.1 Дополнительный случай

В этом параграфе скорость материальной точки останется прежней, но массу будем находить по уравнению:

$$M = m - \frac{b^2}{j} \quad (32)$$

Подставив в уравнение параметры, получим:

$$M = 1 - \frac{0.7^2}{1} = 0.5$$

Подставив полученное значение, получим график:

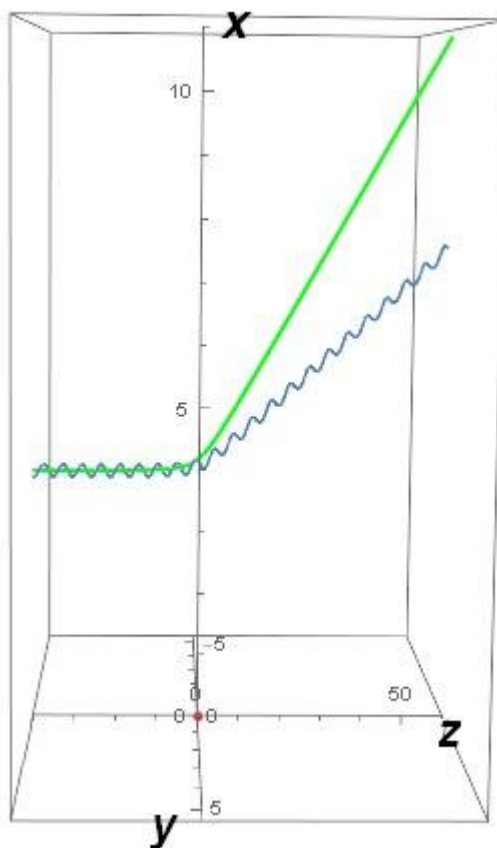


Рис. 18 – Траектории движения тела-точки и материальной точки.

3.3 Частный случай: кинетическая энергия

Кинетическая энергия тела-точки описана в уравнении (17). Выразим скорость из уравнения (28):

$$\underline{v} = \frac{K_1}{m} - \frac{b}{m} \underline{\omega} \quad (33)$$

Выразим собственный кинетический момент из уравнения (29) и подставим уравнение (33):

$$\underline{K}_2 = \frac{b}{m} \underline{K}_1 - \frac{b^2}{m} \underline{\omega} + j \underline{\omega} \quad (34)$$

Из уравнения (29) получим угловую скорость:

$$\underline{\omega} = \frac{m}{jm - b^2} \left(\underline{K}_2 - \frac{b}{m} \underline{K}_1 \right) \quad (35)$$

Уравнение (35) подставим в (33):

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \frac{\underline{K}_1}{m} - \frac{b}{jm - b^2} \left(\underline{K}_2 - \frac{b}{m} \underline{K}_1 \right) = \frac{1}{jm - b^2} \left(b \underline{K}_2 + \frac{1}{m} (jm - b^2 + b^2) \underline{K}_1 \right) = \\ &= \frac{1}{jm - b^2} (b \underline{K}_2 + j \underline{K}_1) \end{aligned} \quad (36)$$

Подставив (35), (36) в уравнение (17), получим кинетическую энергию:

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{\underline{K}_1}{m} - \frac{b}{jm - b^2} \left(\underline{K}_2 - \frac{b}{m} \underline{K}_1 \right) \right) \cdot \left(\frac{\underline{K}_1}{m} - \frac{b}{jm - b^2} \left(\underline{K}_2 - \frac{b}{m} \underline{K}_1 \right) \right) + \\ &+ b \cdot \left(\frac{\underline{K}_1}{m} - \frac{b}{jm - b^2} \left(\underline{K}_2 - \frac{b}{m} \underline{K}_1 \right) \right) \cdot \left(\frac{m}{jm - b^2} \left(\underline{K}_2 - \frac{b}{m} \underline{K}_1 \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} j \cdot \left(\frac{m}{jm - b^2} \left(\underline{K}_2 - \frac{b}{m} \underline{K}_1 \right) \right) \cdot \left(\frac{m}{jm - b^2} \left(\underline{K}_2 - \frac{b}{m} \underline{K}_1 \right) \right) \end{aligned}$$

Подставив в последнее уравнение численные значения, получится уравнение вида:

$$\underline{K} = 0.980392\underline{K}_1^2 - 1.37255\underline{K}_1\underline{K}_2 + 0.980392\underline{K}_2^2$$

Для материальной точки уравнение представлено в виде:

$$\underline{K} = \frac{1}{2} M v_0^2$$

где M – масса материальной точки, v_0 – скорость.

$$\begin{aligned} M v_0 &= \underline{K}_1(0) \\ v_0 &= \frac{\underline{K}_1(0)}{M} \\ \underline{K} &= \frac{1}{2} M \frac{\underline{K}_1^2(0)}{M^2} = \frac{1}{2} \frac{\underline{K}_1^2(0)}{M} \end{aligned}$$

Найдем массу материальной точки:

$$\frac{1}{2} \frac{\underline{K}_1^2(0)}{M} = 0.980392\underline{K}_1^2(0) - 1.37255\underline{K}_1(0)\underline{K}_2(0) + 0.980392\underline{K}_2^2(0)$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{\underline{K}_1^2(0)}{2 \cdot (0.980392\underline{K}_1^2(0) - 1.37255\underline{K}_1(0)\underline{K}_2(0) + 0.980392\underline{K}_2^2(0))} = \\ &= \frac{\underline{K}_1^2 \underline{k}}{2 \cdot (0.980392\underline{K}_1^2 \underline{k} - 1.37255 (\underline{K}_1 \underline{k} \cdot (\underline{K}_z \underline{k} - \underline{K}_y \underline{j}))) + 0.980392(\underline{K}_z \underline{k} - \underline{K}_y \underline{j})^2)} \end{aligned}$$

Выразив массу, найдем скорость материальной точки:

$$v_0 = \frac{\underline{K}_1(0)}{M}$$

Находим скорость и задаем по оси z.

$$\underline{v} = (0, 0, 10)$$

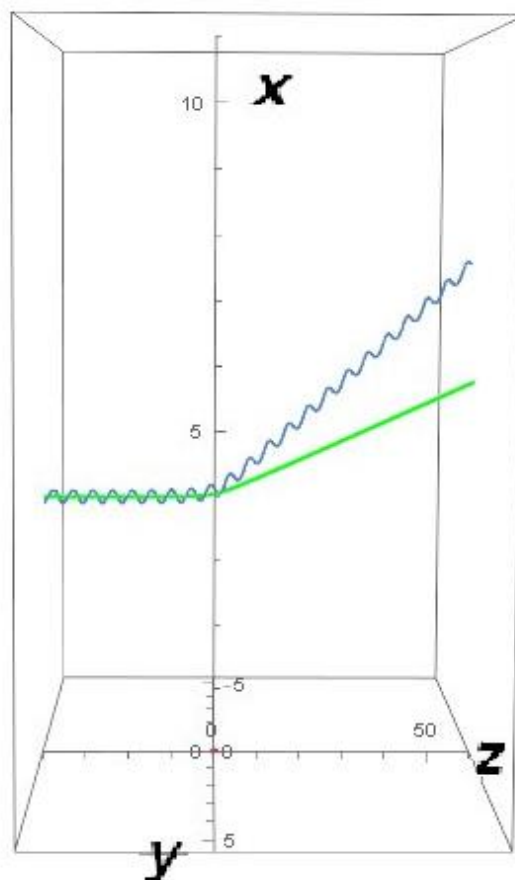


Рис. 19 – Траектория движения для третьего случая.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ

В настоящей работе было проведено численное исследование решения:

1. Меняя параметр d ;
2. Меняя параметр K_z ;
3. Меняя параметры K_1 и K_y

4.1 Параметр d

По условию параметр d напрямую зависит положение траектории на оси x , изменяя его в большую сторону, тем самым отдаляя его от отталкивающего центра, траектория движения тела-точки будет более плоская. Это можно увидеть, если поменять значение d и задать его 10 во всех наших случаях. Выведем график траектории движения для первого случая.

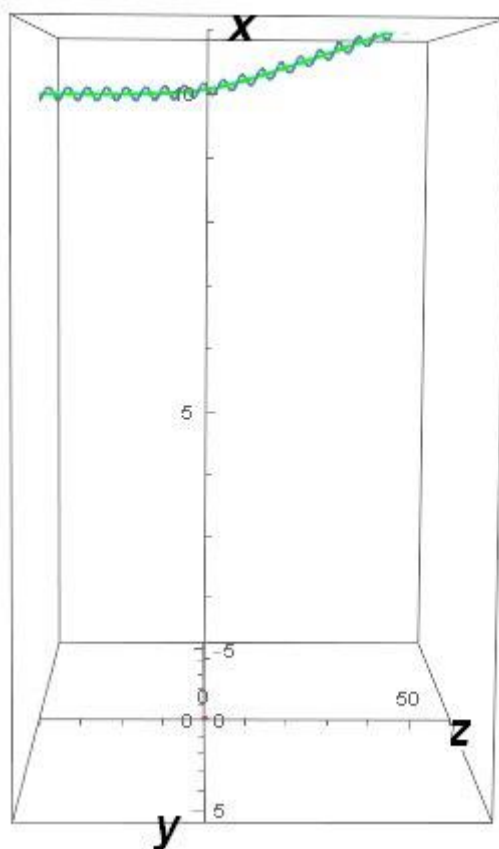


Рис. 20 – Траектория движения с измененным параметром d .

Для второго случая график будет выглядеть следующим образом:

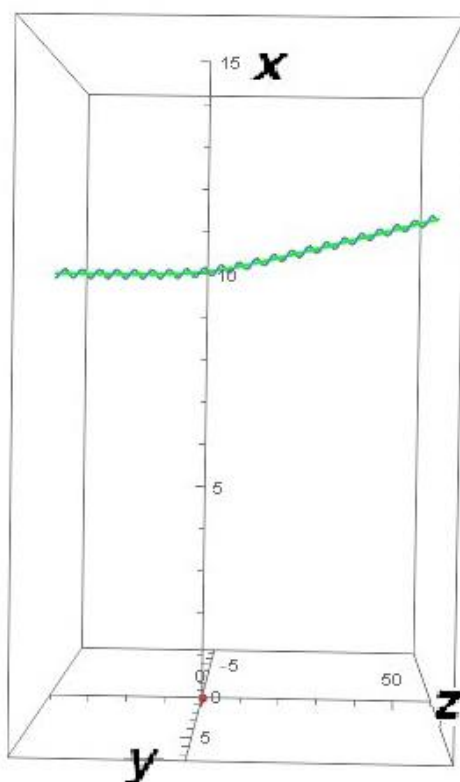


Рис. 21 – Траектория движения для второго случая.

Во втором случае дополнительно был проведен расчет для массы, которая будет найдена из уравнения (32).

График траектории представлен в следующем виде:

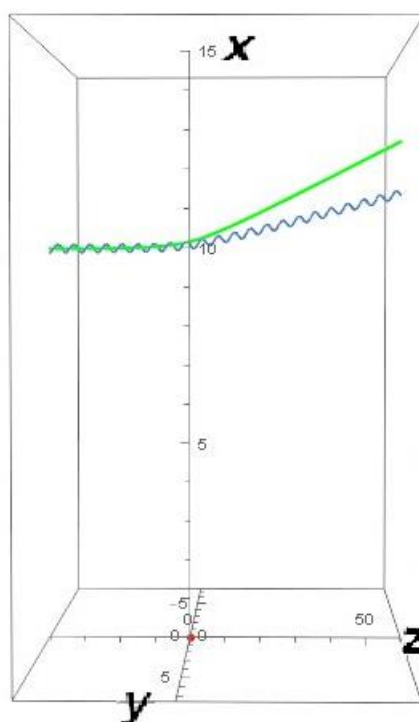


Рис. 22 – Траектория движения для дополнительного случая.

Для третьего случая скорость тело-точки стала короче, а материальной точки наоборот длиннее.

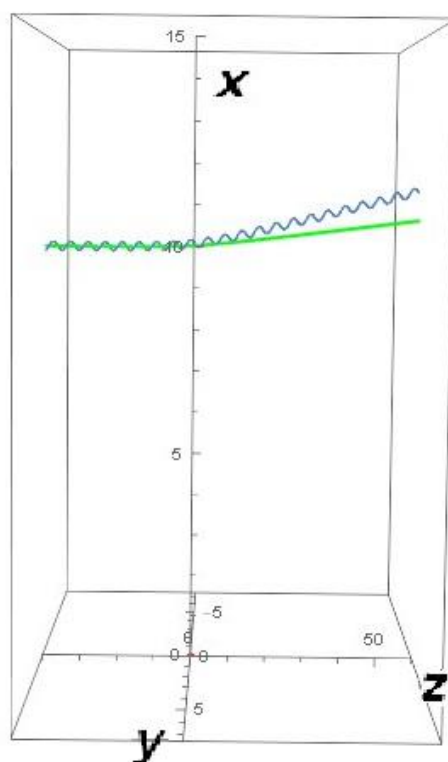


Рис. 23 – Траектория движения тела-точки для третьего случая.

На Рис. 20, Рис. 21, Рис. 22, Рис. 23 представлены графики траектории движения, которые находятся наиболее удаленно от отталкивающего центра. При увеличении параметра d на графиках видно, как изменяется траектория движения тела-точки.

4.2 Параметр K_z

Значение K_z напрямую влияет в уравнениях (30), (31). В исходной задаче $K_z = 3.5$, изменим этот параметр на $K_z = 2$. Результат полученных решений выведем для всех частных случаев.

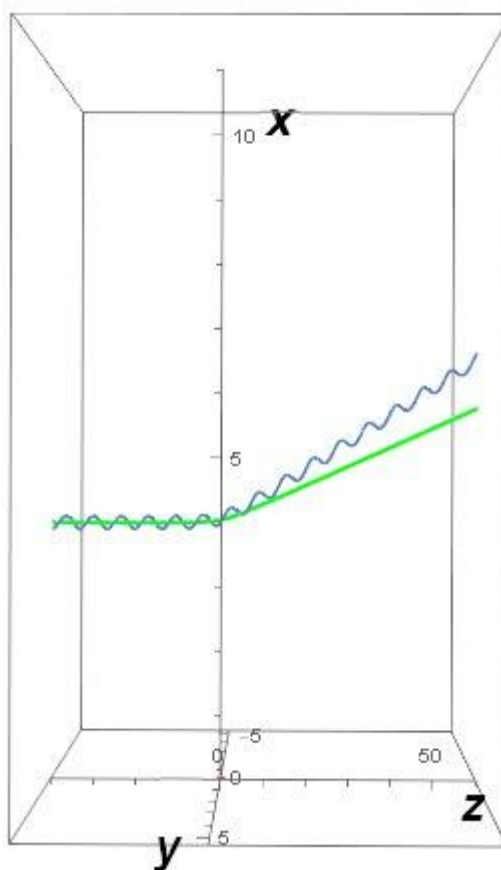


Рис. 24 – Траектория движения для первого случая.

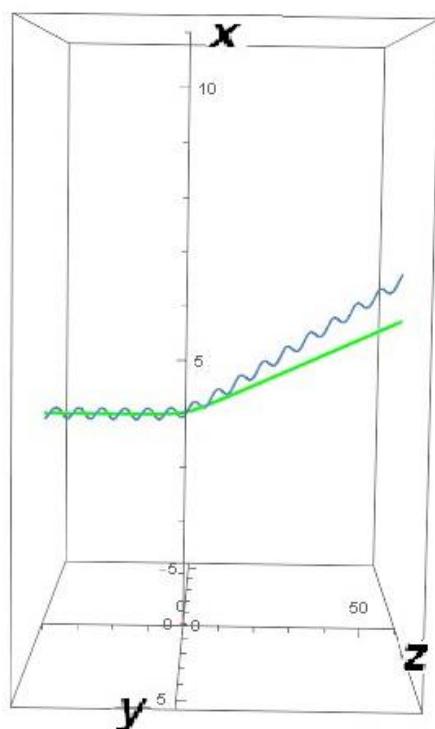


Рис. 25 – Траектория движения для второго случая.

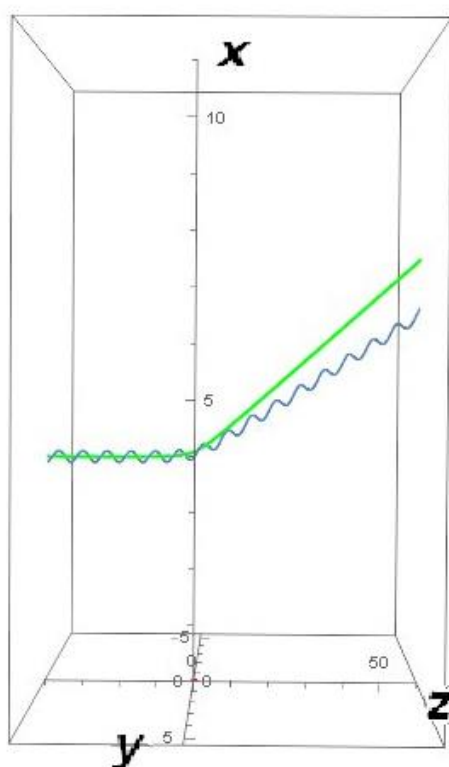


Рис. 26 – Траектория движения для дополнительного случая.

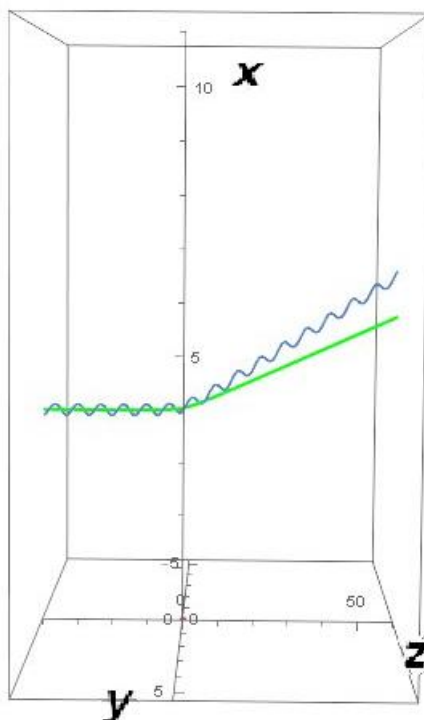


Рис. 27 – Траектория для третьего случая.

На Рис. 24, Рис. 25, Рис. 26, Рис. 27 видно, что траектории тела-точки и материальной точки сильно не совпадают.

4.3 Параметры K_1 и K_y

Для третьего случая изменять параметры нужно так, чтобы отношение K_y/K_1 оставалось неизменным. В рассматриваемой задаче $K_y = 0.5, K_1 = 5$ и соотношение $K_y/K_1 = 1/10$, изменим эти параметры $K_y = 1, K_1 = 10$.

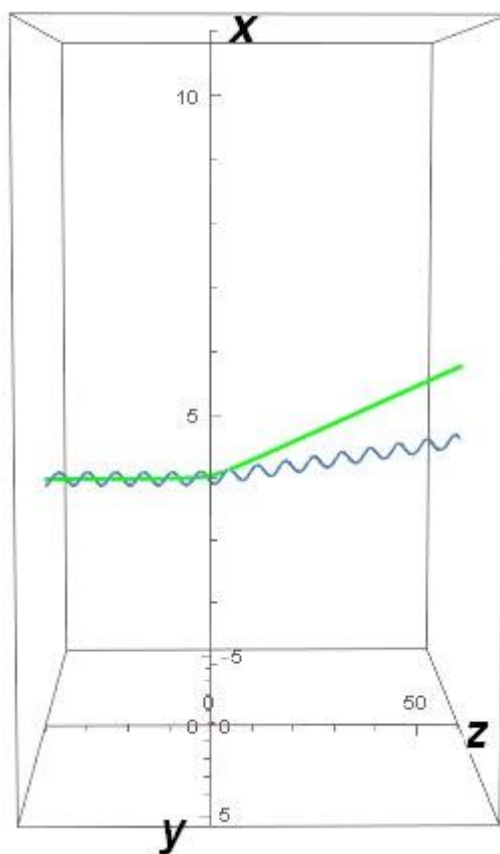


Рис. 28 – Траектория движения для первого случая.

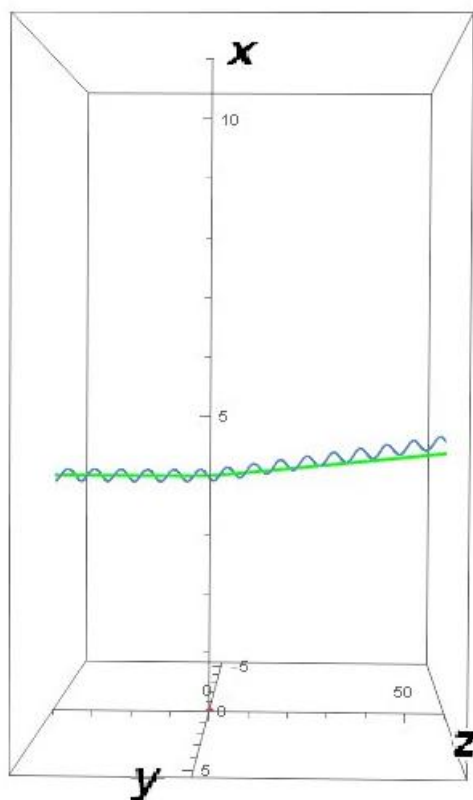


Рис. 29 – Траектория движения для второго случая.

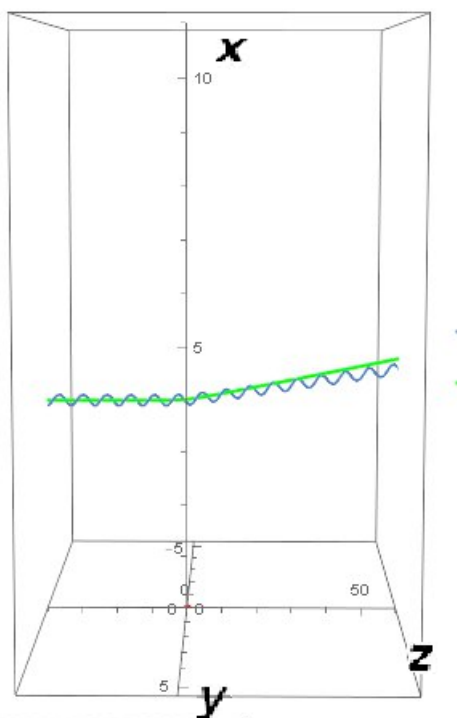


Рис. 30 – Траектории движения для дополнительного случая.

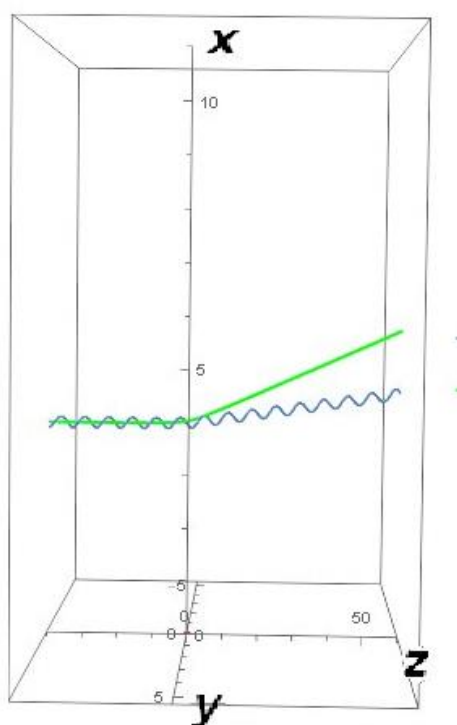


Рис. 31 – Траектория движения для третьего случая.

На графиках видно, что траектория материальной точки из начального положения со временем отклоняется от траектории тела-точки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изучали движение точечного тела рядом с центром отталкивания. Это тело определяется как объект, который занимает нулевой объем в пространстве, обладает поступательными и вращательными степенями свободы, а также имеет несколько моментов инерции. Этот объект находится в плоскости движения и его траектория описывается радиус-вектором. Если материальная точка имеет только массу, то ее движение будет простым, в то время как более сложные формы движения могут происходить при увеличении количества параметров.

В настоящей работе было проведено исследование как отталкивается тело-точка вблизи отталкивающего центра, подобрали такие численные значения, чтобы отклонение было наиболее ярко выражено. Для материальной точки выразили три случая нахождения скорости, в одном из которых еще отдельно находили массу.

Численно исследовали решения для трех частных случаев, меняя параметры, которые использовали для уравнений начальных условий. С помощью численного моделирования было найдено решение, при котором траектория тела-точки и траектория материальной точки совпали.

Также исследовали траектория движения тела-точки при изменении параметра d , который напрямую влияет на отклонение тела-точки вблизи отталкивающего центра. При изменении параметра d на графиках видно, что, чем больше расстояние от отталкивающего центра, тем меньше угол отклонения траектории тела-точки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азейрман М.А. Классическая механика. – Издание 2-е, переработанное. – М.: Найка, 1980. – 367 с.
2. Барановский В.И. Квантовая механика и квантовая химия: учебное пособие / В.И. Барановский, под ред. С.В. Макарова. – СПб.: Лань, 2019. – 428 с.
3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 630 с. – С. 363 – 375.
4. Бодовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Найка, 1984. – 364 с.
5. Демченко В.В. Метод Рунге-Кутты решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка: Учебно-методическое пособие по курсу Вычислительная математика. — М.: МФТИ, 2004. — 20 с.
6. Демидович Б.П. Численные методы анализа. 3-е изд./ Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
7. Денисов А.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учебно-методическое пособие по курсу Вычислительная механика/ А.В. Разгулин. – М.: МГУ, 2009. – 122 с.
8. Жилин П.А. Теоретическая механика: учеб. пособие. / П. А. Жилин. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. — 147 с.
9. Жилин П.А. Динамика твердого тела: учеб. пособие / П.А. Жилин. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. — 560 с
10. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. I. / Ж. Лагранж; ОНТИ. — М.; Л., 1938. — 348 с.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика/ Т. III. Квантовая механика. — М.: Наука, 1989. — 752 с.
12. Мах Э. Механика (историко–критический очерк ее развития) / Э. Мах. — СПб.: Общественная польза, 1909. — 448 с.

13. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / И. Ньютон.
// Собрание трудов А. Н. Крылова. Т. VII. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936.
— 152 с.
14. Сафронов В.П. Пособие по физике в 3-х частях. Часть третья. Оптика.
Атом. Ядро / Ростов н/Д., 2005. — 65 с.
15. Сивухин Д.В. Общий курс физики/ Т. V. Атомная и ядерная физика. Часть
1: Атомная физика.// § 13. Спектр водорода. — М.: Наука, 1986. — 416 с.
— С. 68.